

از سری کتاب‌های
هیرید

گاج



ریاضیات تجربی

جامع کنکور

مؤلف: مهندس سجاد عظمتی

پاسخ‌های واقعی
تشریحی برای
تست ۴۰۰۰

جلد ۲ دوم

ویراست دوم

۲ ۰ ۰ | دام تستی

۳ ۰ ۰ | راه حل سریع‌تر

۳ ۵ ۰ | پاسخ جمع‌بندی و مرور

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

مقدمه

پاسخنامه این کتاب تنها برای مشخص کردن گزینه صحیح طراحی نشده است؛ بلکه تلاش کرده‌ایم هر تست را به فرصتی برای یادگیری عمیق‌تر تبدیل کنیم. به همین دلیل، پاسخ تمامی سؤال‌ها به صورت کاملاً تشریحی و با زبانی ساده و روان ارائه شده است. در طول پاسخ‌ها، هر جا لازم بوده نکات و مفاهیم مهم آن مبحث یادآوری شده تا بدون نیاز به مراجعه مداوم به درسنامه، مطالب کلیدی را مرور کنید. همچنین در تست‌هایی که امکان حل سریع‌تر وجود داشته روش‌های تستی و میانبرهای کاربردی نیز آورده شده‌اند. در ضمن، با توجه به این‌که بسیاری از تست‌های کنکور سراسری دارای دام‌های آموزشی هستند، اشتباهات رایج دانش‌آموزان نیز مشخص شده‌اند تا علاوه بر یافتن پاسخ درست، از تکرار این اشتباهات در آزمون‌ها جلوگیری شود. امیدواریم این پاسخنامه، در کنار کتاب تست، همراهی مطمئن برای یادگیری مفهومی و موفقیت شما در کنکور باشد.

معرفی ویژگی‌های کتاب



دام تستی

طراح‌های کنکور برای اینکه بفهمان روی مباحث مسلطی یا نه، میان در صورت سؤال‌ها از عبارت‌هایی استفاده میکنند که تو حتی بعد از حل سؤال، گزینه غلط رو جواب بدی. در برخی موارد هم گزینه‌ها رو به گونه‌ای قرار میدن که تو رو به اشتباه بندازن! این موارد رو با آیکون **دام تستی** براتون مشخص کردیم که روی همه جنبه‌های پنهان سؤال‌ها هم مسلط بشی و روز کنکور، اشتباه نکنی.



عروش سریع‌تر

در حل برخی از سؤال‌ها، در کنار روش‌های تشریحی و تستی، میتونی از **عروش سریع‌تر** سؤال رو حل کنی. پس سعی کردیم به‌روزترین و خاص‌ترین روش‌های میانبر و سریع‌تر در حل سؤال‌ها رو برات بیان کنیم تا پاسخنامه این کتاب، نسبت به کتاب‌های مشابه، متفاوت باشه و جامع‌ترین و کامل‌ترین پاسخنامه رو ببینی.



یه جوهره دیگه! طراح‌های کنکور سراسری، خواسته‌های سؤال رو کمی عوض میکنند و در کنکورهای جدید ازش استفاده میکنند! پس در پاسخنامه کتاب، هر وقت آیکون **جدید** رو دیدی، بدون می‌خوایم تو رو با تمام ایده‌ها و زوایای مختلف اون سؤال آشنا کنیم.



هایلایت

درسنامه‌های کاربردی درسنامه‌ها و نکات مهم رو برات در پاسخنامه کتاب **هایلایت** کردیم. در درسنامه‌ها از بیان نکات بیهوده و اضافی پرهیز شده تا خوندن اون‌ها کاربردی‌تر بشه. دیدن جداول و کادر بندی‌های به جا، خوندن درسنامه‌ها رو برات لذت‌بخش میکنه.



سرنگ

تا جای ممکن، سعی کردیم فصل‌ها رو به مباحث کوچکی تقسیم بکنیم، تا بتونی با دیدن هر تست، به زوایای مختلف و تیپ‌بندی در هر مبحث پی ببری. قبل شروع هر تیپ تست، برای اینکه بدونی قراره با چه مدل تستی روبه‌رو بشی، بهت **سرنگ** دادیم. اینجوری در هر آزمون، سرنگ هر تست رو به راحتی توی ذهنت پیدا میکنی.

فهرست

۳۰۵	کاربرد مشتق	۵	تابع
۳۴۰	مجموعه، الگو و دنباله	۷۱	معادله و تابع درجه دوم
۳۶۹	توان گویا و عبارت جبری	۹۷	معادله و نامعادله
۳۸۵	هندسه پایه	۱۱۳	قدر مطلق و جزء صحیح
۴۱۳	هندسه تحلیلی	۱۲۷	تابع نمایی و لگاریتمی
۴۵۵	آمار	۱۵۶	مثلثات
۴۷۴	شمارش بدون شمردن	۲۱۲	حد و پیوستگی
۴۸۹	احتمال	۲۶۲	مشتق

۳ ۵

به بررسی نمودارها می‌پردازیم:
الف و ت) از عضو a در نمودار (الف) و از عضو b در نمودار (ت) پیکانی خارج نشده؛ پس تابع نیستند.
ب) از عضو b ، پیکان خارج شده است؛ پس تابع نیست.
پ) از هر عضو مجموعه A دقیقاً یک پیکان خارج شده است؛ پس تابع است.

۱ ۶

برای این که نمودار پیکانی داده شده، نمایانگر یک تابع باشد، باید $3m - 6 = 12 - m^2$ و $m^2 - 2m = 3m - 6$ باشد:

$$\begin{cases} m^2 - 2m = 3m - 6 \Rightarrow m^2 - 5m + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 3 \end{cases} \\ 3m - 6 = 12 - m^2 \Rightarrow m^2 + 3m - 18 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -6 \\ m = 3 \end{cases} \end{cases}$$

از اشتراک مقادیر به دست آمده، تنها مقدار $m = 3$ قابل قبول است.

۴ ۷

به بررسی موارد داده شده می‌پردازیم:
الف) چون هر عدد مثبت، دارای ۲ ریشهٔ چهارم است، پس این رابطه تابع نیست.
ب) این رابطه بیانگر یک تابع نیست، زیرا برای هر عددی، دو عدد با اختلاف ۳ واحد می‌توان نسبت داد.
پ) می‌دانیم هر عدد فرد اول، دارای ۲ مقسوم‌علیه است. پس این رابطه تابع نیست.

۳ ۸

می‌دانیم یک رابطه، زمانی یک تابع است که به ازای یک ورودی x ، تنها یک خروجی y حاصل شود، در گزینهٔ «۳» برای $x = 0$ بی‌شمار خروجی y داریم.

$$[x] + [y] = 0 \xrightarrow{x=0} [0] + [y] = 0 \Rightarrow [y] = 0 \Rightarrow 0 \leq y < 1$$

پس این رابطه تابع نیست. باقی روابط موجود در گزینه‌ها، نمایانگر یک تابع هستند.

۳ ۹

تابع از A به B ، شامل زوج مرتب‌هایی است که مؤلفه‌های اول آن‌ها، اعضای مجموعه A و مؤلفه‌های دوم آن‌ها، اعضای مجموعه B هستند. می‌توان این تابع را به صورت زیر نمایش داد:

$$\{(a, \text{○}), (b, \text{□}), (c, \text{△})\}$$

چون طبق سوال، این تابع باید حتماً شامل زوج مرتب $(c, 4)$ باشد، داریم:

$$\{(a, \text{○}), (b, \text{□}), (c, 4)\}$$

با توجه به تابع بالا، به جای مؤلفه دوم‌های ○ و □ ، هر ۴ عضو مجموعه B می‌توانند قرار بگیرند. پس در کل $4 \times 4 = 16$ تابع مختلف با این شرایط می‌توان نوشت.

فصل اول: تابع

۳ ۱

نمودار موجود در گزینهٔ «۳»، خود نمایانگر یک تابع است.

هایلایت

تابع و تشخیص آن

اگر یک رابطه به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌های (x, y) باشد، هنگامی این رابطه یک تابع محسوب می‌شود که هیچ دوزوج مرتب متمایزی، دارای مؤلفهٔ اول یکسان نباشند؛ یعنی اگر دوزوج مرتب دارای مؤلفهٔ اول یکسان باشند، آنگاه مؤلفهٔ دوم آن‌ها نیز باید یکسان باشد.

۲ ۲

برای این که رابطهٔ داده شده نمایانگر یک تابع باشد، باید در زوج مرتب‌های $(5, a - 2b)$ و $(5, a - 2b)$ مؤلفه‌های دوم با هم برابر باشند. همچنین در زوج مرتب‌های $(4, -2)$ و $(4, a + b)$ باید مؤلفه‌های دوم با هم برابر باشند.

$$\begin{cases} 4a - b = a - 2b \\ a + b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$$

بنابراین حاصل $a - b = 1 - (-3) = 4$ است.

۴ ۳

برای این که رابطهٔ f تابع نباشد، باید حالتی ایجاد کنیم که ورودی یکسان اما خروجی متفاوت باشد، یعنی:

$$k = 0 \Rightarrow f = \{(1, 4), (2, 4), (3, 5), (4, 9), (1, 4)\}$$

$$k = 1 \Rightarrow f = \{(1, 4), (2, 4), (3, 5), (4, 9), (2, 9)\}$$

$$k = 2 \Rightarrow f = \{(1, 4), (2, 4), (3, 5), (4, 9), (3, 16)\}$$

$$k = 3 \Rightarrow f = \{(1, 4), (2, 4), (3, 5), (4, 9), (4, 25)\}$$

پس مقادیر قابل قبول k برای این که f تابع نباشد، برابر است با:

$$k = \{1, 2, 3\} \Rightarrow k \text{ مجموع مقادیر } k = 6$$

۱ ۴

برای این که رابطهٔ داده شده نمایانگر یک تابع باشد، باید در زوج مرتب‌های $(7, -2n)$ و $(7, 1 - 3n^2)$ مؤلفه‌های دوم با هم برابر باشند:

$$1 - 3n^2 = -2n \Rightarrow 3n^2 - 2n - 1 = 0 \Rightarrow (n - 1)(3n + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ n = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

اکنون با جای‌گذاری $n = 1$ و $n = -\frac{1}{3}$ ، رابطهٔ f را بازنویسی می‌کنیم:

$$n = 1: f = \{(7, -2), (1, -1), (2, 1), (1, 2)\} \quad \times$$

$$n = -\frac{1}{3}: f = \{(7, \frac{2}{3}), (1, -1), (2, -\frac{1}{3}), (-3, 2)\} \quad \checkmark$$

بنابراین تنها به ازای $n = -\frac{1}{3}$ رابطهٔ f نمایانگر یک تابع است و حاصل $f(2)$ برابر $-\frac{1}{3}$ است.



۱۰ ۲

چون با توجه به صورت سؤال، رابطه داده شده یک تابع می باشد و $x = 1$ عضو دامنه هر دو ضابطه می باشد، باید مقدار هر دو ضابطه به ازای $x = 1$ با هم برابر باشد:

$$f(1) = 1 \Rightarrow m + n = 1$$

$$f(1) = 1 \Rightarrow \frac{3}{2m - n - 1} = 1 \Rightarrow 2m - n - 1 = 3$$

از حل دو معادله بالا، داریم:

$$\begin{cases} m + n = 1 \\ 2m - n = 4 \end{cases} \Rightarrow 3m = 5 \Rightarrow m = \frac{5}{3}$$

۱۱ ۲

به ازای $x = 1$ ، مقدار تابع از ضابطه بالا و ضابطه پایین باید برابر باشد:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 3} + 2a & ; |x| \leq 1 \\ ax^2 + 5 & ; |x| \geq 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x=1} \sqrt{4} + 2a = a + 5 \Rightarrow a = 3$$

حالا برای پیدا کردن $f(3)$ سراغ ضابطه پایینی می رویم:

$$f(3) = 3 \times 3^2 + 5 = 32$$

۱۲ ۱

برای این که رابطه داده شده نمایانگر یک تابع باشد، باید مقدار ضابطه های $ax + b$ و $bx^2 + a$ در نقطه $x = 2$ با هم برابر باشند. همچنین مقدار ضابطه های $bx^2 + a$ و $(a - b)x + 8$ نیز باید در $x = 3$ با هم برابر باشند:

$$\begin{cases} a(2) + b = b(2)^2 + a \\ b(3)^2 + a = (a - b)(3) + 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 4b + a \\ 9b + a = 3a - 3b + 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = \frac{4}{3} \end{cases}$$

بنابراین حاصل $a + b$ برابر است با:

$$a + b = 4 + \frac{4}{3} = \frac{12 + 4}{3} = \frac{16}{3}$$

۱۳ ۱

چون رابطه داده شده یک تابع است؛ پس باید مؤلفه دوم زوج مرتب های $(3, m^2)$ ، $(3, m + 2)$ و همچنین $(2, 5)$ ، $(2, a + b)$ برابر باشند:

$$\begin{cases} m^2 = m + 2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow m = -1, m = 2 \\ 5 = a + b \end{cases}$$

اگر $m = 2$ باشد، شرط تابع بودن رابطه برقرار نمی باشد پس $m = -1$ قابل قبول است.

از طرفی a, b, m سه جمله متوالی دنباله حسابی هستند پس شرط تشکیل دنباله حسابی را می نویسیم:

$$\text{جمله سوم} = \frac{\text{جمله اول} + \text{جمله دوم}}{2} \Rightarrow a = \frac{m + b}{2}$$

$$\Rightarrow 2a = m + b \xrightarrow{m=-1} 2a - b = -1$$

با حل دستگاه بین دو معادله شامل a و b مقادیر آن ها نیز معین می گردد.

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ 2a - b = -1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{4}{3}, b = \frac{11}{3}$$

پس $a - b + m$ برابر $\frac{-1}{3}$ می باشد.

۱۴ ۱

ابتدا باید اعضای مجموعه f را پیدا کنیم. x و y هر دو عددی صحیح هستند. برای آن که x عددی صحیح باشد، باید مخرج عبارت

$$x = \frac{30}{1 + |y|}$$

$$1 + |y| = 30 \Rightarrow x = 1, y = \pm 29 \Rightarrow (1, 29), (1, -29) \in f$$

$$1 + |y| = 15 \Rightarrow x = 2, y = \pm 14 \Rightarrow (2, 14), (2, -14) \in f$$

$$1 + |y| = 10 \Rightarrow x = 3, y = \pm 9 \Rightarrow (3, 9), (3, -9) \in f$$

$$1 + |y| = 6 \Rightarrow x = 5, y = \pm 5 \Rightarrow (5, 5), (5, -5) \in f$$

$$1 + |y| = 5 \Rightarrow x = 6, y = \pm 4 \Rightarrow (6, 4), (6, -4) \in f$$

$$1 + |y| = 3 \Rightarrow x = 10, y = \pm 2 \Rightarrow (10, 2), (10, -2) \in f$$

$$1 + |y| = 2 \Rightarrow x = 15, y = \pm 1 \Rightarrow (15, 1), (15, -1) \in f$$

$$1 + |y| = 1 \Rightarrow x = 30, y = 0 \Rightarrow (30, 0) \in f$$

پس مجموعه f به شکل زیر خواهد بود:

$$f = \{(1, 29), (1, -29), (2, 14), (2, -14), (3, 9), (3, -9), (5, 5), (5, -5), (6, 4), (6, -4), (10, 2), (10, -2), (15, 1), (15, -1), (30, 0)\}$$

حالا برای آن که مجموعه f یک تابع باشد، باید از بین هر دو عضوی که دامنه یکسان دارند، حداقل یکی را حذف کنیم. پس حداقل باید ۷ عضو را حذف کنیم.

۱۵ ۴

برای پیدا کردن $f(5)$ باید در ضابطه داده شده $x = 2$ قرار دهیم:

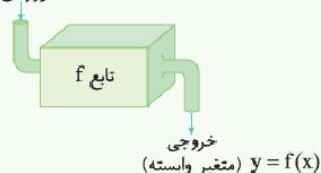
$$f(x + 3) = 3x + 14 \xrightarrow{x=2} f(5) = 20$$

هواپلاست

مقدار تابع

می توانیم تابع را مانند ماشینی در نظر بگیریم که یک ورودی را دریافت می کند و به ازای آن یک خروجی تحویل می دهد [هر چند ممکن است چند ورودی دارای خروجی های یکسان باشند].

x (متغیر مستقل)
ورودی



منظور از $f(a)$ ، مقدار تابع f در نقطه $x = a$ است. بنابراین برای محاسبه مقدار تابع در $x = a$ ، باید در ضابطه تابع x را برداریم و به جای آن a قرار دهیم.

اگر نمودار تابع f موجود باشد، $f(a)$ نشان دهنده عرض نقطه ای روی نمودار تابع f با طول $x = a$ است.

۱۶ ۲

در ضابطه داده شده، به جای x ، صفر قرار می دهیم:

$$2f(x + 4) = f(4) + x^2 + 5(x + 1) + 2 \xrightarrow{x=0} 2f(4) = f(4) + 7 \Rightarrow f(4) = 7$$

۳۲ ۳

چون $|a| > 1$ است، برای به دست آوردن $f(2+|a|)$ از ضابطه بالایی و چون $|a| < 1$ است، برای به دست آوردن $f(1-|a|)$ از ضابطه پایینی استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f(1-|a|) &= f(2+|a|) \\ \Rightarrow 2(1-|a|) - 1 &= (2+|a|)^2 - (2+|a|) - 7 \\ \Rightarrow -2|a| + 1 &= |a|^2 + 3|a| - 5 \Rightarrow |a|^2 + 5|a| - 6 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (|a| + 6)(|a| - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |a| = -6 & \times \\ |a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \end{cases}$$

۳۳ ۴

برای پیدا کردن طول نقاط برخورد با محور x ها، باید مشخص کنیم در چه نقاطی، $f(x) = 0$ است:

$$x < 0: f(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \xrightarrow{x < 0} x = -2$$

$$0 \leq x < 3: f(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$x \geq 3: f(x) = x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 3) = 0$$

$$\xrightarrow{x \geq 3} x = 4$$

پس مجموع طول نقاط برخورد برابر $4 = 4 - 2 + 2 + 4$ است.

۳۴ ۳

با توجه به نمودار تابع f در صورت سؤال $f(-1) = -3$ و $f(2) = k$ است. پس با توجه به ضابطه تابع g داریم:

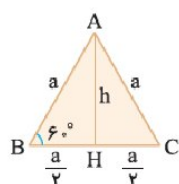
$$g(x) = \begin{cases} 1 + f(x) & ; x > 0 \\ f^2(x) & ; x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(2) = 1 + f(2) = 1 + k \\ g(-1) = f^2(-1) = 9 \end{cases}$$

حالا با توجه به رابطه $g(-1) + g(2) = 14$ داریم:

$$9 + 1 + k = 14 \Rightarrow k = 4$$

۳۵ ۳

ابتدا در مثلث قائم الزاویه AHC با کمک $\sin 60^\circ$ داریم:



$$\sin 60^\circ = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{2h}{\sqrt{3}}$$

در ضمن می‌دانیم مساحت یک مثلث

$$\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \text{ برابر ضلع } a \text{ متساوی الاضلاع به ضلع } a \text{ برابر}$$

است، پس:

$$S = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{2h}{\sqrt{3}}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{4h^2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3} h^2$$

۳۶ ۱

اگر طول مستطیل را x و عرض آن را y فرض کنیم، داریم:

$$x = y + 3 \Rightarrow y = x - 3$$

$$P = 2(x + y) = 2(x + x - 3) = 4x - 6 \Rightarrow x = \frac{P + 6}{4}$$

در ضمن مساحت مستطیل برابر $S = xy$ است، پس:

$$S = xy = x(x - 3) \Rightarrow S(P) = \left(\frac{P + 6}{4}\right)\left(\frac{P + 6}{4} - 3\right)$$

$$\Rightarrow S(P) = \left(\frac{P + 6}{4}\right)\left(\frac{P - 6}{4}\right) = \frac{P^2 - 36}{16}$$

۱۷ ۱

برای پیدا کردن $g(4)$ در تابع $g(3x + 1)$ به جای x ، ۱ قرار می‌دهیم. پس باید سراغ ضابطه پایینی برویم:

$$x < 2: g(3x + 1) = x^2 \xrightarrow{x=1} g(4) = 1^2 = 1$$

حالا برای پیدا کردن $g(10)$ در تابع $g(3x + 1)$ به جای x ، ۳ قرار می‌دهیم. پس باید سراغ ضابطه بالایی برویم:

$$x \geq 2: g(3x + 1) = x - 2 \xrightarrow{x=3} g(10) = 1$$

بنابراین $g(4) + g(10) = 2$ است.

۱۸ ۱

با اضافه و کم کردن عدد ۱ به تابع f ، آن را به صورت مکعب کامل می‌نویسیم:

$$f(x) = \underbrace{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}_{(x-1)^3} + 1 - 3\sqrt{3} \Rightarrow f(x) = (x-1)^3 + 1 - 3\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(\sqrt{3} + 1) &= (\sqrt{3} + 1 - 1)^3 + 1 - 3\sqrt{3} = (\sqrt{3})^3 + 1 - 3\sqrt{3} \\ &= 3\sqrt{3} + 1 - 3\sqrt{3} = 1 \end{aligned}$$

۱۹ ۴

با جای گذاری $x = 2$ و $x = \frac{1}{p}$ در تساوی $x = \frac{1}{p}$ داریم:

$$x = 2: f(2) + 3f\left(\frac{1}{p}\right) = -3$$

$$x = \frac{1}{p}: f\left(\frac{1}{p}\right) + 3f(2) = \frac{3}{4}$$

ضابطه پایینی را در -3 ضرب می‌کنیم و دستگاه دو معادله دو مجهولی را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(2) + 3f\left(\frac{1}{p}\right) = -3 \\ f\left(\frac{1}{p}\right) + 3f(2) = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow -8f(2) = -\frac{21}{4} \Rightarrow f(2) = \frac{21}{32}$$

۲۰ ۳

در ضابطه $(x + 2)f(x) - 3xf(x + 2) = 4x^2 - mx + 3m - 1$ یک $x = 0$ و یک بار $x = -2$ قرار می‌دهیم:

$$x = 0: 2f(0) - 0 = 3m - 1 \Rightarrow f(0) = \frac{3m - 1}{2}$$

$$x = -2: 0 + 6f(0) = 16 + 2m + 3m - 1 \Rightarrow f(0) = \frac{15 + 5m}{6}$$

حالا این دو مقدار را با هم برابر قرار می‌دهیم تا m به دست آید:

$$\frac{3m - 1}{2} = \frac{15 + 5m}{6} \Rightarrow 9m - 3 = 15 + 5m \Rightarrow 4m = 18$$

$$\Rightarrow m = \frac{9}{2} \quad \text{بنابراین} \quad f(0) = \frac{3m - 1}{2} = \frac{27}{2} - \frac{1}{2} = \frac{26}{2} = 13$$

دامتستی ممکنه عجله کنی و بزنی گزینه ۴، ولی سوال مقدار m رو

نخواست!

۲۱ ۲

با توجه به ضابطه پایینی تابع، مقدار $f(-1)$ را پیدا می‌کنیم:

$$x < 1: f(x) = x + 1 \Rightarrow f(-1) = 0$$

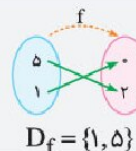
پس $f(1 + f(-1)) = f(1)$ است. با توجه به ضابطه بالایی تابع داریم:

$$x \geq 1: f(x) = 4 - f(x) \xrightarrow{x=1} f(1) = 4 - f(1)$$

$$\Rightarrow 2f(1) = 4 \Rightarrow f(1) = 2$$



مشخص کردن دامنه تابع



نمودارون (بیگانی):
مجموعه‌ای که از
اعضای آن، بیگان خارج شده

$$f = \{(1, 2), (5, 0)\} \Rightarrow D_f = \{1, 5\}$$

زوج مرتبی:
مجموعه همه مؤلفه‌های اول

هابلایت

دامنه توابع معروف

برای تعیین دامنه تابع f با داشتن ضابطه آن، به موارد زیر توجه کنید:

۱) دامنه تابع چند جمله‌ای $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ برابر $\mathbb{R}$ است.

$$f(x) = 2x^3 + 4x^2 - x - 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

۲) چون عبارت‌های کسری به ازای ریشه مخرج، تعریف نشده هستند؛ پس دامنه آن‌ها برابر است با:

$$D = \mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

۳) در رادیکال‌های با فرجه زوج، باید عبارت زیر رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد.

$$y = \sqrt{4-x} \Rightarrow 4-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4 \Rightarrow D_f = (-\infty, 4]$$

۴) چون $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ است، پس باید شرط $\cos x \neq 0$ برقرار باشد، بنابراین:

$$D = \mathbb{R} - \{x = k\pi + \frac{\pi}{2} \mid (k \in \mathbb{Z})\}$$

$$y = x + \tan x \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{x = k\pi + \frac{\pi}{2}\}$$

۵) چون $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ است، پس باید شرط $\sin x \neq 0$ برقرار باشد، بنابراین $(k \in \mathbb{Z})$:

$$D = \mathbb{R} - \{x = k\pi\}$$

$$y = 5 + 2 \cot x \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{x = k\pi\}$$

۶) در توابع لگاریتمی، باید عبارت جلوی لگاریتم مثبت و مبنای لگاریتم مثبت و مخالف یک باشد.

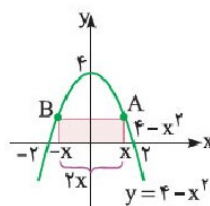
$$y = \log \begin{cases} \bullet > 0 \\ \circ > 0, \circ \neq 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y = \log_{(3-x)}(x-1) \Rightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \\ 3-x > 0 \Rightarrow x < 3 \Rightarrow D_f = (1, 2) \cup (2, 3) \\ 3-x \neq 1 \Rightarrow x \neq 2 \end{cases}$$

🔥 هنگام یافتن دامنه، نباید ضابطه تابع را ساده کنید.

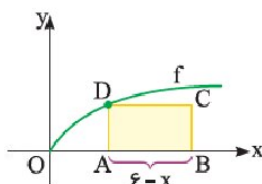
🔥 در توابع چندضابطه‌ای، دامنه تابع از اجتماع دامنه همه ضابطه‌ها به دست می‌آید.

۲۷ ۲



با توجه به شکل، نقاط $A(x, 4 - x^2)$ و $B(-x, 4 - x^2)$ دو رأس مستطیل هستند. پس یک ضلع مستطیل برابر $2x$ و یک ضلع دیگر $4 - x^2$ است. بنابراین مساحت مستطیل برابر است با:
 $f(x) = 2x(4 - x^2) = 8x - 2x^3$

۲۸ ۳



با توجه به این که طول نقطه A برابر x و طول نقطه B برابر $6-x$ است. پس $AB = 6-x$ است. در ضمن نقطه D به طول x روی تابع $f(x) = \sqrt{x}$ قرار دارد. پس $AD = \sqrt{x}$ است.

بنابراین مساحت مستطیل برابر است با:

$$S(x) = AD \times AB = \sqrt{x}(6-x) = 6\sqrt{x} - x\sqrt{x}$$

۲۹ ۱

اگر شعاع نیم دایره‌ها را x و طول مستطیل را L در نظر بگیریم از آن جایی که محیط استادیوم برابر 80π است، پس:



$$2L + 2\pi x = 80\pi$$

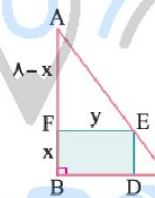
$$\Rightarrow L = 40\pi - \pi x$$

حالا مساحت استادیوم را برحسب x به دست می‌آوریم:

$$S = L(2x) + \pi x^2 = (40\pi - \pi x)(2x) + \pi x^2 = \pi x(80 - x)$$

۳۰ ۲

با توجه به قضیه تالس داریم:



$$\frac{AF}{AB} = \frac{FE}{BC} \Rightarrow \frac{8-x}{8} = \frac{y}{4}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{x}{2} + 4$$

از طرفی مساحت مستطیل BDEF برابر $S = xy$ است، پس:

$$S = xy = x(-\frac{x}{2} + 4) = -\frac{x^2}{2} + 4x$$

۳۱ ۴

چون دامنه تابع f برابر $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$ است، پس $x = -1$ و $x = 2$ ریشه‌های مخج کسر هستند:

$$\begin{cases} x = -1 : 1 - m + n = 0 \Rightarrow m - n = 1 \\ x = 2 : 4 + 2m + n = 0 \Rightarrow 2m + n = -4 \end{cases}$$

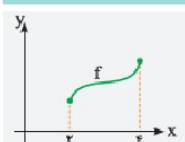
$$\Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = -2 \end{cases} \Rightarrow m + n = -3$$

هابلایت

دامنه تابع

به مجموعه ورودی‌های تابع f ، دامنه تابع f می‌گویند و آن را با D_f نشان می‌دهند.

مشخص کردن دامنه تابع



نمودار در دستگاه مختصات:
تصویر نمودار روی محور x ها $D_f = [2, 4]$

۳۶ ۲

می‌دانیم عبارت زیر رادیکال، باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد. در ضمن به مخرج کسر نیز توجه کنید:

$$\frac{6+x-x^2}{x^2-2x+1} \geq 0 \Rightarrow \frac{-(x-3)(x+2)}{(x-1)^2} \geq 0$$

x	-2	1	3
P(x)	-	+	+

دامنه این تابع به صورت بازه $(1, 3] \cup [-2, 1)$ است که شامل اعداد صحیح $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ است. مجموع این اعداد صحیح برابر با ۲ است.

۳۷ ۱

باید عبارت زیر رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد و مخرج کسرها نیز صفر نباشد:

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}} \Rightarrow \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{-2}{x(x+2)} \geq 0$$

$$\Rightarrow x(x+2) < 0 \Rightarrow -2 < x < 0$$

پس دامنه این تابع فقط شامل عدد صحیح -1 است.

۳۸ ۲

عبارت زیر هر یک از رادیکال‌های فرجه زوج را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$1) x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow D_f = [2, 8]$$

$$2) 16-2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 8$$

پس $a=2$ و $b=8$ است. حالا مجموعه جواب نامعادله $|x-8| < 2$ را پیدا می‌کنیم:

$$-2 < x-8 < 2 \Rightarrow 6 < x < 10 \xrightarrow{\text{اعداد طبیعی}} x = 7, 8, 9$$

ممکنه عبارت زیر رادیکال با فرجه ۳ رو هم نامنفی در نظر بگیریم و به گزینه ۴ برسی.

۳۹ ۲

عبارت زیر هر یک از رادیکال‌های فرجه زوج (رادیکال‌های صورت کسر) باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:

$$1) x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$$

$$2) 6-x \geq 0 \Rightarrow 6 \geq x$$

در ضمن عبارت $\frac{x+1}{x-3}$ زیر رادیکال فرجه ۳ قرار دارد که شرطی برای دامنه ایجاد نمی‌کند. حالا ریشه مخرج کسرها را پیدا می‌کنیم و از دامنه کنار می‌گذاریم:

$$1) \frac{x+1}{x-3} \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$$

$$2) x \neq 3$$

پس دامنه تابع به صورت $D_f = [-2, 6] - \{-1, 3\}$ است که مجموع عضوهای صحیح آن برابر است با:

$$(-2) + 0 + 1 + 2 + 4 + 5 + 6 = 16$$

اگر از ریشه‌های مخرج تابع غافل بشی به گزینه ۱ می‌رسی.

۳۲ ۲

ریشه‌های مخرج کسر را پیدا می‌کنیم:

$$\|x|-1|-2=0 \Rightarrow \|x|-1|=2 \Rightarrow \begin{cases} \|x|-1=2 \Rightarrow \|x|=3 \\ \|x|-1=-2 \Rightarrow \|x|=-1 \end{cases} \Rightarrow x = \pm 3$$

پس دامنه تابع f به صورت $D_f = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$ است. یعنی دو عدد صحیح -3 و 3 در دامنه تابع حضور ندارند.

۳۳ ۲

$x=b$ و $x=1$ ریشه‌های مخرج کسر هستند، پس مخرج کسر را به صورت $(x-1)(x-b)$ در نظر می‌گیریم:

$$(x-1)(x-b) = x^2 - (1+b)x + b$$

حالا این عبارت را با $x^2 - ax - 2$ مقایسه می‌کنیم. نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases} b = -2 \\ 1+b = a \Rightarrow a = -2+1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{-2}{-1} = 2$$

۳۴ ۱

برای آن‌که دامنه تابع f برابر $\mathbb{R}$ باشد، باید مخرج تابع فاقد ریشه حقیقی باشد، پس باید ضریب x مخرج برابر صفر باشد، بنابراین:

$$a^2 - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -3 \end{cases}$$

حالا چون به ازای $a=3$ مخرج تابع برابر صفر می‌شود، پس $a=-3$ قابل قبول است و داریم:

$$f(x) = \frac{-3x+4}{-12} \Rightarrow f(4) = \frac{-12+4}{-12} = \frac{2}{3}$$

۳۵ ۴

چون دامنه تابع به صورت $\mathbb{R} - \{m\}$ است، پس مخرج کسر فقط یک ریشه دارد. حالا باید دو حالت در نظر بگیریم:

حالت ۱ اگر مخرج کسر عبارتی درجه اول باشد، آن‌گاه ضریب x^2 باید صفر باشد، پس:

$$a-2=0 \Rightarrow a=2: f(x) = \frac{x^2+3}{3x+4} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-\frac{4}{3}\}$$

حالت ۲ اگر مخرج کسر عبارتی درجه دوم باشد، آن‌گاه باید مربع کامل باشد، یعنی دلتای مخرج کسر باید صفر باشد:

$$(a-2)x^2 + (a+1)x + 4 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} \Delta = (a+1)^2 - (4)(a-2)(4) = 0$$

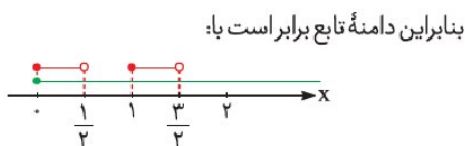
$$\Rightarrow a^2 - 14a + 33 = 0 \Rightarrow (a-3)(a-11) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 11 \\ a = 3 \end{cases}$$

حالا دامنه تابع را به ازای $a=11$ و $a=3$ تعیین می‌کنیم:

$$a=3: f(x) = \frac{x^2+3}{(x+2)^2} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$a=11: f(x) = \frac{x^2+3}{(3x+2)^2} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-\frac{2}{3}\}$$

بنابراین مجموعه مقادیر m به صورت $\{-2, -\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\}$ است که حاصل جمع آن‌ها برابر با -4 است.



$$\Rightarrow D_f = \left[-\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$$

۳ ۴۵

عبارت زیر رادیکال یک سهمی است که باید همواره نامنفی باشد، یعنی دلتای عبارت $x^2 - (m+1)x + 2 - m$ کوچکتر یا مساوی صفر است:

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow (m+1)^2 - 4(1)(2-m) \leq 0$$

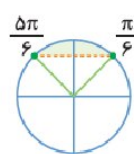
$$\Rightarrow m^2 + 6m - 7 \leq 0 \Rightarrow (m-1)(m+7) \leq 0 \Rightarrow -7 \leq m \leq 1$$

پس به ازای ۹ مقدار صحیح m دامنه تابع برابر $\mathbb{R}$ است.

دام تستی اگر حالت $\Delta = 0$ رو حساب نکنی به گزینه امیرسی.

۲ ۴۶

چون $1 - \sin x$ زیر رادیکال با فرجه ۲ قرار دارد، پس:



$$1 - \sin x \geq 0 \Rightarrow \sin x \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$$

بنابراین $D_f = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$ است.

۳ ۴۷

حاصل $[x]$ همواره عددی صحیح است. بنابراین عبارت زیر رادیکال یعنی $\sin(\pi[x])$ به صورت $\sin 0, \sin \pi, \sin 2\pi, \dots$ است که همواره برابر صفر است. بنابراین به ازای همه اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ ، عبارت زیر رادیکال برابر صفر می شود و $f(x) = 0$ است.

۳ ۴۸

چون $f(x) = 2^x$ است؛ پس $f\left(\frac{1}{x}\right) = 2^{\frac{1}{x}}$ بوده و برای تعیین دامنه

تابع $y = \sqrt{f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right)}$ داریم:

$$f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0 \Rightarrow 2^x \geq 2^{\frac{1}{x}} \Rightarrow x \geq \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 - 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x} \geq 0 \Rightarrow D_f = [-1, 0) \cup [1, +\infty)$$

حرفه سرزودتر چون $x = 2$ در تابع صدق می کند، پس گزینه های «۲» و «۴» حذف می شوند. در ضمن $x = -2$ در تابع صدق نمی کند؛ پس گزینه «۱» نیز حذف می شود.

۳ ۴۹

عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد:

$$4^x - 2^{x-1} \geq 0 \Rightarrow 2^{2x} \geq 2^{x-1} \Rightarrow 2x \geq x-1 \Rightarrow x \geq -1$$

در ضمن مخرج کسر نباید صفر باشد. به ازای $x > 0$ تابع $g(x)$ برابر ۱ است که باعث می شود مخرج کسر برابر صفر شود. پس آن را از دامنه تابع کنار می گذاریم، پس:

$$D_f = [-1, 0]$$

۲ ۴۰

عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد، پس:

$$40 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 40 \Rightarrow |x| \leq \sqrt{40} \Rightarrow -\sqrt{40} \leq x \leq \sqrt{40}$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{10} \leq x \leq 2\sqrt{10}$$

حالا باید ریشه های مخرج تابع را به دست آورده و از دامنه کنار بگذاریم:

$$|x+2| - 4 \neq 0 \Rightarrow |x+2| \neq 4 \Rightarrow \begin{cases} x+2 \neq 4 \Rightarrow x \neq 2 \\ x+2 \neq -4 \Rightarrow x \neq -6 \end{cases}$$

پس دامنه تابع برابر $\{2, -6\} - [-2\sqrt{10}, 2\sqrt{10}]$ است که شامل ۱۱ عدد صحیح می باشد.

۳ ۴۱

باید ریشه های مخرج کسر را پیدا کنیم:

$$[x] - f(x) = 0 \Rightarrow [x] = f(x)$$

حالا با توجه به محدوده x داریم:

$$x > 0: [x] = 1 \Rightarrow 1 \leq x < 2$$

$$x = 0: [x] = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x < 0: [x] = -1 \Rightarrow -1 \leq x < 0$$

پس دامنه تابع f به صورت بازه $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup [2, +\infty)$ است که شامل ۳ عدد صحیح $x = -1, 0, 1$ نیست.

۳ ۴۲

چون رادیکال در مخرج کسر قرار دارد، پس عبارت زیر رادیکال باید مثبت باشد (اما صفر نمی تواند باشد):

$$|x+2| - |x+5| > 0 \Rightarrow |x+2| > |x+5|$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2 + 4x + 4 > x^2 + 10x + 25$$

$$6x < -21 \Rightarrow x < -\frac{21}{6} \Rightarrow x < -3\frac{1}{2}$$

دامنه تابع شامل سه عدد صحیح منفی $-1, -2, -3$ نیست.

۳ ۴۳

ابتدا تابع $f(-x)$ را پیدا می کنیم:

$$f(-x) = \sqrt{-x+|x+2|} - \sqrt{-x+|x-2|}$$

برای تعیین دامنه تابع f ، باید عبارت زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار دهیم:

$$-x + |x-2| \geq 0 \Rightarrow |x-2| \geq x$$

در ضمن می دانیم مجموعه جواب نامعادله $|U| \geq a$ از حل دو نامعادله $U \geq a$ و $U \leq -a$ به دست می آید:

$$|x-2| \geq x \Rightarrow \begin{cases} x-2 \geq x \Rightarrow -2 \geq 0 \\ x-2 \leq -x \Rightarrow 2x \leq 2 \Rightarrow x \leq 1 \end{cases}$$

۳ ۴۴

به دلیل وجود $\sqrt{x}$ در صورت کسر، باید $x \geq 0$ باشد. حالا ریشه های مخرج کسر را به دست می آوریم و آن ها را کنار می گذاریم:

$$[2x-1]^2 - 1 = 0 \Rightarrow [2x-1]^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} [2x-1] = -1 \\ [2x-1] = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 \leq 2x-1 < 0 \Rightarrow 0 \leq 2x < 1 \Rightarrow 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 \leq 2x-1 < 2 \Rightarrow 2 \leq 2x < 3 \Rightarrow 1 \leq x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

حالا ریشهٔ مخرج کسر را پیدا می‌کنیم و از دامنه کنار می‌گذاریم:
 $1 - \log_3(3-x) = 0 \Rightarrow \log_3(3-x) = 1 \Rightarrow 3-x = 3 \Rightarrow x = 0$
 پس دامنهٔ تابع به صورت $(0, 3) \cup (1, 3)$ است.

عبارت جلوی لگاریتم $\log_3(x^2 - x - 2)$ باید مثبت باشد:
 $x^2 - x - 2 > 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) > 0 \Rightarrow x < -1$ یا $x > 2$
 از طرفی عبارت زیر رادیکال باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:
 $x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x \leq -1$ یا $x \geq 1$
 در ضمن مخرج کسر یعنی $\sqrt{x^2 - 1} + 1$ همواره مثبت است و فاقد ریشهٔ حقیقی است. از اشتراک بازه‌های به دست آمده، دامنهٔ تابع به صورت بازهٔ $(2, +\infty) \cup (-\infty, -1)$ است.

به اجزای مختلف تابع توجه می‌کنیم:
 (۱) به دلیل وجود $\sqrt{x}$ در صورت کسر، باید $x \geq 0$ باشد.
 (۲) به دلیل وجود $\log(x^2 - 4)$ داریم:
 $x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x^2 > 4 \Rightarrow |x| > 2 \Rightarrow x < -2$ یا $x > 2$
 (۳) مخرج کسر نیز نباید صفر باشد:
 $\sqrt[3]{|x| - 3} \neq 0 \Rightarrow |x| - 3 \neq 0 \Rightarrow |x| \neq 3 \Rightarrow x \neq \pm 3$
 بنابراین از اشتراک جواب‌های به دست آمده نتیجه می‌شود دامنهٔ تابع به صورت $(2, 3) \cup (3, +\infty)$ است.

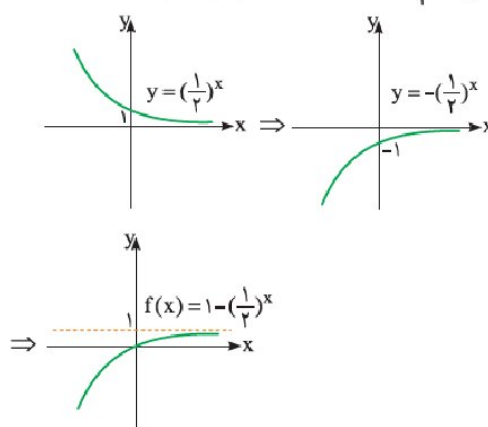
عبارت زیر رادیکال باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:
 $1) 2 - \log_3(x^2 - 8x) \geq 0 \Rightarrow \log_3(x^2 - 8x) \leq 2$
 $\Rightarrow \log_3(x^2 - 8x) \leq \log_3 9 \Rightarrow x^2 - 8x \leq 9$
 $\Rightarrow x^2 - 8x - 9 \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 9$
 در ضمن عبارت مقابل لگاریتم باید مثبت باشد، پس:
 $2) x^2 - 8x > 0 \Rightarrow x < 0$ یا $x > 8$
 حالا با اشتراک بازه‌های به دست آمده دامنهٔ تابع f برابر بازهٔ $[-1, 0) \cup (8, 9]$ است که شامل ۲ عدد صحیح است.

چون $P(x) = \frac{x}{\log_{\frac{1}{3}} x}$ زیر رادیکال با فرجهٔ زوج قرار دارد، پس باید نامنفی باشد، در ضمن با توجه به نمودار $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ داریم:

پس دامنهٔ تابع $f(x)$ بازهٔ $(0, 1)$ می‌باشد که فاقد عدد صحیح است.
 گزینهٔ ۲ را انتخاب کردی؟ درسته که $x = 0$ صورت کسر رو صفر می‌کند اما عبارت جلوی لگاریتم هم صفر می‌کنه.

۵۵ ۳

ابتدا نمودار تابع $f(x) = 1 - (\frac{1}{4})^x$ را رسم می‌کنیم:



عبارت زیر رادیکال را به صورت $x \times f(x)$ در نظر می‌گیریم و آن را تعیین علامت می‌کنیم. حال با توجه به نمودار $f(x) = 1 - (\frac{1}{4})^x$ داریم:

x	$+$	0	$-$
x	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$
$x \times f(x)$	$+$	0	$+$

پس دامنهٔ تابع برابر بازهٔ $(-\infty, +\infty)$ است.

پس دامنهٔ تابع برابر بازهٔ $(-\infty, +\infty)$ است.

۵۱ ۴

عبارت زیر رادیکال را به صورت $\frac{x}{x-2} \times f(x)$ در نظر می‌گیریم و آن را تعیین علامت می‌کنیم. با توجه به این که نمودار تابع $f(x) = 2^x - 2$ به صورت مقابل است، داریم:

$$g(x) = \sqrt{\frac{x}{x-2}} \times f(x) \Rightarrow \frac{x}{x-2} \times f(x) \geq 0$$

x	$+$	0	1	2	$+$
$\frac{x}{x-2}$	$+$	0	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$\frac{x}{x-2} \times f(x)$	$-$	0	$+$	$-$	$+$

پس دامنهٔ تابع به صورت بازهٔ $(2, +\infty) \cup [0, 1)$ می‌باشد که شامل بی‌شمار عدد طبیعی می‌باشد.

۵۲ ۲

عبارت جلوی لگاریتم باید مثبت باشد:
 $3 - x > 0 \Rightarrow x < 3$
 عبارت زیر رادیکال باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:

$$2x + 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{5}{2}$$

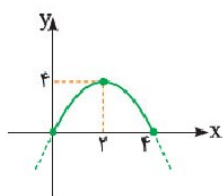


۶۱ ۲

عبارت زیر رادیکال یعنی $4x - x^2$ باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد:

$$4x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(4 - x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 4$$

حالا به منحنی $y = 4x - x^2$ در بازه $0 \leq x \leq 4$ نگاه کنید:



با توجه به این که محدوده برد $y = 4x - x^2$ در بازه $0 \leq x \leq 4$ برابر $0 \leq y \leq 4$ است،

پس $0 \leq \sqrt{4x - x^2} \leq 2$ است، بنابراین:

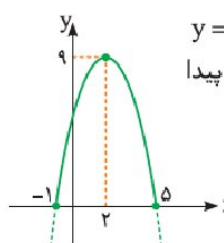
$$2 \leq 2 + \sqrt{4x - x^2} \leq 4$$

$$\Rightarrow R_f = [2, 4] \Rightarrow b - a = 2$$

۶۲ ۳

ابتدا دامنه تابع f را پیدا می‌کنیم:

$$-x^2 + 4x + 5 \geq 0 \Rightarrow -(x+1)(x-5) \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 5$$



حالا عبارت زیر رادیکال یعنی $y = -x^2 + 4x + 5$ را در دامنه $[-1, 5]$ رسم می‌کنیم و برد آن را پیدا می‌کنیم:

$$\Rightarrow \text{برد} = [0, 9]$$

حالا چون در تابع $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 5}$ عبارت درجه دوم $y = -x^2 + 4x + 5$ زیر رادیکال قرار دارد، پس برد تابع f برابر است با:

$$R_f = [0, \sqrt{9}] = [0, 3]$$

۶۳ ۳

دامنه تابع برابر $\mathbb{R} - \{0\}$ است. حالا ضابطه f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

با توجه به این که $x^2 > 0$ است، پس $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$ است و برد تابع f برابر $[2, +\infty)$ است.

هایلایت

جمع هر عبارت حقیقی با معکوسش به صورت زیر است:

$$1) x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$$

$$2) x < 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \leq -2$$

به بهره‌رنگه! برد تابع $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ کد ۴۱ است؟

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1} = \frac{1}{\frac{x^2 + 1}{x^2}} = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2}}$$

$$\frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2}} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow R_f = [0, \frac{1}{2}]$$

۶۴ ۱

ضابطه f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} = \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

چون $\sqrt{x^2 + 1} > 0$ است، پس $\sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 2$ است و برد تابع f به صورت بازه $[2, +\infty)$ است که شامل عدد طبیعی $x = 1$ نیست.

۵۷ ۴

برد تابع $y = \frac{1}{x} + 1$ برابر بازه $[\frac{5}{4}, \frac{9}{4}]$ است، پس:

$$0 \leq \frac{1}{x} + 1 \leq \frac{9}{4} \Rightarrow -1 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{5}{4} \Rightarrow -2 \leq x \leq 3$$

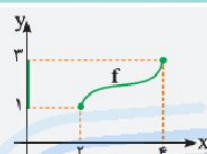
دامنه تابع شامل ۶ عدد صحیح $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3$ است.

هایلایت

برد تابع

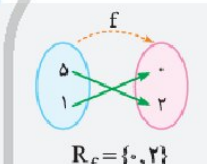
به مجموعه خروجی‌هایی که از قرار دادن عضوهای دامنه در تابع f به دست می‌آید، برد تابع f می‌گویند و آن را با R_f نشان می‌دهند.

مشخص کردن برد تابع



$$R_f = [1, 3]$$

نمودار در دستگاه مختصات: تصویر نمودار روی محور y ها



$$R_f = \{0, 2\}$$

نمودار ون (پیکانی): مجموعه‌ای که به اعضای آن پیکان وارد شده

$$f = \{(1, 2), (3, 4)\} \Rightarrow R_f = \{2, 4\}$$

زوج مرتبی: مجموعه همه مؤلفه‌های دوم

۵۸ ۲

ابتدا دامنه تابع را پیدا می‌کنیم:

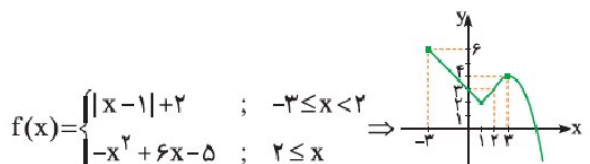
$$\sqrt{4-x} : 4-x \geq 0 \Rightarrow 4 \geq x \Rightarrow D_f = \{4\}$$

پس تنها عضو دامنه تابع $\{4\}$ است. حالا برد تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f(4) = 0 + 0 + 16 - 8 + 3 = 11$$

۵۹ ۳

ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

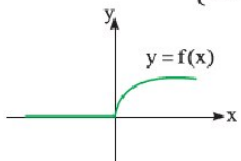


بنابراین برد تابع f برابر $(-\infty, 6]$ است.

۶۵ ۴

ابتدا تابع را به صورت دوضابطه‌ای نوشته، سپس آن را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{x+|x|} = \begin{cases} \sqrt{x+x} & ; x \geq 0 \\ \sqrt{x-x} & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$$



بنابراین با توجه به نمودار تابع

$y = f(x)$ ، دامنه تابع برابر $D_f = \mathbb{R}$

و برد تابع برابر $R_f = [0, +\infty)$ است.

هویت

برابری دو تابع

در حالت کلی دو تابع f و g برابرند، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

۱) دامنه f و دامنه g با هم برابر باشند.

۲) برای هر x از این دامنه یکسان، $f(x) = g(x)$ باشد.

۷۰ | ۱

به بررسی موارد می پردازیم:

الف)
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \end{cases} \Rightarrow D_f = (1, +\infty) \\ g(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}} \Rightarrow \frac{x}{x-1} \geq 0 \Rightarrow D_g = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty) \end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^3} \Rightarrow x^3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow D_f = D_g = [0, +\infty) \\ g(x) = x\sqrt{x} \Rightarrow x \geq 0 \end{cases}$$

در مورد «ب» دامنه هر دو تابع برابر $\mathbb{R}$ است، اما مقدار تابع به ازای x های یکسان، تفاوت دارد:

پ)
$$\begin{cases} f(\sqrt{2}) = [\sqrt{2}] = 2 \\ g(\sqrt{2}) = [\sqrt{2}]^2 = 1 \end{cases}$$

ت)
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{[x]} \Rightarrow [x] \neq 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - [0, 1) \\ g(x) = \frac{[x]}{x} \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0\} \end{cases}$$

۷۱ | ۳

الف) $D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R} - \{x \mid x = \frac{k\pi}{2}\}$

ب) $f(x) = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|, g(x) = x+1$

پ) $f(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|, g(x) = \cos x$

۷۲ | ۳

دامنه تابع $f(x) = \log\left(\frac{x-2}{x}\right)$ را به دست می آوریم:

$$\frac{x-2}{x} > 0 \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -\infty & 0 & 2 & +\infty \\ \hline f & + & - & + & + \end{array} \Rightarrow (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$$

حال دامنه هر یک از گزینه ها را مشخص می کنیم:

۱) $y = \log(x-2) - \log x \Rightarrow \begin{cases} x-2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 2$

۲) $y = \log \frac{(x-2)(x+2)}{x(x+2)} \Rightarrow D_y = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty) - \{-2\}$

۳) $y = \frac{1}{2} \log\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 \Rightarrow D_y = \mathbb{R} - \{0, 2\}$

۴) $y = 2 \log \sqrt{\frac{x-2}{x}} \Rightarrow D_y = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

پس از بررسی گزینه ها می پردازیم:

۱) $D_f = (0, +\infty), D_g = \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow f \neq g$

۲) $D_f = \mathbb{R} - \{0\}, D_g = \mathbb{R} \Rightarrow f \neq g$

۳) $D_f = [0, +\infty), D_g = \mathbb{R} \Rightarrow f \neq g$

۴) $D_f = D_g = \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow f = g$

۶۵ | ۱

ابتدا دامنه تابع f را می یابیم:

$$x - x^2 > 0 \Rightarrow x(1-x) > 0 \Rightarrow 0 < x < 1$$

چون $0 < x < 1$ است، پس حاصل $[x]$ برابر صفر است.

حالا ضابطه تابع f را بازنویسی می کنیم:

$$0 < x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{0 \times |x|}{\sqrt{x-x^2}} = 0$$

بنابراین مجموعه برد این تابع برابر $\{0\}$ است.

۶۶ | ۱

می دانیم $0 \leq \cos^2 x \leq 1$ است. در ضمن عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد:

$$-\cos^2 x \geq 0 \Rightarrow \cos^2 x \leq 0$$

پس نتیجه می گیریم فقط $\cos^2 x = 0$ قابل قبول است. بنابراین:

$$f(x) = 2\sqrt{-\cos^2 x} = 2 \times 0 = 0$$

پس برد تابع f شامل یک عضو صحیح است: $R_f = \{0\}$

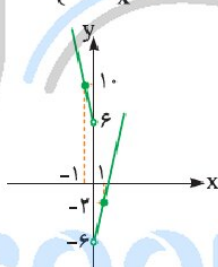
۶۷ | ۲

ابتدا تابع را به صورت دو ضابطه ای می نویسیم:

$$y = \begin{cases} \frac{4x^2 - 6x}{x}; & x > 0 \\ \frac{-4x^2 + 6x}{x}; & x < 0 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} 4x - 6; & x > 0 \\ -4x + 6; & x < 0 \end{cases}$$

حال نمودار هر قسمت را رسم می کنیم تا برد تابع مشخص شود.

با توجه به نمودار برد این تابع برابر $(-6, +\infty)$ است.



۶۸ | ۲

می دانیم در تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ دامنه تابع $\mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\}$ و برد آن $\mathbb{R} - \{\frac{a}{c}\}$ است.

پس برد تابع $f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$ برابر $\mathbb{R} - \{1\}$ است. حالا برد تابع

$$g(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$$
 را پیدا می کنیم:

$$\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow 1 + \sqrt{x} \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{1+\sqrt{x}} \leq 1$$

پس برد این تابع به صورت بازه $(0, 1]$ است.

۶۹ | ۴

به بررسی گزینه ها می پردازیم:

۱) $D_f = (0, +\infty), D_g = \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow f \neq g$

۲) $D_f = \mathbb{R} - \{0\}, D_g = \mathbb{R} \Rightarrow f \neq g$

۳) $D_f = [0, +\infty), D_g = \mathbb{R} \Rightarrow f \neq g$

۴) $D_f = D_g = \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow f = g$



۱ ۷۳

برای این که دو تابع f و g مساوی باشند، باید:(۱) به ازای هر مقدار x با هم برابر باشند، پس به ازای $x=2$ داریم:

$$f(2) = g(2) \Rightarrow 2(2) + 4 = b \Rightarrow b = 8$$

(۲) ضابطه هر دو تابع یکسان باشد، پس:

$$\frac{2x^2 + a}{x - 2} = 2x + 4 \Rightarrow 2x^2 + a = 2(x + 2)(x - 2) \Rightarrow a = -8$$

بنابراین $a + b = 0$ است.

۳ ۷۴

برای این که دو تابع f و g مساوی باشند، باید:به ازای هر مقدار x دارای مقادیر y یکسان باشند. چون $x=1$ دردامنه ضابطه $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ وجود ندارد. پس $a=1$ بوده و به ازای $x=1$ داریم:

$$f(1) = g(1) \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow a + b = \frac{3}{2}$$

۳ ۷۵

دامنه تابع $g(x) = \frac{c}{x+2}$ برابر $\mathbb{R} - \{-2\}$ است. در نتیجه دامنه تابع

$$f(x) = \frac{bx+2}{x^2+ax+4}$$
 نیز باید برابر $\mathbb{R} - \{-2\}$ باشد، پس $x=-2$ ریشه مخرب تابع f نیز هست:

$$x=-2 \Rightarrow (-2)^2 + a(-2) + 4 = -2a + 8 = 0 \Rightarrow a = 4$$

از طرفی $x=-2$ باید ریشه صورت کسر تابع f نیز باشد تا صورت کسر تابع f نیز مانند تابع g برابر عدد ثابت باشد، پس:

$$x=-2 \Rightarrow b(-2) + 2 = 0 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x+2}{x^2+4x+4}$$

$$= \frac{x+2}{(x+2)^2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x+2}$$

حال برای آن که دو تابع $f(x) = \frac{1}{x+2}$ و $g(x) = \frac{c}{x+2}$ برابر باشند باید $c=1$ باشد، پس $a+b+c=4+1+1=6$ است.

۲ ۷۶

در تابع f چون $|x|$ زیر رادیکال با فرجه ۲ قرار دارد، پس:

$$x|x| \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow D_f = [0, +\infty)$$

نامنفی

دامنه تابع g نیز برابر $\mathbb{R}$ است. حال ضابطه این دو تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{x|x|} \xrightarrow{x \geq 0} f(x) = \sqrt{x^2} = |x| \xrightarrow{x \geq 0} f(x) = x; x \geq 0$$

$$g(x) = \sqrt{|x|} \times \sqrt{|x|} = \sqrt{|x|^2} = |x|$$

به ازای $x \geq 0$ ، ضابطه g برابر $g(x) = x$ می‌شود، پس این دو تابع به ازای دامنه $[0, +\infty)$ با هم مساوی‌اند.

۲ ۷۷

دامنه تابع ثابت g برابر $\mathbb{R}$ است، بنابراین دامنه تابع f هم باید برابر $\mathbb{R}$ باشد، پس مخرب کسر تابع f ، نباید ریشه حقیقی داشته باشد:

$$x^2 + x - a = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 4a < 0 \Rightarrow a < -\frac{1}{4}$$

از طرفی ضابطه دو تابع هم باید برابر هم باشد:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2(x^2 + x - a)}{x^2 + x - a} = 2 \\ g(x) = a^3 - a + 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = g(x) \Rightarrow 2 = a^3 - a + 2$$

$$\Rightarrow a(a^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \times \\ a = 1 \times \\ a = -1 \checkmark \end{cases}$$

۱ ۷۸

برای این که $|2x^2 + ax + 1| = 2x^2 + ax + 1$ باشد، لازم است که عبارت $2x^2 + ax + 1$ نامنفی باشد، یعنی دلتای آن کوچک‌تر یا مساوی صفر باشد ($\Delta \leq 0$).

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow a^2 - 4(2)(1) \leq 0 \Rightarrow a^2 \leq 8 \Rightarrow -2\sqrt{2} \leq a \leq 2\sqrt{2}$$

۴ ۷۹

می‌دانیم $f(x) = [x] + [-x]$ به ازای مقادیر صحیح برابر صفر و به ازای مقادیر غیر صحیح برابر -1 است، پس:

$$f^2(x) = ([x] + [-x])^2 = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ 1 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

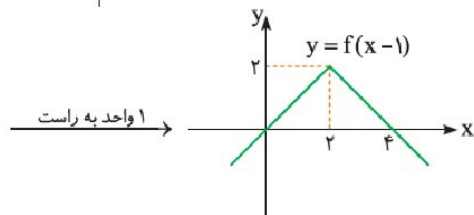
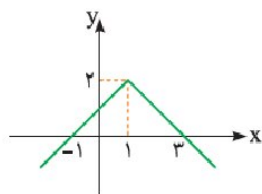
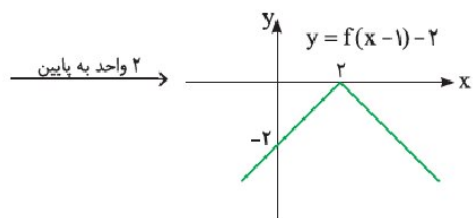
حال همه ضابطه‌ها را ساده می‌کنیم:

$$\text{الف) } \sqrt{f(x)} = \sqrt{[x] + [-x]} = 0; x \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ب) } \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{[x] + [-x]} = -1; x \notin \mathbb{Z}$$

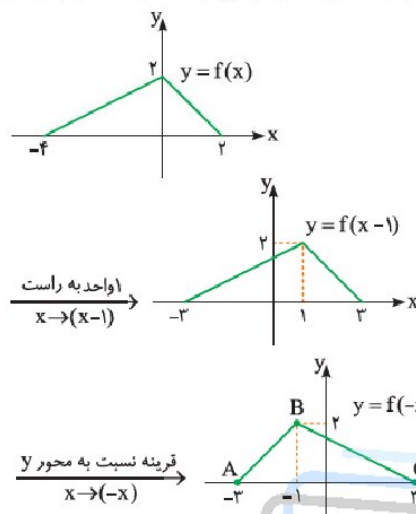
$$\text{پ) } f(-x) = [-x] + [x] = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

۱ ۸۰

ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به راست منتقل می‌کنیم تا تابع $y = f(x-1)$ به دست آید.سپس نمودار حاصل را ۲ واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار $y = f(x-1) - 2$ به دست آید:

۸۴ ۲

با داشتن نمودار تابع $y = f(x)$ ، نمودار تابع $y = f(-x-1)$ را رسم می‌کنیم:



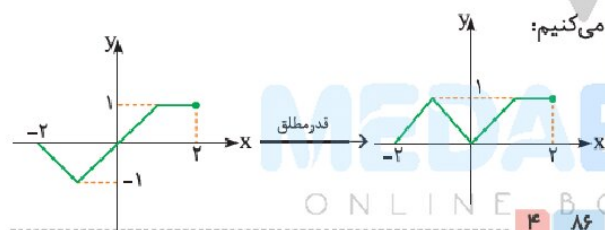
حالا معادله پاره خط BC را پیدا می‌کنیم تا محل برخورد آن با محور yها مشخص شود:

$$m_{BC} = \frac{2-0}{-1-3} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{معادله BC: } y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

این نمودار محور yها را در نقطه‌ای با عرض $\frac{3}{2}$ قطع می‌کند. بنابراین اگر آن را در راستای عمودی به اندازه $\frac{3}{2}$ به پایین منتقل کنیم، از مبدأ مختصات عبور می‌کند. پس $k = -\frac{3}{2}$ است.

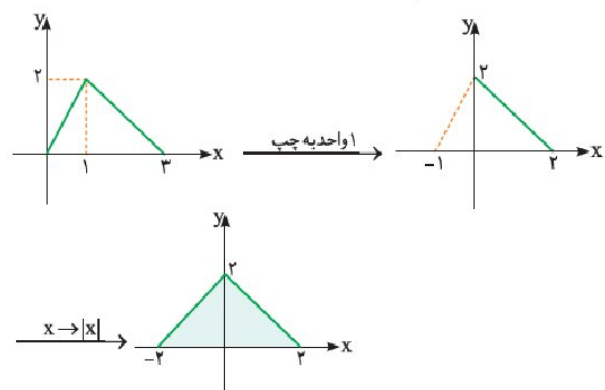
۸۵ ۲

قسمتی از نمودار که زیر محور xها قرار دارد را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم:



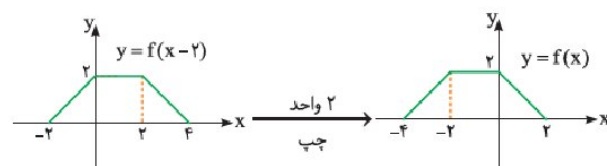
۸۶ ۲

ابتدا نمودار تابع $y = f(x)$ را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار $y = f(x+1)$ به دست آید. سپس قسمت‌هایی از نمودار که در سمت راست محور x قرار دارند را نگه داشته و قرینه آن نسبت به محور yها را به آن اضافه می‌کنیم:

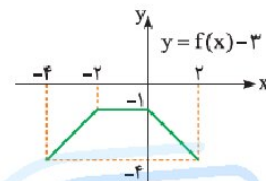


۸۱ ۴

ابتدا نمودار $y = f(x-2)$ را ۲ واحد به چپ می‌بریم تا نمودار $y = f(x)$ به دست آید:



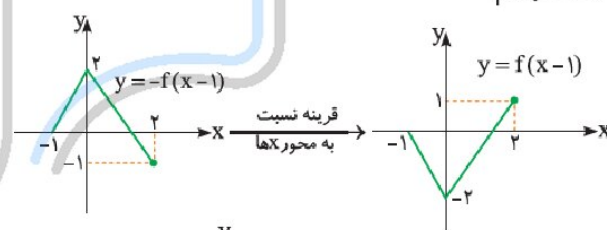
حالا نمودار $y = f(x)$ را ۳ واحد به پایین می‌بریم تا نمودار تابع $y = f(x)-3$ به دست آید:



۸۳ ۲

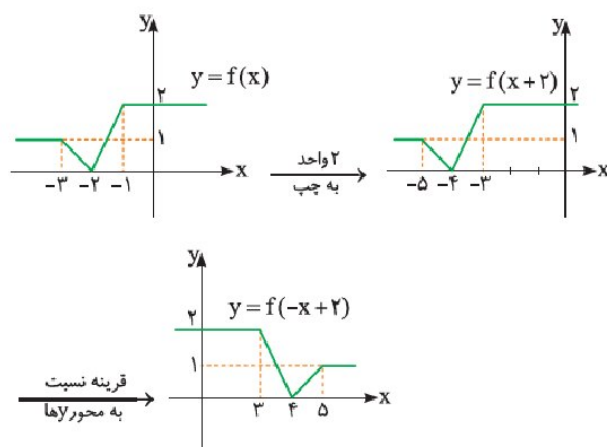
ابتدا نمودار را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = f(x-1)$ پدید آید.

سپس آن را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا به نمودار $f(x)$ برسیم:



۸۳ ۲

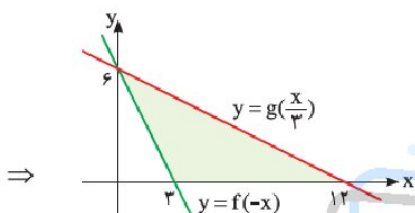
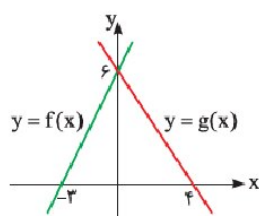
ابتدا نمودار تابع $y = f(x-1)$ را ۱ واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا به نمودار $y = f(x)$ برسیم، سپس تغییرات را به ترتیب زیر اعمال می‌کنیم.





۴ ۹۵

نمودار تابع $y = f(x)$ را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = f(-x)$ به دست آید و طول نقاط $y = g(x)$ را ۳ برابر می‌کنیم تا نمودار $y = g(\frac{x}{3})$ به دست آید:

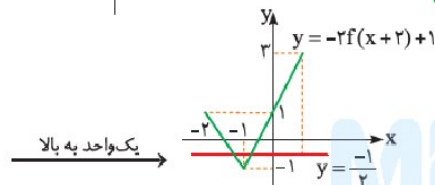
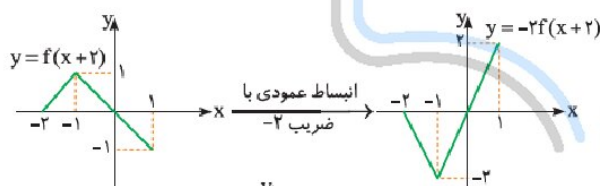


مساحت ناحیه رنگی برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} \times 9 \times 6 = 27$$

۲ ۹۱

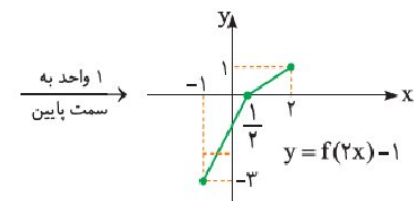
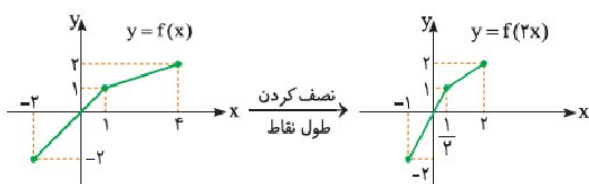
ابتدا به کمک انتقال از روی نمودار $y = f(x)$ ، نمودار داده شده را رسم می‌کنیم:



پس نمودار $y = -\frac{1}{2}f(x+2) + 1$ و $y = -2f(x+2) + 1$ در ۲ نقطه متقاطع اند.

۳ ۹۳

برای رسم نمودار تابع $g(x)$ ، کافی است x های تمام نقاط تابع f را $\frac{1}{2}$ برابر کنیم و نمودار را ۱ واحد به سمت پایین انتقال دهیم:



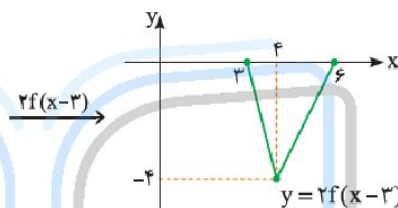
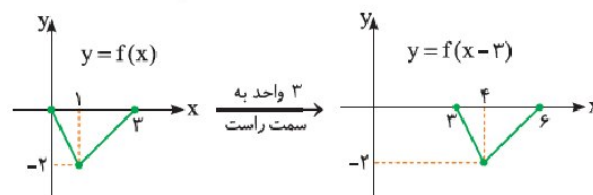
با توجه به نمودار، تابع در بازه $[-1, \frac{1}{2}]$ زیر محور x ها قرار دارد.

ناحیه محدود به محور x ها و نمودار یک مثلث به قاعده ۴ واحد و ارتفاع ۲ واحد است و مساحت آن برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$$

۴ ۸۷

ابتدا تابع $f(x)$ را ۳ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم، سپس عرض تمام نقاط آن را ۲ برابر کرده و قسمت هایی از نمودار که زیر محور x ها قرار دارد را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم:



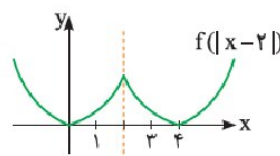
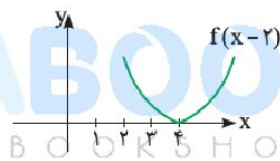
مساحت ناحیه رنگی به صورت زیر است:

$$S = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$$

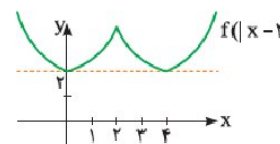
۲ ۸۸

ابتدا به کمک نمودار داده شده،

نمودار تابع $f(x-2)$ را رسم می‌کنیم. کافیست نمودار داده شده را ۲ واحد به سمت راست منتقل کنیم:



سپس با حذف قسمت سمت چپ خط $x = 2$ ، قرینه قسمت باقی مانده در سمت راست را به آن اضافه می‌کنیم:

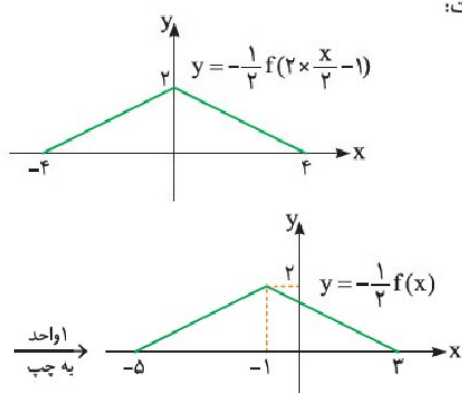


اکنون با ۲ واحد انتقال به سمت بالا، نمودار تابع $f(|x-2|) + 2$ حاصل می‌شود:

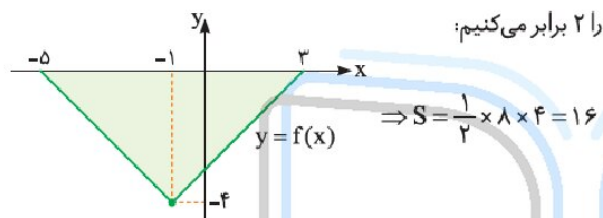
۲ ۸۹

برای رسم نمودار تابع $y = f(\frac{x}{2})$ باید طول تمام نقاط را دو برابر و برای رسم نمودار $y = f(2x)$ باید طول تمام نقاط را نصف کنیم. پس نمودارهای گزینه (۲) به درستی رسم شده اند.

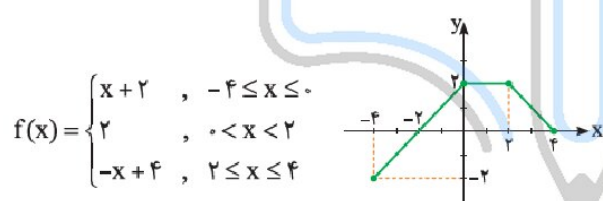
و خواهیم داشت:



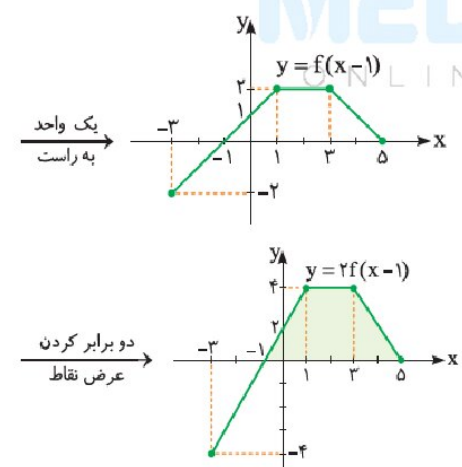
حالا نمودار حاصل را نسبت به محور x قرینه کرده و سپس عرض نقاط را ۲ برابر می‌کنیم:



نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



حالا نمودار $y = f(x)$ را یک واحد به راست منتقل می‌کنیم و سپس عرض تمام نقاط را ۲ برابر می‌کنیم تا به نمودار تابع $y = 2f(x-1)$ برسیم:

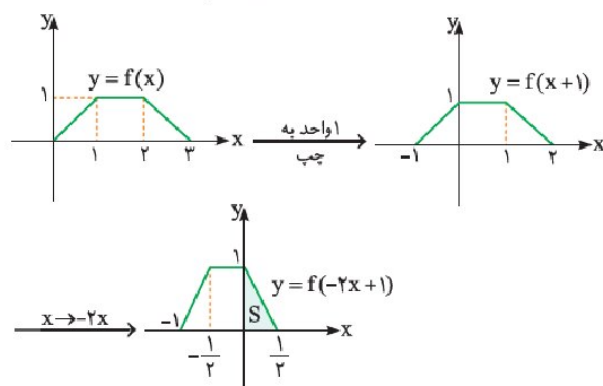


$$\Rightarrow S_{\text{رنجی}} = \frac{(6+2) \times 4}{2} = 16$$

پس می‌توانستیم ضابطه تابع $y = 2f(x-1)$ را پیدا کنیم و سپس آن را رسم کنیم.

۹۳ ۲

ابتدا نمودار را ۱ واحد به چپ منتقل می‌کنیم و سپس تغییرات را مرحله به مرحله مطابق شکل‌های زیر اعمال می‌کنیم:



در ناحیه اول دستگاه مختصات، یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع قائم $\frac{1}{2}$ و ۱ ایجاد شده که مساحت آن برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}$$

۹۴ ۳

با توجه به نمودار، دامنه تابع $y = f(x)$ به صورت بازه $[-2, 4]$ است، پس برای به دست آوردن دامنه $y = 3f(2x-1) + 1$ داریم:

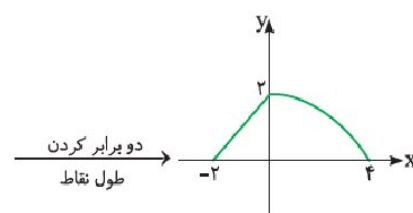
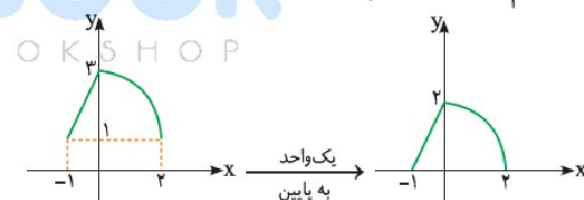
$$-2 \leq 2x-1 \leq 4 \Rightarrow -1 \leq 2x \leq 5 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$$

بنابراین دامنه این تابع به صورت بازه $[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$ است و مقدار $b-a$ برابر است با:

$$\frac{5}{2} - (-\frac{1}{2}) = 3$$

۹۵ ۳

ابتدا نمودار تابع $y = 1 + f(2x)$ را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا به نمودار $y = f(2x)$ برسیم و سپس طول تمام نقاط را دو برابر می‌کنیم (x را به $\frac{x}{2}$ تبدیل می‌کنیم) تا نمودار $y = f(x)$ به دست آید:



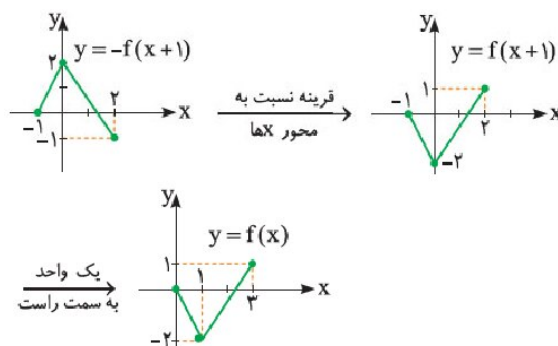
۹۶ ۳

ابتدا در تابع $y = -\frac{1}{3}f(2x-1)$ طول تمام نقاط را دو برابر می‌کنیم (به جای x عبارت $\frac{x}{2}$ قرار می‌دهیم)، سپس نمودار تابع حاصل را ۱ واحد به چپ می‌بریم (به جای x عبارت $x+1$ قرار می‌دهیم).



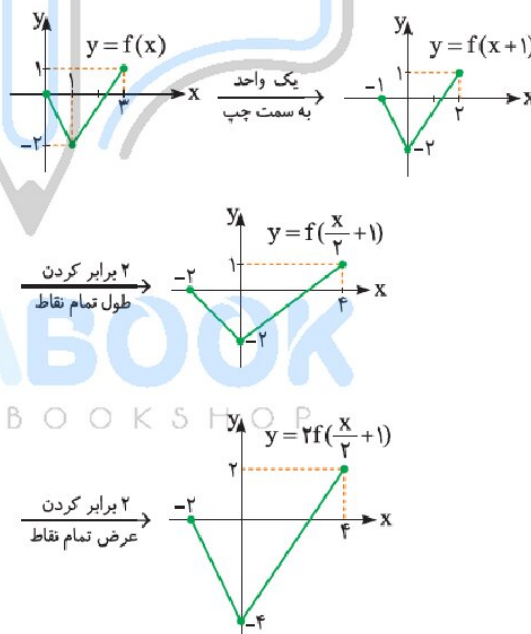
۹۸ ۲

اگر نمودار تابع داده شده را نسبت به محور x ها قرینه کنیم و ۱ واحد به سمت راست انتقال دهیم، به نمودار تابع $y = f(x)$ می‌رسیم:



با توجه به تابع $y = f(x)$ ، نمودار تابع $y = 2f\left(\frac{x+2}{2}\right) = 2f\left(\frac{x}{2} + 1\right)$ را رسم می‌کنیم. مراحل رسم به صورت زیر است:

- (۱) یک واحد انتقال به سمت چپ
- (۲) ۲ برابر کردن x های تمام نقاط
- (۳) ۲ برابر کردن y های تمام نقاط



۹۹ ۱

تمامی نقاط نمودار f ابتدا ۲ واحد به راست منتقل شده‌اند، پس $a = 2$ می‌باشد، سپس عرض تمامی نقاط قرینه و ۳ برابر شده است، پس:

$$\frac{1}{b} = -3 \Rightarrow b = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow f\left(2a + \frac{2}{b}\right) = f\left(2 \times 2 + \frac{2}{-\frac{1}{3}}\right) = f(-2)$$

پس با توجه به نمودار تابع f داریم:

$$f(-2) = 6$$

۱۰۰ ۴

ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را مشخص می‌کنیم:



حالا با توجه به نمودار تابع f ، دامنه تابع $y = \sqrt{xf(x)}$ را پیدا می‌کنیم:

x	-5	-3	0	2
x	-	-	+	+
$f(x)$	+	-	+	-
	-	+	-	-

بنابراین دامنه تابع به صورت بازه $[-5, -3] \cup [0, 2]$ است.

پیش‌بینی با جایگذاری $x = -1$ در تابع به عبارت $\sqrt{-f(-1)}$ می‌رسیم. از آنجایی که $f(-1)$ مثبت است، پس عبارت زیر رادیکال منفی می‌شود و گزینه‌های «۱»، «۲» و «۳» حذف می‌شوند.

۱۰۱ ۱

با توجه به این که در عبارت $P(x) = \frac{f(x)}{f(x+2)}$ ریشه‌های صورت $x = -2, 0, 1$ می‌باشد، پس ریشه‌های مخرج $x = -4, -2, -1$ بوده و برای تعیین علامت $P(x)$ داریم:

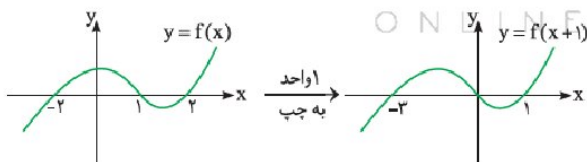
x	-4	-2	-1	0	1
$P(x)$	-	+	-	+	-

$$\Rightarrow D_g = (-4, -2) \cup (-2, -1) \cup [0, 1]$$

بنابراین دامنه تابع $g(x)$ شامل ۳ عدد صحیح ۰، ۱ و ۳ است.

۱۰۲ ۴

نمودار تابع $y = f(x)$ را یک واحد به چپ می‌بریم:



حالا عبارت زیر رادیکال را ساده کرده و دامنه تابع رادیکالی را پیدا می‌کنیم:

$$y = \sqrt{\frac{(x-2)f(x)}{f(x+1)}} \Rightarrow \frac{(x-2)f(x)}{f(x+1)} \geq 0$$

با توجه به جدول تعیین علامت، داریم:

x	-3	-2	0	1	2
$x-2$	-	-	-	-	+
$f(x)$	-	-	+	+	-
$f(x+1)$	-	+	+	-	+
کل	-	+	-	+	+

بنابراین دامنه تابع به صورت $(-3, -2) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$ است که شامل بی‌شمار عدد صحیح است.

۱۵۷ ۴

چون برد تابع $y=f(x)$ در بازه $[-4, 2]$ قرار دارد، پس مقادیر f در این بازه قرار دارند و انتقال و انقباض در راستای محور x تأثیری بر مقادیر f ندارد، پس:

$$-4 \leq f(2x-1) \leq 2 \Rightarrow -2 \leq \frac{1}{4}f(2x-1) \leq 1 \Rightarrow -3 \leq \frac{1}{4}f(2x-1)-1 \leq 0$$

پس برد تابع $y = \frac{1}{4}f(2x-1)-1$ به صورت بازه $[-3, 0]$ است که شامل ۴ عدد صحیح می باشد.

۱۵۸ ۲

ابتدا متناظر نقطه $(1, -4)$ را بر روی تابع $f(x)$ با کم کردن ۳ واحد از y نقطه و سپس قرینه کردن y به دست می آوریم:

$$(1, -4) \xrightarrow{\text{کم کردن ۳ واحد از } y} (1, -7) \xrightarrow{\text{قرینه کردن } y} (1, 7)$$

پس نقطه $(1, 7)$ روی $y=f(x)$ قرار دارد.

حال نقطه متناظر آن را بر روی تابع $y = \frac{1}{4}f(x-2)$ به دست می آوریم. برای این منظور، ۲ واحد به طول نقطه اضافه می کنیم و سپس عرض آن را نصف می کنیم تا به نقطه $(3, \frac{7}{4})$ برسیم.

۱۵۹ ۴

ابتدا تابع f را با استفاده از اتحاد مکعب دو جمله ای به صورت زیر می نویسیم:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5 = (x-2)^3 + 3$$

نقطه متناظر $(1, 2)$ در تابع $y = x^3$ ، نقطه $(1, 1)$ است.

حال برای یافتن نقطه متناظر آن بر روی تابع $f(x)$ ، طول نقطه را دو واحد بیش تر و عرض نقطه را نیز سه واحد بیش تر می کنیم تا به نقطه $(3, 4)$ برسیم.

۱۶۰ ۲

ابتدا نقطه نظیر $A(5, 1)$ را روی نمودار تابع $y = 1 - 3f(2x-1)$ پیدا می کنیم:

$$y = f(x) \xrightarrow[\text{به راست}]{\text{واحد}} y = f(x-1) \xrightarrow[\text{طول نقاط}]{\text{نصف کردن}} y = f(2x-1)$$

$$\xrightarrow[\text{عرض نقاط}]{x(-3)} y = -3f(2x-1) \xrightarrow[\text{به بالا}]{\text{واحد}} y = 1 - 3f(2x-1)$$

می دانیم اگر ضابطه یک تابع را درون قدم مطلق قرار دهیم، قسمت هایی از نمودار که زیر محور x قرار دارند، نسبت به محور x قرینه می شوند. بنابراین نقطه نظیر A روی نمودار $|1 - 3f(2x-1)| = y$ به صورت $A'(3, 2)$ است.

۱۶۱ ۳

چون نقطه $A(a, 1+b)$ روی نمودار تابع $y = 1 - f(x)$ قرار دارد، پس:

$$1 - f(a) = 1 + b \Rightarrow f(a) = -b$$

۱۵۳ ۲

ابتدا دامنه تابع $f(x) = \log_2(x+3)$ را پیدا می کنیم:

$$x+3 > 0 \Rightarrow x > -3$$

حالا عبارت زیر رادیکال را بزرگ تر یا مساوی صفر قرار می دهیم. برای تعیین علامت باید ریشه های صورت و مخرج کسر را پیدا کنیم:

$$\begin{cases} g(x) = 0 \Rightarrow x = -4, -3, 2, 4 \\ 2 - f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 2 \Rightarrow \log_2(x+3) = 2 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

x	-4	-3	1	2	4
$g(x)$	+	+	-	-	+
$2 - f(x)$	+	+	+	-	-
$\frac{g(x)}{2 - f(x)}$	+	+	-	+	-

با توجه به دامنه تابع $f(x) = \log_2(x+3)$ ، دامنه تابع

$$y = \sqrt{\frac{g(x)}{2 - f(x)}} \text{ برابر بازه } \{4\} \cup (1, 2] \text{ است که شامل دو عدد صحیح است.}$$

🔗 دام تستی | اگر $x = 4$ رویداد بره میزنی گزینه ۱.

۱۵۴ ۲

چون دامنه تابع $y = 2f(x) + 1$ برابر بازه $[-1, 1]$ است، پس $-1 \leq x \leq 1$ و برای تعیین دامنه $y = f(2x+1)$ داریم:

$$-1 \leq 2x+1 \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2x \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 0$$

🔗 دام تستی | اکثر بچه ها اشتباه زیر رو انجام میدن و میزنن گزینه ۳:

$$-1 \leq 2x+1 \leq 3 \Rightarrow -2 \leq 2x \leq 2 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

۱۵۵ ۳

دامنه تابع $y = 1 + f(2x)$ به صورت بازه $(-4, 6)$ است، پس $-4 < x < 6$ و در این تابع داریم:

$$-4 < x < 6 \Rightarrow -8 < 2x < 12$$

حال در تابع $y = 2 - f(\frac{x}{4} + 1)$ خواهیم داشت:

$$-8 < \frac{x}{4} + 1 < 12 \Rightarrow -9 < \frac{x}{4} < 11 \Rightarrow -18 < x < 22$$

۱۵۶ ۱

می دانیم در اثر انبساط یا انقباض افقی تابع، دامنه آن تغییر می کند. پس چون دامنه تابع $y = f(x)$ و $y = f(kx)$ برابر هستند، یعنی $k = 1$ است و انبساط یا انقباضی رخ نداده است، بنابراین:

$$k = 1 \Rightarrow 2a^2 - a - 5 = 1 \Rightarrow 2a^2 - a - 6 = 0$$

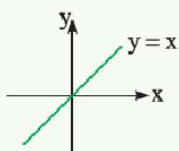
در این معادله درجه دوم حاصل ضرب مقادیر a برابر با $-3 = \frac{-c}{a}$ است.

🔥 اگر بازه $[b, c]$ یک بازه متقارن به صورت $[-1, 1]$ یا $[-2, 2]$ یا $[-5, 5]$ یا ... باشد، آن گاه باید برای k دو مقدار ۱ و -1 را در نظر بگیریم. اقاً طرح کنکور سراسری این حالت را در نظر نگرفته.

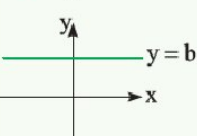


🔥 اگر $a = 1$ و $b = 0$ باشد، آنگاه تابع خطی $y = ax + b$ به تابع

$y = x$ تبدیل می‌شود. به این تابع، تابع همانی می‌گویند.



توجه کنید خط $y = x$ نیمساز ناحیه اول و سوم دستگاه مختصات است.



🔥 اگر $a = 0$ باشد، آنگاه تابع خطی $y = ax + b$ به تابع $y = b$ تبدیل می‌شود. به این تابع، تابع ثابت می‌گویند.

پس نقطه $(a, -b)$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ قرار دارد. حالا نظیر

نقطه $(a, -b)$ را روی تابع $y = f(\frac{x-1}{2})$ پیدا می‌کنیم:

$$y = f(x) \xrightarrow[\text{طول نقاط}]{\text{برابر کردن}} y = f(\frac{x}{2}) \xrightarrow[\text{به راست}]{\text{واحد}} y = f(\frac{x-1}{2})$$

$(a, -b) \quad (2a, -b) \quad A'(2a+1, -b)$

با توجه به صورت سؤال $A'(a, 3)$ است، پس:

$$2a + 1 = a \Rightarrow a = -1$$

$$-b = 3 \Rightarrow b = -3$$

پس نقطه $B(b, a)$ به صورت $B(-3, -1)$ است.

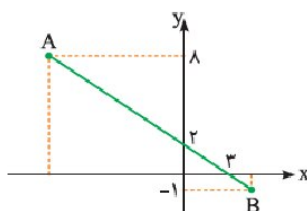
۲ ۱۱۳

۴ ۱۱۳

چون تابع f یک تابع خطی است، باید شیب محاسبه شده با استفاده از هر دو نقطه این تابع، مقدار یکسانی داشته باشد:

$$\frac{0 - (m-1)}{2-1} = \frac{0 - (m+3)}{2 - (-3)} \Rightarrow \frac{-m+1}{1} = \frac{-m-3}{5} \Rightarrow -5m+5 = -m-3 \Rightarrow 4m = 8 \Rightarrow m = 2$$

۱ ۱۱۴



چون نمودار تابع f محور x ها را در نقطه‌ای با طول ۳ و محور y ها را در نقطه‌ای با عرض ۲ قطع می‌کند، پس شیب خط مطابق شکل برابر $-\frac{2}{3}$ و عرض از مبدأ آن ۲ است، بنابراین معادله خط برابر است با:

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

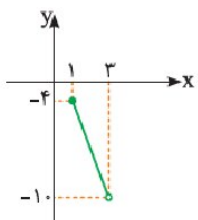
حالا طول نقطه A و B را پیدا می‌کنیم:

$$y_A = 8 \Rightarrow 8 = -\frac{2}{3}x_A + 2 \Rightarrow -\frac{2}{3}x_A = 6 \Rightarrow x_A = -9$$

$$y_B = -1 \Rightarrow -1 = -\frac{2}{3}x_B + 2 \Rightarrow -\frac{2}{3}x_B = -3 \Rightarrow x_B = \frac{9}{2}$$

بنابراین دامنه تابع f به صورت بازه $[-9, \frac{9}{2}]$ است.

۴ ۱۱۵



تابع خطی با دامنه $[1, 3]$ و برد $(-4, -10)$ ، تنها به صورت روبه‌رو قابل رسم است. اکنون به کمک نمودار، ضابطه تابع را به دست می‌آوریم:

$$m = \frac{-10 - (-4)}{3 - 1} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$\Rightarrow y - (-4) = -3(x - 1) \Rightarrow y = -3x - 1$$

$$-3(\frac{4}{3}) - 1 = -5 \quad \text{مقدار تابع در } x = \frac{4}{3} \text{ برابر است با:}$$

شاید حواست به باز و بسته بودن بازه نبوده و به گزینه

(۲) رسیدی.

ابتدا ضابطه تابع f را به دست می‌آوریم:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7-1}{-2-1} = \frac{6}{-3} = -2$$

$$f(x) = mx + h = -2x + h \xrightarrow{f(-2)=7} -2(-2) + h = 7$$

$$\Rightarrow h = 3$$

اکنون اختلاف شیب و عرض از مبدأ تابع f را به دست می‌آوریم:

$$h - m = 3 - (-2) = 3 + 2 = 5$$

📌

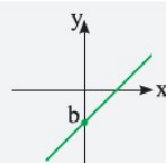
👍 تابع خطی

به هر تابع به صورت $f(x) = ax + b$ تابع خطی می‌گویند. می‌دانیم در این تابع a برابر شیب خط و b نشان‌دهنده عرض از مبدأ است.

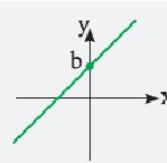
نمودار توابع خطی $y = ax + b$ با توجه به علامت a و b در شکل‌های زیر نشان داده شده‌اند:

نمودار تابع $y = ax + b$ در حالت‌های مختلف

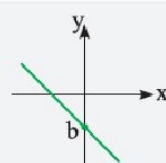
$a > 0, b < 0$



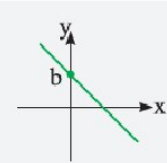
$a > 0, b > 0$



$a < 0, b < 0$



$a < 0, b > 0$



حاصل $f(\sqrt{a^2 + b^2})$ برابر است با:

$$f(\sqrt{a^2 + b^2}) = f(\sqrt{25}) = f(5) = 5$$

۱۳۲ ۱

تابع f یک تابع همانی است، بنابراین ضابطه آن به صورت $f(x) = x$ است. همچنین چون تابع g یک تابع ثابت است، می‌توانیم ضابطه آن را به صورت $g(x) = k$ در نظر بگیریم. به کمک رابطه داده شده داریم:

$$2g^2(3) - f(5)g(5) + f(2) = 0 \Rightarrow 2k^2 - 5k + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = \frac{1}{2} \end{cases}$$

اکنون حاصل $f(g(6) + 1)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(g(6) + 1) = g(6) + 1 = \begin{cases} k = 2 \Rightarrow g(6) + 1 = 3 \\ k = \frac{1}{2} \Rightarrow g(6) + 1 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

۱۳۳ ۳

چون f و g ثابت هستند، پس باید ضریب x در آن‌ها صفر باشد:

$$f(x) = b - 3ax \Rightarrow 3a = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$g(x) = c - (3b - 3)x \Rightarrow 3b - 3 = 0 \Rightarrow b = 1$$

از طرفی می‌دانیم $f + g = 5$ است، پس:

$$\begin{cases} f(x) = b \\ g(x) = c \end{cases} \Rightarrow b + c = 5 \xrightarrow{b=1} c = 4 \Rightarrow bc = 4$$

۱۳۴ ۲

چون f تابعی همانی است، پس $|a| - |b| = 1$ و چون g تابعی ثابت است، پس $b^2 - 1 = 0$ است:

$$b^2 - 1 = 0 \Rightarrow b = \pm 1 \Rightarrow |b| = 1 \xrightarrow{|a|-|b|=1} |a| = 1 + 1 = 2 \Rightarrow a = \pm 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = x \\ g(x) = 5c \end{cases} \Rightarrow (f - g)(x) = x - 5c = x + 5 \Rightarrow c = -1$$

بنابراین $ac = 2$ یا $ac = -2$ است، پس ۲ مقدار برای ac وجود دارد.

۱۳۵ ۴

ابتدا ضابطه f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = c + bx^2 + (ab + 2)x + 2a - 3x^2$$

$$= (b - 3)x^2 + (ab + 2)x + c + 2a$$

حالا چون f تابعی همانی است، پس باید به صورت $f(x) = x$ باشد:

$$\begin{cases} b - 3 = 0 \Rightarrow b = 3 \\ ab + 2 = 1 \xrightarrow{b=3} 3a + 2 = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{3} \\ c + 2a = 0 \Rightarrow c - \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow c = \frac{2}{3} \end{cases}$$

بنابراین $\left[\frac{a}{c}\right]$ برابر است با:

$$\left[\frac{a}{c}\right] = \left[\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}\right] = \left[-\frac{1}{2}\right] = -1$$

۱۳۶ ۳

چون f تابعی ثابت است، پس ضریب x و x^2 برابر با صفر هستند:

$$f(x) = (ax + 2)(b - x) - 7x^2 = abx - ax^2 - 2x + 2b - 7x^2$$

$$\Rightarrow f(x) = (-a - 7)x^2 + (ab - 2)x + 2b \Rightarrow \begin{cases} -a - 7 = 0 \Rightarrow a = -7 \\ ab - 2 = 0 \Rightarrow b = \frac{2}{-7} \end{cases}$$

پس $f(x) = -\frac{4}{7}$ است و تنها عضو برد آن $-\frac{4}{7}$ است.

۱۱۶ ۱

اگر تابع خطی f را به صورت $f(x) = ax + b$ در نظر بگیریم، به کمک رابطه داده شده داریم:

$$f(x) + f(2x) + 3 = 3x - 3 \Rightarrow ax + b + a(2x) + b + 3 = 3x - 3$$

$$= 3x - 3 \Rightarrow ax + b + 2ax + b + 3 = 3x - 3$$

$$\Rightarrow 3ax + 2b + 3 = 3x - 3 \Rightarrow \begin{cases} 3a = 3 \\ 2b + 3 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$$

بنابراین ضابطه f به صورت $f(x) = x - 3$ است.

اکنون حاصل $f(f(0)) = f(-3) = -6$ را به دست می‌آوریم:

۱۱۷ ۳

چون f یک تابع خطی است، پس ضریب x^2 باید برابر صفر شود:

$$a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow f(x) = 2x + \frac{5}{3}$$

اکنون حاصل $f(1) + f(-2)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(1) + f(-2) = 2(1) + \frac{5}{3} + 2(-2) + \frac{5}{3} = -2 + \frac{10}{3} = \frac{-2}{3}$$

۱۱۸ ۴

با توجه به نمودار داده شده $f(0) = 4$ است، پس:

$$f(x) = \frac{x+12}{a} \xrightarrow{f(0)=4} f(0) = \frac{12}{a} = 4 \Rightarrow a = 3$$

بنابراین $g(x) = -3x + 6$ و $f(x) = \frac{x+12}{3}$ است و طول نقاط A و B به ترتیب ریشه توابع f و g هستند:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x+12}{3} = 0 \Rightarrow x_A = -12 \Rightarrow A(-12, 0)$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow -3x + 6 = 0 \Rightarrow x_B = 2 \Rightarrow B(2, 0)$$

$$\Rightarrow |AB| = 2 - (-12) = 14$$

۱۱۹ ۱

با فرض $f(x) = ax + b$ داریم:

$$f(f(x) + 3) = a(f(x) + 3) + b = af(x) + 3a + b$$

$$= a(ax + b) + 3a + b = a^2x + ab + 3a + b$$

در ضمن طبق صورت سؤال $f(f(x) + 3) = x + 5$ است، پس:

$$1) a^2x = x \Rightarrow a = \pm 1 \xrightarrow{a \neq 0} a = 1$$

$$2) ab + 3a + b = 5 \Rightarrow b + 3 + b = 5 \Rightarrow b = 1$$

بنابراین $f(x) = x + 1$ می‌باشد و $f(6) = 7$ است.

۱۲۰ ۴

چون تابع f یک تابع ثابت است، پس باید ضریب x و ضریب x^2 برابر صفر باشد:

$$\begin{cases} m + 2 = 0 \\ n - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -2 \\ n = 3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -6$$

حاصل $f(1/75) = -6$ است.

۱۲۱ ۳

چون تابع f یک تابع همانی است، باید مقدار مولفه اول و مولفه دوم هر زوج مرتب آن با هم برابر باشند:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a + 2b = 5 \\ b = 1 - a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow f = \{(1, 1), (5, 5), (4, 4)\}$$



۱۳۷ ۲

از آنجایی که f تابعی همانی و g تابعی ثابت است:

$$f(x) = x, \quad g(x) = k$$

با جای گذاری در رابطه $g(3x) + 2f(3+x) = 3 + 2x$ داریم:

$$k + 2(3+x) = 3 + 2x \Rightarrow k = -3$$

بنابراین $f(-1) = -1$ و $g(4) = -3$ است:

$$\frac{f(-1)}{g(4)} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

۱۳۸ ۲

چون تابع f دارای بردتک عضوی است، بنابراین تابع f یک تابع ثابت است.

پس باید ضریب x و ضریب x^2 برابر صفر باشند:

$$\begin{cases} a - b = 0 \\ b - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = 2 \Rightarrow f(x) = -c + 4$$

از طرفی بردتک تابع f برابر $\{1 + 2c\}$ است:

$$-c + 4 = 1 + 2c \Rightarrow c = 1 \Rightarrow f(x) = 3$$

مطابق شکل، سطح زیر نمودار در فاصله

$$[-1, 4], \text{ برابر } 5 \times 3 = 15 \text{ است.}$$

۱۳۹ ۴

با در نظر گرفتن جمله پرتوان هر گزینه، درجه تابع را به دست می آوریم:

$$1) x(x^2) + (x^2)(x) = x^3 + x^3 \rightarrow 4 \text{ درجه}$$

$$2) (x)(x)(x)(x) = x^4 \rightarrow 4 \text{ درجه}$$

$$3) ((2x)(x))^2 + 3x^2 + x = 4x^4 + 3x^2 + x \rightarrow 4 \text{ درجه}$$

$$4) (x^3) + (x)(x)(x) = x^3 + x^3 \rightarrow 3 \text{ درجه}$$

بنابراین درجه چند جمله ای گزینه ۴ با سایر گزینه ها متفاوت است.

هابلایت

توابع چند جمله ای

هر تابع به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ که در آن n عددی صحیح و نامنفی و $a_n \neq 0$ و همه ضرایب عدد حقیقی هستند را یک تابع چند جمله ای از درجه n می نامند.

مثلاً تابع $y = x^4 + \sqrt{2}x + 1$ یک چند جمله ای درجه ۴ است، اما تابع $y = x^4 + \sqrt{2x} + 1$ چند جمله ای نیست.

چند ویژگی

۱) برای تابع $f(x) = 0$ درجه تعریف نمی شود.

۲) درجه تابع ثابت $f(x) = c$ برابر صفر است.

۳) درجه تابع خطی $f(x) = mx + b$ برابر ۱ است.

۴) درجه تابع سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ برابر ۲ است.

۱۴۰ ۴

چون تابع $f(x)$ یک چند جمله ای است، باید توان های متغیرهای آن، اعداد حسابی ($\mathbb{W}$) باشد، داریم:

$$1) (n-3) \in \mathbb{W} \Rightarrow n-3 \geq 0 \Rightarrow n \geq 3$$

$$\Rightarrow (2 + \frac{3}{n}) \in \mathbb{W}$$

$$2) \frac{2n+3}{n} \in \mathbb{W} \Rightarrow (\frac{2n}{n} + \frac{3}{n}) \in \mathbb{W}$$

از طرفی می دانیم $n \geq 3$ است، پس برای آنکه $2 + \frac{3}{n}$ یک عدد حسابی باشد فقط $n = 3$ قابل قبول است. بنابراین تابع $f(x)$ به صورت $f(x) = x^3 + x^3 - 2 + 1 + 3 = 2x^3 + 2$ است.

اکنون حاصل $f(3)$ را به دست می آوریم:

$$f(3) = 2(3)^3 + 2 = 56$$

۱۳۹ ۲

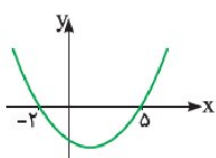
طبق شکل صورت سؤال، نمودار تابع $y = x^2$ ابتدا ۲ واحد به سمت راست منتقل شده، سپس نسبت به محور x قرینه شده و در نهایت ۱ واحد به بالا منتقل شده:

$$y = x^2 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x} y = -(x-2)^2 \xrightarrow{\text{۲ واحد به راست}} y = -(x-2)^2 + 1$$

$$\xrightarrow{\text{۱ واحد به بالا}} y = -(x-2)^2 + 1$$

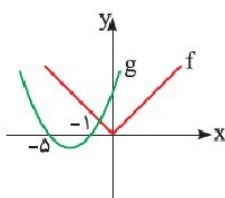
۱۴۰ ۳

نمودار تابع $y = x^2 - 3x - 10$ محور x ها را در دو نقطه با طول های ۵ و ۲ قطع می کند، حال اگر این سهمی را حداقل ۲ واحد به طرف x های مثبت انتقال دهیم، طول نقاط تلاقی اش با محور x ها منفی نیست.



۱۴۱ ۴

نمودار دو تابع $f(x) = |x|$ و $g(x) = x^2 + 6x + 5$ را در یک دستگاه



مختصات رسم می کنیم. مطابق شکل اگر نمودار g را حداقل ۵ واحد به سمت راست انتقال دهیم، طول نقطه مشترک آن با نمودار f نامنفی می شود.

۱۴۲ ۲

ابتدا x را به $x - a$ تبدیل می کنیم. سپس b واحد از y کم می کنیم. معادله منحنی حاصل برابر است با:

$$y = (x-a)^2 - 6(x-a) + 10 - b$$

$$\Rightarrow y = x^2 - 2ax + a^2 - 6x + 6a + 10 - b$$

$$\Rightarrow y = x^2 - (2a+6)x + a^2 + 6a + 10 - b$$

با مقایسه ضابطه تابع $g(x)$ با معادله منحنی بالا داریم:

$$\begin{cases} 2a+6=12 \\ a^2+6a+10-b=34 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=3 \end{cases}$$

بنابراین مقدار $a+b = 3+3 = 6$ است.

۱۴۳ ۲

ابتدا x را به $-x$ و y را به $-y$ (قرینه نسبت به مبدأ مختصات) تبدیل می کنیم. سپس ۴ واحد به y اضافه می کنیم. پس معادله منحنی حاصل

$$y = -(-x-1)^2 + 4 = -x^2 - 2x + 3$$

برابر است با:

حال محل برخورد منحنی اولیه و منحنی جدید را به دست می آوریم:

$$\underbrace{(x-1)^2}_{x^2-2x+1} = -x^2 - 2x + 3 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

فصل اول • تابع |

اکنون با محاسبه ریشه‌های تابع f ، مختصات نقاط B و C را به دست می‌آوریم:

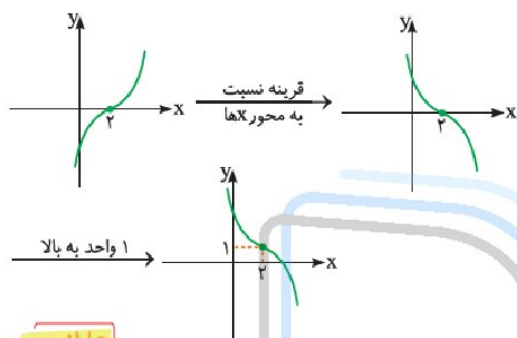
$$f(x) = 0 \Rightarrow -2x^2 + 18 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} B(-3, 0) \\ C(3, 0) \end{cases}$$

اکنون مساحت مثلث ABC را به دست می‌آوریم:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{6 \times 18}{2} = 54$$

۱۴۲ ۲

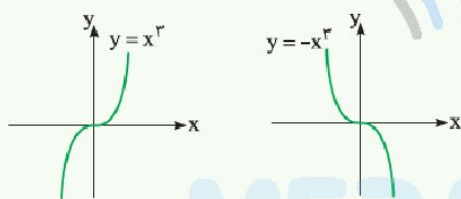
نمودار تابع $y = x^3$ را ۲ واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم و با کمک قوانین تبدیل تابع، داریم:



هائیلایت

تابع درجه سوم

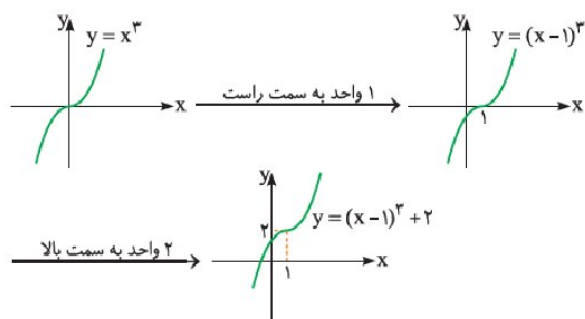
هر تابع به صورت $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ با شرط $a \neq 0$ ، یک تابع درجه ۳ است. دامنه و بُرد این تابع برابر $\mathbb{R}$ است. نمودار تابع $y = x^3$ و $y = -x^3$ به صورت زیر است:



تنها صفر این تابع نقطه $x = 0$ است. یعنی نمودار تابع فقط در نقطه به طول $x = 0$ محور x ها را قطع می‌کند.

۱۴۳ ۴

ضابطه تابع داده شده را با کمک اتحاد مکعب دو جمله‌ای می‌توانیم به صورت $y = (x-1)^3 + 2$ بنویسیم. بنابراین روند رسم نمودار به صورت زیر خواهد بود:



مطابق شکل، نمودار از ناحیه چهارم عبور نمی‌کند.

۱۳۶ ۱

اگر x_1 و x_2 صفرهای تابع f باشند، در انتقال افقی و عمودی تابع، عمل برخورد تابع با محور طول‌ها تغییر می‌کند. چون توابع موجود در موارد الف و ب، دچار انتقال افقی و عمودی نشده‌اند، پس x_1 و x_2 صفرهای این توابع نیز هستند.

۱۳۷ ۱

ابتدا x را به $x-3$ (۳ واحد به طرف x های مثبت) تبدیل می‌کنیم و سپس ۲ واحد از y کم می‌کنیم (۲ واحد به طرف y های منفی):

$$y = -x^2 + 2x + 5 \Rightarrow y = -(x-3)^2 + 2(x-3) + 5 - 2 = -(x^2 - 6x + 9) + 2x - 6 + 3 = -x^2 + 8x - 12$$

برای پیدا کردن بازه‌ای که در آن نمودار بالای نیمساز ربع اول است، باید نامعادله زیر را حل کنیم:

$$x < -x^2 + 8x - 12 \Rightarrow x^2 - 7x + 12 < 0 \Rightarrow 3 < x < 4$$

۱۳۸ ۴

$$y = 4x - x^2 \xrightarrow{x \rightarrow x+2} g(x) = 4(x+2) - (x+2)^2 = -x^2 + 4$$

حال نقطه برخورد منحنی جدید با نمودار تابع f را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 4x - x^2 = -x^2 + 4 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$$

پس فاصله نقطه A از مبدأ مختصات برابر است با:

$$\Rightarrow A(1, 3) \Rightarrow |OA| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

۱۳۹ ۱

برای این که نمودار نسبت به محور x ها قرینه شود، y را در منفی یک ضرب و برای انتقال آن به اندازه ۱۶ واحد به بالا، ۱۶ واحد به y اضافه می‌کنیم:

$$y = -(x^2 - 2x) + 16 = -x^2 + 2x + 16$$

حال برای پیدا کردن طول نقطه برخورد نمودار جدید با نمودار اولیه داریم:

$$x^2 - 2x = -x^2 + 2x + 16 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 16 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases}$$

چون $x > 1$ است، پس $(4, 8)$ نقطه برخورد دو نمودار است و فاصله آن از

$$\text{مبدأ مختصات برابر است با: } \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{4^2(1+4)} = 4\sqrt{5}$$

۱۴۰ ۲

تغییرات را مرحله به مرحله اعمال می‌کنیم:

$$y = (x+1)^2 \xrightarrow{x \rightarrow x-2} y = (x-1)^2 \xrightarrow{x \rightarrow 3x} y_{\text{new}} = (3x-1)^2$$

حال محل برخورد نمودار تابع $y = (x+1)^2$ و نمودار تابع جدید را مشخص

می‌کنیم:

$$(x+1)^2 = (3x-1)^2 \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 3x-1 \Rightarrow x=1 \\ x+1 = -(3x-1) \Rightarrow x=0 \end{cases}$$

۱۴۱ ۲

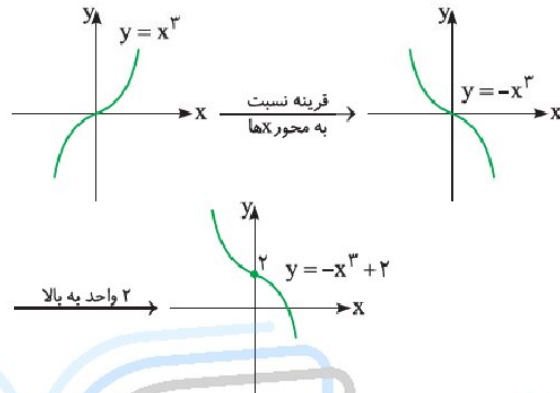
با توجه به نمودار تابع، چون رأس سهمی روی محور عرض‌ها قرار دارد، پس طول رأس سهمی باید برابر صفر بوده و در نتیجه ضریب x در ضابطه تابع باید برابر صفر باشد:

$$m+2=0 \Rightarrow m=-2 \rightarrow f(x) = -2x^2 + 18 \Rightarrow A(0, 18)$$



۱۴۴ ۲

در نمودار داده شده، نمودار تابع $y = -x^3$ ، واحد به سمت راست و واحد به سمت بالا منتقل شده است، پس $a = 2, b = 1$ است. پس $y = -bx^3 + a$ به صورت $-x^3 + 2$ است و نمودار آن به صورت زیر است:



۱۴۵ ۲

با توجه به نمودار تابع، می‌دانیم تابع مورد نظر $y = mx^3$ است ($m < 0$) که ۲ واحد به سمت راست و یک واحد به سمت بالا انتقال یافته است، پس:

$$y = m(x-2)^3 + 1$$

$$P = 1, n = 2$$

نتیجه می‌شود که:

$$\text{حال با جای گذاری نقطه } (3, 0), \text{ مقدار } m \text{ را به دست می‌آوریم:}$$

$$0 = m(3-2)^3 + 1 \Rightarrow m = -1$$

پس $\frac{mP}{n} = \frac{-1}{2} = -0.5$ است.

۱۴۶ ۲

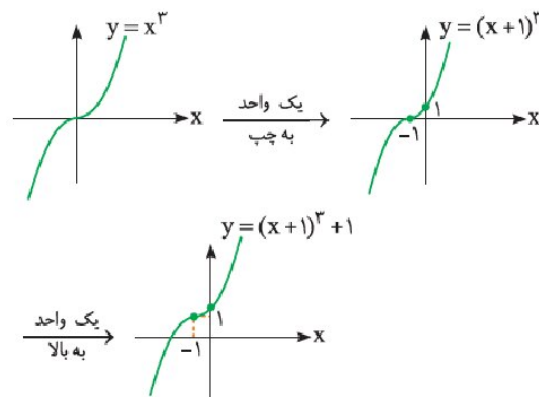
ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 9 - 7 = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$$

از طرفی می‌دانیم $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ ، در نتیجه $f(x)$ را می‌توان به فرم زیر بازنویسی کرد:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 1 = (x+1)^3 + 1$$

برای رسم این تابع، از انتقال $y = x^3$ استفاده می‌کنیم:



پس $a = 1$ و $b = 1$ است. بنابراین $a + b = 2$ است.

۱۴۷ ۴

ابتدا ضابطه تابع اولیه را به کمک اتحاد مکعب دو جمله‌ای ساده می‌کنیم:

$$y = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 1 = (x-1)^3 + 1$$

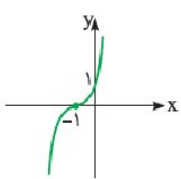
پس باید این نمودار را یک واحد به سمت چپ منتقل کنیم تا به نمودار $y = x^3 + 1$ برسیم و سپس آن را یک واحد به پایین منتقل کنیم.

۱۴۸ ۱

ابتدا به کمک اتحاد مکعب دو جمله‌ای، ضابطه f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - 1 - m = (x+1)^3 - 1 - m$$

حال نمودار تابع f را بدون در نظر گرفتن مقدار $-1 - m$ رسم می‌کنیم:



برای این که این نمودار از ناحیه چهارم عبور نکند، می‌توانیم آن را حداکثر ۱ واحد به پایین منتقل کنیم: پس:

$$-1 - m \geq -1 \Rightarrow -m \geq 0 \Rightarrow m \leq 0$$

۱۴۹ ۱

با توجه به اتحاد $(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ ، ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$y = x^3 - 6x^2 + 12x - m = (x-2)^3 + 8 - m$$

حالا نمودار را ۲ واحد به چپ و سپس ۲ واحد به بالا منتقل می‌کنیم. برای این کار x را به $x+2$ تبدیل می‌کنیم و سپس ۲ واحد به y ها اضافه می‌کنیم:

$$y = (x+2-2)^3 + 8 - m + 2 = x^3 + 10 - m$$

در ضمن می‌دانیم ضابطه منحنی بعد از انتقال به $y = x^3 + 2$ تبدیل می‌شود، پس:

$$10 - m = 2 \Rightarrow m = 8$$

۱۵۰ ۲

ابتدا ضابطه نمودار داده شده در شکل صورت سؤال را ساده می‌کنیم:

$$y = f(x) - xg(x) = ax + b - x(x^2 - 6x + c)$$

$$= -x^3 + 6x^2 + (a-c)x + b$$

پس شکل صورت سؤال از انتقال و قرینه یابی نمودار $y = x^3$ به دست آمده است. بنابراین با توجه به قوانین انتقال، این نمودار مربوط به $y = 3 - (x-2)^3$ است:

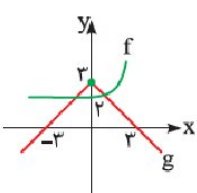
$$y = 3 - (x-2)^3 = -x^3 + 6x^2 - 12x + 11$$

با مقایسه این ضابطه با ضابطه $y = -x^3 + 6x^2 + (a-c)x + b$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a-c = -12 \\ b = 11 \end{cases} \Rightarrow a+b-c = (a-c) + b = -12 + 11 = -1$$

۱۵۱ ۲

ابتدا ضابطه f را ساده می‌کنیم و سپس نمودار دو تابع f, g را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

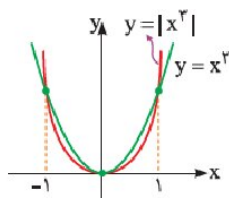
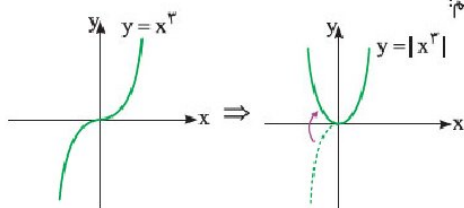


$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 2 & ; x \geq 0 \\ 2 & ; x < 0 \end{cases}$$

مطابق شکل، دو تابع f و g در دو نقطه متقاطع‌اند.

۱۵۵ ۲

ابتدا نمودار تابع $y = x^3$ را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. سپس قسمت‌هایی از نمودار که زیر محور x قرار دارد را، نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم:



حالا با توجه به نمودار دو تابع $y = x^2$ و $y = x^3$ ، نمودار دو تابع $y = |x^2|$ و $y = |x^3|$ را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

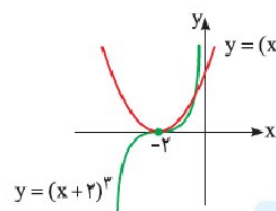
با توجه به شکل مقابل، در بازه‌های $(-1, 0)$ و $(0, 1)$ نمودار تابع $y = |x^3|$ پایین‌تر از نمودار $y = x^2$ قرار دارد.

۱۵۶ ۲

ابتدا به کمک اتحادها توابع را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x) = x^2 + 4x + 4 \xrightarrow{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}} f(x) = (x+2)^2$$

$$g(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 \xrightarrow{\text{اتحاد مکعب دوجمله‌ای}} g(x) = (x+2)^3$$



برای رسم تابع f ، تابع $y = x^2$ را دو واحد به سمت چپ و برای رسم تابع g ، تابع $y = x^3$ را دو واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم:

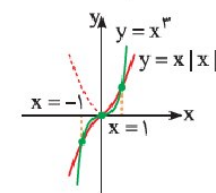
با توجه به نمودار دو تابع، در بازه $(-1, +\infty)$ تابع f پایین‌تر از g قرار دارد.

۱۵۷ ۳

ابتدا تابع $y = x|x|$ را به ازای ریشه عبارت داخل قدرمطلق به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

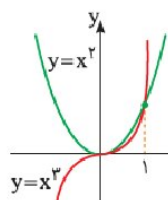
$$y = x|x| = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 0 \\ -x^2 & ; x < 0 \end{cases}$$

سپس هر دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم: مطابق شکل در ۳ نقطه برخورد دارند.



۱۵۸ ۳

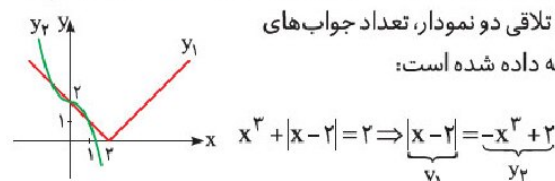
ابتدا نمودار دو تابع $y = x^3$ و $y = x^2$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



$$\Rightarrow \begin{cases} x^3 > x^2 \Rightarrow x \in (1, +\infty) \\ x^3 \leq x^2 \Rightarrow x \in (-\infty, 1] \end{cases}$$

۱۵۲ ۳

برای به دست آوردن تعداد جواب‌های معادله، باید نمودار دو تابع $y_1 = |x-2|$ و $y_2 = -x^3 + 2$ را در یک دستگاه مختصات رسم کرد. تعداد تلاقی دو نمودار، تعداد جواب‌های معادله داده شده است:



مطابق شکل، دو نمودار در ۳ نقطه تلاقی دارند، بنابراین معادله داده شده، دارای ۳ جواب است.

۱۵۳ ۳

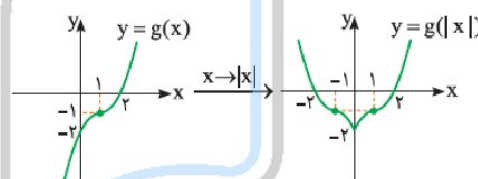
ابتدا ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = (x^2 + 3)(x - 3) = x^3 - 3x^2 + 3x - 9 = (x-1)^3 - 8$$

حالا نمودار را ۷ واحد به بالا منتقل می‌کنیم:

$$g(x) = f(x) + 7 = (x-1)^3 - 1$$

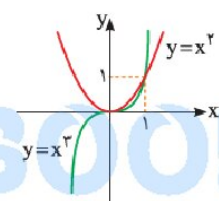
نمودار تابع $g(x)$ به صورت زیر است:



با توجه به نمودار تابع $y = g(|x|)$ واضح است این نمودار در بازه $(-2, 2)$ زیر محور x ها قرار دارد.

۱۵۴ ۲

از شکل کتاب درسی می‌دانیم نمودار $y = x^2$ و $y = x^3$ در یک دستگاه به فرم روبه‌رو است:

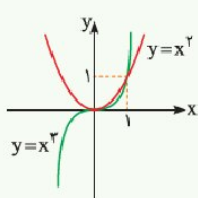


حال نمودار تابع $y = x^3$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا $y = -x^3$ به دست آید.

مشاهده می‌شود که در بازه $(-\infty, -1)$ نمودار تابع $y = -x^3$ بالاتر از نمودار تابع $y = x^2$ قرار می‌گیرد.

مقایسه

مقایسه $y = x^2$ و $y = x^3$



به نمودار دو تابع $y = x^2$ و $y = x^3$ توجه کنید:

۱ این دو تابع در دو نقطه با طول‌های $x = 1$ و $x = 0$ متقاطع‌اند.

۲ در بازه $(1, +\infty)$ نمودار تابع $y = x^3$ بالاتر از نمودار تابع $y = x^2$ قرار دارد.

۳ در بازه $(0, 1)$ نمودار تابع $y = x^2$ بالاتر از نمودار تابع $y = x^3$ است.



ریاضیات تجربی جامع کنکور

۱۶۳ ۳

ابتدا x را به $x-12$ تبدیل می‌کنیم و سپس ۲ واحد به y اضافه می‌کنیم تا منحنی $y = \sqrt{x-12} + 2$ به دست آید. حال برای پیدا کردن نقطه برخورد این منحنی با نمودار $f(x) = \sqrt{x}$ داریم:

$$\sqrt{x-12} + 2 = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{حل معادله}} x=16 \xrightarrow{\sqrt{16}=4} (16, 4) = \text{نقطه برخورد}$$

پس فاصله نقطه برخورد از مبدأ مختصات برابر است با:

$$\sqrt{16^2 + 4^2} = \sqrt{4^2(16+1)} = 4\sqrt{17}$$

۱۶۴ ۳

$$y = 3 - \sqrt{2x} \xrightarrow{\text{۱ واحد به چپ}} y = 3 - \sqrt{2(x+1)}$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x} y = -3 + \sqrt{2(x+1)}$$

$$\xrightarrow{\text{۵ واحد به سمت بالا}} y = 2 + \sqrt{2(x+1)}$$

برای یافتن نقطه تلاقی y با تابع ثابت $f(x) = \frac{y}{y}$ ، معادله زیر را حل می‌کنیم:

$$2 + \sqrt{2(x+1)} = \frac{y}{y} \Rightarrow \sqrt{2(x+1)} = \frac{y}{y} - 2$$

$$\Rightarrow 2(x+1) = \frac{9}{4} \Rightarrow 2x = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{8}$$

۱۶۵ ۴

ابتدا ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{x+5+4\sqrt{x+1}} = \sqrt{(\sqrt{x+1}+2)^2}$$

$$= \sqrt{x+1} + 2$$

برای رسم نمودار تابع f کافی است که نمودار

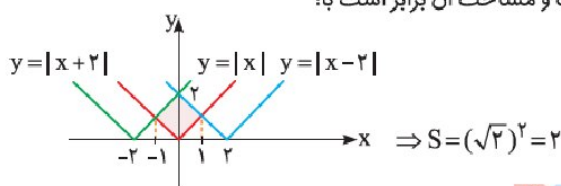
تابع $y = \sqrt{x}$ را ۱ واحد به چپ و سپس ۲

واحد به بالا منتقل کنیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow a \times b = -2$$

۱۶۶ ۱

نمودار هر سه تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. چهارضلعی رنگی یک مربع به قطر ۲ بوده، پس طول ضلع آن برابر $\sqrt{2}$ است و مساحت آن برابر است با:



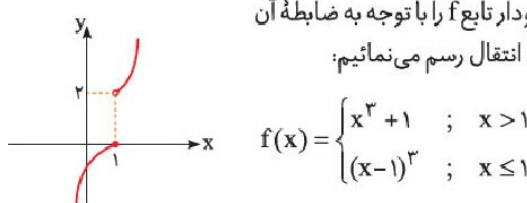
۱۶۷ ۲

برای این که نمودار ۴ واحد به چپ منتقل شود باید $x \rightarrow x+4$ تبدیل شود؛ همچنین برای این که نمودار را یک واحد به طرف y های مثبت انتقال دهیم کافیست یک واحد به y اضافه کنیم:

$$y = \left| \frac{1}{4}x \right| - 2 \Rightarrow y = \left| \frac{1}{4}(x+4) \right| - 2 \Rightarrow$$

$$y = \left| \frac{1}{4}x + 2 \right| - 2 + 1$$

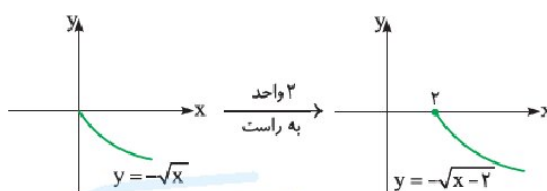
حال نمودار تابع f را با توجه به ضابطه آن به کمک انتقال رسم می‌نمائیم:



پس به ازای $k=1$ و $k=2$ ، نمودار f و خط $y=k$ بر خوردی ندارند.

۱۵۹ ۲

برای این که به نمودار داده شده برسیم، باید به ترتیب زیر عمل کنیم:



۱۶۰ ۱

با توجه به شکل، نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ ابتدا نسبت به محور y ها قرینه شده تا نمودار $y = \sqrt{-x}$ به دست آید. سپس ۱ واحد به راست و ۲ واحد به پایین منتقل شده، پس ضابطه این نمودار به صورت زیر است:

$$y = -2 + \sqrt{-(x-1)} = -2 + \sqrt{-x+1}$$

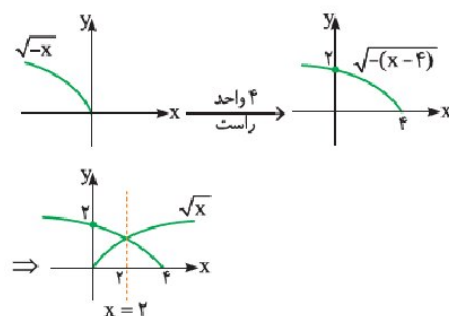
با مقایسه ضابطه به دست آمده و ضابطه صورت سؤال $a=-2$ و $b=1$ بوده و $a \times b = -2$ است.

۱۶۱ ۲

ابتدا x را به $x+1$ (نمودار را یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم) تبدیل می‌کنیم تا به $y = \sqrt{x+1+1} = \sqrt{x+2}$ برسیم. سپس نمودار را نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = -\sqrt{-x+2}$ به دست آید.

۱۶۲ ۳

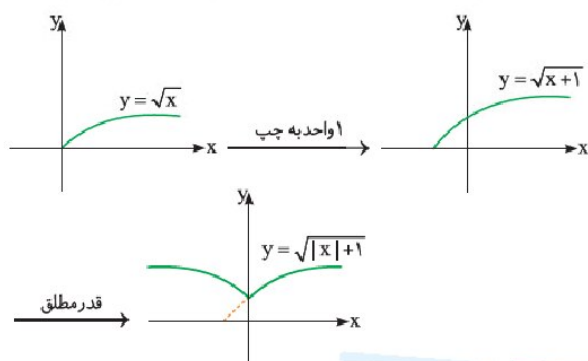
ابتدا نمودار $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y قرینه کرده و سپس آن را ۴ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم:



با توجه به شکل، نمودار $y = \sqrt{x}$ و $y = \sqrt{-x+4}$ نسبت به خط $x=2$ تقارن دارند.

۱۷۲ ۲

ابتدا نمودار تابع $y = \sqrt{x+1}$ را رسم کرده و قسمتی که در سمت چپ محور x است را حذف می‌کنیم؛ سپس قرینه قسمت باقی‌مانده را نسبت به محور y به دست آورده و آن را به نمودار اضافه می‌کنیم:



۱۷۳ ۲

$$f(x) = \sqrt{x+3} \xrightarrow[\text{به راست واحد } b]{\text{واحد } b} y = \sqrt{x-b+3}$$

بنابراین عرض از مبدأ تابع جدید برابر است با:

$$x=0: y = \sqrt{0-b+3} = \sqrt{3-b}$$

فاصله عرض از مبدأ، یعنی نقطه $A(0, \sqrt{3-b})$ تا خط $x-y=0$ برابر است با:

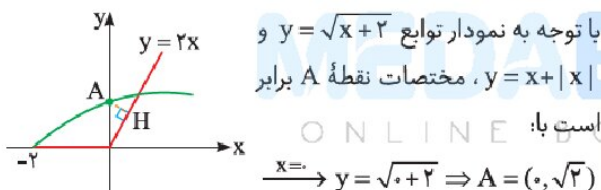
$$AH = \frac{|0 - \sqrt{3-b}|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{3-b}}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \sqrt{3-b} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 3-b=2 \Rightarrow b=1$$

حالا $f(b)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{x+3} \xrightarrow{b=1} f(1) = \sqrt{1+3} = 2$$

۱۷۴ ۳



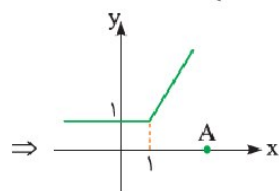
فاصله نقطه A از خط $y-2x=0$ به دست می‌آوریم:

$$AH = \frac{|\sqrt{2} - 2(0)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5} = 0.2\sqrt{10}$$

۱۷۵ ۴

ضابطه تابع f را در $x=1$ باز می‌کنیم و نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = x + |x-1| = \begin{cases} 2x-1 & ; x \geq 1 \\ 1 & ; x < 1 \end{cases}$$



بنابراین ضابطه نمودار جدید به صورت $y = |\frac{1}{4}x + 2| - 1$ است. حال برای به دست آوردن طول نقطه تقاطع نمودار جدید و نمودار اولیه داریم:

$$y_{\text{new}} = y_{\text{first}} \Rightarrow |\frac{1}{4}x + 2| - 1 = |\frac{1}{4}x| - 2 \xrightarrow[\text{گزینه ها}]{\text{جای گذاری}} x = -3$$

۱۶۸ ۳

$$y = |x| \xrightarrow[\text{به چپ واحد } 1]{\text{انساز قائم با ضریب } 2} y = 2|x+1|$$

$$\xrightarrow[\text{به محور ها}]{\text{قرینه نسبت}} y = 2|-x+1| = 2|1-x|$$

۱۶۹ ۴

ابتدا ضابطه $y = -\frac{1}{4}|2x+1|$ را ساده می‌کنیم:

$$y = -\frac{1}{4}|2x+1| = -|x+\frac{1}{2}|$$

حالا اگر بخواهیم از نمودار تابع $y = |x|$ به $y = -|x+\frac{1}{2}|$ برسیم، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$y = |x| \xrightarrow[\text{به چپ واحد } \frac{1}{2}]{\text{قرینه نسبت به محور } x} y = -|x+\frac{1}{2}|$$

۱۷۰ ۲

برای رسم نمودار $f(x) = \sqrt{x+2}$ باید نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را ۲ واحد

به چپ منتقل کنیم و برای رسم

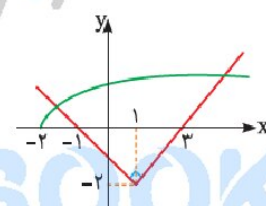
نمودار $g(x) = |x-1| - 2$ باید نمودار

$y = |x|$ را ۱ واحد به راست و ۲

واحد به پایین منتقل کنیم:

با توجه به شکل، این نمودارها در ۲

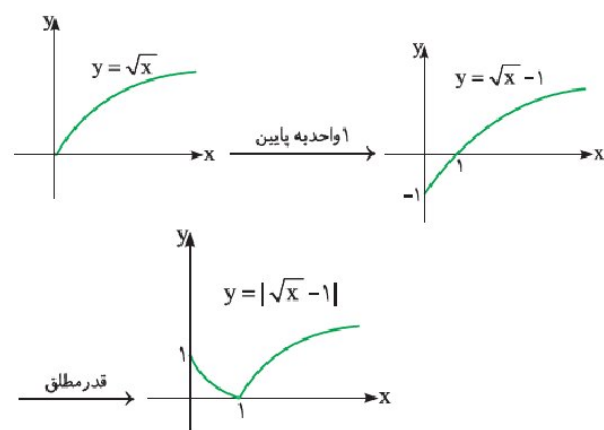
نقطه متقاطع‌اند.



۱۷۱ ۲

نمودار تابع $y = \sqrt{x} - 1$ را رسم می‌کنیم و قسمت‌هایی که زیر محور x

قرار دارند را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم:



هارلاوت

توابع هموگرافیک

هر تابع به صورت $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ با دو شرط $c \neq 0$ و $ad-bc \neq 0$ را تابع هموگرافیک می‌گویند که دامنه آن برابر $D_f = \mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\}$ و بُرد آن برابر $R_f = \mathbb{R} - \{\frac{a}{c}\}$ می‌باشد.

برای رسم توابع هموگرافیک مراحل زیر را طی می‌کنیم:

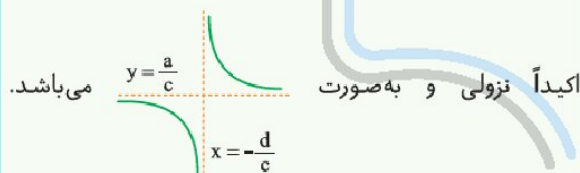
۱) یک خط چین عمودی با طولی برابر با ریشهٔ مخرج یعنی $x = -\frac{d}{c}$ در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.

۲) یک خط چین افقی با عرضی برابر با $y = \frac{a}{c}$ در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.

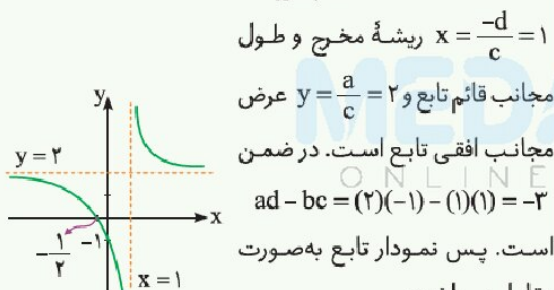
اگر $ad - bc > 0$ باشد، نمودار اطراف محانب‌ها دارای



باشد، $ad - bc < 0$ ، نمودار اطراف مجانب‌ها دارای رفتار



به عنوان مثال نمودار تابع $y = \frac{2x+1}{x-1}$ به صورت زیر رسم می شود:



مقابل می باشد:

$$y = \frac{a}{c} = \text{مجانِب قائم تابع و } x = -\frac{d}{c} = \text{, } f(x) = \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x-1} \text{ در تابع}$$

مجانب افقی تابع است. در ضمن

$$ad - bc = (0)(0) - (1)(1) = -1$$

است. پس نمودار در دامنه
 $\{0\} - [-3, 3]$ به صورت مقابل است:

پس برد تابع برابر بازه $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) - \mathbb{R}$ است.

با فرض $A(a, 0)$ ، فاصله نقطه A از خط $y = 2x - 1$ را برابر $\sqrt{5}$ قرار می‌دهیم؛ (توجه کنید اگر $a \leq 1$ باشد، فاصله نقطه A تا نمودار f برابر ۱ است).

$$\begin{cases} \gamma x - y - 1 = 0 \\ A(a, \cdot) \end{cases} \Rightarrow AH = \frac{|\gamma a - 1|}{\sqrt{\gamma^2 + (-1)^2}} = \sqrt{\Delta} \Rightarrow |\gamma a - 1| = \Delta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a - 1 = 5 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3 \checkmark \\ 2a - 1 = -5 \Rightarrow 2a = -4 \Rightarrow a = -2 \times \end{cases}$$

در ضمن عرض از مبدأ تابع f برابر $B(0,1)$ است، پس:

$$AB = \sqrt{(3-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}.$$

فقط در عبارت (الف) صورت و مخرج کسر چندجمله‌ای است؛ پس فقط این عبارت مربوط به تابعی گویا است. در عبارت (ب) تابع شامل قدرمطلق است و در عبارت (ب) در صورت کسر $\sqrt{x}$ وجود دارد.

توابع گویا

هر تابع به شکل $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ را یک تابع گویا می‌نامیم، که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چندجمله‌ای هستند و چندجمله‌ای $Q(x)$ صفر نیست، یعنی $Q(x) \neq 0$. پس دامنه آن‌ها به صورت زیر است:

$$D_f = \mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$$

به ازای $x = 1$ مخرج کسر صفر می‌شود، پس $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ بنا بر این:



در توابع گویا باید صورت و مخرج کسر چند جمله‌ای باشند، پس $k = 0$

است و $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$ می باشد. پس:

$$f(f(1) + 9) = f(-1 + 9) = f(8) = 9$$

$$y = \frac{a}{c} = 0 \text{، } x = \frac{-d}{c} = 0 \text{، } f(x) = \frac{-1}{x} = \frac{-x-1}{x-0} \text{ در تابع}$$

مجاناً افقی تابع می باشد. در ضمن

$$ad - bc = (6)(6) - (-1)(1) = 1$$

است. یس نمودار تابع در دامنه

به صورت $D_f = [-\Delta, \Delta] - \{0\}$

زیر می باشد:

برخورد می‌کند داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|x|} &= \frac{1}{|x-a|} - 2 \xrightarrow{x=\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}-a} - 2 \\ \Rightarrow 2+\sqrt{2} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}-a} \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}-a &= \frac{1}{2+\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{2}-2a}{2} &= \frac{2-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2}-2a}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = \sqrt{2}-1 \\ \frac{\sqrt{2}-2a}{2} = \frac{\sqrt{2}-2}{2} \Rightarrow a = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

در ضمن می‌دانیم f تابعی همانی است، پس $f(x+a) = x+a$ بوده و حالا به ازای هر دو مقدار a معادله $f(x+a) = 3$ را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f(x+a) = 3 &\Rightarrow x+a = 3 \\ \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{2}-1 \Rightarrow x + \sqrt{2}-1 = 3 \Rightarrow x = 4-\sqrt{2} \\ a = 1 \Rightarrow x+1 = 3 \Rightarrow x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

پس اختلاف مقادیر به دست آمده برابر است با:

$$(4-\sqrt{2}) - (2) = 2-\sqrt{2}$$

ابتدا ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 - 16} = \frac{(x+3)(x+4)}{(x-4)(x+4)} = \frac{x+3}{x-4}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{\pm 4\}$$

چون $x = -4$ جزء دامنه تابع نیست پس $f(-4) = \frac{1}{\lambda}$ هم جزء برد تابع

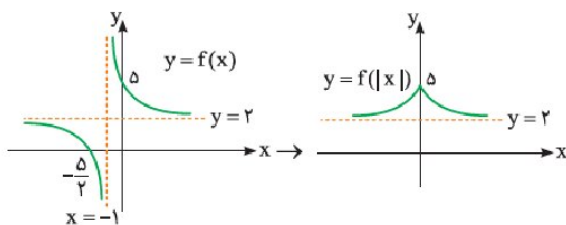
نیست. از طرفی می‌دانیم برد تابع هموگرافیک $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت

$$\mathbb{R} - \left\{ \frac{a}{c} \right\}$$

$$R_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{\lambda}, 1 \right\}$$

دامتستی آگه $x = -4$ رو فراموش کنی میزنی گزینه ۱.

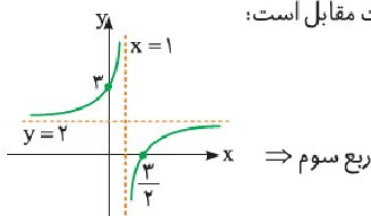
ابتدا نمودار تابع $f(x) = \frac{2x+5}{x+1}$ را رسم کرده و از روی آن، نمودار تابع $f(|x|)$ را رسم می‌کنیم:



بنابراین با توجه به نمودار تابع $y = f(|x|)$ ، برد این تابع برابر بازه $(2, 5]$ است.

۱۸۱ ۳

در تابع $y = \frac{a}{c} = 2$ مجانب قائم تابع و $x = -\frac{d}{c} = 1$ ، $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$ مجانب افقی تابع است، از طرفی $ad - bc = (2)(-1) - (-3)(1) = 1$ است. پس نمودار به صورت مقابل است:



۱۸۲ ۲

با توجه به نمودار تابع $f(x) = \frac{mx-1}{x-n}$ طول مجانب قائم تابع می‌باشد، از طرفی با توجه به ضابطه تابع $x = n$ مجانب قائم تابع می‌باشد، پس $n = 1$ است. در ضمن با توجه به ضابطه $y = m$ ، مجانب افقی تابع بوده و از روی نمودار واضح است که $y = 2$ مجانب افقی تابع می‌باشد، پس $m = 2$ و $mn = 2$ می‌باشد.

۱۸۳ ۴

$$f(x) = \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{فرینه نسبت به محور } x} y = \frac{1}{x-1} \xrightarrow{\text{واحد به راست}} y = -\frac{1}{x-1}$$

$$\xrightarrow{\text{واحد به پایین}} y = -2 - \frac{1}{x-1} = \frac{-2x+1}{x-1}$$

حال نقطه برخورد این منحنی را با نمودار تابع f پیدا می‌کنیم:

$$\frac{-2x+1}{x-1} = \frac{1}{x} \Rightarrow -2x^2 + x = x - 1$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \xrightarrow{y = \frac{1}{x}} \begin{cases} A(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}) \\ B(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}) \end{cases}$$

پس این نمودارها در دو نقطه $A(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$ و $B(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2})$ متقاطع اند و فاصله هر یک از آن‌ها از مبدأ مختصات برابر است با:

$$\begin{aligned} OA = OB &= \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} + 2} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \end{aligned}$$

۱۸۴ ۳

چون f تابع همانی است، پس $\frac{1}{f} = \frac{1}{x}$ می‌باشد و داریم:

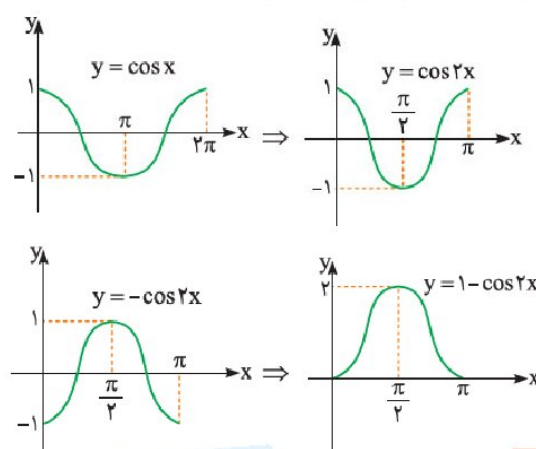
$$y = \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{واحد به سمت راست}} g(x) = \frac{1}{x-a}$$

$$\xrightarrow{\text{قدر مطلق}} |g(x)| = \left| \frac{1}{x-a} \right| \xrightarrow{\text{واحد به سمت پایین}} |g(x)| - 2 = \frac{1}{|x-a|} - 2$$

حال با توجه به این که نمودار حاصل با نمودار $\frac{1}{|f|}$ در $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$



نمودار تابع $y = \cos x$ را رسم و تغییرات را مرحله به مرحله اعمال می‌کنیم:



به ترتیب تبدیل‌های زیر را انجام می‌دهیم:

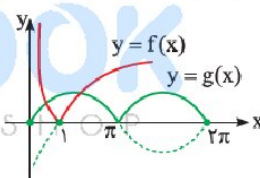
$$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow{x \rightarrow x + \frac{3\pi}{4}} y = \cos\left(x + \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y} y = \cos\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\xrightarrow{\text{واحد به بالا}} y = 2 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

از طرفی می‌دانیم $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ است، پس می‌توانیم ضابطه تابع حاصل را به صورت مقابل نمایش دهیم:

نمودار $f(x) = |\sin x|$ و $g(x) = \log_2 x$ به صورت زیر می‌باشد:

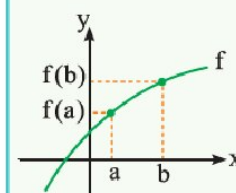


با توجه به نمودار، تابع f و g در دو نقطه برخورد دارند.

با توجه به نمودار، بزرگ‌ترین بازه صعودی برابر $[4, 8]$ و بزرگ‌ترین بازه نزولی برابر $[1, 3]$ است. بنابراین مقدار $a + d$ برابر $4 + 3 = 7$ است.

هابلایت

تابع صعودی و نزولی



به تابعی که در آن با افزایش مقدار x ، مقدار y هم افزایش یابد، تابع اکیداً صعودی می‌گویند. در تابع اکیداً صعودی f ، برای هر دو مقدار a و b در دامنه داریم:

$$a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$$

به تابعی که در آن با افزایش مقدار x ، مقدار y افزایش یابد یا ثابت بماند، تابع صعودی می‌گویند. در تابع صعودی f ، برای هر دو مقدار a و b در دامنه داریم:

$$a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$$

به تابعی که در آن، با افزایش مقدار x ، مقدار y کاهش یابد، تابع اکیداً نزولی می‌گویند. در تابع اکیداً نزولی f ، برای هر دو مقدار a و b در دامنه داریم:

$$a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$$

به تابعی که در آن، با افزایش مقدار x ، مقدار y کاهش یابد یا ثابت بماند، تابع نزولی می‌گویند. در تابع نزولی f ، برای هر دو مقدار a و b در دامنه داریم:

$$a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$$

کلمه اکید نشان می‌دهد تابع در هیچ بازه‌ای ثابت نیست.

اگر تابعی اکیداً یکنوا باشد، حتماً یک‌به یک است، اما عکس این مطلب ممکن است برقرار نباشد.

تابع ثابت $y = k$ ، تنها تابعی است که در هر بازه هم صعودی و هم نزولی می‌باشد. بنابراین یک تابع یکنوا است.

تعریف آورده شده در صورت سؤال، مربوط به تعریف تابع اکیداً نزولی است. بنابراین در تابع $f(x)$ ، به دنبال بازه‌ای می‌گردیم که تابع در آن اکیداً نزولی باشد. طول رأس سهمی برابر 2 و دهانه $x_s = \frac{-(-8)}{2(2)} = 2$ و دهانه سهمی روبه بالا است. بنابراین تابع در بازه $(-\infty, 2]$ و هر زیرمجموعه‌ای از آن اکیداً نزولی است.

چون تابع f یک تابع نزولی است پس باید $f(1) \leq f(0) \leq f(-2)$ باشد:

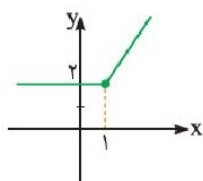
$$f(1) \leq f(0) \leq f(-2) \Rightarrow |m| - 2 \leq m^2 - 1 \leq 1$$

حالا برای حل نامعادله فوق داریم:

$$1) m^2 - 1 \leq 1 \Rightarrow m^2 \leq 2 \Rightarrow |m| \leq \sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$$

$$2) m^2 - 1 \geq |m| - 2 \Rightarrow m^2 + 1 \geq |m| \Rightarrow m \in \mathbb{R}$$

از اشتراک بازه‌های به دست آمده، حدود m برابر $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ به دست می‌آید که این بازه شامل ۳ عدد صحیح است.

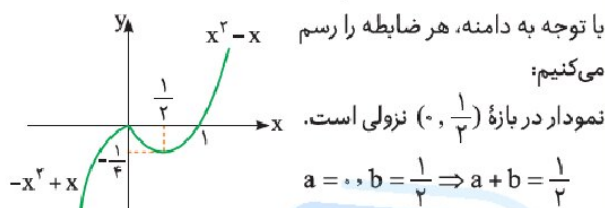


نمودار $f(x)$ به شکل روبه‌رو است:
مشاهده می‌شود که تابع در بازه $(1, +\infty)$ اکیداً صعودی است، پس حداقل مقدار a برابر 1 است.

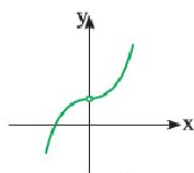
۱۹۸ ۲

ضابطه تابع y را به صورت چند ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$y = \begin{cases} (x-1)(x) & x \geq 0 \\ (x-1)(-x) & x < 0 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} x^2 - x & x \geq 0 \\ -x^2 + x & x < 0 \end{cases}$$



۱۹۹ ۲

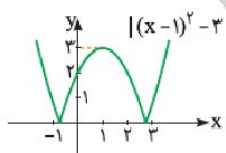


نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = x\left(|x| + \frac{1}{x}\right) = \begin{cases} x^2 + 1; & x > 0 \\ -x^2 + 1; & x < 0 \end{cases}$$

با توجه به شکل واضح است این تابع همواره صعودی است.

۲۰۰ ۲



ابتدا با ساده کردن ضابطه تابع $|f(x)| = |(x-1)^2 - 3|$ نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = |x^2 - 2x - 2| = |(x-1)^2 - 3|$$

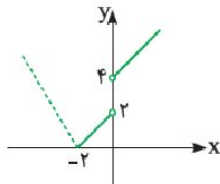
مطابق شکل، تابع $f(x)$ در بازه‌های $(1, 2)$ و $(-2, -1)$ اکیداً نزولی است.

۲۰۱ ۳

$$f(x) = \left| \frac{|x|}{x} + 2 + x \right| = \begin{cases} |x+4|; & x > 0 \\ |x+2|; & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x+4; & x > 0 \\ |x+2|; & x < 0 \end{cases}$$

حالا نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



ما بُرد تابع را در بازه‌ای که نزولی نیست می‌خواهیم. با توجه به نمودار، تابع در بازه $(-\infty, -2)$ اکیداً نزولی است. این تابع در بازه $(0, +\infty) \cup (-2, 0)$ اکیداً صعودی است و بُرد آن نیز در این بازه برابر بازه $(4, +\infty) \cup (0, 2]$ است.

۲۰۲ ۲

ابتدا ضابطه تابع $f(x)$ را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = |\sqrt{x^2 - 4x + 4} - 1| = |\sqrt{(x-2)^2} - 1| = ||x-2| - 1|$$

۱۹۳ ۳

ابتدا با توجه به دامنه، تابع داده‌شده را بازنویسی می‌کنیم:

$$f = \{(-5, 4-m), (2, 2m+3), (3, m-2), (10, -10)\}$$

برای نزولی بودن تابع باید نامعادلات زیر برقرار باشد.

$$\begin{cases} 4-m \geq 2m+3 \Rightarrow m \leq \frac{1}{3} & (1) \\ 2m+3 \geq m-2 \Rightarrow m \geq -5 & (2) \\ m-2 \geq -10 \Rightarrow m \geq -8 & (3) \end{cases}$$

با اشتراک (۱) و (۲) و (۳) داریم: $-5 \leq m \leq \frac{1}{3}$

اعداد صحیح در این بازه عبارتند از: $m = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0\}$. پس به ازای ۶ مقدار صحیح m ، تابع f نزولی است.

۱۹۴ ۲

دامنه تابع f به صورت $\{-1, 1, 2\}$ ، دامنه تابع g به صورت $\{-2, -1, 1, 2\}$ و اشتراک دامنه دو تابع f و g به صورت $D_f \cap D_g = \{-1, 1, 2\}$ است. در این دامنه، تابع $f+g$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f+g = \{(-1, 2+3), (1, [a]+1), (2, -1+4)\}$$

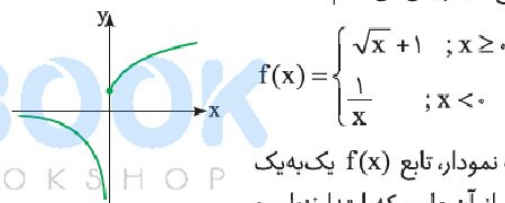
چون $f+g$ اکیداً نزولی است. پس:

$$f(2) < f(1) < f(-1) \Rightarrow 3 < [a]+1 < 5 \Rightarrow 2 < [a] < 4$$

با توجه به این که $[a]$ عددی صحیح است، پس $[a] = 3$ می‌باشد، بنابراین: $[a] = 3 \Rightarrow 3 \leq a < 4$

۱۹۵ ۳

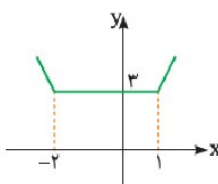
نمودار تابع f را بررسی می‌کنیم:



با توجه به نمودار، تابع $f(x)$ یک‌به‌یک است؛ اما از آن جایی که ابتدا نزولی و سپس صعودی بوده، پس غیریک‌نواست.

۱۹۶ ۱

نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، تابع $f(x)$ در بازه $(-\infty, -2)$ اکیداً نزولی است.

۱۹۷ ۳

باید تابع را رسم کنیم. برای رسم تابع‌های قدرمطلق، از بازه‌بندی استفاده می‌کنیم:

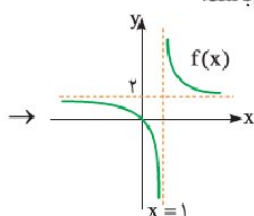
$$f(x) = x+1+|x-1| = \begin{cases} x+1+x-1 & x \geq 1 \\ x+1-(x-1) & x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x & x \geq 1 \\ 2 & x < 1 \end{cases}$$



۲۰۶ ۲

با توجه به صورت سوال، باید به دنبال بازه‌ای باشیم که تابع $f(x)$ در آن اکیداً نزولی باشد.

در تابع $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ، $x = -\frac{d}{c} = 1$ ، $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ، $y = \frac{a}{c} = 1$ ، $ad - bc = (1)(-1) - (0)(1) = -1$ در ضمن می‌باشد. در صورت زیر می‌باشد:



مطابق شکل، تابع $f(x)$ در بازه $[-2, 0]$ اکیداً نزولی است.

۲۰۷ ۳

می‌دانیم در تابع اکیداً نزولی، اگر $x_2 > x_1$ باشد، $f(x_2) < f(x_1)$ است، در نتیجه:

$$f(|x| + x) > f(x+2) \xrightarrow{\text{اکیداً نزولی}} |x| + x < x+2 \Rightarrow |x| < 2 \\ \Rightarrow -2 < x < 2 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x = -1, 0, 1$$

۲۰۸ ۲

باید عبارت زیر رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد، از طرفی در تابع اکیداً نزولی f ، اگر $f(x_2) < f(x_1)$ ، آنگاه $x_2 > x_1$ می‌باشد:

$$f(|3x-4|) - f(|x+3|) \geq 0 \Rightarrow f(|3x-4|) \geq f(|x+3|) \\ \Rightarrow |3x-4| \leq |x+3|$$

حالا طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(3x-4)^2 - (x+3)^2 \leq 0 \Rightarrow (3x-4-x-3)(3x-4+x+3) \leq 0 \\ \Rightarrow (2x-7)(4x-1) \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{7}{2}$$

بنابراین دامنه تابع رادیکالی شامل ۳ عدد صحیح است.

۲۰۹ ۳

با توجه به این که $f(x) = mx^2 - nx - k$ تابعی ثابت می‌باشد، باید $m = n = 0$ باشند. حال برای تابع بودن رابطه زوج مرتبی داده شده داریم:

$$\{(-1, -1), (0, k), (-1, -1)(3k+2, 2k+1)\} \Rightarrow (-1, -1) = (0, k)$$

$$\Rightarrow k = -1 \xrightarrow{f(x) = -k} f(x) = 1 \Rightarrow f(\sqrt{5}) = 1$$

۲۱۰ ۱

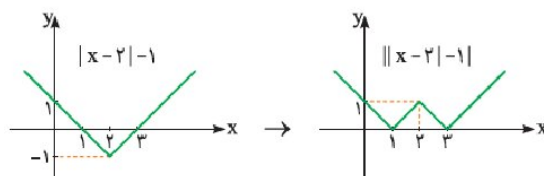
چون تابع f هم صعودی و هم نزولی است، بنابراین نمایانگر یک تابع ثابت است و همه مؤلفه‌های دوم زوج مرتب‌های آن با هم برابرند.

$$\begin{cases} 2a = 4 & \Rightarrow a = 2 \\ b + 3 = 4 & \Rightarrow b = 1 \\ a - c = 4 & \Rightarrow 2 - c = 4 \Rightarrow c = -2 \end{cases}$$

حاصل $|a| + |b| + |c|$ برابر است با:

$$|a| + |b| + |c| = |2| + |1| + |-2| = 5$$

حالا با کمک انتقال نمودار تابع $f(x) = ||x-2|-1|$ را رسم می‌کنیم:



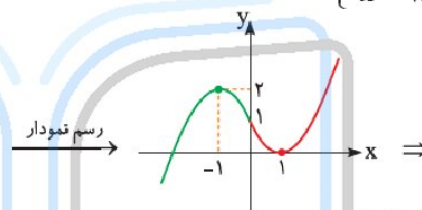
مطابق شکل، تابع $f(x)$ در بازه $[1, 2]$ اکیداً صعودی است.

۲۱۳ ۳

ضابطه تابع $y = (f-g)(x)$ را پیدا می‌کنیم و نمودار آن را رسم می‌کنیم.

توجه کنید $f(x) = x\sqrt{x^2} = x|x|$ است:

$$y = (f-g)(x) = x|x| - 2x + 1 = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & ; x \geq 0 \\ -x^2 - 2x + 1 & ; x < 0 \end{cases}$$



در بازه $(-1, 1)$ اکیداً نزولی است.

پس بیشترین مقدار $b-a$ برابر $2 - (-1) = 3$ است.

۲۱۴ ۱

نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم، با توجه

به نمودار، تابع در بازه $(-\infty, 2)$ اکیداً نزولی است و ضابطه آن در این بازه به صورت

$y = -2x + 5$ است. حال نقاط تلاقی f و g را در بازه $(-\infty, 2)$ مشخص می‌کنیم:

$$g(x) = f(x) \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = -2x + 5 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$$

برای راحت‌تر تجزیه کردن عبارت $2x^2 + x - 1$ عدد ۲ را در ۱۵ ضرب می‌کنیم:

$$2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow (x + \frac{1}{2})(2x - 5) = 0$$

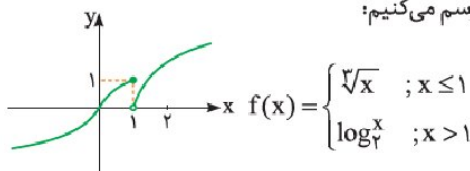
$$x = -3, x = \frac{5}{2}$$

چون $x < 2$ است، پس فقط $x = -3$ قابل قبول است.

حواست به شرط $x < 2$ باشه وگرنه به دو جواب میرسی.

۲۱۵ ۳

ابتدا نمودار را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، تابع $f(x)$ در بازه‌های $(-\infty, 1]$ و $(1, +\infty)$ و هر زیرمجموعه از این دو بازه اکیداً صعودی است.

۲۱۶ ۲

ابتدا تابع $f \times g$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f \times g = (2x + 6) \times \left(\frac{x}{3} - a\right) = x^2 + (3 - 2a)x - 6a$$

چون ضریب x^2 مثبت است. پس دهانه سهمی رو به بالاست و وسیع‌ترین بازه‌ای که این سهمی در آن اکیداً صعودی است، از نقطه رأس تا $+\infty$ است. بنابراین با توجه به صورت سؤال، طول رأس سهمی برابر $-\frac{5}{3}$ است و داریم:

$$x_{\text{رأس}} = \frac{-(3-2a)}{2(1)} = -\frac{5}{3} \Rightarrow 3-2a=5$$

$$x = -\frac{5}{3} \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -1$$

۲۱۷ ۱

قدر مطلق را در $x=3$ باز می‌کنیم و داریم:

$$f(x) = ax + 2|x-3| = \begin{cases} ax + 2(x-3) & ; x \geq 3 \\ ax - 2(x-3) & ; x < 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} (a+2)x - 6 & ; x \geq 3 \\ (a-2)x + 6 & ; x < 3 \end{cases}$$

برای این که تابع f اکیداً صعودی باشد، باید هر دو ضابطه اکیداً صعودی باشند:

$$1) a+2 > 0 \Rightarrow a > -2 \xrightarrow{\text{اشتراک}} a > 2$$

$$2) a-2 > 0 \Rightarrow a > 2$$

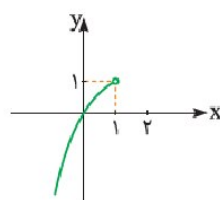
توی همین سؤال، طراح می‌توانست سؤال‌های زیر رو بپرسه:

- ۱) به ازای کدام مقدار a ، تابع f اکیداً نزولی است؟ $a < -2$ ؛ جواب
۲) به ازای کدام مقدار a ، تابع f اکیداً یکنوا است؟ $|a| > 2$ ؛ جواب

۲۱۸ ۳

می‌دانیم انتقال عمودی، بازه یکنوایی را تغییر نمی‌دهد. پس وضعیت یکنوایی تابع $y = x - k$ را بررسی می‌کنیم. از آن جایی که این تابع از انتقال افقی تابع $y = |x|$ به دست آمده. پس این تابع فقط در حالتی در بازه $[-1, 2]$ غیریکنوا می‌شود که ریشه درون قدرمطلق یعنی k درون بازه $(-1, 2)$ قرار گیرد. پس این تابع به ازای مقادیر k که در بازه $(-1, 2)$ هستند، اکیداً یکنوا است.

۲۱۹ ۴



ابتدا نمودار $y = -x^2 + 2x$ را برای $x < 1$ رسم می‌کنیم:

با توجه به نمودار بالا، چون در $x < 1$ سهمی رفتار اکیداً صعودی دارد، پس خط $y = (m+1)x - 3m + 3$ نیز باید اکیداً صعودی باشد، در نتیجه شیب آن باید مثبت باشد. همچنین در $x=1$ مقدار $y = -x^2 + 2x$ باید از مقدار $y = (m+1)x - 3m + 3$ بیشتر باشد

۲۱۱ ۳

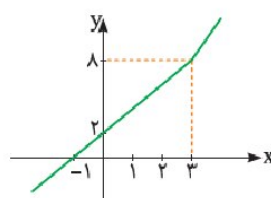
چون تابع $f(x)$ هم صعودی و هم نزولی است، پس باید نمایانگر یک تابع ثابت باشد:

$$\begin{cases} m-1=0 \Rightarrow m=1 \\ n-2=0 \Rightarrow n=2 \end{cases}$$

ضابطه تابع g به صورت $g(x) = 3x - 1 + (-x + 3)$ است.

$$g(x) = \begin{cases} 4x - 4 & ; x \geq 3 \\ 2x + 2 & ; x < 3 \end{cases}$$

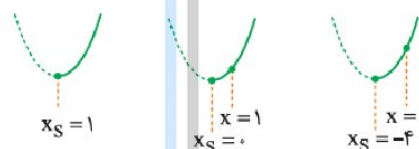
تابع $g(x)$ همواره صعودی است.



۲۱۲ ۴

می‌دانیم نمودار تابع $y = x^2 - mx + 3$ به صورت یک سهمی با دهانه رو به بالا است. پس برای این که در بازه $x \geq 1$ اکیداً صعودی باشد، باید طول رأس سهمی در بازه $x \leq 1$ قرار گیرد.

برای درک بهتر به چند نمونه زیر توجه کنید:



در ضمن می‌دانیم طول رأس سهمی برابر $x_s = -\frac{b}{2a} = \frac{m}{2}$ است، پس:

$$x_s \leq 1 \Rightarrow \frac{m}{2} \leq 1 \Rightarrow m \leq 2$$

۲۱۳ ۴

برای این که تابع f اکیداً نزولی باشد، باید ضریب x^3 منفی باشد:

$$-9 + k^2 < 0 \Rightarrow k^2 < 9 \Rightarrow |k| < 3 \Rightarrow -3 < k < 3$$

بنابراین مقادیر قابل قبول k عبارت‌اند از: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ و مجموع آن‌ها برابر صفر است.

۲۱۴ ۲

چون تابع f در بازه $[-3, 2]$ غیر یکنواست، پس طول رأس سهمی در این بازه قرار دارد:

$$-3 < -\frac{b}{2a} < 2 \Rightarrow -3 < -\frac{m^2-1}{-4} < 2 \Rightarrow -12 < m^2-1 < 8$$

$$\Rightarrow -11 < m^2 < 9 \Rightarrow m^2 < 9 \Rightarrow |m| < 3$$

همواره برقرار

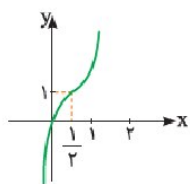
۲۱۵ ۳

چون بازه $[-\infty, 2/5]$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که سهمی $y = -5x^2 + ax - 8$ در آن اکیداً صعودی است، پس $x = 2/5$ طول رأس سهمی است:

$$x_s = \frac{-a}{2(-5)} = 2/5 \Rightarrow a = 25$$

حالا برای به دست آوردن عرض رأس سهمی کافی است $x = 2/5$ را در ضابطه سهمی قرار دهیم:

$$y = -5x^2 + 25x - 8 \xrightarrow{x=2/5} y_s = -5\left(\frac{2}{5}\right)^2 + 25\left(\frac{2}{5}\right) - 8 = \frac{93}{4} = 23.25$$



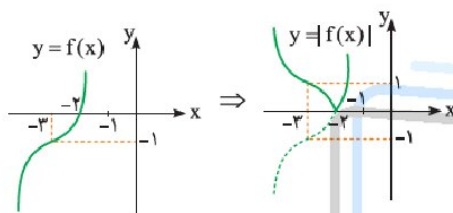
با توجه به نمودار، تابع اکیداً صعودی است.

۳۳۳ ۴

چون نمودار تابع $f(x)$ فقط در نقطه $(-3, -1)$ بر خط به موازات محور x ها مماس است، پس می توان ضابطه آن را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$f(x) = k(x+3)^3 - 1$$

با توجه به ضابطه $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ضریب x^3 برابر یک است، پس $k=1$ می باشد. بنابراین $f(x) = (x+3)^3 - 1$ است. حالا نمودار $y = |f(x)|$ را رسم می کنیم:



طبق نمودار، تابع $|f(x)|$ در بازه $(-2, +\infty)$ اکیداً صعودی است و کمترین مقدار k برابر -2 است.

۳۳۴ ۴

چون یک خط افقی در نقطه $(2, -1)$ بر تابع f مماس است، می توانیم ضابطه آن را به صورت $f(x) = k(x-2)^3 - 1$ در نظر بگیریم. از طرفی نمودار از مبدأ مختصات نیز می گذرد:

$$f(0) = 0 \Rightarrow k(-2)^3 - 1 = 0 \Rightarrow -8k = 1 \Rightarrow k = -\frac{1}{8}$$

بنابراین ضابطه تابع f به صورت $f(x) = -\frac{1}{8}(x-2)^3 - 1$ است.

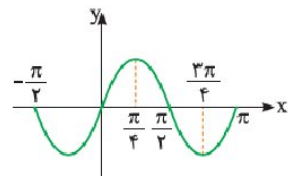
اکنون طول نقطه برخورد نمودار با خط $y=1$ را به دست می آوریم:

$$f(x) = 1 \Rightarrow -\frac{1}{8}(x-2)^3 - 1 = 1 \Rightarrow -\frac{1}{8}(x-2)^3 = 2 \Rightarrow (x-2)^3 = -16$$

$$\Rightarrow (x-2)^3 = -16 \Rightarrow x-2 = \sqrt[3]{-16} \Rightarrow x = 2 - 2\sqrt[3]{2}$$

۳۳۵ ۳

نمودار تابع $f(x)$ را رسم می کنیم:



مطابق شکل، تابع $f(x)$ در بازه های

$[\frac{3\pi}{4}, \pi]$ اکیداً صعودی و

در بازه $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ اکیداً نزولی است.

۳۳۶ ۲

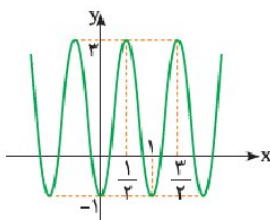
ابتدا ضابطه تابع $f(x)$ را ساده کرده و آن را رسم می کنیم:

$$f(x) = 1 + 2\cos(2\pi x - \pi)$$

$$= 1 + 2\cos(\pi - 2\pi x) = 1 - 2\cos(2\pi x)$$

با توجه به نمودار، تابع $f(x)$ در بازه

$[1, 1/5]$ اکیداً صعودی است.



تابع در کل دامنه خود رفتار اکیداً صعودی داشته باشد.

$$\begin{cases} m+1 > 0 \Rightarrow m > -1 \\ x=1: (m+1) - 3m + 3 \geq -(1)^2 + 2(1) \Rightarrow m \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m \leq \frac{3}{2} \end{cases} \xrightarrow{\cap} m \in (-1, 1.5]$$

دام تستی حواست باشد که شیب خط باید مثبت باشد و آنگاه این مورد رو

چک نکنی میزنی گزینه ۳ که غلطه.

۳۳۷ ۴

نمودار $y = |x+2| + 1$ در بازه $x \leq -2$

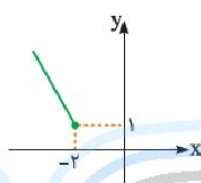
به صورت مقابل است. برای این که

تابع در $\mathbb{R}$ نزولی باشد، شیب خط

$y = \Delta m - mx$ نباید مثبت باشد و

عرض این خط در همسایگی راست -2 ،

نباید بیش تر از ۱ باشد.



$$y = \Delta m - mx; x > -2 \Rightarrow \begin{cases} -m \leq 0 \Rightarrow m \geq 0 \quad (1) \\ \Delta m - m(-2) \leq 1 \Rightarrow m \leq \frac{1}{2} \quad (2) \end{cases}$$

با اشتراک (۱) و (۲) داریم:

$$0 \leq m \leq \frac{1}{2} \Rightarrow m \in [0, \frac{1}{2}]$$

یا مقایسه $[a, b]$ ، مقدار $a = 0$ و $b = \frac{1}{2}$ است، بنابراین:

$$a+b = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

۳۳۸ ۳

چون f تابعی اکیداً صعودی است، پس با توجه به نمودار رسم شده باید برد

ضابطه $y = 2x - 4$ بزرگتر از ۶ باشد، یعنی:



بنابراین حداقل مقدار a برابر ۵ است و برای به دست آوردن

$f(2a) = f(10)$ باید از ضابطه پایین استفاده کنیم:

$$f(10) = 2(10) - 4 = 16$$

۳۳۹ ۱

چون تابع $g(x)$ یک تابع همانی است، پس داریم:

$$\begin{cases} a-2=0 \Rightarrow a=2 \\ b=1 \\ c=0 \end{cases}$$

بنابراین $f(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x$ است. حالا ضابطه f را به صورت

مکعب دو جمله ای می نویسیم و به کمک انتقال نمودار آن را از روی تابع

$y = x^3$ رسم می کنیم:

$$f(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 + 1 = (2x-1)^3 + 1$$

فصل اول • تابع |

$$۲) \begin{cases} f(x): \text{اکیدا صعودی} \\ g(-x): \text{اکیدا صعودی} \end{cases}$$

→ اکیدا صعودی - اکیدا صعودی = اکیدا صعودی
نمی توان اظهار نظر قطعی کرد.

$$۳) \begin{cases} 2f(x): \text{اکیدا صعودی} \\ g(x+3): \text{اکیدا نزولی} \end{cases}$$

→ اکیدا صعودی = اکیدا نزولی - اکیدا صعودی = اکیدا صعودی

$$۴) \begin{cases} f(x): \text{اکیدا صعودی} \\ g(-x): \text{اکیدا صعودی} \end{cases}$$

→ اکیدا صعودی × اکیدا صعودی = اکیدا صعودی
نمی توان اظهار نظر قطعی کرد.

هشدار

اگر وضعیت یکنوایی دو تابع f و g مشخص باشد، در مورد وضعیت یکنوایی تابع های $f+g$ ، $f-g$ ، $f \times g$ و $\frac{f}{g}$ فقط در حالت های زیر می توانیم اظهار نظر قطعی کنیم:

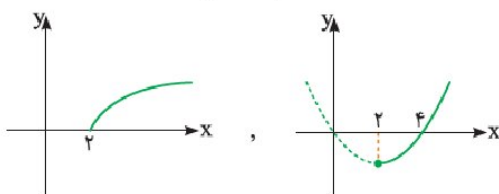
اکیدا صعودی + اکیدا صعودی = اکیدا صعودی	اکیدا نزولی + اکیدا نزولی = اکیدا نزولی
اکیدا صعودی - اکیدا نزولی = اکیدا صعودی	اکیدا صعودی - اکیدا نزولی = اکیدا نزولی

! در اعمال توابع، به دامنه تابع حاصل توجه کنید.

۱ ۲۳۱

ابتدا دامنه تابع $f(x)$ را به دست می آوریم. چون $x-2$ زیر رادیکال با فرجه ۲ قرار دارد، پس:

از طرفی تابع $f(x)$ از مجموع دو تابع $y_1 = \sqrt{x-2}$ و $y_2 = x^2 - 4x$ تشکیل شده که هر دوی آن ها در بازه $[2, +\infty)$ اکیدا صعودی هستند:



پس تابع f که از جمع دو تابع اکیدا صعودی به وجود آمده نیز تابعی اکیدا صعودی است.

۲ ۲۳۲

تابع f از جمع دو تابع اکیدا نزولی $y_1 = \sqrt{4-x}$ و $y_2 = -\sqrt{x} + 4$ تشکیل شده است. ابتدا دامنه تابع f را پیدا می کنیم:

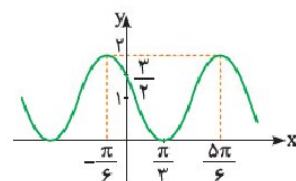
$$\begin{cases} y_1 = \sqrt{4-x} \Rightarrow D_{y_1} = (-\infty, 4] \\ y_2 = -\sqrt{x} + 4 \Rightarrow D_{y_2} = [0, +\infty) \end{cases} \Rightarrow D_f = D_{y_1} \cap D_{y_2} = [0, 4]$$

۱ ۲۳۷

ابتدا با استفاده از رابطه مثلثاتی $2\cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$ ضابطه f را ساده می کنیم:

$$f(x) = 2\cos^2(x + \frac{\pi}{6}) = 1 + \cos(2x + \frac{\pi}{3})$$

حالا به کمک انتقال نمودار تابع $f(x) = 1 + \cos(2x + \frac{\pi}{3})$ را از روی تابع $y = \cos x$ رسم می کنیم:



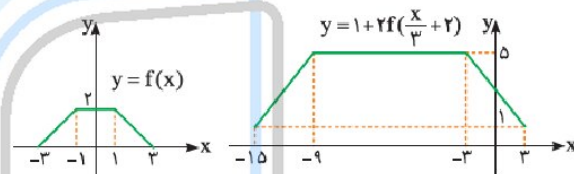
مطابق شکل، تابع $f(x)$ در

بازه $(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6})$ اکیدا صعودی است.

۲ ۲۳۸

ابتدا نمودار $y = f(x-1)$ را یک واحد به سمت چپ منتقل می کنیم تا نمودار تابع $y = f(x)$ به دست آید.

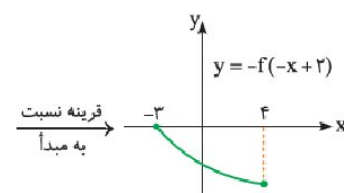
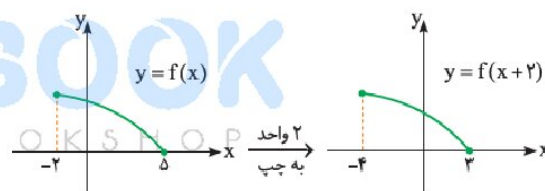
سپس با کمک انتقال نمودار تابع $y = 1 + 2f(\frac{x}{3} + 2)$ را رسم می کنیم:



مطابق نمودار بالا، تابع $y = 1 + 2f(\frac{x}{3} + 2)$ در بازه $[-15, -9]$ اکیدا صعودی است.

۴ ۲۳۹

می دانیم انتقال عمودی و انبساط عمودی، بازه یکنوایی و وضعیت یکنوایی را تغییر نمی دهد. بنابراین می توانیم یک نمودار اکیدا نزولی $y = f(x)$ به صورت فرضی در نظر بگیریم و سپس مشخص کنیم نمودار $y = -f(2-x)$ در کدام بازه اکیدا نزولی است:



پس تابع $y = -f(2-x)$ در بازه $[-3, 4]$ اکیدا نزولی است.

۳ ۲۴۰

می دانیم انتقال و انبساط، وضعیت یکنوایی تابع را تغییر نمی دهد. حالا

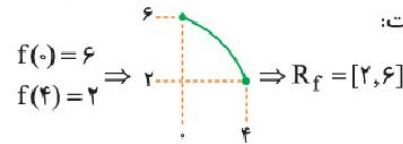
$$۱) \begin{cases} f(x+1): \text{اکیدا صعودی} \\ g(x-1): \text{اکیدا نزولی} \end{cases}$$

→ اکیدا نزولی + اکیدا صعودی = اکیدا صعودی
نمی توان اظهار نظر قطعی کرد.



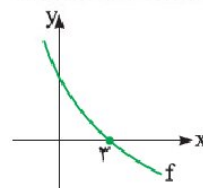
ریاضیات تجربی جامع کنکور

از طرفی می‌دانیم مجموع دو تابع اکیداً نزولی، تابعی اکیداً نزولی است، پس اگر یک نمودار اکیداً نزولی به صورت فرضی در بازه $[0, 4]$ رسم کنیم، بُرد آن به صورت زیر است:



۳۳۳ ۴

چون f تابعی اکیداً نزولی است و از نقطه $(3, 0)$ می‌گذرد، نمودار آن را به صورت مقابل در نظر می‌گیریم:



حال دامنه تابع $g(x) = \sqrt{x^2 f(x)}$ را تعیین می‌کنیم:

$$x^2 f(x) \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 \Rightarrow x \leq 3$$

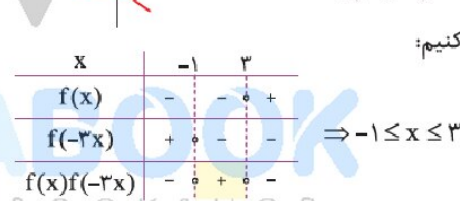
پس ۴ عدد صحیح و نامنفی به صورت $x = 0, 1, 2, 3$ در دامنه تابع $g(x)$ هستند.

۳۳۴ ۴

ابتدا باید عبارت زیر رادیکال، بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:

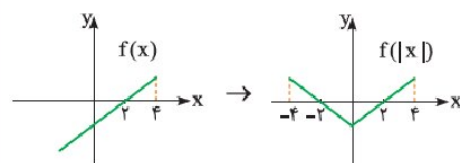
$$f(x)f(-3x) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \Rightarrow x = 3 \\ f(-3x) = 0 \Rightarrow -3x = 3 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

تابع $f(x)$ اکیداً صعودی است. برای رسم نمودار تابع $y = f(-3x)$ کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را نسبت به محور y ها قرینه کرده و طول نقاط تابع $f(x)$ را $\frac{1}{3}$ کنیم:



۳۳۵ ۳

مطابق صورت سوال، یک نمودار فرضی برای تابع $f(x)$ رسم می‌کنیم و به کمک آن $f(|x|)$ را رسم می‌کنیم:



اکنون دامنه تابع $y = \sqrt{(x-1)f(|x|)}$ را به دست می‌آوریم:

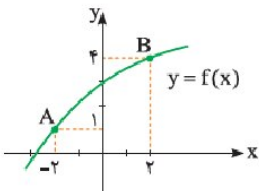
$$(x-1)f(|x|) \geq 0$$

x	-4	-2	1	2	4
$x-1$	-	-	0	+	+
$f(x)$	+	+	-	-	+
$(x-1)f(x)$	-	+	0	-	+

طبق جدول تعیین علامت بالا، دامنه تابع برابر $[-2, 1] \cup [2, 4]$ است.

۳۳۶ ۳

یک تابع اکیداً صعودی و پیوسته که از نقاط A و B بگذرد، به صورت فرضی رسم می‌کنیم. حالا سراغ حل نامعادله می‌رویم:



$$\frac{f^2(x) - 5f(x) + 4}{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{(f(x)-1)(f(x)-4)}{x} \geq 0$$

حالا ریشه‌های صورت کسر را پیدا کرده و جدول تعیین علامت را می‌کشیم:

$$\begin{cases} f(x) - 1 = 0 \Rightarrow f(x) = 1 \Rightarrow x = -2 \\ f(x) - 4 = 0 \Rightarrow f(x) = 4 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

x	-2	2
علامت	-	+

$$\Rightarrow \text{جواب: } [-2, 0) \cup [2, +\infty)$$

۳۳۷ ۳

می‌دانیم $D_f = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ و $D_g = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ است. ابتدا دامنه تابع $g - 2f$ را به دست می‌آوریم:

$$D_{g-2f} = D_f \cap D_g = \{0, 1, 2, 3\}$$

حالا برد تابع $g - 2f$ را به ازای دامنه $\{0, 1, 2, 3\}$ به دست می‌آوریم:

$$g(0) - 2f(0) = 5 - 2(3) = -1$$

$$g(1) - 2f(1) = 4 - 2(2) = 0$$

$$g(2) - 2f(2) = 3 - 2(4) = -5$$

$$g(3) - 2f(3) = 2 - 2(1) = 0$$

پس تابع $g - 2f$ به صورت زیر است:

$$g - 2f = \{(0, -1), (1, 0), (2, -5), (3, 0)\}$$

بنابراین در تابع $g - 2f$ ، زوج مرتب $(0, 1)$ وجود ندارد.

هابلایت

اعمال روی ضابطه توابع

توابع را نیز می‌توان مانند اعداد جمع، تفریق، ضرب و تقسیم کرد و توابع جدید به دست آورد. [البته در هنگام تقسیم، تابع واقع در مخرج نباید صفر باشد.]

۱) برای هر x متعلق به دامنه هر دو تابع f و g ، می‌توان توابع $f + g$ ، $f - g$ و $f \cdot g$ را به صورت زیر تعریف کرد:

مجموع دو تابع $(f + g)(x) = f(x) + g(x), D_{f+g} = D_f \cap D_g$

تفاضل دو تابع $(f - g)(x) = f(x) - g(x), D_{f-g} = D_f \cap D_g$

ضرب دو تابع $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$

۲) برای هر x متعلق به دامنه هر دو تابع f و g که در آن $g(x) \neq 0$ باشد، می‌توان تابع $\frac{f}{g}$ را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}; D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$

۳۷۱ | ۱

ابتدا $f(\sqrt{3}-1)$ را به دست می‌آوریم: $f(x) = |x-1| + |2x+1|$
 $\Rightarrow f(\sqrt{3}-1) = |\sqrt{3}-2| + |2(\sqrt{3}-1)+1|$
 $\Rightarrow f(\sqrt{3}-1) = (2-\sqrt{3}) + (2\sqrt{3}-1) = \sqrt{3}+1$
 حال با جای‌گذاری $\sqrt{3}+1$ در تابع g داریم:

$$g(f(\sqrt{3}-1)) = g(\sqrt{3}+1) = [-(\sqrt{3}+1)+1] = [-\sqrt{3}] = -2$$

۳۷۲ | ۱

ابتدا ضابطه g را به صورت $g(x) = (x+1)^2$ می‌نویسیم و سپس مقادیر $f(1-\sqrt{2})$ و $g(1-\sqrt{2})$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} ۱) \quad f(1-\sqrt{2}) &= |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1 \\ ۲) \quad g(1-\sqrt{2}) &= (1-\sqrt{2}+1)^2 = (2-\sqrt{2})^2 = 6-4\sqrt{2} \\ \Rightarrow f(g(1-\sqrt{2})) - g(f(1-\sqrt{2})) &= f(6-4\sqrt{2}) - g(\sqrt{2}-1) \\ &= |6-4\sqrt{2}| - (\sqrt{2}-1+1)^2 = \underbrace{6-4\sqrt{2}-2}_{4-4\sqrt{2}} = 4(1-\sqrt{2}) \end{aligned}$$

۳۷۳ | ۱

چون عبارت $\sin \pi x - 1$ زیر رادیکال با فرجه ۲ قرار دارد، پس:
 $\sin \pi x - 1 \geq 0 \Rightarrow \sin \pi x \geq 1 \quad (*)$
 از طرفی می‌دانیم مقادیر سینوس همواره در بازه $[-1, 1]$ هستند؛ بنابراین نامساوی $(*)$ تنها در صورتی برقرار است که $\sin \pi x = 1$ باشد، بنابراین:
 $\sin \pi x = 1 \Rightarrow \pi x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}$
 با توجه به مقادیر به دست آمده برای x ، تمام ورودی‌های تابع f ، اعدادی غیر صحیح هستند. همچنین می‌دانیم عبارت $[x] + [-x]$ به ازای مقادیر صحیح برابر صفر و به ازای مقادیر غیر صحیح برابر -1 است. پس:

$$\begin{aligned} f(x) &= \underbrace{[x] + [-x]}_{-1} + \sqrt{\sin \pi x - 1} = (-1) + \sqrt{0} = -1 \\ \Rightarrow f(-\frac{1}{2}f(x)) &= f(-\frac{1}{2} \times -1) = f(\frac{1}{2}) = -1 + 0 = -1 \end{aligned}$$

۳۷۴ | ۳

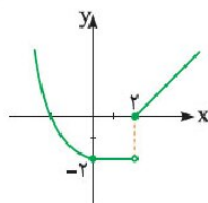
ابتدا ضابطه تابع $g(x)$ را ساده می‌کنیم:
 $g(x) = f([x + f(x)]) = f([x + 2[x] - x]) = f(2[x])$
 حالا ضابطه $f(2[x])$ را به دست می‌آوریم:
 $f(2[x]) = 2[2[x]] - 2[x] = 4[x] - 2[x] = 2[x] \Rightarrow g(x) = 2[x]$
 حال با توجه به این که $f(-\frac{5}{3}) = -4 + \frac{5}{3} = -\frac{7}{3}$ می‌باشد مقدار $g(f(-\frac{5}{3}))$ را به دست می‌آوریم:

$$g(f(-\frac{5}{3})) = g(-\frac{7}{3}) = 2[-\frac{7}{3}] = 2 \times (-3) = -6$$

۳۷۵ | ۳

با فرض $f(x) = 2x-2$ و $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x}+1}$ ، خروجی ماشین، همان خروجی تابع $g \circ f$ است. بنابراین اگر ورودی ماشین را a در نظر بگیریم، داریم:
 $g(f(a)) = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{f(a)}{\sqrt{f(a)}+1} = \frac{4}{3} \Rightarrow f(a) = 4 \Rightarrow 2a-2 = 4$
 $\Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$

اکنون نمودار تابع $f+g$ را رسم می‌کنیم:



۳۶۸ | ۴

ابتدا $g(f(a)) = 5$ را با فلش نمایش می‌دهیم:

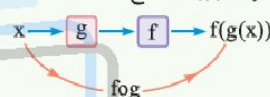
$$a \xrightarrow{f} \bigcirc \xrightarrow{g} 5 \Rightarrow (a, \bigcirc) \in f, (\bigcirc, 5) \in g$$

حال چون زوج مرتب $(6, 5)$ در تابع g وجود دارد، پس $\bigcirc = 6$ بوده و در نتیجه $f(a) = 6$ است: $f(a) = 6 \Rightarrow a + \sqrt{a} = 6 \Rightarrow a = 4$

هایلایت

نحوه تشکیل تابع $f \circ g(x)$

مقادیر $g(x)$ به عنوان ورودی تابع f است.



۳۶۹ | ۲

چون در صورت کسر $f+g$ وجود دارد، پس اعضای تابع را در اشتراک دامنه‌های دو تابع f و g به دست می‌آوریم. با توجه به این که $D_f \cap D_g = \{1, 3, 4\}$ است، داریم:

$$\begin{aligned} x=1: \quad \frac{f(1)+g(1)}{(fog)(1)} &= \frac{3+2}{f(2)} = \frac{5}{-2} = -2/5 \\ x=3: \quad \frac{f(3)+g(3)}{(fog)(3)} &= \frac{0+2}{f(2)} = \frac{2}{-2} = -1 \\ x=4: \quad \frac{f(4)+g(4)}{(fog)(4)} &= \frac{2+5}{f(5)} = \frac{7}{-1} = -7 \end{aligned}$$

بنابراین اعضای بُرد تابع $\frac{f+g}{fog}$ به صورت $\{-1, -2/5, -7\}$ است.

۳۷۰ | ۲

با توجه به صورت سؤال داریم:

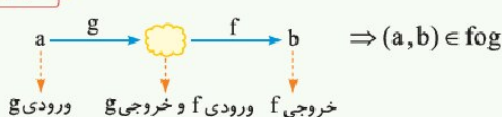
$$(4, 2) \in fog \Rightarrow 4 \xrightarrow{g} \bigcirc \xrightarrow{f} 2 \Rightarrow (\bigcirc, 2) \in f, (4, \bigcirc) \in g$$

چون $(3, 2) \in f$ ، پس $\bigcirc = 3$. پس $(4, 3) \in g$ و در نتیجه $a = 4$ است. از طرفی:

$$(4, 1) \in g \circ f \Rightarrow 4 \xrightarrow{f} \bigcirc \xrightarrow{g} 1 \Rightarrow (\bigcirc, 1) \in g, (4, \bigcirc) \in f$$

با توجه به این که $(4, 5) \in f$ ، پس $\bigcirc = 5$ است؛ بنابراین $(5, 1) \in g$ و در نتیجه $b = 5$ خواهد بود. در نتیجه دوتایی (a, b) به صورت $(4, 5)$ است.

هایلایت



به دوره دیگه! طراحی می‌توانست نوی همین سؤال، بیرسه؛

و بُرد تابع $f \circ g$ کدام است؟

$$fog = \{(1, 1), (3, 7), (4, 2), (5, 7)\} \Rightarrow R_{fog} = \{1, 2, 7\}$$



این سؤال برای تمرین بیشتر، حل کنید:

اگر $f(x) = \begin{cases} 2x-11 & ; x > 2 \\ x+2 & ; x \leq 2 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x+4 & ; f(x) < 0 \\ x-1 & ; f(x) \geq 0 \end{cases}$ باشد، مقدار $fog(-4)$ کدام است؟

پاسخ: $fog(-4) = 3$

۲۸۱

اعضای تابع gof را پیدا می‌کنیم:

$$a \xrightarrow{f} -2 \xrightarrow{g} 5$$

$$-1 \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} \frac{2b-1}{b+1}$$

$$1 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{g} -1$$

$$3 \xrightarrow{f} -4 \xrightarrow{g} 3$$

با توجه به صورت سؤال، اعضای برد تابع gof به صورت $\{-1, c, 1, 5\}$ است، پس:

$$c = 3, \quad \frac{2b-1}{b+1} = 1 \Rightarrow 2b-1 = b+1 \Rightarrow b = 2$$

$$\Rightarrow b \times c = 2 \times 3 = 6$$

۲۸۲

ضابطه تابع را تشکیل می‌دهیم:

$$f(f(x)) = 2 - |f(x) - 2| = 2 - |2 - |x - 2|| - 2|$$

$$= 2 - ||x - 2|| = 2 - |x - 2| = f(x)$$

۲۸۳

ابتدا ضابطه تابع gof را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x \\ g(x) = x - 3 \end{cases} \Rightarrow g(f(x)) = (x^2 + 2x) - 3$$

حال معادله $(gof)(x) = 2$ را حل می‌کنیم:

$$x^2 + 2x - 3 = 2 \Rightarrow x^2 + 2x - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = -2 \\ P = \alpha \times \beta = -5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = (-2)^2 - 2(-5) = 14$$

به چهره رنگه! طراح می‌توانست اینطور پیروا:

پاسخ بزرگ تر معادله $fog(x) = 1$ کدام است؟

پاسخ: $fog(x) = x^2 - 4x + 3 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{2} \\ x = 2 - \sqrt{2} \end{cases}$

۲۸۴

در تابع g ، به جای همه x ها، $f(x)$ قرار می‌دهیم:

$$g(f(x)) = \frac{2f(x)+2}{2-f(x)} = \frac{2(\frac{2x-1}{x+1})+2}{2-(\frac{2x-1}{x+1})} = \frac{\frac{4x-2}{x+1}+2}{\frac{2(x+1)-(2x-1)}{x+1}} = \frac{4x-2+2x+2}{2x+2-2x+1} = \frac{6x}{x+1} = 2x$$

$$\Rightarrow g(f(x)) = \frac{4x-2+2x+2}{2x+2-2x+1} = \frac{6x}{x+1} = 2x$$

روش سریعتر: با جای‌گذاری $x = 2$ در تابع gof داریم:

$$g(f(2)) = g(1) = 4$$

تنها گزینه‌ای که به ازای $x = 2$ برابر ۴ می‌شود، گزینه (۴) است.

۲۷۶

تقاطع f و gof روی محور y ، به معنی داشتن عرض از مبدأ یکسان این دو تابع است:

$$f(0) = (gof)(0)$$

با توجه به ضابطه تابع f و g داریم:

$$f(0) = \sqrt{a-0} = \sqrt{a}$$

$$(gof)(0) = g(f(0)) = g(\sqrt{a}) = 3 - \sqrt{a}$$

بامساوی هم‌قرار دادن دو مقدار به دست آمده، مقدار a را محاسبه می‌کنیم:

$$\sqrt{a} = 3 - \sqrt{a} \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{9}{4} = 2.25$$

۲۷۷

با توجه به نمودار داده شده در بازه $(-\infty, -3] \cup [1, 5]$ ، $f(x) \leq 0$ و در بازه $(5, +\infty) \cup (-3, 1)$ ، $f(x) > 0$ است، پس:

$$g(x) = \begin{cases} 2x-7 & ; x \leq -3 \text{ یا } 1 \leq x \leq 5 \\ 6x+7 & ; -3 < x < 1 \text{ یا } x > 5 \end{cases} \Rightarrow g(4) = 2(4) - 7 = 1$$

$$\Rightarrow f(g(4)) = f(1) = 0$$

۲۷۸

ابتدا با قرار دادن $x = -1$ در ضابطه بالایی تابع، مقدار $f(-1)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(-1) = 4(-1) - f(-1) \Rightarrow 2f(-1) = -4 \Rightarrow f(-1) = -2$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 4x+2 & ; x \leq 2 \\ a-2x & ; x > 2 \end{cases} \Rightarrow f(1) = 6$$

حالا می‌دانیم $f(1) = -9$ است، بنابراین:

$$f(f(1)) = -9 \Rightarrow f(6) = -9$$

در ضمن برای به دست آوردن $f(6)$ از ضابطه پایینی استفاده می‌کنیم:

$$f(6) = a - 12 = -9 \Rightarrow a = 3$$

۲۷۹

با توجه به شکل صورت سؤال $f(x+1) = x+2$ و $g(x-1) = -x+4$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x+1) = x+2 \xrightarrow{x=2} f(3) = 2+2 = 4$$

$$g(x-1) = -x+4 \xrightarrow{x=-2} g(-3) = 2+4 = 6$$

پس $f(3) + f(g(-3)) = g(4) + f(6)$ است. حالا $f(6)$ و $g(4)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x+1) = x+2 \xrightarrow{x=5} f(6) = 5+2 = 7$$

$$g(x-1) = -x+4 \xrightarrow{x=5} g(4) = -5+4 = -1$$

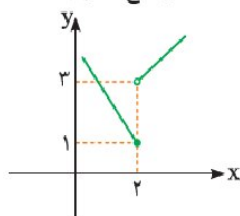
پس $g(4) + f(6) = -1 + 7 = 6$ است.

دام‌تستی: اگر حواست نباشه که $f(x)$ و $f(x+1)$ و همین‌طور $g(x)$ و $g(x-1)$ با هم فرق دارن به گزینه ۴ میرسی.

۲۸۵

با توجه به تابع نمودار تابع $f(x)$ ، واضح است که این تابع همواره مثبت است. پس در تابع $g(x)$ از ضابطه بالا، یعنی $g(x) = -x + 4$ استفاده می‌شود.

$$fog(-4) = f(g(-4)) = f(8) = 9$$



۲ ۲۸۹

ابتدا ضابطه fog را تشکیل می‌دهیم:

$$f(g(x)) = \left(\frac{x-3}{4}\right)^2 + \left(\frac{x-3}{4}\right) - 2 = \frac{x^2 - 4x - 5}{4}$$

می‌دانیم عرض نقاطی از نمودار تابع که زیر محور xها قرار می‌گیرند،

منفی است:

$$\frac{x^2 - 4x - 5}{4} < 0 \Rightarrow (x+1)(x-5) < 0 \Rightarrow -1 < x < 5$$

چون $x = 4$ و $x = -1$ در نامعادله $f(g(x)) < 0$ صدق می‌کنند؛ پس گزینه (۲) درست است.

۳ ۲۹۰

می‌دانیم $[x] + [-x]$ به ازای xهای صحیح برابر صفر و به ازای xهای غیرصحیح برابر ۱- است، پس دو حالت برای مقادیر x در نظر می‌گیریم:

$$x \in \mathbb{Z} : g(f(x)) = g(0) = 4$$

$$x \notin \mathbb{Z} : g(f(x)) = g(-1) = 3$$

پس به ازای تمام xهای غیرصحیح تابع gof برابر ۳ است.

۴ ۲۹۱

ضابطه gof را تشکیل می‌دهیم و آن را برابر ۱ قرار می‌دهیم:

$$gof(x) = 1 \Rightarrow |2|x - 3| - 7| = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2|x - 3| - 7 = 1 & (1) \\ 2|x - 3| - 7 = -1 & (2) \end{cases}$$

حالا هر یک از معادله‌های (۱) و (۲) را حل می‌کنیم:

$$1) \ 2|x - 3| = 8 \Rightarrow |x - 3| = 4 \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 4 \Rightarrow x = 7 \\ x - 3 = -4 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

$$2) \ 2|x - 3| = 6 \Rightarrow |x - 3| = 3 \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 3 \Rightarrow x = 6 \\ x - 3 = -3 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

پس مجموع جواب‌های معادله $(gof)(x) = 1$ برابر است با:

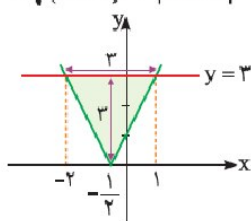
$$7 + (-1) + 6 + 0 = 12$$

۳ ۲۹۲

ابتدا ضابطه تابع gof به دست می‌آوریم:

$$g(f(x)) = \sqrt{4(x^2 + x) + 1} = \sqrt{4x^2 + 4x + 1}$$

$$= \sqrt{(2x+1)^2} = |2x+1|$$



حال نمودار تابع $(gof)(x) = |2x+1|$ و خط $y = 3$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم و محل برخورد آن‌ها را مشخص می‌کنیم:

$$|2x+1| = 3 \Rightarrow x = -2, x = 1 \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2} = 4.5$$

۲ ۲۹۳

چون نمودار تابع f محور xها را در دو نقطه با طول‌های ۶ و $-\frac{1}{4}$ قطع می‌کند پس $f(6) = 0$ و $f(-\frac{1}{4}) = 0$ است. حال برای مشخص کردن محل برخورد نمودار تابع fog با محور xها، باید معادله زیر را حل کنیم:

$$f(g(x)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} g(x) = 6 \Rightarrow x - \sqrt{x} = 6 \Rightarrow x = 9 \\ g(x) = -\frac{1}{4} \Rightarrow x - \sqrt{x} = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

۲ ۲۸۵

ابتدا ضابطه تابع‌های fog(x) و f(x+3) را پیدا می‌کنیم:

$$1) \ f(g(x)) = 2((3x+1)^2 - (3x+1) - 3) = 2(9x^2 + 3x - 3)$$

$$2) \ f(x+3) = 2((x+3)^2 - (x+3) - 3) = 2(x^2 + 5x + 3)$$

حالا نقاط تلاقی این دو نمودار را پیدا می‌کنیم:

$$fog(x) = f(x+3) \Rightarrow 2(9x^2 + 3x - 3) = 2(x^2 + 5x + 3)$$

$$\Rightarrow 8x^2 - 2x - 6 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب} = 0} \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

پس این دو نمودار در دو نقطه به طول‌های ۱ و $-\frac{3}{4}$ متقاطع‌اند.

۱ ۲۸۶

با توجه به $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ و $g(x) = x+4$ ضابطه‌های $(gof)(x)$ و $(fog)(x)$ را به دست آورده و معادله $(fog)(x) = (gof)(x)$ را حل می‌کنیم:

$$1) \ (gof)(x) = g(f(x)) = \frac{2x-1}{x+2} + 4 = \frac{2x-1+4(x+2)}{x+2} = \frac{6x+7}{x+2}$$

$$2) \ (fog)(x) = f(g(x)) = \frac{2(x+4)-1}{(x+4)+2} = \frac{2x+7}{x+6}$$

$$\Rightarrow \frac{6x+7}{x+2} = \frac{2x+7}{x+6} \Rightarrow \frac{(6x+7)(x+6)}{x+2} = \frac{(2x+7)(x+2)}{x+6}$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 32x + 28 = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 8x + 7}{a+c=b} = 0 \Rightarrow x = -1, x = -7$$

می‌توانستیم از گزینه‌ها اعداد را جای‌گذاری کنیم.

۱ ۲۸۷

می‌دانیم $f(x) = \frac{ax+1}{2x-3}$ است، پس ضابطه fof برابر است با:

$$fof(x) = f(f(x)) = \frac{af(x)+1}{2f(x)-3} = \frac{a \times \frac{ax+1}{2x-3} + 1}{2 \times \frac{ax+1}{2x-3} - 3}$$

$$= \frac{(a^2+2)x+a-3}{2x-3} = \frac{(a^2+2)x+a-3}{(2a-6)x+11}$$

در ضمن با توجه به صورت سؤال $fof(x) = \frac{18x+1}{2x+11}$ است، پس:

$$\frac{(a^2+2)x+a-3}{(2a-6)x+11} = \frac{18x+1}{2x+11} \Rightarrow 2a-6=2 \Rightarrow a=4$$

۱ ۲۸۸

ابتدا ضابطه تابع $f(g(x))$ را به کمک روابط مثلثاتی به شکل ساده‌تری می‌نویسیم:

$$f(g(x)) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

اکنون به کمک ضابطه تابع $f(x)$ ، تابع $f(g(x))$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f(g(x)) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\Rightarrow g(x) = \cos^2(x)$$



۱ ۲۹۴

چون نمودار تابع g محور طول ها را در $x=1$ و $x=2\sqrt{2}$ قطع می کند، پس:

$$g(1)=0, \quad g(2\sqrt{2})=0$$

بنابراین تابع $g(f(x))$ در نقاطی محور x ها را قطع می کند که $f(x)=1$

$$\text{یا } f(x)=2\sqrt{2} \text{ باشد:}$$

$$f(x)=1 \Rightarrow x\sqrt{x}=1 \Rightarrow x=1$$

$$f(x)=2\sqrt{2} \Rightarrow x\sqrt{x}=2\sqrt{2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^3=8 \Rightarrow x=2$$

بنابراین اختلاف طول نقاط برابر است با: $2-1=1$

۲ ۲۹۵

ابتدا تابع $f \circ g(x)$ را پیدا می کنیم:

$$f(g(x)) = f(2x+1) = \begin{cases} 3(2x+1)-12 & ; 2x+1 \geq 3 \\ (2x+1)^2-1 & ; 2x+1 < 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(g(x)) = \begin{cases} 6x-9 & ; x \geq 1 \\ 4x^2+4x & ; x < 1 \end{cases}$$

حالا برای حل معادله $f \circ g(x)=0$ هریک از ضابطه ها را برابر صفر می گذاریم:

$$x \geq 1: 6x-9=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

$$x < 1: 4x^2+4x=0 \Rightarrow 4x(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}$$

پس مجموع ریشه ها برابر $\frac{3}{2}+0+(-1)=\frac{1}{2}$ است.

۳ ۲۹۶

ابتدا بررسی می کنیم تابع $f(x)$ در چه طول هایی صفر می شود:

$$f(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 & ; 1 \in [0,2] \quad \checkmark \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 & ; -1 \in [-2,0) \quad \checkmark \end{cases}$$

اگر $f(x)=1$ یا $f(x)=1$ باشد، مقدار $f(f(x))$ برابر صفر است.

بنابراین جواب های معادله $f(x)=1$ و $f(x)=-1$ را به دست می آوریم:

$$f(x)=1 \Rightarrow \begin{cases} x-1=1 \Rightarrow x=2 & ; 2 \in [0,2] \quad \checkmark \\ x+1=1 \Rightarrow x=0 & ; 0 \in [-2,0) \quad \checkmark \end{cases}$$

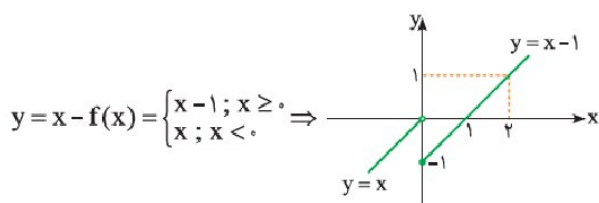
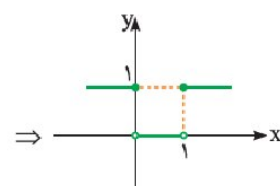
$$f(x)=-1 \Rightarrow \begin{cases} x-1=-1 \Rightarrow x=0 & ; 0 \in [0,2] \quad \checkmark \\ x+1=-1 \Rightarrow x=-2 & ; -2 \in [-2,0) \quad \checkmark \end{cases}$$

بنابراین معادله $f \circ f(x)=0$ ، جواب قابل قبول دارد.

۱ ۲۹۷

ضابطه تابع های $y=f \circ g(x)$ و $y=x-f(x)$ را پیدا می کنیم و نمودار آن ها را رسم می کنیم:

$$f(g(x)) = \begin{cases} 1; x^2-x \geq 0 & = \begin{cases} 1; x \leq 0 \\ 0; 0 < x < 1 \end{cases} \\ 0; x^2-x < 0 & \end{cases}$$



دو نمودار فقط در یک نقطه به طول $x=2$ مشترک هستند.

۲ ۲۹۸

با توجه به نمودار تابع $g(x)$ در صورت سؤال $g(2)=0$ است، پس

برای حل معادله داریم: $g(f(g(x+2)))=0 \Rightarrow f(g(x+2))=2$

حالا باید $f(x)$ را برابر ۲ قرار دهیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x-1=2 \Rightarrow x=6 \\ \frac{1}{2}x-1=-2 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

پس باید $g(x+2)$ برابر ۶ یا ۲ باشد:

$$g(x+2)=6 \Rightarrow \text{یک جواب}$$

$$g(x+2)=-2 \Rightarrow \text{یک جواب}$$

پس معادله دارای ۲ ریشه است.

۱ ۲۹۹

با توجه به نمودار دو تابع f و g در صورت سؤال، ضابطه هر یک از توابع را می نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} -2x & ; -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2}x & ; 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x+3 & ; -3 \leq x < 0 \\ -\frac{3}{2}x+3 & ; 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

حالا تابع $f \circ g$ را پیدا می کنیم:

$$f(g(x)) = \begin{cases} -2g(x) & ; -1 \leq g(x) < 0 \\ \frac{1}{2}g(x) & ; 0 \leq g(x) \leq 4 \end{cases}$$

با توجه به نمودار تابع g ، هیچ گاه $-1 \leq g(x) < 0$ نیست.

پس فقط ضابطه پایینی $(f \circ g)(x)$ قابل قبول است، یعنی:

$$(f \circ g)(x) = \frac{1}{2}g(x) ; 0 \leq g(x) \leq 4$$

$$\Rightarrow (f \circ g)(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & ; -3 \leq x < 0 \\ -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2} & ; 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

۴ ۳۰۰

با توجه به شکل صورت سؤال $f(x)=g(x)=-x+5$ است. در ضمن

با توجه به رابطه صورت سؤال $2g(x)=3f(x)-14$ است، پس:

$$\begin{cases} -2x \cdot f(x) - g(x) = -x+5 \\ 3f(x) - 2g(x) = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2f(x) + 2g(x) = 2x-10 \\ 3f(x) - 2g(x) = 14 \end{cases}$$

از حل دو معادله و دو مجهول بالا نتیجه می گیریم $f(x)=2x+4$ و

$g(x)=3x-1$ است. بنابراین:

$$f(g(x)) = 2(3x-1)+4 = 6x+2$$

۳۵۳ ۴

فرض می‌کنیم $2x - 3 = t \Rightarrow x = \frac{t+3}{2}$ باشد، بنابراین:
 $\Rightarrow f(2x - 3) = f(t) = 4\left(\frac{t+3}{2}\right)^2 - 14\left(\frac{t+3}{2}\right) + 13$
 حال عبارت به دست آمده را ساده می‌کنیم و در انتها به جای t مجدداً x قرار می‌دهیم:
 $f(t) = 4\left(\frac{t^2 + 6t + 9}{4}\right) - 7t - 21 + 13 = t^2 - t + 1$
 $\Rightarrow f(x) = x^2 - x + 1$

پروش سریع‌تر با قرار دادن $x = 0$ در ضابطه $f(2x - 3)$ داریم:
 $f(0 - 3) = 4(0)^2 - 14(0) + 13 \Rightarrow f(-3) = 13$
 تنها گزینه‌ای که با قرار دادن $x = -3$ برابر ۱۳ می‌شود، گزینه (۴) است.

۳۵۴ ۴

با استفاده از تغییر متغیر داریم:
 $x - 3 = t \Rightarrow x = t + 3 \Rightarrow f(t) = (t + 3)^2 - 4(t + 3) + 5$
 $\Rightarrow f(t) = t^2 + 6t + 9 - 4t - 12 + 5 \Rightarrow f(x) = x^2 + 2x + 2$
 حالا ضابطه $f(1 - x)$ را به دست می‌آوریم:
 $\Rightarrow f(1 - x) = (1 - x)^2 + 2(1 - x) + 2 \Rightarrow f(1 - x) = x^2 - 4x + 5$
 $1 - 2x + x^2 + 2 - 2x + 2$

پروش سریع‌تر می‌توانیم در تابع $f(x - 3)$ به جای x عبارت $4 - x$ قرار دهیم.

هایلایت

اگر ضابطه $f(\square)$ را داشته باشیم، برای مشخص کردن ضابطه $f(\circ)$ از طریق عددگذاری، بهترین عدد از حل معادله $\square = \circ$ به دست می‌آید.

پروش سریع‌تر برای عددگذاری در این سؤال ابتدا باید عدد مناسب را به دست آوریم:
 $x - 3 = 1 - x \Rightarrow x = 2$
 جای گذاری در $f(x - 3) \Rightarrow f(2 - 3) = 2^2 - 4 \times 2 + 5 \Rightarrow f(-1) = 1$
 با قرار دادن $x = 2$ در ضابطه $f(1 - x)$ ، به $f(-1)$ می‌رسیم و می‌دانیم $f(-1) = 1$ است، پس گزینه‌ای نشان‌دهنده ضابطه $f(1 - x)$ است که با قرار دادن $x = 2$ در آن، حاصل برابر ۱ شود. در میان گزینه‌ها فقط گزینه (۴) این ویژگی را دارد.

۳۵۵ ۴

ابتدا تابع $fog(x)$ را پیدا می‌کنیم:
 $fog(x) = (2x + 1)g(x) + 6x = (2x + 1)(2x - 3) + 6x$
 $= 4x^2 + 2x - 3$
 حالا با در نظر گرفتن $g(x) = t$ داریم:
 $2x - 3 = t \Rightarrow x = \frac{t+3}{2} \Rightarrow f(g(x)) = 4x^2 + 2x - 3$
 $\Rightarrow f(t) = 4\left(\frac{t+3}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{t+3}{2}\right) - 3 = (t + 3)^2 + (t + 3) - 3$
 $\Rightarrow f(t) = t^2 + 7t + 9$

از طرفی با توجه به نمودار صورت سؤال، $f(g(x)) = -\frac{2}{a}x + 2$ است، پس:

$$-\frac{2}{a} = 6 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

۳۵۶ ۲

چون $f(g(x))$ را داریم و $f(3)$ را می‌خواهیم، پس $g(x)$ را برابر ۳ می‌گذاریم:
 $g(x) = 3 \Rightarrow 2x - 1 = 3 \Rightarrow x = 2$
 حالا در تابع $(fog)(x)$ به جای x عدد ۲ قرار می‌دهیم:

$$f(g(x)) = \frac{x}{x-3} \xrightarrow{x=2} f(g(2)) = \frac{2}{2-3} \Rightarrow f(3) = -2$$

هایلایت

یافتن ضابطه تابع بیرونی با معلوم بودن تابع مرکب

- در بعضی از سؤالات، ضابطه تابع مرکب fog و تابع g (تابع درونی) را می‌دهند و ضابطه تابع f (تابع بیرونی) یعنی $f(x)$ را می‌خواهند. برای حل این مدل از سؤالات به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:
- ۱ ضابطه تابع $g(x)$ را برابر t فرض کرده و مقدار x را برحسب t به دست می‌آوریم.
 - ۲ در تابع مرکب داده شده، به جای x عبارت به دست آمده برحسب t را قرار می‌دهیم و تابع f برحسب t یعنی $f(t)$ را به دست می‌آوریم.
 - ۳ در تابع $f(t)$ به جای همه t ها، x می‌گذاریم تا ضابطه $f(x)$ به دست آید.

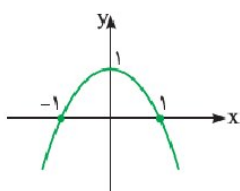
نکته به پوره دیگه اطراح می‌تونست یه سؤال جدید و البته سخت بپرسه. اینجوری: واگر $fog(x) = \frac{x}{x-3}$ و $g(x) = 2x - 1$ باشد، بُد تابع $f(x)$ کد ام است؟
 $f(x) = \frac{x+1}{x-5} \Rightarrow \text{بُرد} = \mathbb{R} - \{5\}$ ؛ جواب

۳۵۷ ۳

با در نظر گرفتن $g(x) = t$ داریم:
 $2x + 1 = t \Rightarrow x = \frac{t-1}{2} \Rightarrow f(g(x)) = 8x^2 + 6x + 5$
 $\Rightarrow f(t) = 8\left(\frac{t-1}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{t-1}{2}\right) + 5 = 2(t^2 - 2t + 1) + 3(t - 1) + 5$
 با ساده کردن عبارت به دست آمده، $f(t) = 2t^2 - t + 4$ می‌شود که با جای گذاری x به جای t ، ضابطه تابع f به صورت $f(x) = 2x^2 - x + 4$ خواهد شد.

پروش سریع‌تر با جای گذاری عدد دلخواه $x = 0$ در تابع fog داریم:
 $f(g(0)) = 5 \xrightarrow{g(0)=1} f(1) = 5 \Rightarrow$ گزینه (۳)

نکته به پوره دیگه اطراح می‌تونست بپرسه: کد کم ترین مقدار تابع f کد ام است؟؛ جواب: $\frac{31}{8}$
 «معادله محور تقارن تابع f کد ام است؟»؛ جواب: $x = \frac{1}{4}$
 «نمودار تابع f از کد ام نواحی دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟»؛ جواب: سوم و چهارم



با توجه به نمودار تابع f ، فقط عبارت (پ) درست است.

۳ ۳۱۰

با تغییر متغیر $t = \frac{x+1}{x}$ داریم:

$$f\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{x+1}{x} + \frac{2x}{x+1} + 1 \Rightarrow f(t) = t + \frac{2}{t} + 1$$

بنابراین $f(x) = x + \frac{2}{x} + 1$ است. پس مقدار $f(1)$ برابر است با:

$$f(1) = 1 + \frac{2}{1} + 1 = 4$$

۴ ۳۱۱

ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم. می‌دانیم:

$$x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$f\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

با تغییر متغیر $t = x - \frac{1}{x}$ داریم:

$$f(t) = t^3 + 3t$$

پس $f(x) = x^3 + 3x$ است.

دام‌تستی اگر خواست نباشد و توی استفاده از اتحاد، اشتباه کنی، گزینه

(۳) رو میزنی!

۲ ۳۱۲

واضح است که $(x^2 - x)^2 = x^4 - 2x^3 + x^2$ است، پس:

$$f(x^2 - x) = (x^4 - 2x^3 + x^2) + 5 = (x^2 - x)^2 + 5$$

حالا به جای $x^2 - x$ می‌توانیم x بگذاریم، یعنی $f(x) = x^2 + 5$ است.

پرونده سرگودر با جایگذاری $x = 2$ در رابطه داده‌شده نتیجه می‌گیریم $f(2) = 9$ خواهد بود و فقط در گزینه (۲) چنین می‌باشد.

۲ ۳۱۳

در ضابطه $fog(x)$ به جای x عدد ۱ می‌گذاریم:

$$f(g(1)) = \frac{5(1) - 2}{3(1) + 1} = \frac{3}{4} \Rightarrow f(-1) = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{-1 + a}{-1 - 1} = \frac{3}{4} \Rightarrow -4 + 4a = -3 \Rightarrow a = 2$$

هابلایت

یافتن ضابطه تابع درونی با معلوم بودن تابع مرکب

در بعضی از سؤالات، ضابطه تابع مرکب fog و تابع f (تابع بیرونی) داده شده و ضابطه تابع g (تابع درونی) یعنی $g(x)$ را می‌خواهند. برای حل این مدل سؤالات به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱ در تابع $f(x)$ به جای همه x ها، $g(x)$ را قرار می‌دهیم تا $f(g(x))$ به دست آید.

۲ تابع $f(g(x))$ به دست آمده را مساوی با تابع مرکب fog که در مسأله داده شده، قرار می‌دهیم و معادله حاصل را بر حسب $g(x)$ حل می‌کنیم.

با جای گذاری x به جای t ، ضابطه تابع f به صورت $f(x) = x^2 + 7x + 9$ می‌شود و معادله محور تقارن آن برابر است با:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{7}{2} = -3\frac{1}{2}$$

۳ ۳۰۶

ابتدا ضابطه تابع g را به دست می‌آوریم. فرض کنیم $f(x) = t$ باشد:

$$2x + 3 = t \Rightarrow x = \frac{t-3}{2} \Rightarrow g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 20$$

$$\Rightarrow g(t) = 8\left(\frac{t-3}{2}\right)^2 + 22\left(\frac{t-3}{2}\right) + 20 = 2(t-3)^2 + 11(t-3) + 20$$

با ساده کردن عبارت به دست آمده $g(t) = 2t^2 - t + 5$ خواهد شد، که با

جایگذاری x به جای t ، ضابطه g به صورت $g(x) = 2x^2 - x + 5$ خواهد

$$\text{شد. پس: } f(g(x)) = 2(2x^2 - x + 5) + 3 = 4x^2 - 2x + 13$$

۴ ۳۰۷

با توجه به صورت سؤال داریم:

$$1) g(f(x)) = 3f(x) + 4 \Rightarrow g(x) = 3x + 4$$

$$2) f(g(x)) = 2g^2(x) + g(x) + 1 \Rightarrow f(x) = 2x^2 + x + 1$$

حالا تابع $(f-g)(x)$ را پیدا می‌کنیم و داریم:

$$y = f(x) - g(x) = (2x^2 + x + 1) - (3x + 4) = 2x^2 - 2x - 3$$

در این سهمی طول رأس برابر $x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$ است و کم‌ترین مقدار

$$\text{آن برابر است با: } y_{\min} = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 3 = \frac{1}{2} - 1 - 3 = -3\frac{1}{2}$$

۳ ۳۰۸

با توجه به شکل صورت سؤال، $g(x) = 2x + 2$ است. حالا با داشتن

تابع $(fog)(x) = 4x^2 + 2x + 1$ ضابطه تابع f را پیدا می‌کنیم:

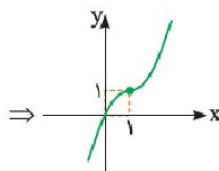
$$g(x) = 2x + 2 = t \Rightarrow x = \frac{t-2}{2}$$

$$\Rightarrow f(t) = 4\left(\frac{t-2}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{t-2}{2}\right) + 1 = (t-2)^2 + (t-2) + 1$$

$$\Rightarrow f(t) = t^2 - 3t + 3 \Rightarrow f(x) = x^2 - 3x + 3$$

حالا سراغ تابع $y = xf(x)$ می‌رویم:

$$y = xf(x) = x(x^2 - 3x + 3) = x^3 - 3x^2 + 3x = (x-1)^3 + 1$$



۱ ۳۰۹

با توجه به نمودار صورت سؤال، سهمی fog محور x ها را در دو

نقطه $x = 0$ و $x = 2$ قطع کرده و نقطه رأس آن $A(1, 1)$ است، پس

$$(fog)(x) = -x^2 + 2x$$

نقطه ۱ قطع می‌کند و عرض از مبدأ آن نیز ۱ است، پس $g(x) = -x + 1$

است. حالا برای پیدا کردن تابع f داریم:

$$g(x) = -x + 1 = t \Rightarrow x = 1 - t \Rightarrow f(g(x)) = -x^2 + 2x$$

$$\Rightarrow f(t) = -(1-t)^2 + 2(1-t) = -t^2 + 1 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 1$$

حال در تابع f ، به جای همه x ها، $g(x)$ می گذاریم:

$$f(g(x)) = (g(x) - \frac{1}{4})^2 - \frac{9}{4}$$

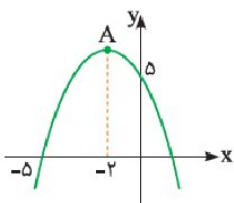
از طرفی در صورت سؤال $f(g(x)) = (x + \frac{1}{4})^2 - \frac{9}{4}$ است، پس:

$$(g(x) - \frac{1}{4})^2 - \frac{9}{4} = (x + \frac{1}{4})^2 - \frac{9}{4} \Rightarrow (g(x) - \frac{1}{4})^2 = (x + \frac{1}{4})^2$$

$$\begin{cases} g(x) - \frac{1}{4} = x + \frac{1}{4} \Rightarrow g(x) = x + 1 \\ g(x) - \frac{1}{4} = -x - \frac{1}{4} \Rightarrow g(x) = -x \end{cases}$$

حالا با هر یک از ضابطه های به دست آمده برای تابع g ، تابع $f + g$ را تشکیل می دهیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} (f+g)(x) = (x^2 - x - 2) + (x + 1) = x^2 - 1 \\ (f+g)(x) = (x^2 - x - 2) + (-x) = x^2 - 2x - 2 \end{cases}$$



با توجه به نمودار داده شده چون $x_s = -2$ و یکی از ریشه ها برابر -5 است، پس ریشه دیگر برابر 1 است.

حالا با مشخص بودن ریشه های سهمی و نقطه $(0, 5)$ روی آن ضابطه $y = g \circ f(x)$ را تعیین می کنیم:

$$g \circ f(x) = k(x + 5)(x - 1) \xrightarrow{(0, 5)} k(0 + 5)(0 - 1) = 5 \Rightarrow k = -1$$

$$\Rightarrow g(f(x)) = -(x + 5)(x - 1) = -x^2 - 4x + 5$$

در ضمن می دانیم $g(x) = 3x + 2$ است، پس داریم:

$$g(f(x)) = 3f(x) + 2 = -x^2 - 4x + 5$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-x^2 - 4x + 3}{3} \Rightarrow f(2) = -3$$

ابتدا دامنه توابع g و f را به دست می آوریم:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-1}; D_f = \mathbb{R} - \{1\}; g(x) = \frac{3x-4}{x+2}; D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \neq -2 \mid \frac{3x-4}{x+2} \neq 1\}$$

$$= \{x \neq -2 \mid x \neq 3\} = \mathbb{R} - \{-2, 3\} \Rightarrow a + b = -2 + 3 = 1$$

به دوره دیگر! طرح می توانست اینطوری بپرسد:

اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ و دامنه تابع $f \circ g$ برابر $\mathbb{R} - \{a, b\}$ باشد، مقدار $a + b$ کدام

است؟ جواب:

$$D_{f \circ g} = \{x \neq 1 \mid \frac{2x-1}{x-1} \neq 1\} = \{x \neq 1 \mid x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

$$\Rightarrow a + b = 0 + 1 = 1$$

۳۱۴ ۲

با توجه به ماشین داده شده، $g(f(x)) = 2x$ است. حال برای به دست آوردن $f(5)$ یک بار در تابع $(g \circ f)(x)$ به جای x عدد 5 می گذاریم و یک بار هم در تابع $g(x)$ به جای x ها، $f(5)$ می گذاریم:

$$\begin{aligned} g(f(5)) &= 2 \times 5 = 10 \\ g(f(5)) &= 3f(5) + 4 = 10 \Rightarrow 3f(5) = 6 \Rightarrow f(5) = 2 \end{aligned}$$

۳۱۵ ۳

ابتدا ضابطه تابع $f \circ g$ را ساده تر می کنیم:

$$(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 2 = (x^2 - 4x + 4) - 2 = (x - 2)^2 - 2$$

حالا در تابع $f(x)$ ، به جای x تابع $g(x)$ را قرار می دهیم و آن را با ضابطه $f \circ g$ داده شده در صورت سؤال مقایسه می کنیم:

$$\begin{cases} f(g(x)) = (g(x))^2 - 2 \\ f(g(x)) = (x - 2)^2 - 2 \end{cases} \Rightarrow g^2(x) = (x - 2)^2$$

$$\sqrt{\quad} \rightarrow |g(x)| = |x - 2| \Rightarrow \begin{cases} g(x) = x - 2 \\ g(x) = -x + 2 \end{cases}$$

دام تستی توجه کنید $g(x)$ می تواند برابر $x - 2$ یا $-x + 2$ باشد و هر دو قابل قبول هستند. در این سؤالات، یکی از جواب ها به انتخاب طراح در گزینه ها قرار داده می شود. راستی! به عبارت «کدام می تواند باشد؟» در صورت سؤال توجه کنید.

۳۱۶ ۲

بهتر است ابتدا ضابطه دو تابع f و $f \circ g$ را ساده تر کنیم:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1} = \frac{2x+2-1}{x+1} = 2 - \frac{1}{x+1}$$

$$f \circ g(x) = \frac{2x}{x+1} = \frac{2x+2-2}{x+1} = 2 - \frac{2}{x+1}$$

حالا در تابع $f(x)$ به جای x ها، تابع $g(x)$ قرار می دهیم و آن را با ضابطه $f \circ g$ داده شده در صورت سؤال مقایسه می کنیم:

$$\begin{cases} f(g(x)) = 2 - \frac{1}{g(x)+1} \\ f(g(x)) = 2 - \frac{2}{x+1} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{g(x)+1} = \frac{2}{x+1}$$

$$\Rightarrow g(x) + 1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

پیشرو سریع تر با جایگذاری $x = 1$ در ضابطه $f \circ g$ نتیجه می گیریم $f(g(1)) = 1$ است. از طرفی $f(0) = 1$ می باشد. پس $g(1) = 0$ بوده و فقط در گزینه (۲) چنین است.

۳۱۷ ۱

ابتدا با کمک اتحاد مربع کامل، ضابطه توابع f و $f \circ g$ را ساده می کنیم:

$$f(x) = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{9}{4} = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$$

$$f(g(x)) = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{9}{4} = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$$



۳۳۳ ۱

ابتدا دامنه توابع f و g را مشخص می‌کنیم. از آن جایی که عبارت $x + |x|$ به ازای $x > 0$ برابر $2x$ و به ازای $x \leq 0$ برابر صفر است، پس $D_f = \mathbb{R}$ است. در تابع کسری g نیز مخرج نباید صفر شود، پس $D_g = \mathbb{R} - \{0, 4\}$ است، بنابراین:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x+|x|} \neq 0, \sqrt{x+|x|} \neq 4\}$$

تابع f به ازای $x \leq 0$ برابر صفر و به ازای $x = 8$ برابر ۴ می‌شود، پس:

$$D_{g \circ f} = (0, 8) \cup (8, +\infty)$$

پس گزینۀ (۱) درست است. چون $x = -1$ و $x = 8$ در تابع $g \circ f$ صدق نمی‌کنند؛

۳۳۳ ۴

دامنه هریک از تابع‌ها را پیدا می‌کنیم. دامنه تابع $g(x) = x - [x]$ برابر $\mathbb{R}$ است. برای پیدا کردن دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$ داریم:

$$\frac{x}{1-x} \geq 0 \Rightarrow \frac{x}{1-x} \geq 0 \Rightarrow [0, 1)$$

حالا سراغ دامنه تابع $f \circ g$ می‌رویم:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x - [x] < 1\}$$

در ضمن می‌دانیم همواره $0 \leq x - [x] < 1$ است، پس:

$$D_{f \circ g} = \mathbb{R}$$

۳۳۴ ۴

ابتدا دامنه توابع f و g را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{3-x} \Rightarrow 3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3$$

$$g(x) = \log_2(x^2 + 2x) \Rightarrow x(x+2) > 0 \Rightarrow x < -2 \text{ یا } x > 0$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x < -2 \text{ یا } x > 0 \mid \log_2(x^2 + 2x) \leq 3\}$$

بنابراین باید جواب نامعادله $\log_2(x^2 + 2x) \leq 3$ را مشخص کنیم:

$$\log_2(x^2 + 2x) \leq 3 \Rightarrow x^2 + 2x \leq 2^3$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 8 \leq 0 \Rightarrow (x-2)(x+4) \leq 0 \Rightarrow -4 \leq x \leq 2$$

بنابراین دامنه $f \circ g$ برابر می‌شود با:

$$D_{f \circ g} = \{x < -2 \text{ یا } x > 0 \mid -4 \leq x \leq 2\} = [-4, -2) \cup (0, 2]$$

پس گزینۀ (۱)، (۲) و (۳) حذف می‌شوند. با قرار دادن $x = -2$ در تابع $f \circ g$ عبارت جلوی لگاریتم صفر می‌شود، پس $x = -2$ نباید در دامنه تابع باشد. بنابراین

۳۳۵ ۴

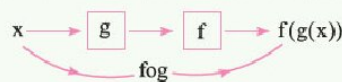
می‌دانیم دامنه تابع $f(x) = 2x - x^2$ برابر $\mathbb{R}$ است. حالا سراغ دامنه

$$g(x) = \sqrt{\log x} : \begin{cases} x > 0 \\ (2) \log x \geq 0 \Rightarrow \log x \geq \log 1 \Rightarrow x \geq 1 \end{cases}$$

هایلات

یافتن دامنه تابع مرکب

با توجه به نحوه تشکیل تابع $f \circ g$ مشخص است که $g(x)$ به جای مقادیر ورودی تابع f قرار می‌گیرد، پس دامنه تابع $f \circ g$ به صورت زیر خواهد بود:



$$\Rightarrow D_{f(g(x))} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

۳۳۶ ۲

ابتدا دامنه توابع f و g را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \sqrt{5-x} : D_f = (-\infty, 5]$$

$$g(x) = x^2 + 4x : D_g = \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 4x \leq 5\}$$

حالا باید جواب نامعادله $x^2 + 4x \leq 5$ را مشخص کنیم:

$$x^2 + 4x - 5 \leq 0 \Rightarrow (x+5)(x-1) \leq 0 \Rightarrow -5 \leq x \leq 1$$

بنابراین دامنه $f \circ g$ برابر می‌شود با:

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq 1\} = [-5, 1]$$

$$a \times b = -5$$

پس داریم:

۳۳۷ ۲

ابتدا دامنه توابع f و g را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2} \Rightarrow x \neq \pm 1$$

$$g(x) = \sqrt{x-x^2} \Rightarrow x(1-x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \neq \pm 1 \mid 0 \leq \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1\}$$

حال باید جواب نامعادله $0 \leq \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1$ را مشخص کنیم:

$$1) \frac{1+x^2}{1-x^2} \geq 0 \Rightarrow \frac{1+x^2}{1-x^2} > 0 \Rightarrow 1-x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

$$2) \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{1+x^2}{1-x^2} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{1+x^2-1+x^2}{1-x^2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2}{1-x^2} \leq 0 \Rightarrow \frac{x}{\frac{2x^2}{1-x^2}} \leq 0 \Rightarrow \frac{x}{2x} \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq 0$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \cup \{0\}$$

با توجه به این که اشتراک جواب‌های به دست آمده از نامعادله برابر

$$D_{g \circ f} = \{x \neq \pm 1 \mid x = 0\} = \{0\}$$

$x = 0$ است، پس:

$$x = \frac{1}{p} \text{ را در تابع } g \circ f \text{ قرار می‌دهیم:}$$

$$g(f(\frac{1}{p})) = g(\frac{5}{p}) = \sqrt{\frac{5}{p} - (\frac{5}{p})^2} = \sqrt{\frac{5}{p}(1 - \frac{5}{p})} = \sqrt{\frac{10}{p^2}}$$

پس گزینۀ (۱) و (۳) و (۴) حذف می‌شوند.

۳۳۸ ۳

ابتدا دامنه تابع f را به دست می آوریم:

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} : 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$\xrightarrow{x \neq 0} D_f = [-1, 0) \cup (0, 1]$$

همچنین با توجه به صورت سؤال $D_g = (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ است. حالا به سراغ دامنه $f \circ g$ می رویم:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$= \{-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \mid -1 \leq \tan x \leq 1, \tan x \neq 0\}$$

با توجه به این که $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ است، از $-1 \leq \tan x \leq 1$ و $\tan x \neq 0$ نتیجه می گیریم $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ است، بنابراین دامنه تابع $f \circ g$ به صورت $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ است.

۳۳۹ ۲

با توجه به شکل صورت سؤال f تابعی خطی با ضابطه $f(x) = x + 2$ و دامنه $[-2, 1]$ است، پس:

$$D_{f \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} = \{-2 \leq x \leq 1 \mid -2 \leq f(x) \leq 1\}$$

حال نامعادله $-2 \leq f(x) \leq 1$ را حل می کنیم:

$$-2 \leq x + 2 \leq 1 \Rightarrow -4 \leq x \leq -1$$

از اشتراک بازه های به دست آمده نتیجه می شود $D_{f \circ f} = [-2, -1]$ است که شامل ۲ عدد صحیح می باشد.

۴: به دوره دیگه! طراح می توست همین سؤالی اینجوری پیرسه: «تابع

$y = (f \circ f)(x)$ با دامنه $[-2, 1]$ را در نظر بگیرید. دامنه تابع $y = (f \circ f)(x)$

شامل چند عدد صحیح است؟» جواب:

$$D_{f \circ f} = \{x \in D_f \mid -2 \leq f(x) \leq 1\} = \{x \in D_f \mid -2 \leq x + 2 \leq 1\} = \{x \in D_f \mid -4 \leq x \leq -1\} = [-2, -1]$$

۳۴۰ ۱

با توجه به نمودار صورت سؤال $g(x) = -\frac{1}{x} + 2$ و دامنه آن برابر بازه $[-2, 4]$ است. حالا دامنه تابع f را پیدا می کنیم:

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{-x+6x-8}} \Rightarrow -x^2 + 6x - 8 \geq 0 \Rightarrow 2 < x < 4$$

حالا با توجه به تعریف، دامنه تابع $f \circ g$ را به دست می آوریم:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$= \{-2 \leq x \leq 4 \mid 2 < -\frac{1}{x} + 2 < 4\}$$

سپس جواب نامعادله $2 < -\frac{1}{x} + 2 < 4$ را به دست می آوریم:

$$2 < -\frac{1}{x} + 2 < 4 \Rightarrow 0 < -\frac{1}{x} < 2 \Rightarrow -4 < x < 0$$

بنابراین دامنه تابع $f \circ g$ برابر است با:

$$D_{f \circ g} = \{-2 \leq x \leq 4 \mid -4 < x < 0\} = [-2, 0)$$

شامل دو عدد صحیح $x = -2$ و $x = -1$ است.

پس $D_g = [1, +\infty)$ است. پس خواهیم داشت:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - x^2 \geq 1\}$$

حالا باید جواب نامعادله $2x - x^2 \geq 1$ را پیدا کنیم:

$$x^2 - 2x + 1 \leq 0 \Rightarrow (x-1)^2 \leq 0 \Rightarrow x = 1$$

بنابراین دامنه تابع $g \circ f$ برابر است با:

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 1\} = \{1\}$$

۳۴۱ ۱

ابتدا دامنه تابع های f و g را تعیین می کنیم:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2+x+2}} \Rightarrow -x^2+x+2 > 0 \Rightarrow \frac{x^2-x-2}{(x-2)(x+1)} < 0$$

$$\Rightarrow -1 < x < 2$$

$$g(x) = (\frac{1}{x})^x \Rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < (\frac{1}{x})^x < 2\}$$

می دانیم همواره $(\frac{1}{x})^x < -1$ است. پس کفایت نامعادله $(\frac{1}{x})^x < 2$ را حل کنیم:

$$(\frac{1}{x})^x < 2 \Rightarrow (x^{-2})^x < 2 \Rightarrow 2^{-2x} < 2^1 \Rightarrow -2x < 1 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$$

پس دامنه $f \circ g$ برابر است با:

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{1}{2}\} = (-\frac{1}{2}, +\infty)$$

۵: روش سرسبز $x = 0$ در تابع $f \circ g$ صدق می کند، پس گزینه های (۲) و (۳) حذف می شود. $x = 1$ نیز در تابع $f \circ g$ صدق می کند، پس جواب گزینه (۱) است.

۳۴۲ ۲

دامنه تابع $f(x) = \sqrt{x-2}$ برابر $x \geq 2$ و دامنه تابع g برابر $\mathbb{R}$ است (چون در تابع g ، مخرج کسر همواره مثبت و فاقد ریشه حقیقی است). حالا سراغ دامنه تابع $f \circ g$ می رویم:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{a}{x^2+1} \geq 2\}$$

حالا باید جواب نامعادله $\frac{a}{x^2+1} \geq 2$ را پیدا کنیم:

$$\frac{a}{x^2+1} \geq 2 \xrightarrow{x(x^2+1)} a \geq 2x^2+2 \Rightarrow 2x^2+2-a \leq 0$$

طبق صورت سؤال، دامنه تابع $f \circ g$ به صورت $[-3, b]$ است، پس $x = -3$ یکی از ریشه های معادله $2x^2+2-a=0$ است:

$$2(-3)^2+2-a=0 \Rightarrow 18+2-a=0 \Rightarrow a=20$$

بنابراین نامعادله را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$2x^2-18 \leq 0 \Rightarrow 2(x-3)(x+3) \leq 0 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$$

پس دامنه تابع $f \circ g$ به صورت $[-3, 3]$ و در نتیجه $b = 3$ و $a - b = 17$ است.



۳۳۳ ۳

ابتدا دامنه توابع f و g را به دست می آوریم:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow [x] > 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow D_f = [1, +\infty)$$

$$g(x) = -\log x \Rightarrow x > 0 \Rightarrow D_g = (0, +\infty)$$

$$\Rightarrow D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x > 0 \mid -\log x \geq 1\}$$

حالا باید جواب نامعادله $-\log x \geq 1$ را مشخص کنیم:

$$-\log x \geq 1 \Rightarrow \log x \leq -1 \Rightarrow \log x \leq \log \frac{1}{10} \Rightarrow x \leq \frac{1}{10}$$

$$D_{fog} = \{x > 0 \mid x \leq \frac{1}{10}\} = (0, \frac{1}{10}]$$

پس:

۳۳۳ ۲

با توجه به نمودار داده شده برای تابع g واضح است که $b = -1$ است؛ چون نمودار $y = -\sqrt{x}$ یک واحد به راست منتقل شده است. در ضمن با توجه به این نمودار $g(5) = 0$ است، پس:

$$g(x) = a - \sqrt{x-1} \xrightarrow{x=5} g(5) = a - \sqrt{5-1} = 0$$

$$\Rightarrow a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow g(x) = 2 - \sqrt{x-1}$$

حالا دامنه توابع f و g را به دست می آوریم:

$$f(x) = \sqrt{4x-x^2} \Rightarrow x(4-x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 4$$

$$g(x) = 2 - \sqrt{x-1} \Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \geq 1 \mid 0 \leq 2 - \sqrt{x-1} \leq 4\}$$

حالا باید جواب نامعادله $0 \leq 2 - \sqrt{x-1} \leq 4$ را مشخص کنیم:

$$1) 2 - \sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} \leq 2 \Rightarrow x-1 \leq 4 \Rightarrow x \leq 5$$

$$2) 2 - \sqrt{x-1} \leq 4 \Rightarrow \sqrt{x-1} \geq -2 \xrightarrow{\text{همواره برقرار است}} x \geq 1$$

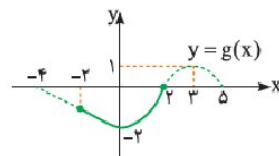
با توجه به این که اشتراک جواب های به دست آمده از نامعادله برابر بازه $1 \leq x \leq 5$ است، پس:

$$D_{fog} = \{x \geq 1 \mid 1 \leq x \leq 5\} = [1, 5] \Rightarrow \text{شامل ۵ عدد صحیح}$$

۳۳۳ ۳

برای پیدا کردن بُرد gof ، بُرد تابع f یعنی بازه $[-2, 2]$ را به عنوان دامنه تابع g در نظر بگیریم:

با توجه به نمودار تابع g در بازه $[-2, 2]$ ، بُرد تابع g در این بازه برابر $[-2, 0]$ است که شامل ۳ عدد صحیح ۰ و -۱ و -۲ است.



هایلایت

یافتن بُرد تابع مرکب

برای به دست آوردن بُرد تابع مرکب fog به ترتیب زیر عمل می کنیم:

- ۱) ابتدا بُرد تابع درونی g را به دست می آوریم.
- ۲) بُرد تابع درونی را به عنوان دامنه تابع بیرونی f در نظر می گیریم.
- ۳) سپس بُرد تابع بیرونی را با دامنه جدید به دست می آوریم.

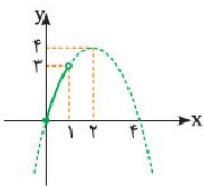
۳۳۳ ۲

می دانیم $1 < [2x] - 2x \leq 0$ است. بنابراین

باید برد $g(x) = -x^2 + 4x$ را به ازای ورودی

$[0, 1)$ به دست آوریم:

$$\Rightarrow \text{برد تابع } gof = [0, 3)$$

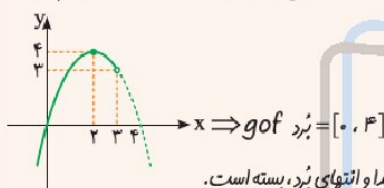


دام تستی **ی**ه اشتباه رایج اینه که دانش آموزها فکر میکنند چون $1 < [x] - x \leq 0$ است، پس $2 < [2x] - 2x \leq 0$ بوده و به گزینه ۳ میرسن.

۴ **ی**ه پوره دگله! طراح توی همین سوال، میتونست تابع f رو کمی تغییر بده و سوال رو اینطوری بپرسه:

دائر $f(x) = 3x - 3$ و $g(x) = -x^2 + 4x$ باشد، بُرد تابع gof کدومه؟

جواب: توفه کنید $3 < [x] - x \leq 0$ است و تابع g به ازای ورودی $(0, 3)$ دارای ماکزیمم است. پس قعماً باید تابع g رو در دامنه مفرد شده، رسم کنید.



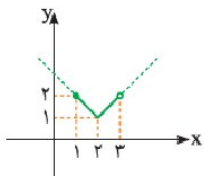
به این موضوع توفه کنید که ابتدا و انتهای بُرد، بسته است.

۳۳۳ ۴

می دانیم $1 < [x] - x \leq 0$ است، پس $2 < [2x] - 2x \leq 0$ است. بنابراین

بُرد تابع g برابر بازه $[1, 3)$ است. حالا برای تعیین بُرد تابع $(fog)(x)$ ،

نمودار تابع $f(x) = |x-2| + 1$ را در دامنه $[1, 2)$ رسم می کنیم و بُرد آن را پیدا می کنیم:



$$\xrightarrow{\text{بُرد تابع } fog} R_{fog} = [1, 2]$$

۳۳۳ ۳

می دانیم $1 < [x] - x \leq 0$ می باشد،

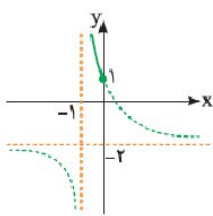
پس $0 \leq [x] - x < 1$ است. حالا

باید برد $g(x) = \frac{-2x+1}{x+1}$ را به ازای

ورودی $[-1, 0)$ به دست آوریم:

با توجه به نمودار، برد تابع gof برابر

بازه $[1, +\infty)$ است.



۳۳۳ ۲

ابتدا باید بُرد تابع $f(x) = 1 + \sin x$ را پیدا کنیم. می دانیم

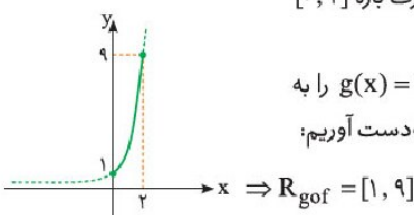
$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 + \sin x \leq 2$$

پس بُرد تابع f به صورت بازه $[0, 2]$

است.

حالا باید بُرد تابع $g(x) = 3^x$ را به

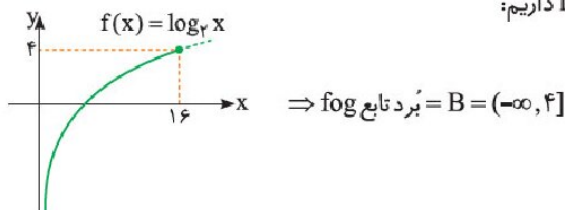
ازای ورودی $[0, 2]$ به دست آوریم:



$$\Rightarrow R_{gof} = [1, 9]$$

فصل اول • تابع |

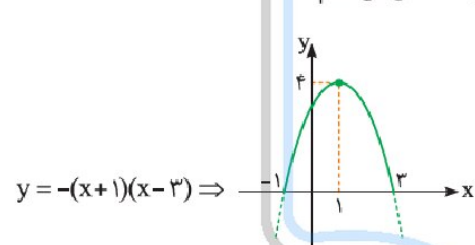
حالا باید برد تابع $f(x) = \log_2 x$ را به ازای ورودی $(-\infty, 16]$ به دست بیاوریم. از طرفی چون $D_f = (0, +\infty)$ می باشد، پس باید برد تابع f را به ازای ورودی $(0, 16]$ به دست بیاوریم و با توجه به نمودار تابع f داریم:



پس $A \cap B = (0, 4]$ است که شامل اعداد صحیح ۱ و ۲ و ۳ و ۴ است.

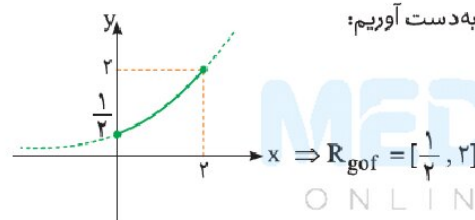
۳۴۱ ۴

ابتدا برد تابع f را پیدا می کنیم، برای این منظور ابتدا نمودار تابع $y = -x^2 + 2x + 3$ را رسم می کنیم و بخشی از آن که بالای (روی) محور x است را مشخص می کنیم:



محدوده برد این تابع بازه $[0, 4]$ است. پس محدوده برد تابع f به صورت $R_f = [0, 2]$ می باشد.

حالا برای پیدا کردن برد تابع gof ، باید برد $g(x) = 2^{x-1}$ را به ازای ورودی $[0, 2]$ به دست آوریم:



۳۴۲ ۳

به بررسی عبارت ها می پردازیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 \xrightarrow{g} 4 \xrightarrow{f} \times \\ 0 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 3 \\ 3 \xrightarrow{g} 2 \xrightarrow{f} -1 \end{array} \right. \Rightarrow \text{fog} = \{(0, 3), (3, -1)\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{f} \times \\ 2 \xrightarrow{f} -1 \xrightarrow{f} \times \\ 3 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{f} 1 \\ 0 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{f} 3 \end{array} \right. \Rightarrow \text{fof} = \{(0, 3), (1, 0), (3, 1)\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{g} 2 \\ 2 \xrightarrow{f} -1 \xrightarrow{g} 4 \\ 3 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{g} 1 \\ 0 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{g} \times \end{array} \right. \Rightarrow \text{gof} = \{(1, 2), (2, 4), (3, 1)\}$$

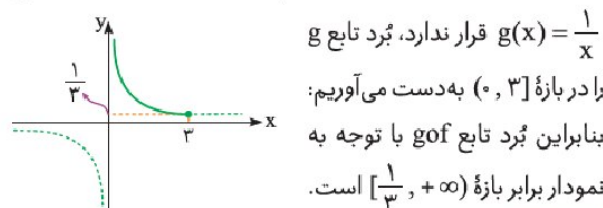
تابع fog نزولی و توابع fof و gof غیریکنوا هستند.

۳۳۸ ۱

ابتدا برد تابع $f(x) = |2\cos x - 1|$ را پیدا می کنیم. می دانیم $-1 \leq \cos x \leq 1$ است، پس:

$$-2 \leq 2\cos x \leq 2 \Rightarrow -3 \leq 2\cos x - 1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq |2\cos x - 1| \leq 3$$

پس برد تابع f برابر بازه $[0, 3]$ است. حالا باید برد تابع $g(x) = \frac{1}{x}$ را به ازای ورودی $[0, 3]$ به دست آوریم، اما چون $x = 0$ در دامنه تابع



۳۳۹ ۴

ابتدا محدوده $-\sqrt{5\sin^2 x} - 1$ را پیدا می کنیم. می دانیم $-1 \leq \sin x \leq 1$ است، پس:

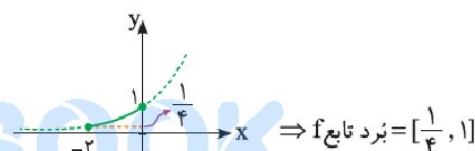
$$0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 5\sin^2 x \leq 5 \Rightarrow -1 \leq \sqrt{5\sin^2 x} - 1 \leq 4$$

از طرفی چون $5\sin^2 x - 1$ زیر رادیکال فرجه ۲ قرار دارد، پس قسمت های منفی آن را کنار می گذاریم. بنابراین:

$$0 \leq 5\sin^2 x - 1 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{5\sin^2 x} - 1 \leq 2$$

$$\xrightarrow{\times(-1)} -2 \leq -\sqrt{5\sin^2 x} - 1 \leq 0$$

حالا برد تابع $y = 2^x$ را به ازای ورودی $[-2, 0]$ پیدا می کنیم:



پس $a = \frac{1}{4}$ ، $b = 1$ و در نتیجه $a + b = \frac{5}{4}$ است.

۳۴۰ ۳

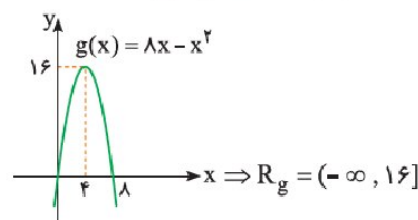
دامنه تابع $f(x) = \log_2^x$ برابر $x > 0$ و دامنه تابع $g(x) = 8x - x^2$ برابر $\mathbb{R}$ است. حالا دامنه تابع fog را پیدا می کنیم:

$$D_{\text{fog}} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid 8x - x^2 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 8\} = (0, 8)$$

پس دامنه fog برابر بازه $(0, 8)$ می باشد.

سپس برد تابع g را با توجه به نمودار آن به دست می آوریم:





۳۴۳ ۱

عبارت زیر رادیکال با فرجه ۲ باید مثبت باشد و چون در مخیج کسر قرار دارد نمی تواند صفر باشد:

$$f(x+2) - f(3-2x) > 0 \Rightarrow f(x+2) > f(3-2x)$$

حالا با توجه به صورت سؤال چون f تابعی اکیدا صعودی است، پس:

$$f(x+2) > f(3-2x) \Rightarrow x+2 > 3-2x \Rightarrow x > \frac{1}{3} \quad (1)$$

حالا با توجه به اینکه دامنه تابع f برابر بازه $[-6, 4]$ است، دامنه توابع $f(x+2)$ و $f(3-2x)$ را به دست می آوریم:

$$-6 < x+2 \leq 4 \Rightarrow -8 < x \leq 2 \quad (2)$$

$$-6 < 3-2x \leq 4 \Rightarrow -9 < -2x \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x < \frac{9}{2} \quad (3)$$

از اشتراک ۳ بازه بالا، حدود x برابر $[\frac{1}{3}, 2]$ به دست می آید که این بازه تنها شامل دو عدد صحیح است.

هابلایت

۱ در توابع اکیدا صعودی می دانیم:

$$f(\odot) > f(\square) \Rightarrow \odot > \square$$

۲ در توابع اکیدا نزولی می دانیم:

$$f(\odot) > f(\square) \Rightarrow \odot < \square$$

دامتستی اگر دامنه ترکیب توابع $f(x+2)$ و $f(3-2x)$ روایت بره که حساب کنی به گزینه (۴) می رسی.

۳۴۴ ۱

چون تابع f اکیدا نزولی است، پس برای حل نامعادله، داریم:

$$f(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) > f(x^2 - 2x + 1)$$

$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 < x^2 - 2x + 1$$

$$\Rightarrow (x-1)^3 < (x-1)^2 \Rightarrow (x-1)^3 - (x-1)^2 < 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2(x-2) < 0 \Rightarrow x-2 < 0 \Rightarrow x < 2; x \neq 1$$

در ضمن چون دامنه تابع f مجموعه ای از مقادیر مثبت است، پس:

$$1) (x-1)^3 > 0 \Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

$$2) (x-1)^2 > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

از اشتراک مقادیر به دست آمده، نتیجه می گیریم $1 < x < 2$ است.

۳۴۵ ۱

با توجه به اینکه f تابعی اکیدا نزولی است، به حل نامعادله داده شده می پردازیم:

$$1) f(m^2 - m - 5) < f(-3 + 2m - m^2) \Rightarrow m^2 - m - 5 > -3 + 2m - m^2 \Rightarrow 2m^2 - 3m - 2 > 0 \Rightarrow (2m+1)(m-2) > 0 \Rightarrow m < -\frac{1}{2} \text{ یا } m > 2$$

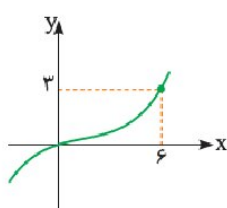
در ضمن چون دامنه تابع مجموعه ای از مقادیر منفی است، پس:

$$2) m^2 - m - 5 < 0 \Rightarrow \frac{1-\sqrt{21}}{2} < m < \frac{1+\sqrt{21}}{2}$$

$$3) -3 + 2m - m^2 < 0 \Rightarrow -1 < m < 3 \Rightarrow \text{همواره برقرار است.}$$

از اشتراک (۱) و (۲) و (۳) مجموعه جواب نامعادله برابر $(\frac{1-\sqrt{21}}{2}, -\frac{1}{2}) \cup (2, \frac{1+\sqrt{21}}{2})$ است که فقط یک مقدار صحیح یعنی $m = -1$ در این بازه قرار دارد.

۳۴۶ ۴



از آن جایی که f تابعی اکیدا صعودی است و از نقطه $A(6, 3)$ می گذرد، نمودار آن را به صورت مقابل فرض می کنیم. با توجه به نمودار، به ازای $x \leq 6$ رابطه $f(x) \leq 3$ برقرار است، پس:

$$f(g(x)) \leq 3 \Rightarrow g(x) \leq 6 \Rightarrow x^2 - x \leq 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x+2) \leq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 3$$

بنابراین مجموعه جواب نامعادله، شامل ۶ عدد صحیح است.

۱ به پوره دیگه! طراح توی همین سوال، میتونست اینجوری بپرسه: دامنه

تابع $y = \sqrt{3 - (f \circ g)(x)}$ کدما است؟ جواب:

$$3 - f(g(x)) \geq 0 \Rightarrow f(g(x)) \leq 3 \Rightarrow x^2 - x \leq 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 \leq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 3$$

۳۴۷ ۳

برای اینکه رابطه f نمایش دهنده یک تابع باشد، باید در زوج مرتب های $(1, 4)$ و $(1, a^2 + 3a)$ مؤلفه های دوم با هم برابر باشند.

$$a^2 + 3a = 4 \Rightarrow a^2 + 3a - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -4 \end{cases}$$

اکنون شرط یک به یک بودن رابطه f را بررسی می کنیم:

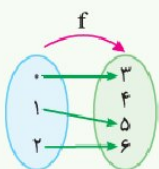
$$a = 1 \Rightarrow f = \{(1, 4), (4, 5), (b, 5)\} \Rightarrow b = 4 \Rightarrow b + a = 5$$

$$a = -4 \Rightarrow f = \{(1, 4), (4, 5), (b, 5)\} \Rightarrow b = 4 \Rightarrow b + a = 0$$

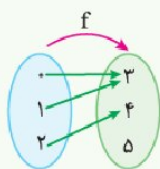
هابلایت

تابع یک به یک

اگر در یک رابطه تشکیل شده از زوج مرتب ها، به صورت (x, y) ، به ازای هر x فقط یک y داشته باشیم، آن رابطه یک تابع است. هم چنین اگر در تابع، به ازای هر y فقط یک x داشته باشیم، به این تابع، یک به یک گویند.



تابع یک به یک است.

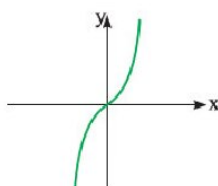
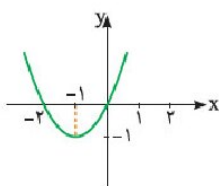


تابع است و یک به یک نیست.

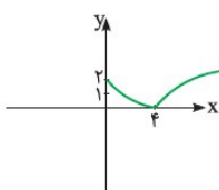
۳۵۱ ۲

نمودار هر یک از توابع داده شده را رسم می‌کنیم:

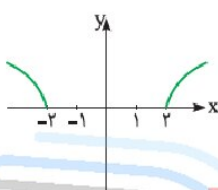
۱) $y = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$ ۲) $y = x^3 + 2x$



۳) $y = |\sqrt{x} - 2|$



۴) $y = \sqrt{|x| - 2}$



۳۵۲ ۱

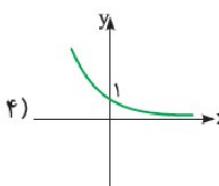
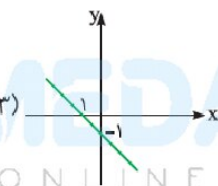
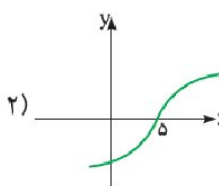
می‌دانیم تابع یک به یک، هر خط افقی $y = k$ را باید حداکثر در یک نقطه قطع کند.

با بررسی گزینه «۱» داریم:

$$x^3 - 4x + 1 = k \xrightarrow{k=1} x^3 - 4x + 1 = 1 \Rightarrow x^3 - 4x = 0$$

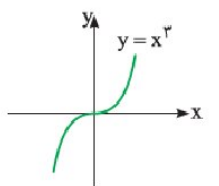
$$\Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

چون تابع موجود در گزینه «۱»، خط افقی $y = 1$ را در ۳ نقطه قطع کرده، بنابراین تابع یک به یک نیست. باقی گزینه‌ها، نمایانگر یک تابع یک به یک هستند.

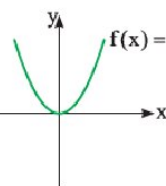


۳۵۳ ۳

ابتدا نمودار تابع $f(x) = |x^3|$ را رسم می‌کنیم.



قدرمطلق



باتوجه به نمودار تابع f ، غیریکتوا است. از طرفی چون خطی موازی محور x ها وجود دارد که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند (مثلاً خط $y = 1$) پس تابع یک به یک نیست و در نتیجه وارون ناپذیر است.

اگر تابع f به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها به شکل (x, y) باشد، به شرطی یک به یک است که هیچ دو x مختلفی دارای y یکسان نباشند. مثلاً تابع $f = \{(1, 2), (3, 0), (4, 2)\}$ یک به یک نیست، زیرا دو زوج مرتب $(1, 2)$ و $(4, 2)$ دارای مؤلفه دوم یکسان هستند. نمودار تابع f به شرطی یک به یک است که هر خط موازی محور x ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند. **توابع اکیداً صعودی و اکیداً نزولی، یک به یک هستند.**

۳۴۸ ۴

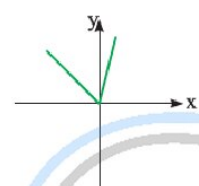
می‌دانیم برای اینکه یک تابع، یک به یک باشد، باید هر خط افقی، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند. در بین گزینه‌ها، تنها نمودار تابع گزینه ۴ این ویژگی را دارد.

دام‌تستی! نمودار گزینه (۱)، مربوط به یک تابع نیست!

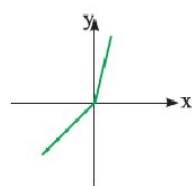
۳۴۹ ۲

نمودار هر یک از توابع داده شده را رسم می‌کنیم:

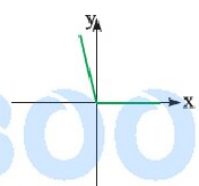
۱) $y = \begin{cases} 3x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$



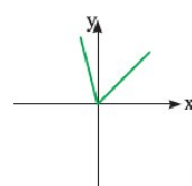
۲) $y = \begin{cases} 3x & ; x \geq 0 \\ x & ; x < 0 \end{cases}$



۳) $y = \begin{cases} 0 & ; x \geq 0 \\ -4x & ; x < 0 \end{cases}$



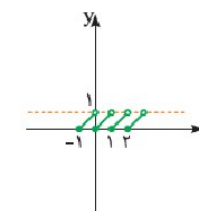
۴) $y = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -3x & ; x < 0 \end{cases}$



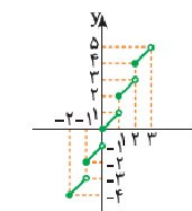
۳۵۰ ۲

نمودار هر یک از توابع داده شده را رسم می‌کنیم:

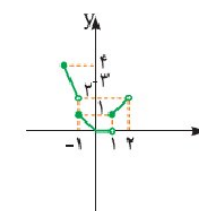
۱) $y = x - [x]$



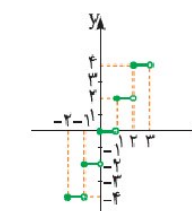
۲) $y = x + [x]$



۳) $y = x[x]$



۴) $y = [x + [x]] = [x] + [x] = 2[x]$





۲ ۳۵۴

مجموع دو تابع اکیداً صعودی، خود یک تابع اکیداً صعودی و یک به یک است. توابع موجود در گزینه‌های «۱»، «۳» و «۴» از جمع دو تابع اکیداً صعودی به دست آمده‌اند. بنابراین یک به یک و وارون پذیرند. تابع موجود در گزینه «۲»، مجموع یک تابع صعودی و یک تابع نزولی است. و نقاط $(-1, 1)$ و $(0, 1)$ با عرضی یکسان روی آن واقع شده‌اند، بنابراین یک به یک و وارون پذیر نیست.

۳ ۳۵۵

می‌دانیم توابع درجه دو، توابعی غیر یک به یک هستند. برای اینکه تابع $f(x)$ یک تابع یک به یک باشد، باید ضریب x^2 برابر صفر شود:
 $f(x) = m^2 x^2 + 2x - x^2 + m = f(x) = (m^2 - 1)x^2 + 2x + m$
 $\Rightarrow m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 2x + 1 \\ f(x) = 2x - 1 \end{cases}$
 حاصل $f(3/5)$ برابر است با:
 $\begin{cases} f(3/5) = 2(3/5) + 1 = 8/5 \\ f(3/5) = 2(3/5) - 1 = 1/5 \end{cases}$
 بنابراین حداکثر مقدار $f(3/5)$ برابر ۸ است.

۲ ۳۵۶

در توابع همگرافیک به شکل $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، اگر صورت و مخرج پس از فاکتورگیری با هم ساده شوند و عدد ثابت باقی بماند، تابع یک به یک نبوده و در نتیجه وارون پذیر نیست. این اتفاق در صورتی رخ می‌دهد که $ad - bc = 0$ باشد.
 $f(x) = \frac{2x+b}{x+3+b} \Rightarrow (2)(3+b) - (b)(1) = 0$
 $\Rightarrow 6 + 2b - b = 0 \Rightarrow b = -6$

۲ ۳۵۷

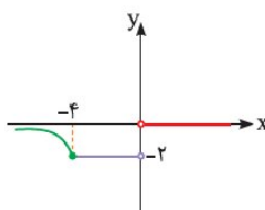
اگر تابع $f(x)$ یک تابع ثابت باشد، در آن صورت غیر یک به یک است. بنابراین باید ضریب x در تابع $f(x)$ برابر صفر شود:
 $f(x) = 2x + m^2 x - 3mx + 1 = (m^2 - 3m + 2)x + 1$
 $\Rightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$

۳ ۳۵۸

قدر مطلق‌ها را باز می‌کنیم و داریم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x+x+4+4}{x} & ; x \leq -4 \\ \frac{-x-x-4+4}{x} & ; -4 < x < 0 \\ \frac{x-x-4+4}{x} & ; x > 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{8}{x} & ; x \leq -4 \\ -2 & ; -4 < x < 0 \\ 0 & ; x > 0 \end{cases}$$

توجه کنید $x = 0$ ریشه مخرج کسر است و در دامنه تابع وجود ندارد. بنابراین تابع f در بازه $(-\infty, -4]$ یک به یک است. برای درک بهتر به نمودار تابع f توجه کنید:

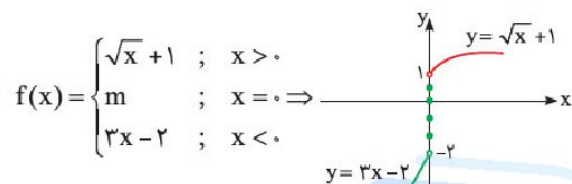


۲ ۳۵۹

چون هر دو ضابطه تابع f یعنی $y = 2x + 1$ و $y = x + a$ توابعی اکیداً صعودی هستند، برای آنکه تابع f ، یک به یک باشد باید اشتراک برد دو ضابطه تهی باشد. کفایت به ازای $x = 1$ مقدار تابع $y = 2x + 1$ بزرگ‌تر یا مساوی مقدار تابع $y = x + a$ در $x = 1$ باشد:
 $x = 1: 2(1) + 1 \geq 1 + a \Rightarrow a \leq 2$
 بنابراین a می‌تواند دو مقدار طبیعی $a = 1$ و $a = 2$ را اختیار کند.

۴ ۳۶۰

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



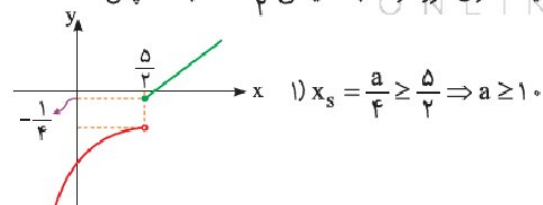
برای این که تابع f یک به یک باشد، باید $-2 \leq m \leq 1$ باشد. پس m ‌های صحیح به صورت $1, 0, -1, -2$ هستند.

۲ ۳۶۱

برای آنکه تابع f یک به یک نباشد کفایت مقدار تابع $y = 4x + 1$ در $x = k$ کمتر از مقدار تابع $y = x - 5$ در $x = k$ باشد:
 $x = k: 4k + 1 < k - 5 \Rightarrow 3k < -6 \Rightarrow k < -2$

۴ ۳۶۲

برای این که تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} & ; x \geq \frac{5}{2} \\ -2x^2 + ax - 21 & ; x < \frac{5}{2} \end{cases}$ یک به یک باشد، باید اکیداً یکتا باشد. چون ضابطه $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ اکیداً صعودی است، باید ضابطه $y = -2x^2 + ax - 21$ نیز در دامنه‌اش اکیداً صعودی باشد. پس باید رأس سهمی، یعنی $x_s = \frac{-a}{2(-2)} = \frac{a}{4}$ بزرگ‌تر یا مساوی مرز ضابطه، یعنی $x = \frac{5}{2}$ باشد. پس:



در ضمن برای آن که تابع f اکیداً صعودی باشد، باید بُرد ضابطه $y = -2x^2 + ax - 21$ کوچک‌تر یا مساوی $-\frac{1}{4}$ باشد، پس:

$$\begin{aligned} 2) x = \frac{5}{2}: y = -2\left(\frac{5}{2}\right)^2 + a\left(\frac{5}{2}\right) - 21 &\leq -\frac{1}{4} \\ \Rightarrow -2 \times \frac{25}{4} + \frac{5}{2}a - 21 &\leq -\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{5}{2}a \leq \frac{133}{4} \\ \times 4 \Rightarrow 10a &\leq 133 \Rightarrow a \leq 13\frac{1}{10} \end{aligned}$$

بنابراین $10 \leq a \leq 13\frac{1}{10}$ است و مقادیر صحیح آن عبارت‌اند از:
 $a = 10, 11, 12, 13$

۳۶۹ ۲

برای به دست آوردن دامنه تابع f ، ابتدا ریشه‌های مخرب را پیدا می‌کنیم:

$$g(x) - g(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow g(x) = g(x^2 - 3)$$

تابع g یک به یک است.

$$\Rightarrow x = x^2 - 3 \Rightarrow x^2 - x - 3 = 0$$

معادله بالا، دارای ۲ ریشه است. بنابراین دامنه تابع f ، شامل ۲ عدد حقیقی نمی‌باشد.

۳۷۰ ۲

در میان گزینه‌ها، نمودار تابع $y = x^3 - x + 1$ از نقطه $(\frac{1}{4}, \frac{5}{8})$ می‌گذرد:

$$y = (\frac{1}{4})^3 - \frac{1}{4} + 1 = \frac{1 - 4 + 8}{8} = \frac{5}{8}$$

پس وارون این تابع از نقطه $(\frac{5}{8}, \frac{1}{4})$ می‌گذرد.

هابلایت

اگر نقطه $A(a, b)$ روی نمودار تابع f باشد، نقطه $A'(b, a)$ روی نمودار تابع f^{-1} است و برعکس.
 $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$

۳۷۱ ۳

چون نقطه $A(-\frac{1}{5}, -\frac{3}{5})$ روی تابع وارون قرار دارد، پس نقطه

$$A'(-\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}) \text{ روی خود تابع } y = \frac{x}{a + a|x|} \text{ قرار دارد:}$$

$$\frac{-1}{5} = \frac{-\frac{3}{5}}{a + a|\frac{-3}{5}|} \Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{\frac{3}{5}}{a + \frac{3}{5}a} \Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{3}{5a} \Rightarrow a = 3$$

۳۷۲ ۳

با توجه به تابع $f = \{(1, 3), (3, 4), (4, 1)\}$ ، تابع وارون به صورت

$$f^{-1} = \{(3, 1), (4, 3), (1, 4)\} \text{ است. بنابراین } f^{-1}(3) = 1 \text{ و } f^{-1}(1) = 4$$

$$f^{-1}(3) + f^{-1}(f^{-1}(1)) = 1 + f^{-1}(4) = 1 + 3 = 4$$

۳۷۳ ۱

با توجه به نمودار، $f(-3) = 5$ و $f(2) = 0$ است، پس:

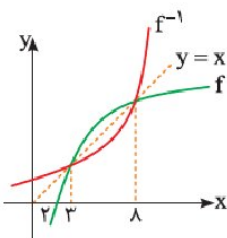
$$\left\{ \begin{array}{l} f^{-1}(5) = -3 \\ f^{-1}(0) = 2 \end{array} \Rightarrow \frac{f^{-1}(5)}{f(a) + f^{-1}(0)} = \frac{-3}{f(a) + 2} = \frac{-3}{f(a) + 2} \right.$$

$$\Rightarrow f(a) + 2 = 4 \Rightarrow f(a) = 2$$

از طرفی با توجه به نمودار $f(0) = 2$ است، پس $a = 0$ می‌باشد.

۳۷۴ ۴

عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:



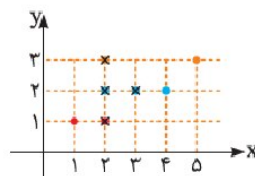
$$x - f^{-1}(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq f^{-1}(x)$$

با توجه به نمودار مقابل، بازه‌ای که در آن مقادیر $y = f^{-1}(x)$ کم‌تر یا مساوی مقادیر $y = x$ باشد، برابر بازه $[3, 8]$ است.

۳۷۵ ۴

اولاً برای این که نمودار مربوط به یک تابع باشد، باید برای $x = 2$ فقط یک y داشته باشیم. پس باید حداقل ۲ نقطه از میان ۳ نقطه موجود با $x = 2$ را حذف کنیم.

در ضمن برای اینکه نمودار یک به یک باشد، باید روی هر خط افقی، حداکثر یک نقطه بماند.



پس باید از میان نقاط نارنجی یک نقطه، از میان نقاط آبی دو نقطه و از میان نقاط قرمز یک نقطه حذف کنیم. پس باید حداقل ۴ نقطه حذف کنیم.

۳۷۶ ۴

طول رأس سهمی برابر $x_S = \frac{-(-16)}{2(2)} = 4$ است. تابع در هر یک از بازه‌های $(-\infty, 4]$ و $[4, +\infty)$ و هر زیرمجموعه از این دو بازه، یک به یک است. بنابراین گزینه «۴» پاسخ سؤال است.

۳۷۷ ۲

ضابطه تابع f به صورت زیر است:

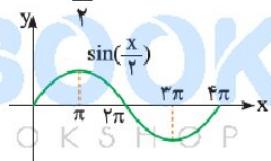
$$f(x) = (2x + 1)^2 + 2(3x - 1) - 3 = 4x^2 + 4x + 1 + 6x - 3 - 3 \Rightarrow f(x) = 4x^2 + 10x - 4$$

طول رأس این سهمی برابر $x_S = \frac{-10}{2(4)} = -1.25$ است. تابع در هر یک

از بازه‌های $(-\infty, -1.25]$ و $[-1.25, +\infty)$ و هر زیرمجموعه از این دو بازه یک به یک است. بنابراین بیشترین مقدار m برابر -1.25 است.

۳۷۸ ۴

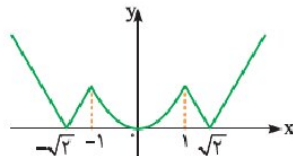
مطابق شکل، تابع $f(x) = \sin(\frac{x}{4})$ با دوره تناوبی $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$



در بازه‌های $(0, \pi)$ ، $(\pi, 3\pi)$ و $(3\pi, 4\pi)$ یک به یک است. بنابراین گزینه «۴» پاسخ سؤال است.

۳۷۹ ۲

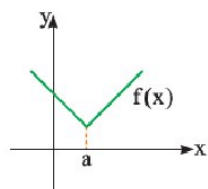
ابتدا تابع f را رسم می‌کنیم:



مطابق شکل، تابع f در بازه $[-\sqrt{2}, -1]$ یک به یک است.

۳۸۰ ۳

برای اینکه تابع f در بازه $[1, 5]$ وارون پذیر باشد، باید در این بازه یک به یک باشد، بنابراین مقدار a نباید در بازه $[1, 5]$ قرار بگیرد:



$$\begin{cases} a \geq 5 \\ \text{یا} \\ a \leq 1 \end{cases} \Rightarrow a \in (-\infty, 1] \cup [5, +\infty) \Rightarrow a \in \mathbb{R} - (1, 5)$$



بنابراین $f^{-1}(4) = g(g(1)) = g(4) = f^{-1}(4)$ است و برای پیدا کردن $f^{-1}(4)$ تابع f را برابر 4 قرار می‌دهیم:

$$f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1 = 4 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow g(4) = 9 \Rightarrow g(g(1)) = 9$$

❗ به پوره دیکه! طراح ممکن بود اینجوری پرسه:

اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x) = 1 + x - 2\sqrt{x}$ ، $x \geq 1$ باشد، ضابطه تابع g کدام است؟

پواب: $y = x - 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} - 1)^2 \Rightarrow \sqrt{y} = |\sqrt{x} - 1|$

$$\xrightarrow{x \geq 1} \sqrt{x} = \sqrt{y} + 1 \Rightarrow g(x) = (\sqrt{x} + 1)^2$$

۳۷۸ ۲

چون دامنه تابع $f(x) = \frac{ax-1}{x-b}$ برابر $\mathbb{R} - \{2\}$ است، پس $x = 2$ ریشه مخارج است:

هم چنین چون بُرد تابع f برابر $\mathbb{R} - \{2\}$ است، پس نسبت ضریب x صورت به ضریب x مخارج برابر 2 است:

$$\frac{a}{1} = 2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$$

حالا برای پیدا کردن $f^{-1}(1)$ ، تابع f را برابر 1 قرار می‌دهیم:

$$\frac{2x-1}{x-2} = 1 \Rightarrow 2x-1 = x-2 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow f^{-1}(1) = -1$$

۳۷۹ ۱

با توجه به این که $f^{-1}(g(m)) = -1$ است، پس:

$$g(m) = f(-1) \Rightarrow 3m-5 = \frac{2(-1)-1}{-1-2} \Rightarrow 3m-5 = 4$$

$$\Rightarrow 3m = 9 \Rightarrow m = 3$$

۳۸۰ ۳

برای پیدا کردن $f^{-1}(-2)$ باید در تابع $f(x) = \begin{cases} 6-2x; & x < 2 \\ 4-x; & x \geq 2 \end{cases}$ ضابطه پایینی را برابر -2 بگذاریم:

$$4-x = -2 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow f^{-1}(-2) = 6$$

برای پیدا کردن $g^{-1}(-5)$ باید در تابع $g(x) = \begin{cases} 2x-3; & x < 0 \\ x-4; & x \geq 0 \end{cases}$ ضابطه بالایی را برابر -5 بگذاریم:

$$2x-3 = -5 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow g^{-1}(-5) = -1$$

حالا حاصل عبارت خواسته شده را پیدا می‌کنیم:

$$f(g^{-1}(-5)) + g(f^{-1}(-2)) = f(-1) + g(6) = 8 + 2 = 10$$

۳۸۱ ۳

ابتدا با توجه به شکل صورت سؤال، ضابطه توابع f و g را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} -2x+2; & x \leq 0 \\ -x+2; & x > 0 \end{cases}, g(x) = -2x-2$$

حالا برای پیدا کردن $f^{-1}(-2)$ باید ضابطه پایینی تابع f را برابر -2 قرار دهیم:

$$-x+2 = -2 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow f^{-1}(-2) = 4$$

پس ساده شده عبارت مورد نظر برابر است با:

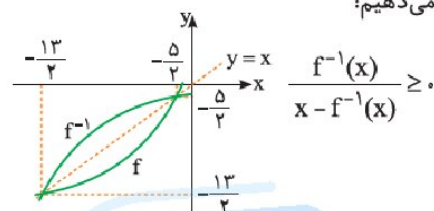
$$g(f^{-1}(-2)) + g^{-1}(f(-1)) = g(4) + g^{-1}(4)$$

هابلایت

برای رسم نمودار f^{-1} از روی نمودار تابع f ، باید نمودار f را نسبت به خط $y = x$ قرینه کنیم.

۳۷۵ ۳

با توجه به این که نمودار f و f^{-1} نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه‌اند، پس نمودار تابع f^{-1} را به صورت زیر رسم می‌کنیم: سپس برای پیدا کردن دامنه تابع خواسته شده، عبارت زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:



چون نمودار تابع $f^{-1}(x)$ همواره پایین محور x ‌ها است، پس $f^{-1}(x) < 0$ است. بنابراین باید مخارج کسر نیز منفی باشد.

همواره منفی

$$\frac{f^{-1}(x)}{x - f^{-1}(x)} \geq 0 \Rightarrow x - f^{-1}(x) < 0 \Rightarrow x < f^{-1}(x)$$

با توجه به شکل، نمودار تابع $f^{-1}(x)$ در بازه $(-\frac{13}{2}, -\frac{5}{2})$ بالاتر از نمودار تابع $y = x$ قرار دارد؛ که این بازه شامل 4 عدد صحیح $x = -6, -5, -4, -3$ است.

۳۷۶ ۲

چون g وارون f است، پس باید $f^{-1}(4) - f^{-1}(12)$ را به دست آوریم. می‌توانیم تابع f را یک بار برابر 4 و یک بار برابر 12 بگذاریم:

$$\begin{cases} -x + \sqrt{-2x} = 4 \Rightarrow x = -2 \\ -x + \sqrt{-2x} = 12 \Rightarrow x = -8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(4) - f^{-1}(12) = (-2) - (-8) = 6$$

هابلایت

برای محاسبه $f^{-1}(a)$ می‌توانیم ضابطه تابع f را برابر عدد a قرار دهیم و یک معادله حل کنیم.

❗ به پوره دیکه! طراح در کنکور تفریبی قارچ ۹۹ این سؤال رو اینجوری پرسید:

فرض کنید $g(x)$ وارون تابع $f(x) = x + 2\sqrt{x}$ باشد، حاصل $g(15) + g(3)$ کدام است؟ پواب:

$$g(3) = f^{-1}(3) = 1 \xrightarrow{\text{مجموع}} 1 + 9 = 10$$

$$g(15) = f^{-1}(15) = 9$$

۳۷۷ ۳

چون تابع g وارون تابع f می‌باشد، پس $g(1) = f^{-1}(1)$ است، حالا برای پیدا کردن $f^{-1}(1)$ ، تابع f را برابر 1 قرار می‌دهیم:

$$f(x) = x + 2\sqrt{x} + 1 = 1 \xrightarrow{x \geq 1} x = 4 \Rightarrow g(1) = 4$$

۳۸۵ ۴

چون وارون تابع f خط $y = 12 - x$ را در نقطه‌ای به عرض ۱۰ قطع می‌کند، پس:

$$y = 12 - x \xrightarrow{y=10} 10 = 12 - x \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2, 10) \in f^{-1}$$

در نتیجه $(10, 2) \in f$ است، پس:

$$f(10) = 2 \Rightarrow \sqrt{10 - 2\sqrt{10 \cdot m - 1}} = 2 \Rightarrow 10 - 2\sqrt{10 \cdot m - 1} = 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{10 \cdot m - 1} = 3 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}}$$

$$\Rightarrow f(m+4) = f(5) = 1$$

۳۸۶ ۳

نقطه $(a, -1)$ روی خط $y = x - 4$ است، بنابراین:

$$y = x - 4 \xrightarrow{(a, -1)} -1 = a - 4 \Rightarrow a = 3$$

پس نقطه $(3, -1)$ روی وارون تابع f قرار دارد، پس نقطه $(-1, 3)$ روی تابع f است.

$$f(x) = x^2 + \sqrt{b - ax} \xrightarrow{a=3} f(x) = x^2 + \sqrt{b - 3x}$$

$$f(-1) = 3 \Rightarrow 3 = 1 + \sqrt{b - 2(-1)} \Rightarrow 2 = \sqrt{b + 2}$$

$$\Rightarrow 4 = b + 2 \Rightarrow b = 2$$

$$a - b = 3 - 1 = 2$$

مقدار $a - b$ برابر است با:

۳۸۷ ۴

چون $f^{-1}(g(a)) = 6$ است، پس $f(6) = g(a)$ است. در ضمن

$$g(a) = 7 \xrightarrow{(6, 7) \in g} a = 6$$

$f(6) = 7$ است، پس:

۳۸۸ ۳

در تابع f داریم، $f(\frac{1}{f}) = -3$ و با توجه به این که $f(g^{-1}(a)) = -3$

می‌توانیم نتیجه بگیریم $g^{-1}(a) = \frac{1}{f}$ بنابراین:

$$g^{-1}(a) = \frac{1}{f} \Rightarrow g(\frac{1}{f}) = a$$

ضابطه $g(x) = -|x| \sqrt{x}$ است، پس می‌توان نوشت:

$$g(\frac{1}{f}) = -(\frac{1}{f}) \times \frac{1}{f} = -\frac{1}{f^2} \Rightarrow a = -\frac{1}{f^2}$$

۳۸۹ ۲

چون $f^{-1}(g(2a)) = 6$ است، پس $g(2a) = f(6)$ است، بنابراین با توجه به تابع‌های f و g داریم:

$$g(2a) = f(6) \xrightarrow{f(6)=3} g(2a) = 3 \Rightarrow \frac{2a}{2a-1} = 3$$

$$\Rightarrow 6a - 3 = 2a \Rightarrow 4a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

۳۹۰ ۴

می‌دانیم $(f \circ g)^{-1}(2) = g^{-1}(f^{-1}(2))$ است. برای پیدا کردن $f^{-1}(2)$ ضابطه تابع f را برابر ۲ قرار می‌دهیم:

$$f(x) = 2 \Rightarrow \sqrt{x} + 4 = 2 \Rightarrow \sqrt{x} = -2 \quad \times$$

$$f(x) = 2 \Rightarrow 2x - x^2 = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$(x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \quad \checkmark \\ x=2 \quad \times \end{cases}$$

حالا برای پیدا کردن $g^{-1}(4)$ ، تابع g را برابر ۴ قرار می‌دهیم:

$$g(x) = -2x - 2 = 4 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow g^{-1}(4) = -3$$

$$\Rightarrow g(4) + g^{-1}(4) = (-10) + (-3) = -13$$

۳۸۲ ۴

چون نقطه $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ در تابع $f(x) = \frac{x}{|x|} \sqrt{a + bx^2}$ و وارون آن صدق می‌کند، داریم:

$$f(-\frac{3}{5}) = -\frac{4}{5} \quad (1) \quad \text{و} \quad f^{-1}(-\frac{3}{5}) = -\frac{4}{5} \Rightarrow f(-\frac{4}{5}) = -\frac{3}{5} \quad (2)$$

با توجه به (۱) و (۲) داریم:

$$f(-\frac{3}{5}) = -\frac{4}{5} \Rightarrow -\sqrt{a + (\frac{9}{25})b} = -\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow a + (\frac{9}{25})b = \frac{16}{25} \xrightarrow{\times 25} 25a + 9b = 16$$

$$f(-\frac{4}{5}) = -\frac{3}{5} \Rightarrow -\sqrt{a + (\frac{16}{25})b} = -\frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow a + (\frac{16}{25})b = \frac{9}{25} \xrightarrow{\times 25} 25a + 16b = 9$$

با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول زیر مقادیر a و b را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 25a + 9b = 16 \\ 25a + 16b = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = -1$$

۳۸۳ ۳

می‌خواهیم حاصل $f(-\frac{2}{5}) + g^{-1}(-\frac{2}{5})$ را پیدا کنیم. با فرض

$$f(-\frac{2}{5}) = a \quad \text{نتیجه می‌گیریم} \quad f^{-1}(a) = -\frac{2}{5} \quad \text{و با فرض} \quad b = g^{-1}(-\frac{2}{5})$$

$g(b) = -\frac{2}{5}$ خواهد بود، پس داریم:

$$1) \quad f^{-1}(a) = -\frac{2}{5} \Rightarrow \frac{a}{1+|a|} = -\frac{2}{5} \xrightarrow{a < 0} \frac{a}{1-a} = -\frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow 5a = -2 + 2a \Rightarrow 3a = -2 \Rightarrow a = -\frac{2}{3} \Rightarrow f(-\frac{2}{5}) = -\frac{2}{3}$$

$$2) \quad g(b) = -\frac{2}{5} \Rightarrow \sqrt{b} - 1 = -\frac{2}{5} \Rightarrow \sqrt{b} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow b = \frac{9}{25} \Rightarrow g^{-1}(-\frac{2}{5}) = \frac{9}{25}$$

$$\Rightarrow (f + g^{-1})(-\frac{2}{5}) = -\frac{2}{3} + \frac{9}{25} = \frac{-50 + 27}{75} = -\frac{23}{75}$$

نکته: به پوره دیگه! در آزمون مهرداد ۱۴۰۰ طرح اینفوری پرسید: اگر $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ باشد، فاصله $f^{-1}(-\frac{2}{3}) + f^{-1}(\frac{5}{9})$ کدام است؟
پاسخ: $-\frac{3}{5} + \frac{5}{9} = \frac{1}{9}$

۳۸۴ ۲

ابتدا مختصات نقطه برخورد را به کمک ضابطه خط به دست می‌آوریم:

$$10y - x = -10 \xrightarrow{y=1} 10 - x = -10 \Rightarrow x = 20$$

پس مختصات نقطه برخورد تابع f^{-1} با خط برابر $(20, 1)$ است و این

نقطه روی تابع f^{-1} قرار دارد، یعنی $f^{-1}(20) = 1$ است. داریم:

$$f^{-1}(20) = 1 \Rightarrow f(1) = 20 \Rightarrow (1)^3 + 6(1)^2 + a(1) + 1 = 20 \Rightarrow a = 12$$



پس $f^{-1}(0) = 3$ و $g^{-1}(0) = 3$ است. حالا برای به دست آوردن $g^{-1}(3)$ کافی است $g(x)$ را برابر 3 قرار دهیم:

$$g(x) = 3 \Rightarrow x + \sqrt{2x-4} = 3 \Rightarrow \sqrt{2x-4} = 3-x$$

$$\xrightarrow{\text{توان 2}} 2x-4 = x^2 - 6x + 9 \Rightarrow x^2 - 8x + 13 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{8+\sqrt{3}}{2} = 4+\sqrt{3} & \times \\ x = \frac{8-\sqrt{3}}{2} = 4-\sqrt{3} & \checkmark \end{cases}$$

در ضمن $x = 4+\sqrt{3}$ قابل قبول نیست چون در معادله اولیه صدق نمی‌کند، پس $g^{-1}(3) = 4-\sqrt{3}$ است و داریم:

$$\alpha = g^{-1} \circ f^{-1}(0) = g^{-1}(3) = 4-\sqrt{3}$$

می‌دانیم $D_f = \{1, 3, 4\}$ و $D_g = \{-1, 2, 3, 4\}$ است. ابتدا دامنه تابع $f-g$ را به دست می‌آوریم:

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \{3, 4\}$$

حالا بُرد تابع $f-g$ را به ازای دامنه $\{3, 4\}$ به دست می‌آوریم:

$$(f-g)(3) = f(3) - g(3) = 0 - 2 = -2$$

$$(f-g)(4) = f(4) - g(4) = 1 - 2 = -1$$

بنابراین تابع $f-g$ به صورت زیر است:

$$f-g = \{(3, -2), (4, -1)\}$$

وارون $f-g$ برابر است با:

$$(f-g)^{-1} = \{(-2, 3), (-1, 4)\}$$

$f^{-1} = \{(2, 1), (5, 2), (4, 3), (6, 4)\}$ است، حالا خواهیم داشت:

$$x = 2: \frac{g(2)}{g(f^{-1}(2))} = \frac{g(2)}{g(1)} \Rightarrow \times$$

$$x = 5: \frac{g(5)}{g(f^{-1}(5))} = \frac{g(5)}{g(2)} = \frac{6}{3} = 2$$

$$x = 4: \frac{g(4)}{g(f^{-1}(4))} = \frac{g(4)}{g(3)} = \frac{2}{1} = 2$$

$$x = 6: \frac{g(6)}{g(f^{-1}(6))} = \frac{g(6)}{g(4)} \Rightarrow \times$$

پس تابع $\frac{g}{g \circ f^{-1}}$ به صورت $\{(5, 2), (4, 2)\}$ است.

$g^{-1} = \{(3, 2), (2, 4), (6, 5), (1, 3)\}$ است. حالا خواهیم داشت:

$$x = 1: g^{-1}(f(1)) - f(1) = g^{-1}(2) - f(1) = 4 - 2 = 2$$

$$x = 2: g^{-1}(f(2)) - f(2) = g^{-1}(5) - f(2) \Rightarrow \times$$

$$x = 3: g^{-1}(f(3)) - f(3) = g^{-1}(4) - f(3) \Rightarrow \times$$

$$x = 4: g^{-1}(f(4)) - f(4) = g^{-1}(6) - f(4) = 5 - 6 = -1$$

پس برد تابع $(g^{-1} \circ f) - f$ برابر $\{2, -1\}$ است.

توجه کنید چون دامنه ضابطه پایینی $x < \frac{3}{4}$ است، پس $f^{-1}(2) = 1$ است.

بنابراین داریم: $g^{-1}(f^{-1}(2)) = g^{-1}(1) \xrightarrow{(5,1) \in g} g^{-1}(1) = 5$

هایلایت

برای به دست آوردن تابع $f^{-1} \circ g^{-1}$ ، با داشتن توابع f و g می‌توانیم تابع $g \circ f$ را به دست آورده و سپس آن را وارون کنیم، یعنی:

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = (g \circ f)^{-1}(x)$$

می‌دانیم $(f^{-1} \circ g^{-1})(2) = g^{-1}(f(2))$ است. در ضمن با توجه به ضابطه

f واضح است که $f(2) = 2^3 + 2 = 10$ است. پس $f^{-1}(10) = g^{-1}(f(2)) = g^{-1}(10)$ است. حالا برای پیدا کردن $g^{-1}(10)$ کافی است، ضابطه g را برابر 10 قرار دهیم:

$$\frac{1-x}{x+2} = 10 \Rightarrow 1-x = 10x+20 \Rightarrow 11x = -19 \Rightarrow x = -\frac{19}{11}$$

فرض می‌کنیم $(g^{-1} \circ f^{-1})(\alpha) = \alpha$ باشد، پس:

$$g^{-1}(f^{-1}(\alpha)) = \alpha \Rightarrow g(\alpha) = f^{-1}(\alpha) (*)$$

حال برای محاسبه $f^{-1}(\alpha)$ ضابطه f را برابر 8 می‌گذاریم:

$$8 = \frac{2}{5}x - 4 \Rightarrow \frac{2}{5}x = 12 \Rightarrow x = 30 \Rightarrow f^{-1}(8) = 30$$

بنابراین از (*) داریم:

$$g(\alpha) = f^{-1}(\alpha) = 30 \Rightarrow \alpha^3 + \alpha = 30 \Rightarrow \alpha = 3 \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(\alpha)) = 3$$

ابتدا $f^{-1}(20)$ را پیدا می‌کنیم. برای این کار تابع f را برابر 20 قرار می‌دهیم:

$$x + \sqrt{x} = 20 \Rightarrow x = 16 \Rightarrow f^{-1}(20) = 16$$

پس $g^{-1}(f^{-1}(20)) = g^{-1}(16)$ است، پس ضابطه g را برابر 16 می‌گذاریم:

$$\frac{9x+6}{1-x} = 16 \Rightarrow 9x+6 = 16-16x \Rightarrow 25x = 10$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{5} \Rightarrow g^{-1}(16) = \frac{2}{5}$$

می‌دانیم $f(g^{-1}(-1)) = -\frac{11}{3}$ است، پس ابتدا ضابطه تابع f را برابر

$$-\frac{11}{3} \text{ می‌گذاریم: } \frac{2x+1}{3} = -\frac{11}{3} \Rightarrow 2x = -12 \Rightarrow x = -6$$

پس $f(-6) = -\frac{11}{3}$ است، بنابراین $g^{-1}(-1) = -6$ است. یعنی

$$g(-6) = -1$$

$$g(-6) = \frac{-12+a}{a+6} = -1 \Rightarrow -12+a = -a-6 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

با توجه به صورت سؤال چون نمودار تابع $g^{-1} \circ f^{-1}$ محورهای α قطع می‌کند، پس $g^{-1} \circ f^{-1}(0) = \alpha$ است. حالا برای به دست آوردن

$f^{-1}(0)$ کافی است $f(x)$ را برابر صفر قرار دهیم:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \log(2x-5) = 0 \Rightarrow 2x-5 = 1 \Rightarrow x = 3$$

بنابراین با جای‌گذاری $x = 2$ در ضابطه تابع داریم:

$$f(2^3 - 1) = \frac{2+2}{2-1} \Rightarrow f(7) = 4$$

۴ ۴۰۴

برای پیدا کردن نقطه برخورد $f^{-1}(x)$ و نیمساز ناحیه دوم یعنی $y = -x$; $x < 0$ از ویژگی تابع وارون استفاده می‌کنیم.

$$f^{-1}(x) = -x \Rightarrow f(-x) = x \Rightarrow -x + \frac{1}{2x} = x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2x} = 2x \Rightarrow 4x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \xrightarrow{x < 0} x = -\frac{1}{2}$$

۲ ۴۰۳

با فرض $g^{-1}(6) = a$ داریم:

$$g(a) = 6 \Rightarrow f(a) + \sqrt{f(a)} = 6 \Rightarrow f(a) = 4$$

حال چون $f^{-1}(x)$ داده شده، پس می‌توانیم از $f(a) = 4$ نتیجه بگیریم $f^{-1}(4) = a$ است:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x} \xrightarrow{x=4} a = f^{-1}(4) = \sqrt[3]{8} = 2 \Rightarrow g^{-1}(6) = 2$$

۴ ۴۰۴

با فرض $g^{-1}(16) = a$ داریم:

$$g(a) = 16 \Rightarrow f(3a - 4) = 16$$

حال از $f(3a - 4) = 16$ نتیجه می‌گیریم $f^{-1}(16) = 3a - 4$ است و خواهیم داشت:

$$f^{-1}(x) = x + \sqrt{x} \xrightarrow{x=16} 3a - 4 = f^{-1}(16) = 16 + \sqrt{16} = 20$$

$\Rightarrow a = 8$ بنابراین $g^{-1}(16) = 8$ است.

۱ ۴۰۵

نمودار هر تابع (به شرط وارون پذیر بودن) و وارون آن نسبت به خط $y = x$ قرینه یکدیگرند. پس باید وارون تابع خطی داده شده را به دست آوریم. بنابراین کافی است جای x و y را عوض کنیم تا معادله خط d به دست آید:

$$3y - 2x = 4 \xrightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} d: 3x - 2y = 4$$

$$\xrightarrow{\text{عرض از مبدأ } x=0} y = -2$$

توجه سریع‌تر می‌توانیم بدون محاسبه تابع وارون، در معادله خط اولیه به جای y صفر بگذاریم.

۴ ۴۰۶

برای پیدا کردن ضابطه وارون f ، نحوه تشکیل تابع f را بررسی می‌کنیم.

$$f: \begin{array}{c} (-3) \rightarrow (\div 2) \\ f^{-1}: \begin{array}{c} (+3) \leftarrow (\times 2) \end{array} \end{array}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 2x + 3 \xrightarrow[\text{به پایین}]{\text{۶ واحد}} y = 2x + 3 - 6$$

۱ ۳۹۹

$$\text{برای آن‌که تابع } f(x) = \begin{cases} 2-3x & ; x \leq -\frac{3}{2} \\ 2+2mx-x^2 & ; x > -\frac{3}{2} \end{cases} \text{ وارون پذیر}$$

باشد، باید اکیداً یکنوا باشد. چون ضابطه $y = 2 - 3x$ اکیداً نزولی است، باید کنترل کنیم تا ضابطه $y = 2 + 2mx - x^2$ نیز اکیداً نزولی باشد. پس باید رأس سهمی یعنی $x_s = -\frac{2m}{2(-1)} = m$ کوچک‌تر یا مساوی مرز دو ضابطه یعنی $x = -\frac{3}{2}$ باشد، پس:

$$1) x_s = m \leq -\frac{3}{2}$$

در ضمن برای آن‌که تابع f اکیداً نزولی باشد، باید بُرد ضابطه $y = 2 - 3x$ بزرگ‌تر یا مساوی بُرد ضابطه $y = 2 + 2mx - x^2$ در $x = -\frac{3}{2}$ (مرز دو ضابطه) باشد، پس:

$$2) x = -\frac{3}{2}: 2 - 3(-\frac{3}{2}) \geq 2 + 2m(-\frac{3}{2}) - (-\frac{3}{2})^2$$

$$\Rightarrow \frac{13}{2} \geq -\frac{1}{2} - 3m \Rightarrow 3m \geq -\frac{27}{2} \Rightarrow m \geq -\frac{9}{2}$$

حالا از اشتراک بازه‌های (۱) و (۲)، $-\frac{9}{2} \leq m \leq -\frac{3}{2}$ می‌باشد و با توجه به صورت سؤال چون m مقداری صحیح می‌باشد، پس $m = -2$ است. حالا برای یافتن $f^{-1}(-19)$ کافی است $f(x)$ را برابر -19 قرار دهیم:

$$x \leq -\frac{3}{2}: f(x) = -19 \Rightarrow 2 - 3x = -19 \xrightarrow{x \leq -\frac{3}{2}} x = 7 \quad \times$$

$$x > -\frac{3}{2}: f(x) = -19 \Rightarrow 2 - 4x - x^2 = -19 \Rightarrow x^2 + 4x - 21 = 0$$

$$\xrightarrow{x > -\frac{3}{2}} \begin{cases} x = -7 \quad \times \\ x = 3 \quad \checkmark \end{cases}$$

۱ ۴۰۰

ابتدا مقدار $g(2)$ را به دست می‌آوریم، پس ضابطه g^{-1} را برابر ۲ قرار می‌دهیم:

$$1 - x = 2 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow g(2) = -1$$

پس $f(g(2)) = f(-1)$ است. حالا $f(-1)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x+1) = \frac{g(x)-1}{x} \xrightarrow{x=-2} f(-1) = \frac{g(-2)-1}{-2}$$

حالا برای به دست آوردن $g(-2)$ ، تابع g^{-1} را برابر -2 قرار می‌دهیم:

$$1 - x = -2 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow g(-2) = 3$$

$$\Rightarrow f(-1) = \frac{g(-2)-1}{-2} = \frac{3-1}{-2} = -1$$

۴ ۴۰۱

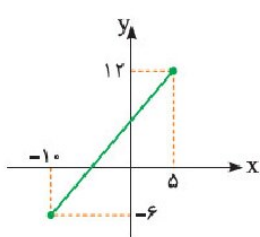
چون $f^{-1}(\frac{x+2}{x-1}) = x^3 - 1$ است، پس می‌توان نتیجه گرفت:

$$f(x^3 - 1) = \frac{x+2}{x-1} \text{ است. حال چون } f(7) \text{ را می‌خواهیم، پس داریم:}$$

$$x^3 - 1 = 7 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$



۳ ۱۹۵



حالت اول اگر تابع خطی $y = f(x)$ را یک تابع اکیداً صعودی در نظر بگیریم، نمودار تابع f به صورت مقابل خواهد بود و ضابطه آن $f(x) = \frac{6}{5}x + 6$ می باشد. برای به دست آوردن $f^{-1}(6)$ ، ضابطه $f(x)$ را برابر ۶ قرار می دهیم:

$$f(x) = 6 \Rightarrow \frac{6}{5}x + 6 = 6 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f^{-1}(6) = 0$$

حالت دوم اگر تابع خطی $y = f(x)$ را یک تابع اکیداً نزولی در نظر بگیریم، نمودار تابع f به صورت مقابل خواهد بود و ضابطه آن $f(x) = -\frac{6}{5}x$ می باشد. حالا برای به دست آوردن $f^{-1}(6)$ ، ضابطه $f(x)$ را برابر ۶ قرار می دهیم:

$$f(x) = 6 \Rightarrow -\frac{6}{5}x = 6 \Rightarrow x = -5 \Rightarrow f^{-1}(6) = -5$$

پس $f^{-1}(6) = -5$ است.

۲ ۱۹۱

چون این دو خط نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم متقارن اند، پس وارون یکی از آن ها با دیگری برابر است. بنابراین در خط $2x - 3y = b$ جای x و y را عوض می کنیم تا وارون آن یعنی $2y - 3x = b$ به دست آید.

$$\frac{a}{-3} = \frac{b}{2} = \frac{\lambda}{b} \quad \text{پس } 2y - 3x = b \text{ و } ax + by = 8 \text{ برابراند، پس:}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{2} = \frac{\lambda}{b} \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4 \\ \frac{a}{-3} = \frac{b}{2} \Rightarrow ab = -24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 4 \Rightarrow a = -6 \Rightarrow a + b = -2 \\ b = -4 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow a + b = 2 \end{cases}$$

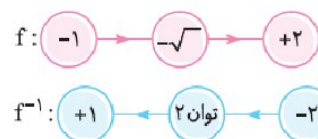
۱ ۱۹۲

روش اول برای وارون کردن ضابطه تابع، ابتدا x را بر حسب y محاسبه می کنیم:

$$y = 2 - \sqrt{x-1} \Rightarrow \sqrt{x-1} = 2 - y \Rightarrow x-1 = (2-y)^2 \Rightarrow x = (2-y)^2 + 1 \Rightarrow x = y^2 - 4y + 5$$

پس ضابطه وارون تابع به صورت $y^{-1} = x^2 - 4x + 5$ می باشد و چون برد تابع برابر بازه $[-2, \infty)$ است، پس دامنه تابع وارون برابر بازه $[-2, \infty)$ می باشد.

روش دوم نحوه تولید تابع $f(x) = 2 - \sqrt{x-1}$ به صورت زیر است:



حالا نقطه برخورد تابع حاصل را با تابع f پیدا می کنیم:

$$\frac{x-3}{2} = 2x-3 \Rightarrow x-3 = 4x-6 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow f(1) = -1 \Rightarrow A(1, -1) \Rightarrow OA = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

هابلیت

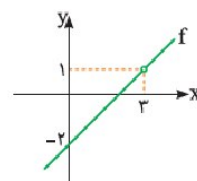
برای وارون کردن توابعی که در ضابطه آن ها یک x وجود دارد، یک راهکار جالب و سریع این است که ابتدا نحوه تشکیل تابع f را پیدا کنید. سپس برای پیدا کردن ضابطه وارون تابع، اعمال را به طور برعکس و از آخر به اول روی x انجام دهید. در جدول زیر، تعدادی از این اعمال و برعکس آن ها آورده شده:

+	-
x	÷
توان ۲	$\sqrt{}$
توان ۳	$\sqrt[3]{}$
a^x	$\log_a x$

۴ ۱۹۷

ابتدا ضابطه تابع f را ساده می کنیم:

$$f(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{x-3} = x-2; x \neq 3$$



عدد ۱ در محدوده برد تابع f وجود ندارد، پس: $f^{-1}(x) = x + 2; x \neq 1$

۱ ۱۹۸

می دانیم همه توابع درجه دوم، غیر یک به یک هستند. بنابراین برای این که $f(x) = (a-2)x^2 + x + a$ تابعی یک به یک باشد، باید ضریب x^2 برابر صفر باشد تا یک تابع خطی ایجاد شود:

$$a-2 = 0 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow f(x) = x+2$$

ضابطه وارون این تابع به صورت $f^{-1}(x) = x-2$ است.

$$f^{-1}(5) = 5-2 = 3 \Rightarrow f^{-1}(f^{-1}(5)) = f^{-1}(3) = 3-2 = 1$$

۴ ۱۹۹

ابتدا ضابطه $g^{-1}(x)$ را به دست می آوریم:

$$g(x) = 2x-1 \Rightarrow y = 2x-1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{2}$$

$$\Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$$

حالا معادله $(f+g)(x) = g^{-1}(x)$ را تشکیل می دهیم و داریم:

$$(f+g)(x) = g^{-1}(x) \Rightarrow f(x) + g(x) = g^{-1}(x)$$

$$\Rightarrow (x+2) + (2x-1) = \frac{x+1}{2} \Rightarrow 3x+1 = \frac{x+1}{2}$$

$$\Rightarrow 6x+2 = x+1 \Rightarrow x = -\frac{1}{5}$$

حالا نمودار حاصل را وارون می‌کنیم:

$$y = 1 + \sqrt{-x+2} \Rightarrow \sqrt{-x+2} = y-1 \xrightarrow{\text{توان ۲}}$$

$$-x+2 = (y-1)^2 \Rightarrow x = 2 - (y-1)^2$$

$$y^{-1} = 2 - (x-1)^2; x \geq 1$$

در نتیجه $g(x) = 2 - (x-1)^2; x \geq 1$ است و داریم:

$$g(a+b) = g(2+1) = 2 - (3-1)^2 = 2 - 4 = -2$$

روش دوم می‌توانیم ضابطه تابع وارون را به صورت زیر پیدا کنیم:

$$y: \begin{array}{c} \text{+1} \\ \text{+2} \\ \text{+} \end{array} \Rightarrow x-1$$

$$y^{-1}: \begin{array}{c} -1 \\ -2 \\ \text{توان ۲} \end{array} \Rightarrow x-1$$

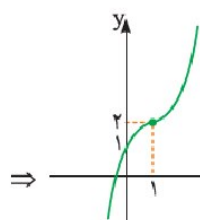
$$\Rightarrow y^{-1} = 2 - (x-1)^2; x \geq 1$$

روش اول وقتی نمودار تابع $y = \sqrt[3]{x}$ را ۲ واحد به راست و ۱ واحد به بالا منتقل کنیم به نمودار $y = 1 + \sqrt[3]{x-2}$ می‌رسیم. حالا وارون تابع حاصل را پیدا می‌کنیم:

$$y = 1 + \sqrt[3]{x-2} \Rightarrow \sqrt[3]{x-2} = y-1$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۳}} x-2 = (y-1)^3 \Rightarrow x = (y-1)^3 + 2$$

$$\Rightarrow y^{-1} = (x-1)^3 + 2$$



از ناحیه چهارم نمی‌گذرد. $\Rightarrow$

روش دوم برای پیدا کردن ضابطه تابع وارون، از روش زیر می‌توانیم استفاده کنیم:

$$y: \begin{array}{c} \text{+1} \\ \text{+2} \\ \text{+} \end{array} \Rightarrow x-1$$

$$y^{-1}: \begin{array}{c} -1 \\ -2 \\ \text{توان ۳} \end{array} \Rightarrow x-1 \Rightarrow y^{-1} = (x-1)^3 + 2$$

نکته به پوره دنگه! طراح می‌تونست یکم تست رو جذاب تر بپرسه! اینجوری، داگر

نمودار وارون تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + a$ از نقطه $(2, 1)$ بگذرد، ضابطه وارون آن کدام است؟

$$(1, 2) \in f \Rightarrow a = 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt[3]{x}$$

۴۱۷

روش اول ابتدا ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = (x^2 - 4x + 4) + 6x = x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3$$

پس $f^{-1}(x) = (x-2)^2 + 1$ است. در ضمن بُرد تابع f بازه $(-\infty, 2]$ است، پس دامنه تابع f^{-1} نیز برابر همین بازه است.

پرسش سریعتر چون $f(5) = 0$ است، پس گزینه‌ای درست است که در آن $f^{-1}(0) = 5$ باشد، فقط گزینه (۱) این ویژگی را دارد.

۴۱۳

روش اول ابتدا نمودار تابع $y = 2 + \sqrt{x-1}$ را نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم، یعنی آن را وارون می‌کنیم. توجه کنید بُرد تابع f بازه $(2, +\infty)$ است:

$$y = 2 + \sqrt{x-1} \Rightarrow \sqrt{x-1} = y-2$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x-1 = (y-2)^2 \Rightarrow x = y^2 - 4y + 5$$

$$\Rightarrow y^{-1} = x^2 - 4x + 5; x \geq 2$$

حالا نمودار را ۲ واحد به سمت راست و ۳ واحد به پایین انتقال می‌دهیم:

$$y = (x-2)^2 + 1 \xrightarrow{\text{واحد راست}} y = (x-4)^2 + 1$$

$$\xrightarrow{\text{واحد ۳ پایین}} g(x) = (x-4)^2 + 1 - 3 = (x-4)^2 - 2$$

پس $g(x) = (x-4)^2 - 2$ است و $g(4) = -2$ است.

روش دوم می‌توانیم ضابطه تابع وارون را به صورت زیر پیدا کنیم:

$$y: \begin{array}{c} \text{+2} \\ \text{+} \end{array} \Rightarrow x-1$$

$$y^{-1}: \begin{array}{c} -2 \\ \text{توان ۲} \end{array} \Rightarrow x-1$$

$$\Rightarrow y^{-1} = (x-2)^2 + 1; x \geq 2$$

۴۱۴

ابتدا ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$$

در صورت سؤال، دامنه تابع $[a, +\infty)$ در نظر گرفته شده است. با توجه به این که بازه $[1, +\infty)$ وسیع‌ترین بازه‌ای است که تابع f در آن یک به یک است، پس کمترین مقدار a برابر ۱ است.

حالا ضابطه وارون تابع f را با دامنه $[1, +\infty)$ پیدا می‌کنیم:

$$y = (x-1)^2 + 2 \Rightarrow (x-1)^2 = y-2 \Rightarrow |x-1| = \sqrt{y-2}$$

$$\xrightarrow{x \geq 1} x-1 = \sqrt{y-2} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{y-2} \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x-2}$$

بنابراین $b = 2$ است.

پس کمترین مقدار $a+b$ برابر $1+2=3$ است.

۴۱۵

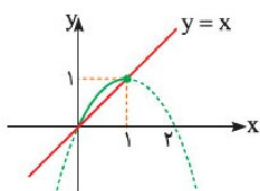
روش اول با توجه به شکل صورت سؤال $f(x) = 1 + \sqrt{x+2}$ است.

پس $a = 2$ و $b = 1$ می‌باشد. حالا، اگر نمودار تابع f را نسبت به محور y ها قرینه کنیم، به تابع $y = 1 + \sqrt{-x+2}$ می‌رسیم که بُرد آن به صورت بازه $(1, +\infty)$ است.



ریاضیات تجربی جامع کنکور

۱۴۱۹ ۴



روش اول نمودار تابع f را در بازه‌ای که بالای نیمساز ربع اول و سوم است، در نظر می‌گیریم؛
بُرد تابع در این بازه به صورت $(0, 1)$ است. حالا ضابطه f را ساده می‌کنیم و وارون آن را در این بازه پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = -x^2 + 2x - 1 + 1 = -(x-1)^2 + 1; 0 < x < 1$$

$$y = -(x-1)^2 + 1 \Rightarrow (x-1)^2 = 1-y$$

$$\sqrt{\quad} \rightarrow |x-1| = \sqrt{1-y}$$

حالا چون $0 < x < 1$ است پس عبارت درون قدر مطلق منفی است و داریم:

$$|x-1| = \sqrt{1-y} \Rightarrow -(x-1) = \sqrt{1-y}$$

$$\Rightarrow x = 1 - \sqrt{1-y} \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1-x}; 0 < x < 1$$

روش دوم می‌توانیم ضابطه تابع وارون را به روش زیر نیز پیدا کنیم:

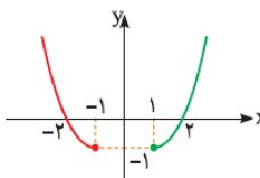
$$f: (-1) \rightarrow 2 \text{ توان} \rightarrow x-1 \rightarrow +1$$

$$f^{-1}: +1 \rightarrow -\sqrt{\quad} \rightarrow \div -1 \rightarrow -1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1-x}; 0 < x < 1$$

۱۴۲۰ ۳

روش اول وقتی نمودار تابع $f(x) = x^2 - 2x$; $x \geq 1$ را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم، باید به جای همه x ها، $-x$ قرار دهیم. پس ضابطه آن پس از قرینه نسبت به محور y ها به صورت زیر است:



$$y = x^2 - 2x; x \geq 1$$

$$\Rightarrow y = (x+1)^2 - 1; x \geq -1$$

حالا نمودار این تابع را نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم یعنی آن را وارون می‌کنیم:

$$y = (x+1)^2 - 1 \Rightarrow (x+1)^2 = y+1 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} |x+1| = \sqrt{y+1}$$

$$\xrightarrow{x \leq -1} |x+1| = \sqrt{y+1} \Rightarrow -(x+1) = \sqrt{y+1}$$

$$\Rightarrow x = -1 - \sqrt{y+1} \Rightarrow y^{-1} = -1 - \sqrt{x+1}$$

روش دوم ضابطه تابع وارون به روش زیر نیز قابل محاسبه است:

$$y: +1 \rightarrow 2 \text{ توان} \rightarrow -1$$

$$y^{-1}: -1 \rightarrow -\sqrt{\quad} \rightarrow +1 \Rightarrow y^{-1} = -1 - \sqrt{x+1}$$

طول رأس این سهمی برابر $x = -1$ است که در بازه $x \geq -1$ اکیداً صعودی است. حالا ضابطه وارون تابع را در این بازه پیدا می‌کنیم:

$$y = (x+1)^2 + 3 \Rightarrow (x+1)^2 = y-3$$

$$\sqrt{\quad} \rightarrow |x+1| = \sqrt{y-3}$$

از طرفی چون به ازای $x \geq -1$ تابع را وارون می‌کنیم، پس عبارت درون قدر مطلق نامنفی است و داریم:

$$|x+1| = \sqrt{y-3} \Rightarrow x+1 = \sqrt{y-3}$$

$$\Rightarrow x = -1 + \sqrt{y-3} \Rightarrow f^{-1}(x) = -1 + \sqrt{x-3}$$

روش دوم می‌توانیم ضابطه تابع وارون را به صورت زیر نیز پیدا کنیم:

$$f: +1 \rightarrow 2 \text{ توان} \rightarrow +3$$

$$f^{-1}: -1 \rightarrow \sqrt{\quad} \rightarrow -3 \Rightarrow f^{-1}(x) = -1 + \sqrt{x-3}$$

۱۴۲۱ به پوره دیگه! طراح میتونه همین تست رو کمی ساده‌تر بپرسه:

«ضابطه وارون تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$; $x \geq -1$ کدام است؟»

$$\text{پاسخ: } f(x) = (x+1)^2 + 3, x \geq -1 \Rightarrow f^{-1}(x) = -1 + \sqrt{x-3}, x \geq 3$$

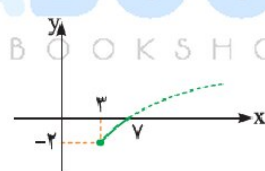
یا آگه بفواد راه عددگذاری رو سفت ترک کنه، اینجوری بپرسه:

«ضابطه وارون تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$; $x \geq -1$ به صورت $f^{-1}(x) = a + \sqrt{x+b}$ است. مقدار $a \times b$ کدام است؟»

$$\text{پاسخ: } f^{-1}(x) = -1 + \sqrt{x-3} \Rightarrow a \times b = 3$$

۱۴۱۸ ۱

روش اول مطابق شکل نمودار تابع f



در بازه $(3, 7)$ ، زیر محور x ها قرار دارد و محدوده بُرد آن در این بازه به صورت $[-2, 0)$ است:

حالا ضابطه وارون تابع را پیدا می‌کنیم:

$$y = -2 + \sqrt{x-3} \Rightarrow \sqrt{x-3} = y+2$$

$$\xrightarrow{2 \text{ توان}} x-3 = (y+2)^2 \Rightarrow x = (y+2)^2 + 3$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = (x+2)^2 + 3; -2 \leq x \leq 0$$

روش دوم ضابطه تابع وارون به روش زیر نیز قابل محاسبه است:

$$f: -3 \rightarrow \sqrt{\quad} \rightarrow -2$$

$$f^{-1}: +3 \rightarrow 2 \text{ توان} \rightarrow +2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = (x+2)^2 + 3; -2 \leq x \leq 0$$

حالا با فرض $g(x) = 2x + 1 = t$ داریم:

$$x = \frac{t-1}{2} \Rightarrow f(g(x)) = 4x^2 - 1 \Rightarrow f(t) = 4\left(\frac{t-1}{2}\right)^2 - 1 = t^2 - 2t$$

پس $f(x) = x^2 - 2x$ است و طبق گفته صورت سؤال باید ضابطه وارون آن را در $x \leq 1$ پیدا کنیم:

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x-1)^2 - 1; x \leq 1$$

$$y = (x-1)^2 - 1 \Rightarrow (x-1)^2 = y+1 \Rightarrow |x-1| = \sqrt{y+1}$$

$$\xrightarrow{x \leq 1} |x-1| = \sqrt{y+1} \Rightarrow -(x-1) = \sqrt{y+1}$$

$$\Rightarrow x = 1 - \sqrt{y+1} \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x+1}$$

روش دوم: می‌توانیم ضابطه تابع وارون را به روش زیر نیز پیدا کنیم:

$$f: (-1) \rightarrow 2 \rightarrow (-1) \\ f^{-1}: (+1) \leftarrow (-\sqrt{}) \leftarrow (+1) \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x+1}$$

روش اول: ابتدا ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} = \sqrt{x-1} + 1$$

حالا تابع $f(x) = \sqrt{x-1} + 1$ را وارون می‌کنیم. توجه کنید برد تابع برابر بازه $[1, +\infty)$ است:

$$y = \sqrt{x-1} + 1 \Rightarrow \sqrt{x-1} = y-1 \Rightarrow x-1 = (y-1)^2$$

$$\Rightarrow x = (y-1)^2 + 1 \Rightarrow x = y^2 - 2y + 2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 2x + 2; x \geq 1$$

روش دوم: می‌توانیم ضابطه تابع وارون را به روش زیر نیز پیدا کنیم:

$$f: (-1) \rightarrow \sqrt{} \rightarrow (+1) \\ f^{-1}: (+1) \leftarrow 2 \leftarrow (-1) \\ \Rightarrow f^{-1}(x) = (x-1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2; x \geq 1$$

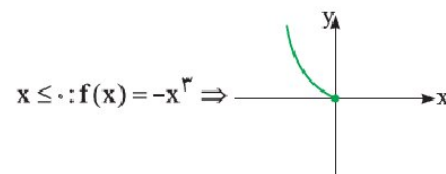
پرسش سریع: عددگذاری کنیم! چون $f(5) = 3$ است، پس گزینه‌ای درست است که $f^{-1}(3) = 5$ باشد. پس گزینه (۱) درست است.

په پوره دیگه! آگه طرح رادیکال بیرونی رو نقاره، باز هم برای وارون کردن می‌تونیم از اتحاد مربع دو جمله‌ای استفاده کنیم، مثلاً اینجوری پیرسه ضابطه وارون تابع $f(x) = x + 2\sqrt{x+2} + 3$ کدوم است؟

$$\text{په پوره: } f(x) = x + 2\sqrt{x+2} + 3 = (\sqrt{x+2} + 1)^2 \\ \Rightarrow f^{-1}(x) = (\sqrt{x} - 1)^2 - 2$$

۱۴۲۱ ۱

می‌دانیم $f(x) = x^2 \sqrt{x^2} = x^2 |x|$ است که در بازه $x \leq 0$ نزولی است، پس:

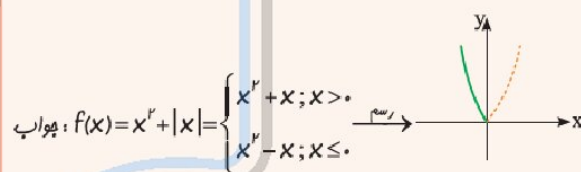


حالا وارون تابع $f(x) = -x^3$ را به دست می‌آوریم.

توجه کنید برد تابع f در دامنه مورد نظر برابر بازه $[0, +\infty)$ است، پس:

$$y = -x^3 \xrightarrow{x \leq 0} x = -\sqrt[3]{y} \Rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{x}; x \geq 0$$

په پوره دیگه! طرح می‌تونست از علامت جمع بین x^2 و $\sqrt{x^2}$ استفاده کنه، «تابع $f(x) = x^2 + \sqrt{x^2}$ در یک بازه نزولی است. ضابطه وارون تابع در این بازه کدوم است؟»



$$\xrightarrow{\text{وارون}} y^{-1} = \frac{1}{\mu} - \sqrt{x + \frac{1}{\mu}}; x \geq 0$$

په پوره دیگه! طرح می‌تونست از توان ۲ استفاده کنه، «ضابطه وارون تابع $f(x) = x\sqrt{x}$ کدوم است؟»

$$\text{په پوره: } f(x) = x^{\frac{3}{2}}; x \geq 0 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[2]{x^2}; x \geq 0$$

په پوره دیگه! طرح می‌تونست از توان ۲ استفاده کنه و همچنین بین x و $\sqrt{x}$ علامت جمع قرار بده! ببینیم، «ضابطه وارون تابع $f(x) = x + \sqrt{x}$ کدوم است؟»

$$\text{په پوره: } f(x) = x + \sqrt{x} + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu} = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\mu}\right)^2 - \frac{1}{\mu} \\ \Rightarrow f^{-1}(x) = \left(\sqrt{x + \frac{1}{\mu}} - \frac{1}{\mu}\right)^2; x \geq 0$$

۱۴۲۲ ۳

می‌دانیم اگر $f^{-1}(a) = b$ باشد، آنگاه $f(b) = a$ خواهد بود. بنابراین در یک عدد دلخواه رابطه را بررسی می‌کنیم:

$$f(8) = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = 8$$

$$f^{-1}(1) = a(1) + a(\sqrt{1}) = 2a \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4$$

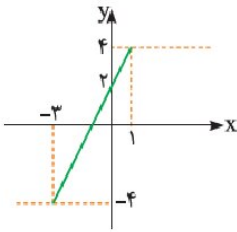
۱۴۲۳ ۳

روش اول: ابتدا باید ضابطه تابع $y = f(x)$ را پیدا کنیم:

$$f \circ g(x) = (2x-1)g(x) = (2x-1)(2x+1) = 4x^2 - 1$$



۱ ۴۲۸



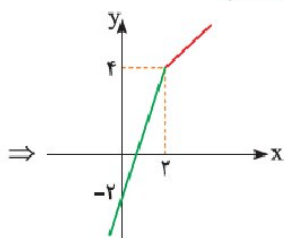
با توجه به شکل مقابل، ضابطه تابع f در بازه‌ای که وارون پذیر است، به صورت $f(x) = 2x + 2; -3 \leq x \leq 1$ است. بنابراین $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 1; -4 \leq x \leq 4$ است.

حال از آن جایی که نمودار تابع $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 1$ بر خط $2y - ax = 7$ عمود است، پس شیب آن‌ها قرینه و معکوس یکدیگر است:

$$\begin{cases} m_1 = \frac{1}{2} \\ m_2 = \frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} = -\frac{2}{a} \Rightarrow a = -4$$

۴ ۴۲۹

$$f(x) = 2x - |x - 2| = \begin{cases} x + 2 & ; x \geq 2 \\ 3x - 2 & ; x < 2 \end{cases}$$



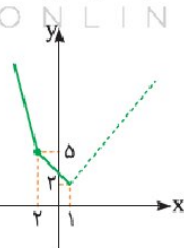
حالا با توجه به این که بُرد تابع y همان دامنه تابع y^{-1} است، پس:

$$y^{-1} = \begin{cases} x - 2 & ; x \geq 4 \\ \frac{x + 2}{3} & ; x < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = x - 2 & ; x \geq 4 \\ g(x) = \frac{x + 2}{3} & ; x < 4 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{a=4} 3g(-4) + f(4) = 3 \times \frac{-4 + 2}{3} + 4 = 4$$

۴ ۴۳۰

ابتدا ضابطه f را در ریشه‌های درون قدرمطلق باز می‌کنیم:



$$f(x) = \begin{cases} -3x - 1 & ; x < -2 \\ -x + 3 & ; -2 \leq x \leq 1 \\ x + 1 & ; x > 1 \end{cases}$$

در بازه $x < -2$ ، ضابطه وارون $y = -3x - 1$ به صورت $y^{-1} = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ است و در بازه $-2 \leq x \leq 1$ ، ضابطه وارون $y = -x + 3$ به صورت $y^{-1} = -x + 3$ است. با توجه به بُرد تابع f در بازه‌های اکیداً نزولی، ضابطه وارون تابع برابر است با:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3} & ; x > 5 \\ -x + 3 & ; 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

۲ ۴۲۵

ضابطه تابع را به صورت $y = |x + 1| - |3x - 6|$ ساده می‌کنیم:

$$y = \begin{cases} 2x - 7 & ; x \leq -1 \\ 4x - 5 & ; -1 < x < 2 \\ -2x + 7 & ; x \geq 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{نزولی}} y = -2x + 7; x \geq 2$$

در ضمن برد تابع $y = -2x + 7; x \geq 2$ برابر بازه $(-\infty, 3]$ است. پس ضابطه وارون تابع در بازه‌ای که نزولی است، به صورت $y^{-1} = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}; x \leq 3$ است.

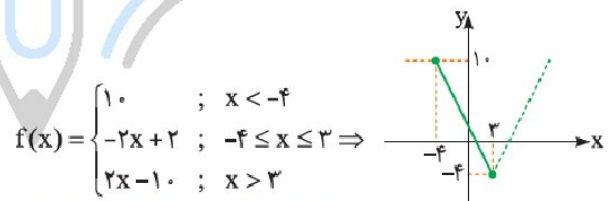
۴ به دوره دیگر! طراح می‌توانست فواسته سوال رو کمی سفت‌تر کنه و اینفوری پیرسه: «نمودار وارون تابع در بازه نزولی و نمودار تابع $y = x^2 - 3x$ در چند نقطه مشترک هستند؟» جواب: در یک نقطه به طول $x = -1$ مشترک اند.

هنگامی که

برای به دست آوردن وارون توابع قدرمطلق، ابتدا باید تعیین کنیم تابع در کدام بازه یک به یک است. برای این منظور تابع را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم. سپس بازه‌هایی را که تابع در آن‌ها یک به یک است، تعیین کرده و ضابطه وارون تابع را به دست می‌آوریم.

۴ ۴۲۶

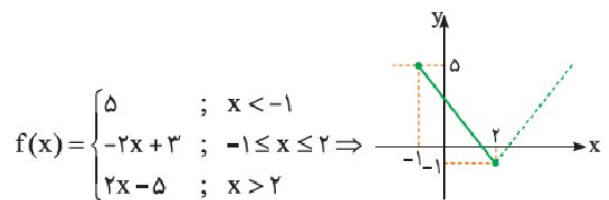
نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



پس ضابطه f در بازه‌ای که اکیداً نزولی است به صورت $f(x) = -2x + 2$ می‌باشد، بنابراین ضابطه وارون تابع در این بازه برابر $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + 1$ است. از طرفی چون بُرد تابع f در این بازه برابر $0 \leq y \leq 4$ است، پس دامنه تابع f^{-1} در این بازه به صورت $-4 \leq x \leq 0$ است.

۳ ۴۲۷

ابتدا نمودار f را رسم می‌کنیم:



ضابطه وارون تابع در بازه اکیداً نزولی برابر $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}; -1 \leq x \leq 5$ است. حال طول نقطه برخورد منحنی f و g را محاسبه می‌کنیم:

$$f^{-1}(x) = g(x) \Rightarrow -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = x + 1 \Rightarrow \frac{3}{2}x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

فصل اول • تابع |

حالا تابع $y = -x^2 + 1$; $-1 \leq x < 0$ را وارون می‌کنیم. توجه کنید برد تابع برابر بازه $(0, 1]$ است:

$$y = -x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = 1 - y \Rightarrow |x| = \sqrt{1 - y}$$

$$\xrightarrow{-1 \leq x < 0} |x| = \sqrt{1 - y} \Rightarrow -x = \sqrt{1 - y}$$

$$\Rightarrow x = -\sqrt{1 - y} \Rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt{1 - x}; 0 \leq x < 1$$

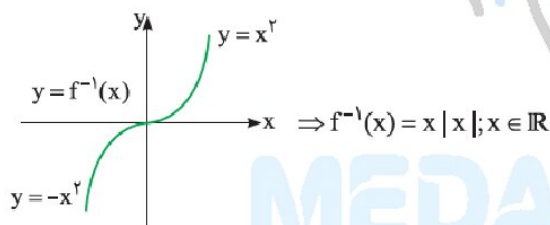
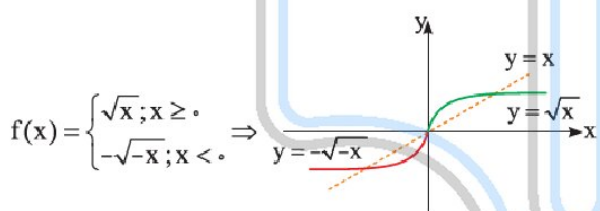
روش دوم: می‌توانیم ضابطه تابع وارون را به روش زیر نیز پیدا کنیم:

y : توان ۲ → $x(-1)$ → $+1$

y^{-1} : $\sqrt{\quad}$ → $\div(-1)$ → -1

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt{1 - x}; 0 \leq x < 1$$

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم، با توجه به این که وارون تابع‌های رادیکالی با فرجه ۲، به شکل سهمی هستند خواهیم داشت:

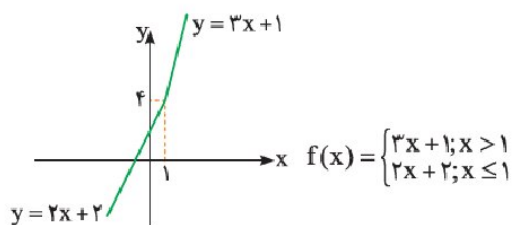


نکته: به هوره دیکه! نوی کنکور خارج از کشور سال ۹۲، طرح پرسید: «ضابطه وارون

تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$ کدام است؟ برای حل کافیست $|x|$ رو باز

کنید که جواب میشه: $f^{-1}(x) = x|x|$

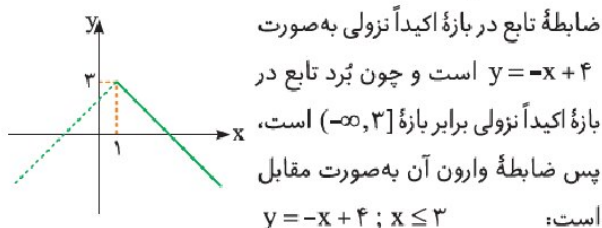
نمودار تابع f به شکل زیر است:



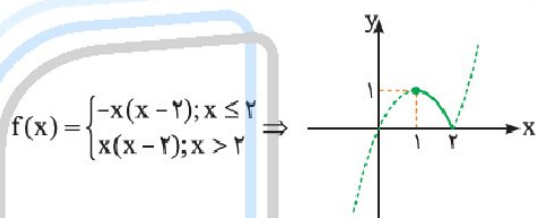
ضابطه $f(g(x))$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(g(x)) = 3 - \sqrt{x^2 - 2x + 1} = 3 - \sqrt{(x-1)^2} = 3 - |x-1|$$

پس نمودار تابع $f \circ g$ به صورت مقابل است:



روش اول: نمودار تابع $f(x) = x|x-2|$ را رسم می‌کنیم:



ضابطه تابع f در بازه نزولی به صورت زیر است:

$$y = -x(x-2) = -x^2 + 2x - 1 + 1 = -(x-1)^2 + 1; 1 \leq x \leq 2$$

حالا وارون تابع $f(x) = -(x-1)^2 + 1$ را به دست می‌آوریم:

$$y = -(x-1)^2 + 1 \Rightarrow (x-1)^2 = 1 - y \xrightarrow{\sqrt{\quad}} |x-1| = \sqrt{1 - y}$$

در ضمن چون تابع را در بازه $1 \leq x \leq 2$ وارون می‌کنیم، پس عبارت درون قدر مطلق نامنفی است و داریم:

$$x-1 = \sqrt{1 - y} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{1 - y} \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1 - x}$$

برد تابع f در این بازه برابر $0 \leq y \leq 1$ است، پس دامنه f^{-1} نیز برابر $0 \leq x \leq 1$ است.

روش دوم: برای پیدا کردن ضابطه تابع وارون، از روش زیر می‌توانیم استفاده کنیم:

y : -1 → توان ۲ → $x-1$ → $+1$

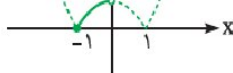
y^{-1} : $+1$ → $\sqrt{\quad}$ → $\div(-1)$ → -1

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1 - x}; 0 \leq x \leq 1$$

روش اول: چون $[x] = -1$ است، پس

$-1 \leq x < 0$ است. حالا نمودار تابع

$y = |x^2 - 1|$ را رسم می‌کنیم:





از طرفی با توجه به صورت سؤال $g(x) = g^{-1}(x)$ است، پس ضریب x باید -1 باشد:

$$b - 3 = -1 \Rightarrow b = 2$$

بنابراین $a + b = 3$ است.

هایلایت

در تابع $y = x$ و همچنین توابع خطی به فرم $y = -x + k$ ، وارون تابع با خود تابع برابر است.

۴۴۰ ۲

ابتدا ضابطه $f(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$x = \frac{f(x) - 3x}{f(x) + 4} \Rightarrow xf(x) + 4x = f(x) - 3x$$

$$\Rightarrow xf(x) - f(x) = -7x \Rightarrow f(x)(x - 1) = -7x$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-7x}{x - 1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{x + 7}$$

۴۴۱ ۴

$$f(f(x)) = \frac{af(x) + 1}{2f(x) - 1} \Rightarrow f(x) = \frac{ax + 1}{2x - 1}$$

از طرفی چون $f^{-1}(0) = -2$ است، پس $f(-2) = 0$ است:

$$f(-2) = \frac{-2a + 1}{-4 - 1} = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

پس $g(x) = \frac{4x + 1}{2x + \frac{1}{2}}$ است. چون صورت این کسر، مضربی از مخیض آن است، پس تابع g وارون پذیر نیست.

هایلایت

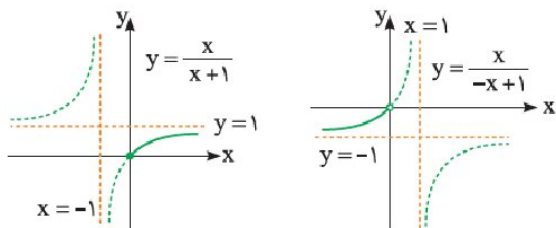
در توابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ ، اگر صورت و مخیض کسر پس از فاکتورگیری با هم ساده شوند و عدد ثابت باقی بماند، تابع یک‌به‌یک نبوده و در نتیجه وارون پذیر نیست. این اتفاق در صورتی رخ می‌دهد که $ad = bc$ باشد.

۴۴۲ ۲

ابتدا تابع را به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & ; x \geq 0 \\ \frac{x}{-x+1} & ; x < 0 \end{cases}$$

سپس هر ضابطه را به صورت جداگانه رسم می‌کنیم تا برد آن‌ها را مشخص کنیم:



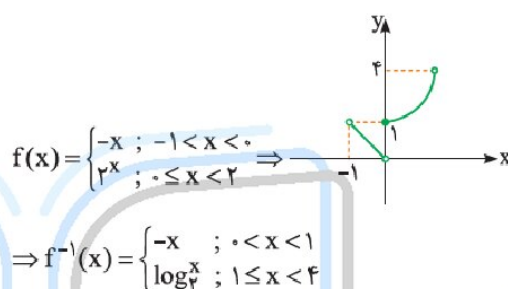
حالا با توجه به برد هر یک از ضابطه‌ها، ضابطه وارون تابع به شکل زیر است:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x-1) & ; x > 4 \\ \frac{x}{4} - 1 & ; x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow f^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = f^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

۴۴۶ ۲

بتر است، نمودار تابع f را رسم کنیم. توجه کنید در ضابطه بالایی، وقتی $-1 < x < 0$ است، پس $[x] = -1$ می‌باشد:



۴۴۷ ۲

ابتدا ضابطه f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{3x + 2 + 2x - 2}{x - 1} = \frac{5x}{x - 1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{x - 5}$$

دام‌تستی اگر مخیض مشترک نمی‌گرفتی، گزینه (۳) رو میزدی که غلطه!

هایلایت

اگر تابع کسری $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ یک‌به‌یک باشد:

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx + b}{cx - a}$$

اگر $a + d = 0$ باشد، وارون تابع با خود تابع برابر است.

BOOKS H O P

۴۴۸ ۴

چون $f^{-1}(x) = \frac{5x - 3}{bx + 4}$ است، پس $f(x) = \frac{-4x - 3}{bx - 5}$ است. حالا

چون بُرد f برابر $\mathbb{R} - \{-2\}$ است، پس:

$$\frac{-4}{b} = -2 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{-4x - 3}{2x - 5}$$

از طرفی دامنه تابع برابر $\mathbb{R} - \{a\}$ است، پس:

$$a = \frac{5}{2} \Rightarrow ab = \frac{5}{2} \times 2 = 5$$

۴۴۹ ۳

در توابع هموگرافیک با ضابطه $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ، می‌دانیم اگر $a + d = 0$ باشد، آنگاه $y = y^{-1}$ است. پس در تابع $f(x) = \frac{(a+4)x + 4}{x - 5}$

آن‌که $f(x) = f^{-1}(x)$ باشد، باید: $(a+4) + (-5) = 0 \Rightarrow a = 1$

فصل اول • تابع |

با توجه به اینکه $R_f = D_{f^{-1}}$ است و می‌دانیم $R_f = D_{f^{-1}}$ پس ضابطه تابع وارون به صورت زیر است:

$$f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 7; \quad x \leq 2$$

برای یافتن نقاط برخورد تابع وارون و خط $y = x + 3$ باید دو ضابطه را با یکدیگر برابر قرار دهیم:

$$x^2 - 4x + 7 = x + 3 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

با توجه به اینکه $D_{f^{-1}} = (-\infty, 2]$ است، پس طول نقطه برخورد فقط $x = 1$ می‌باشد.

۳ ۴۴۵

ابتدا نقطه برخورد f و g^{-1} را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = g^{-1}(x) \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 3x - 4 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب برابر صفر}} \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases} \xrightarrow{x < \frac{3}{2}} \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases} \Rightarrow y = -1 \Rightarrow A(1, -1)$$

چون دو تابع f و g^{-1} در نقطه $A(1, -1)$ متقاطع‌اند، پس دو تابع f^{-1} و g در نقطه $A'(-1, 1)$ متقاطع‌اند.

هشدار

اگر دو تابع f و g^{-1} در نقطه $A(a, b)$ متقاطع باشند، آن‌گاه دو تابع f^{-1} و g در نقطه $A'(b, a)$ متقاطع‌اند.

۲ ۴۴۶

روش اول: ابتدا ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = x^2 - 4x + 1 = (x - 2)^2 - 3; \quad x \leq 2$$

سپس وارون تابع f را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} y &= (x - 2)^2 - 3 \Rightarrow (x - 2)^2 = y + 3 \Rightarrow |x - 2| = \sqrt{y + 3} \\ \xrightarrow{x \leq 2} -(x - 2) &= \sqrt{y + 3} \Rightarrow x = 2 - \sqrt{y + 3} \\ \Rightarrow f^{-1}(x) &= 2 - \sqrt{x + 3} \end{aligned}$$

حالا نقاط تقاطع توابع $y = \sqrt{f(x) + 3}$ و $y = 1 - f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} 1 - f^{-1}(x) &= \sqrt{f(x) + 3} \Rightarrow \sqrt{x + 3} - 1 = \sqrt{(x - 2)^2} \\ \Rightarrow \sqrt{x + 3} - 1 &= |x - 2| \xrightarrow{x \leq 2} \sqrt{x + 3} - 1 = -(x - 2) \\ \Rightarrow \sqrt{x + 3} &= -x + 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases} \xrightarrow{y = |x - 2|} y = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A(1, 1) \Rightarrow |OA| = \sqrt{2}$$

روش دوم: مراحل تولید تابع f به شکل زیر است:

$$f: \begin{array}{c} (-2) \rightarrow \text{توان} \rightarrow (-3) \end{array}$$

$$f^{-1}: \begin{array}{c} (+2) \leftarrow \sqrt{} \leftarrow (+3) \end{array} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x + 3}$$

توجه کنید برد ضابطه $y = \frac{x}{x+1}$ برابر بازه $[0, 1)$ و برد ضابطه

$$y = \frac{x}{-x+1}$$
 برابر بازه $(-1, 0)$ است.

حالا ضابطه وارون f را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1}; & x \geq 0 \\ \frac{x}{-x+1}; & x < 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{هموگرافیک و وارون}} f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{-x}{x-1}; & 0 \leq x < 1 \\ \frac{-x}{-x-1}; & -1 < x < 0 \end{cases}$$

می‌توانیم ضابطه f^{-1} را به صورت زیر مرتب کنیم:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x}; & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x}{1+x}; & -1 < x < 0 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}; \quad \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ -1 < x < 0 \end{cases}$$

با مقایسه ضابطه f^{-1} با صورت سؤال، نتیجه می‌گیریم $a = 1$ و $b = 1$ است و $a \times b = 1$ است.

۴ ۴۴۳

روش اول: ابتدا ضابطه تابع f را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4; \quad x \geq 1$$

حالا ضابطه وارون f را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} y &= (x - 1)^2 - 4 \Rightarrow (x - 1)^2 = y + 4 \Rightarrow |x - 1| = \sqrt{y + 4} \\ \xrightarrow{x \geq 1} x - 1 &= \sqrt{y + 4} \Rightarrow x = \sqrt{y + 4} + 1 \\ \Rightarrow f^{-1}(x) &= \sqrt{x + 4} + 1 \end{aligned}$$

حالا نقاط تلاقی نمودارهای f^{-1} و g را به دست می‌آوریم:

$$f^{-1}(x) = g(x) \Rightarrow \sqrt{x + 4} + 1 = \frac{x - 9}{2} \xrightarrow{\text{جای گذاری گزیده ها}} x = 21$$

روش دوم: مراحل تولید تابع f به شکل زیر است:

$$f: \begin{array}{c} (-1) \rightarrow \text{توان} \rightarrow (-4) \end{array}$$

$$f^{-1}: \begin{array}{c} (+1) \leftarrow \sqrt{} \leftarrow (+4) \end{array} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x + 4} + 1$$

۴ ۴۴۴

چون نمودار تابع $y = -\sqrt{x}$ را ۳ واحد در راستای x ‌های مثبت و ۲ واحد در راستای y ‌های مثبت انتقال داده‌ایم، ضابطه آن به صورت زیر است:

$$y = -\sqrt{x - 3} + 2$$

نمودار تابع جدید را نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم قرینه می‌کنیم؛ پس باید وارون تابع را به دست آوریم (x را برحسب y بنویسیم).

$$\begin{aligned} y &= -\sqrt{x - 3} + 2 \Rightarrow \sqrt{x - 3} = 2 - y \\ \xrightarrow{2-y \geq 0} x - 3 &= (2 - y)^2 - 4 \Rightarrow x = y^2 - 4y + 7 \end{aligned}$$



۴ ۱۴۴۷

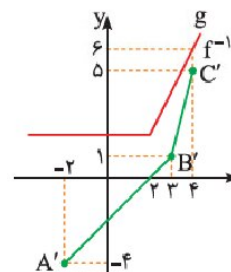
با توجه به شکل صورت سؤال، سه نقطه $A(-4, -2)$ ، $B(1, 3)$ و $C(5, 4)$ روی نمودار تابع f قرار دارند، پس سه نقطه $A'(-2, -4)$ ، $B'(3, 1)$ و $C'(4, 5)$ روی نمودار تابع f^{-1} هستند.

حالا به کمک سه نقطه A' ، B' و C'

نمودار تابع $f^{-1}(x)$ را رسم می‌کنیم

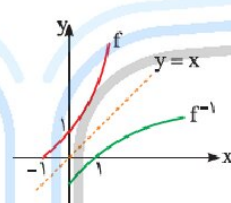
و با توجه به نمودار تابع قدرمطلق

$g(x) = x + |x - 2|$ داریم:



مقاطع نیستند. $\Rightarrow x$

۴ ۱۴۴۸



نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

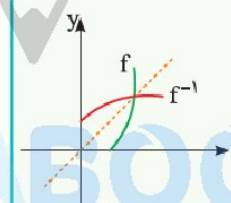
بدامنه $(-1, +\infty)$ بالای خط $y = x$ قرار

دارد و هیچ نقطه تلاقی با آن ندارد، پس f و

f^{-1} همدیگر را قطع نمی‌کنند.

توجهات

برای پیدا کردن نقاط برخورد نمودارهای f و f^{-1} ، راهکار کلی این است که ضابطه f^{-1} را به دست آوریم و سپس معادله $f(x) = f^{-1}(x)$ را حل کنیم.



❗ در توابع اکیداً صعودی و توابع

هموگرافیک نقاط برخورد f و f^{-1}

[در صورت وجود] همان نقاط برخورد

f و خط $y = x$ است. پس در این توابع

معادله $f(x) = x$ را حل می‌کنیم.

❗ در توابع اکیداً نزولی، می‌توانیم برای پیدا کردن محل تلاقی f و f^{-1} از رسم نمودار استفاده کنیم.

۲ ۱۴۴۹

تابع $f(x) = \sqrt{x+3} - 1$ یک تابع اکیداً صعودی است. بنابراین

برای پیدا کردن محل تقاطع این تابع با وارونش، معادله $f(x) = x$

را حل می‌کنیم:

$$\sqrt{x+3} - 1 = x \Rightarrow \sqrt{x+3} = x+1 \Rightarrow x+3 = x^2 + 2x + 1$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (با } y=x \text{)} \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow y = 1$$

پس فاصله نقطه $M(1, 1)$ از مبدأ مختصات برابر است با:

$$|OM| = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$$

۲ ۱۴۵۰

چون تابع f یک تابع هموگرافیک است، پس برای مشخص کردن نقاط

برخورد f و f^{-1} می‌توانیم معادله $f(x) = x$ را حل کنیم:

$$\frac{x+4}{x-2} = x \Rightarrow x+4 = x^2 - 2x$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$$

۱ ۱۴۵۱

ابتدا ضابطه درجه دوم f را به صورت مربع کامل می‌نویسیم:

$$y = x^2 - 4x - 6 = (x-2)^2 - 10; x > 2$$

این تابع در دامنه $x > 2$ اکیداً صعودی است. بنابراین محل تلاقی تابع

f و f^{-1} روی خط $y = x$ قرار دارد، پس:

$$f(x) = x \Rightarrow x^2 - 4x - 6 = x \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (x-6)(x+1) = 0 \xrightarrow{x>2} \begin{cases} x = 6 \\ x = -1 \end{cases}$$

بنابراین نمودار دو تابع f و f^{-1} در نقطه‌ای به طول ۶ متقاطع‌اند، پس $a = 6$ است.

حالا مقدار $f(a)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(a) = f(6) = (6)^2 - 4(6) - 6 = 6$$

۳ ۱۴۵۲

تابع $f(x) = x^3 + 3x - 12$ از جمع دو تابع اکیداً صعودی $y = x^3$ و $y = 3x - 12$ به دست آمده، پس اکیداً صعودی است. بنابراین

برای پیدا کردن محل برخورد این تابع با وارونش، معادله $f(x) = x$ را حل می‌کنیم:

$$x^3 + 3x - 12 = x \Rightarrow x^3 + 2x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow A(2, 2)$$

$$\Rightarrow OA = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

❗ به جوره دیگه! «فاصله نقطه تقاطع تابع $f(x) = 2x - 3 + \sqrt{x-1}$ با وارون

فور، از مبدأ مختصات کد ۳۱ است؟»

پواب: چون f تابعی اکیداً صعودی است، پس:

$$f(x) = x \Rightarrow 2x - 3 + \sqrt{x-1} = x \Rightarrow x = 2$$

$$\Rightarrow A(2, 2) \Rightarrow |OA| = 2\sqrt{2}$$

۲ ۱۴۵۳

ابتدا ضابطه تابع f را در $x = 0$ باز می‌کنیم:

$$f(x) = 2x + 3 - |x| = \begin{cases} 2x + 3 - x & ; x \geq 0 \\ 2x + 3 + x & ; x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x + 3 & ; x \geq 0 \\ 3x + 3 & ; x < 0 \end{cases}$$

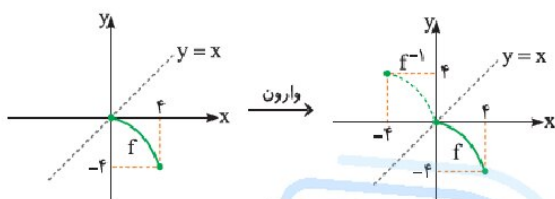
۴۵۶ ۱

تابع f ، از جمع دو تابع اکیدا نزولی $y_1 = \sqrt{4-x}$ و $y_2 = -\sqrt{x} - 2$ به دست آمده است، بنابراین تابع f اکیدا نزولی است. حال دامنه تابع f را پیدا می‌کنیم:

$$y_1 = \sqrt{4-x} : 4-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4 \Rightarrow D_{y_1} = (-\infty, 4]$$

$$y_2 = -\sqrt{x} - 2 : x \geq 0 \Rightarrow D_{y_2} = [0, +\infty)$$

بنابراین $D_f = D_{y_1} \cap D_{y_2} = [0, 4]$ است. حالا یک تابع اکیدا نزولی به صورت فرضی و با دامنه $[0, 4]$ رسم می‌کنیم:



واضح است نمودار f و f^{-1} فقط در $x = 0$ متقاطع‌اند.

۴۵۷ ۲

تابع $y = \log_2(2^{x+2} + 32)$ از ترکیب دو تابع اکیدا صعودی $f(x) = \log_2 x$ و $g(x) = 2^{x+2} + 32$ به دست آمده (تابع $f \circ g$) پس اکیدا صعودی است. پس برای پیدا کردن نقطه برخورد این تابع با وارونش، داریم:

$$\log_2(2^{x+2} + 32) = x \Rightarrow 2^x = 2^{x+2} + 32 \Rightarrow (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x - 32 = 0$$

$$\xrightarrow{2^x = t} t^2 - 4t - 32 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x = -4 \\ 2^x = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{No solution} \\ x = 3 \end{cases}$$

پس $A(3, 3)$ است و فاصله آن از نقطه $O(0, 0)$ برابر $OA = 3\sqrt{2}$ است.

۴۵۸ ۴

دامنه تابع f به صورت بازه $[1, +\infty)$ و برد تابع f برابر بازه $(-\infty, 2]$ است. در ضمن می‌دانیم $f^{-1} \circ f(x) = x; x \in D_f$ و $f \circ f^{-1}(x) = x; x \in D_{f^{-1}}$ است. حالا چون $x = 3$ در برد تابع f قرار ندارد، پس $f \circ f^{-1}(3)$ تعریف نشده است.

هایلایت

اگر تابع $f(x)$ وارون پذیر باشد، ترکیب این تابع با وارونش، همواره برابر با x است:

۱ $(f^{-1} \circ f)(x) = x; x \in D_f$

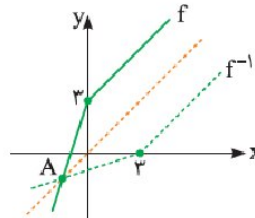
۲ $(f \circ f^{-1})(x) = x; x \in D_{f^{-1}}$

❗ اگر دو تابع f و g به گونه‌ای باشند که $(f \circ g)(x) = x$ و $(g \circ f)(x) = x$ ، آن‌گاه توابع f و g وارون یکدیگرند.

۴۵۹ ۲

برای این که تساوی داده شده برقرار باشد، باید f تابعی وارون پذیر با دامنه و برد یکسان باشد. در میان گزینه‌ها، دامنه و برد توابع موجود در گزینه‌های (۱) و (۴) به صورت بازه $[2, +\infty)$ و دامنه و برد تابع گزینه (۳) برابر $\mathbb{R} - \{1\}$ است. اما در گزینه (۲) دامنه تابع برابر $\mathbb{R}$ و برد آن برابر $(1, +\infty)$ است.

حالا نمودار تابع f و قرینه آن را نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم (یعنی $y = x$) رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، واضح است نمودار تابع f و f^{-1} در $x < 0$ برخورد دارند. از آن جایی که f صعودی است، پس می‌توانیم برای پیدا کردن محل برخورد f و f^{-1} ، معادله $f(x) = x$ را حل کنیم:

$$x < 0 : f(x) = x \Rightarrow 2x + 3 = x \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

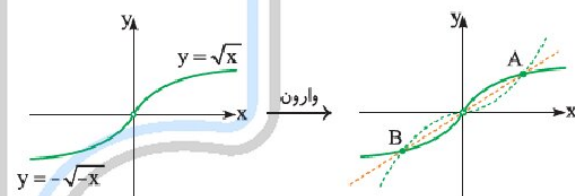
پس $A(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$ است و فاصله آن از مبدأ مختصات برابر $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ است.

۴۵۴ ۲

ابتدا ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x > 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$$

حالا نمودار تابع f را به همراه وارون آن در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



با توجه به این که تابع f اکیدا صعودی است، برای پیدا کردن محل برخورد دو تابع f و f^{-1} می‌توانیم معادله $f(x) = x$ را حل کنیم:

$$x > 0 : f(x) = x \Rightarrow \sqrt{x} = x \Rightarrow x = 1 \Rightarrow A(1, 1)$$

$$x < 0 : f(x) = x \Rightarrow -\sqrt{-x} = x \Rightarrow x = -1 \Rightarrow B(-1, -1)$$

بنابراین فاصله دو نقطه A و B برابر است با:

$$AB = \sqrt{(-1-1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

۴۵۵ ۳

$$y = \sqrt{\sqrt{x} + 3} \xrightarrow{\text{انتقال در راستای قائم}} y = \sqrt{\sqrt{x} + 3} + k$$

منحنی جدید تابعی اکیدا صعودی است، پس وارونش را روی خط $y = x$ قطع می‌کند. بنابراین دو منحنی در نقطه $A(1, 1)$ متقاطع‌اند.

$$y = \sqrt{\sqrt{x} + 3} + k \xrightarrow{(1, 1)} 1 = \sqrt{\sqrt{1} + 3} + k \Rightarrow k = -1$$

بنابراین $y = \sqrt{\sqrt{x} + 3} - 1$ است و داریم:

$$y = \sqrt{\sqrt{x} + 3} - 1 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور xها}} y = 1 - \sqrt{\sqrt{x} + 3}$$

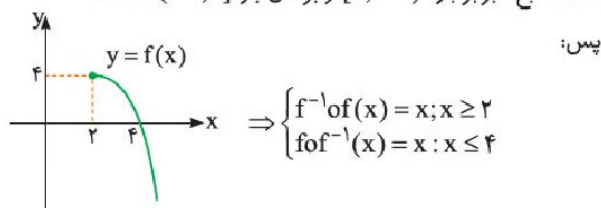
$$\xrightarrow{\text{واحد انتقال افقی به چپ}} y = 1 - \sqrt{\sqrt{x+4} + 3}$$

حالا اگر $x = 0$ را قرار دهیم $y = 1 - \sqrt{5}$ می‌شود. پس نقطه $(0, 1 - \sqrt{5})$ روی نمودار منحنی قرار دارد.



۳ ۴۶۵

ابتدا نمودار تابع $f(x) = 4x - x^2$; $x \geq 2$ را رسم می‌کنیم:
دامنه تابع f برابر بازه $[2, +\infty)$ و برد آن بازه $(-\infty, 4]$ است.



پس:

$$\begin{cases} f^{-1} \circ f(x) = x; x \geq 2 \\ f \circ f^{-1}(x) = x; x \leq 4 \end{cases}$$

دامنه مشترک $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ برابر بازه $[2, 4]$ است. حالا توابع $f^{-1} \circ f$ و $f \circ f^{-1}$ را در دامنه مشترک با هم جمع می‌کنیم:

$$y = (f^{-1} \circ f)(x) + (f \circ f^{-1})(x) = x + x = 2x; 2 \leq x \leq 4$$

که نمودار این تابع در گزینه (۳) آمده است.

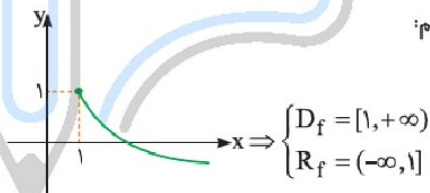
به پوره دیگه ا طرح توی همین سوال، می‌تونست اینجوری بپرسه:

«بیشترین مقدار تابع $y = (f \circ f^{-1})(x) + (f^{-1} \circ f)(x)$ کدما است؟»

$$\text{پاسخ: } \max(y) = 2(3) = 6$$

۱ ۴۶۶

ابتدا دامنه و برد تابع $f(x) = 1 - \sqrt{x-1}$ را به دست می‌آوریم. با توجه به نمودار تابع f داریم:



بنابراین داریم:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x, \quad x \in [1, +\infty)$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = x, \quad x \in (-\infty, 1]$$

بنابراین، دامنه دو تابع $(f \circ f^{-1})(x)$ و $(f^{-1} \circ f)(x)$ فقط در $x = 1$ مشترک هستند. پس نمودار دو تابع $(f \circ f^{-1})(x)$ و $(f^{-1} \circ f)(x)$ فقط در $x = 1$ متقاطع هستند.

۳ ۴۶۷

با توجه به نمودارهای صورت سؤال؛ ضابطه هریک از تابع‌ها را به همراه وارون آن‌ها پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = -2x + 4$$

$$g(x) = -2x + 4 \Rightarrow g^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + 2$$

نتیجه می‌شود توابع f و g وارون یکدیگرند. بنابراین ترکیب تابع f و g برابر x است و گزینه‌های (۱) و (۲) و (۴) صحیح هستند. حالا گزینه (۳) را بررسی می‌کنیم:

$$(3) \quad f(g^{-1}(x)) = -\frac{1}{2}g^{-1}(x) + 2$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x + 2\right) + 2 = \frac{1}{4}x + 1$$

۳ ۴۶۸

با توجه به ماشین تابع داده شده $g(f(x)) = x$ است، پس دو تابع f و g وارون یکدیگر هستند، یعنی $g(x) = f^{-1}(x)$ است. حالا وارون تابع $f(x) = 3 - \sqrt{x+1}$ را به دست می‌آوریم. توجه کنید برد تابع f برابر $(-\infty, 3]$ است:

$$y = 3 - \sqrt{x+1} \Rightarrow \sqrt{x+1} = 3 - y \Rightarrow x+1 = (3-y)^2$$

$$\Rightarrow x = (y-3)^2 - 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = (x-3)^2 - 1; x \leq 3$$

بنابراین $g(x) = (x-3)^2 - 1; x \leq 3$ است. حالا باید نامعادله $g(x) < 0$ را حل کنیم:

$$g(x) = (x-3)^2 - 1 < 0 \Rightarrow (x-3)^2 < 1 \Rightarrow |x-3| < 1$$

$$\Rightarrow -1 < x-3 < 1 \Rightarrow 2 < x < 4 \xrightarrow{x \leq 3} 2 < x \leq 3$$

به پوره دیگه ا طرح به پای این که f و g رو به شکل ماشین نمایش بده، می‌تونست بگه اگر $f(x) = 3 - \sqrt{x+1}$ و ترکیب دو تابع f و g تابع همانی باشد، ضابطه تابع g کدما است؟
پاسخ: $g(x) = (x-3)^2 - 1; x \leq 3$

۲ ۴۶۹

چون در تابع $f(x) = \frac{\sqrt{2}x}{3x - \sqrt{2}}$ رابطه $a+d=0$ برقرار است، پس $f(x) = f^{-1}(x)$ است، بنابراین:

$$f(f(f(\sqrt{2}))) = f(f^{-1}(f(\sqrt{2}))) = f(\sqrt{2})$$

$$= \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{3\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

به پوره دیگه ا یارش بفیر در کتاب میکرو طبقه بندی ریاضی سال ۹۹ و قبل از این که سرکله این تیپ سوال در کنگورها پیدا بشه، این تست رو آورده بودم: اگر $f(x) = \frac{2x+1}{5x-2}$ باشد، حاصل $f \circ f(\sqrt{5})$ کدما است؟ پاسخ: $\sqrt{5}$

۴ ۴۷۵

می‌دانیم $g^{-1} \circ f^{-1}(x) = (f \circ g)^{-1}(x)$ است، پس می‌توانیم تابع $f \circ g(x)$ را پیدا کنیم و سپس آن را وارون کنیم:

$$f(g(x)) = -5 + \frac{1}{\frac{x+3}{x+2} - 1} = -5 + \frac{1}{\frac{1}{x+2}} = x - 3$$

$$\xrightarrow{\text{وارون}} (f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x) = x + 3$$

۲ ۴۷۶

تابع $(f \circ g)(x) = \frac{3x+1}{x+1}$ را وارون می‌کنیم و می‌دانیم:

$$(f \circ g)^{-1}(x) = g^{-1}(f^{-1}(x))$$

$$(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{-x+1}{x-3} \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(x)) = \frac{-x+1}{x-3}$$

$$\xrightarrow{x=4} g^{-1}(f^{-1}(4)) = \frac{-4+1}{4-3} = -3 \Rightarrow g^{-1}(1) = -3$$