

خرید کتاب های کنکور

با تخفیف ویژه

و

ارسال رایگان

Medabook.com

+



یک جلسه تماس تلفنی رایگان

با مشاوران رتبه برتر

برای انتخاب بهترین منابع

دبیرستان و کنکور

۰۲۱ ۲۸۴۲۵۲۱۰



فرض می‌کنیم $n, n+1$ و $n+2$ سه عدد صحیح متوالی باشند، پس:

$$n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3(n+1)$$

مضرب ۳

گزاره (ب): نادرست است و مثال نقض آن $n = 4$ می‌باشد، زیرا $4^4 - 1 = 15$ می‌شود که ۱۵ عددی اول نیست.

گزاره (پ): نادرست است، مثلاً ۲، ۳، ۴ و ۵، چهار عدد صحیح متوالی هستند، در حالی که مجموع آن‌ها یعنی ۱۴ بر ۴ بخش‌پذیر نیست.

گزاره (ت): درست است، زیرا اگر پنج عدد صحیح متوالی را $n, n+1, n+2, n+3$ و $n+4$ فرض کنیم، داریم:

$$n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) = 5n + 10 = 5(n+2)$$

بنابراین دو گزاره از گزاره‌های داده‌شده مثال نقض ندارند.

نکته

اگر n فرد باشد، مجموع هر n عدد صحیح متوالی بر n بخش‌پذیر است. اما اگر n زوج باشد، مجموع n عدد صحیح متوالی بر n بخش‌پذیر نیست. **نتیجه** اگر n فرد باشد، میانگین هر n عدد صحیح متوالی، برابر عدد وسطی است.

۱۱ ۴ گزاره موجود در گزینه (۴) نادرست است، زیرا اگر $a = 1$ و $b = 3$ باشند، $ab = 3$ می‌شود که عددی فرد است، اما $a^2 + b^2 = 10$ می‌باشد که عددی زوج است. بنابراین نمی‌توان این گزاره را با اثبات مستقیم ثابت کرد، زیرا اثبات مستقیم برای نشان دادن درستی یک گزاره استفاده می‌شود.

نتیجه ۱ به طور کلی اگر a و b اعداد گویا باشند، $a + b, a - b, ab$ و $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$) گویا هستند که تمامی این موارد را می‌توان به کمک اثبات مستقیم نشان داد. **۲** به کمک اثبات مستقیم می‌توان ثابت کرد که مجموع دو عدد فرد، عددی زوج است، مجموع دو عدد زوج، عددی زوج است، مجموع یک عدد فرد و یک عدد زوج، عددی فرد است، مربع هر عدد فرد، عددی فرد است، مکعب هر عدد فرد، عددی فرد است و ... به طور کلی یادتان باشد به توان رساندن یک عدد، ماهیت آن عدد را عوض نمی‌کند. مثلاً یک عدد فرد را به هر توان طبیعی که برسانیم، فرد باقی می‌ماند.

۱۲ ۴ اگر فرض کنیم $a = 1$ و $b = 2$ ، آن‌گاه $a + b = 3$ عددی فرد است در حالی که $a^3 + b^3 = 1 + 8 = 9$ می‌شود که عددی زوج نیست.

توجه کنید که اثبات «حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است» در کتاب درسی در کار در کلاس صفحه ۳ آمده است که تا این‌جا فصل فقط اثبات مستقیم بیان شده که اثبات آن هم به روش مستقیم به صورت زیر است: فرض می‌کنیم سه عدد صحیح متوالی $n, n+1, n+2$ باشند، داریم:

$$(n+2) \times (n+1) \times n \times \frac{(n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1}{(n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= \frac{(n+2)!}{(n-1)!} \times \frac{3!}{3!} = \frac{(n+2)!}{(n-1)! \times 3!} \times 3! = \binom{n+2}{3} \times 3! = 6q$$

می‌دانیم عددی طبیعی است.

نکته

در ادامه فصل و در قسمت افزای اعداد صحیح خواهید دید که از هر n عدد صحیح متوالی، حداقل یک عدد مضرب n است، پس می‌توان گفت حاصل ضرب هر n عدد صحیح متوالی بر $n!$ بخش‌پذیر است.

۱ ۲ در گزینه (۱) اگر $x = 5$ و $y = 4$ باشند، داریم:

$$\sqrt{5+4} = \sqrt{5} + \sqrt{4} \Rightarrow 3 = \sqrt{5} + 2 \Rightarrow 1 = \sqrt{5} \quad \times$$

در گزینه‌های (۳) و (۴) اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، $B = \{1, 2, 3\}$ و $C = \{2, 3\}$ باشند، آن‌گاه $A \cup B$ و $A \cup C$ هر دو برابر $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ هستند، در حالی که $B \neq C$ است. همچنین $B - A$ و $C - A$ هر دو تهی هستند اما $B \neq C$ است.

۲ ۱ می‌دانیم $6^3 = 216$ است (حداقل این عدد را در فصل احتمال کتاب آمار و احتمال زیاد دیدید، تعداد برآمدهای پرتاب سه تاس)، بنابراین داریم:

$$\sqrt{6} \times \sqrt{216} = \sqrt{6} \times \sqrt{6^3} = \sqrt{6^4} = 6^2 = 36$$

۳ ۴ با توجه به ویژگی‌های لگاریتم، داریم:

$$\log_2 25 \times \log_5 3 = \frac{\log 25}{\log 2} \times \frac{\log 3}{\log 5} = \frac{\log 25}{\log 5} = \frac{2 \log 5}{\log 5} = 2$$

توجه کنید در محاسبات فوق از ویژگی‌های $\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$ و $\log a^n = n \log a$ استفاده کرده‌ایم.

۴ ۱ از ریاضی دهم می‌دانیم اگر $0 < a < 1$ باشد، آن‌گاه $a^2 < a$ خواهد بود. تنها گزینه‌ای که بین صفر و یک است، گزینه (۱) می‌باشد، پس $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.71$ مثال نقضی برای حکم مطرح شده است.

۵ ۳ در گزینه (۳) اگر $a = 4$ و $b = 3$ باشد، آن‌گاه $ab = 12$ است که عددی زوج می‌باشد، در حالی که $a + b = 7$ می‌شود که عددی فرد است.

۶ ۴ تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$۱) 34 = 3^2 + 3^2 + 4^2 \quad ۲) 35 = 1^2 + 3^2 + 5^2 \quad ۳) 36 = 4^2 + 4^2 + 2^2$$

اما ۳۷ را نمی‌توان به صورت مجموع سه عدد طبیعی مربع کامل نوشت.

۷ ۴ عدد ۶۴ را نمی‌توان به صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت. بقیه گزینه‌ها را ببینید:

$$۱) 40 = 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

$$۲) 46 = 10 + 11 + 12 + 13$$

$$۳) 56 = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11$$

نکته

به طور کلی، اعداد طبیعی به فرم 2^n را نمی‌توان به صورت حاصل جمع اعداد طبیعی متوالی نوشت.

با توجه به نیم‌نگاه، در گزینه‌ها عدد ۶۴ به فرم 2^n است، پس نمی‌توان آن را به صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت.

۸ ۴ واضح است که 1^2 از 1^2 بزرگ‌تر نیست. پس عدد ۱ مثال نقضی برای حکم گزینه (۴) است.

۹ ۴ برای تک‌تک گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) مثال نقض ارائه می‌کنیم. در گزینه (۱) کایت حکم را نقض می‌کند. در گزینه‌های (۲) و (۳) مثال نقض مناسب، مستطیل است.

۱۰ ۲ تک‌تک گزاره‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزاره (الف): همیشه درست است و به روش اثبات مستقیم به راحتی می‌توان آن را ثابت کرد. نگاه کنید:

۱۳ ۴ اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، عدد $4k + 1$ مربع کامل است. نگاه کنید:

$$k = n(n+1) \Rightarrow 4k + 1 = 4n(n+1) + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$$

مربع کامل

نکته
دقت کنید در تساوی $(2n+1)^2 = 4n(n+1) + 1$ اگر به جای $n(n+1)$ عدد زوج $2q$ را قرار دهیم (حاصل ضرب دو عدد صحیح متوالی بر $2!$ بخش پذیر است)، داریم:
$$4n(n+1) + 1 = (2n+1)^2 \Rightarrow 4q + 1 = (2n+1)^2$$

تساوی اخیر یعنی مربع هر عدد فرد به فرم $4q + 1$ است.

۱۴ ۳ برای اثبات حکم به روش مستقیم، داریم:

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1$$

می دانیم حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی، عددی زوج است، پس $k(k+1) = 2q$ می باشد. لذا داریم:

$$(2k+1)^2 = 4k(k+1) + 1 = 8q + 1$$

۱۵ ۱ عدد 89 به فرم $4k + 1$ است، در حالی که مربع کامل نیست. پس

89 مثال نقضی برای حکم داده شده می باشد. دقت کنید مربع هر عدد فرد به فرم $4k + 1$ است ولی هر عددی که به فرم $4k + 1$ باشد، حتماً مربع کامل نیست مثل $17, 33, \dots$

۱۶ ۱ **روش اول:** وقتی $n = 2k$ باشد داریم:

$$A = n^2 - 3n + 5 = (2k)^2 - 3(2k) + 5 = 4k^2 - 6k + 5$$

$$= 4k^2 - 6k + 4 + 1 = 2(2k^2 - 3k + 2) + 1$$

بنابراین $q = 2k^2 - 3k + 2$ است.

روش دوم: به k عدد می دهیم. مثلاً $k = 1$. در این صورت داریم:

$$n = 2 \Rightarrow A = 2^2 - 3(2) + 5 = 3 \xrightarrow{A=2q+1} 2q + 1 = 3 \Rightarrow q = 1$$

در گزینه ها فقط $2 - 3k + 2k^2$ به ازای $k = 1$ برابر 1 می شود.

۱۷ ۱ برای اثبات حکم، دو حالت برای n در نظر می گیریم، یک بار n زوج

و بار دیگر n فرد باشد. اگر زوج بودن n را با p_1 و فرد بودن n را با p_2 و فرد بودن $n^2 - 5n + 7$ را با r نمایش دهیم، حکم به صورت $r \Rightarrow p_1 \vee p_2$ می باشد که با $(p_1 \Rightarrow r) \wedge (p_2 \Rightarrow r)$ هم ارز است.

۱۸ ۲ باید همه حالت های ممکن برای n را در نظر بگیریم، اما چون در

$$n = 1 \text{ و } n = 6 \text{ وجود ندارند، داریم:}$$

$$n = 2 \Rightarrow \frac{2^2(2+1)^2}{4} = 9 \Rightarrow$$

حاصل عددی فرد شده است، پس گزینه (۱) که شامل 2 می باشد، نادرست است

$$n = 5 \Rightarrow \frac{5^2(5+1)^2}{4} = 225 \Rightarrow$$

حاصل عددی فرد شده است، پس گزینه های (۳) و (۴) که شامل 5 هستند، نادرست می باشد.

۱۹ ۴ گزینه ها را بررسی می کنیم:

(۱) اگر ab زوج باشد، با دو حالت مواجه می شویم: یا هر دو عدد a و b زوج هستند یا یکی از آن ها فرد و دیگری زوج است که در حالت دوم، توان دوم یکی زوج و توان دوم دیگری فرد است، پس مجموع آن ها عددی فرد می شود. بنابراین گزینه (۱) نادرست است.

(۲) اگر ab زوج باشد، در حالتی که هر دو عددی زوج هستند، حاصل $a^2 - b^3$ عددی زوج می شود. بنابراین گزینه (۲) نادرست است.

(۳) و (۴) اگر ab فرد باشد حتماً هر دو عدد فرد هستند و به هر توانی که برسند فرد باقی می ماند که مجموع دو عدد فرد، همواره عددی زوج است، بنابراین گزینه (۳) نادرست، اما گزینه (۴) همواره درست است.

۲۰ ۳ چون a عددی زوج است، پس $a - 1 \neq 0$ می باشد. در این حالت

اگر طرفین تساوی را در معکوس $a - 1$ ضرب کنیم، ثابت می شود که $b = -2$ است. نگاه کنید:

$$(a-1)(b+2) = 0 \xrightarrow{a-1 \neq 0} \frac{1}{a-1} \times (a-1)(b+2) = \frac{1}{a-1} \times 0$$

$$\Rightarrow b+2=0 \Rightarrow b=-2$$

از تساوی $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ داریم:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = a^2 + b^2 \Rightarrow 2ab = 0$$

$$\xrightarrow{2 \neq 0} ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ یا } b = 0$$

بنابراین لزومی ندارد $a = 0$ و $b = 1$ باشند. ممکن است $a = 1$ و $b = 0$ یا $a = 0$ و b هر عدد دلخواه دیگر و یا $b = 0$ و a هر عدد دلخواه دیگر باشند. اما واضح است که تحت شرایط سؤال، همواره تساوی های $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ و $(a-b)^2 = a^2 + b^2$ برقرار هستند.

۲۲ ۲ اگر r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ باشد، فرض می کنیم

$r+x$ گنگ نباشد، بنابراین عددی گویا است. حال با توجه به این که تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا است باید تفاضل $r+x$ و r نیز گویا باشد یعنی $r+x-r \in \mathbb{Q}$ و از آن جا $x \in \mathbb{Q}$ که در تضاد با فرض گنگ بودن x است.

نتیجه (۱) اگر a عدد گویا و b عدد گنگ باشد، اعداد $a+b$ و $a-b$ و همچنین با شرط $a \neq 0$ اعداد $\frac{a}{b}$ و $\frac{b}{a}$ گنگ هستند.

نتیجه (۲) معکوس یک عدد گنگ، همواره عددی گنگ است. پس اگر b عددی گنگ باشد، $\frac{1}{b}$ نیز عددی گنگ خواهد بود.

نتیجه (۳) اگر a و b دو عدد گنگ باشند، اعداد $a+b$ ، $a-b$ و ab و $\frac{a}{b}$ ممکن است گنگ یا گویا باشند.

۲۳ ۳ اگر $x = \sqrt{3}$ و $y = 2$ باشد، $x+y$ گنگ است، ولی $y = 2$

گنگ نیست. بنابراین گزینه (۱) مثال نقض دارد. در گزینه (۲) اگر $x = 1 - \sqrt{3}$ و

$y = 2 + \sqrt{3}$ باشد، $x+y$ گویا است ولی نه x و نه y گویا است. در گزینه (۴) اگر

$x = 1 + \sqrt{2}$ و $y = 2 - \sqrt{2}$ باشد، $x+y = 3$ می شود که عددی گویا است.

همچنین اگر $x = 1 + \sqrt{2}$ و $y = \sqrt{2}$ باشند، $x-y = 1$ می شود که گویا است.

$$\Leftrightarrow x^2 + x^2 + y^2 + y^2 + 1 + 1 - 2x - 2xy - 2y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (x^2 - 2xy + y^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 \geq 0$$

به کمک اثبات بازگشتی داریم: **۴ ۳۲**

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2xz + 2yz$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2xz + z^2) + (y^2 - 2yz + z^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 \geq 0 \text{ بدیهی}$$

به کمک اثبات بازگشتی داریم: **۱ ۳۳**

$$a^2 + b^2 + c^2 + m \geq 2(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2a + b^2 - 2b + c^2 - 2c + m \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 - 1 + (b-1)^2 - 1 + (c-1)^2 - 1 + m \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 + m - 3 \geq 0$$

واضح است که اگر $m - 3 \geq 0$ باشد، رابطه اخیر همواره برقرار است. بنابراین حداقل مقدار m برابر ۳ است.

۳ ۳۴ اگر $n = 6$ باشد، $n^2 = 36$ می شود که مضرب ۱۲ است ولی n مضرب ۱۲ نیست. اما در بقیه موارد به کمک برهان خلف می توان نشان داد که دو گزاره هم ارز هستند.

نیم نگاه
به طور کلی اگر در تجزیه m توان هیچ عاملی بزرگ تر از ۱ نباشد، آن گاه، مضرب m بودن n و مضرب m بودن n^2 هم ارز می باشند.
دقت کنید با توجه به نیم نگاه فوق، گزینه های (۱)، (۲) و (۴) درست هستند.

۱ ۳۵ گزاره های $a + \frac{1}{a} \geq 2$ و $(a-1)^2 \geq 0$ زمانی که $a > 0$ باشد، هم ارز هستند. مثلاً به ازای $a = -1$ گزاره $(a-1)^2 \geq 0$ است ولی $a + \frac{1}{a} = -2$ می شود که بزرگ تر و یا مساوی ۲ نیست. حال به عنوان تمرین نشان می دهیم که گزاره های موجود در گزینه های (۲)، (۳) و (۴) هم ارز هستند:

$$۲) \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$$

$$۳) a^2 + ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 2ab + 2b^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab + a^2 + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a+b)^2 + a^2 + b^2 \geq 0$$

$$۴) a^2 + ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + ab + \frac{b^2}{4} + \frac{3b^2}{4} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(a + \frac{b}{4}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$$

اکنون ببینید که چه طور به ازای $a > 0$ گزاره های $a + \frac{1}{a} \geq 2$ و $(a-1)^2 \geq 0$ هم ارز هستند:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{a^2+1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{a^2+1}{a} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a^2+1-2a}{a} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2}{a} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$$

۴ ۲۴ اگر $x = \sqrt{3}$ و $y = \sqrt{5}$ باشند، $xy = \sqrt{15}$ می شود که

عددی گنگ است در حالی که x و y گویا نیستند، پس گزینه (۱) مثال نقض دارد. اگر $x = \sqrt{3}$ و $y = \log_{\sqrt{3}} 4$ باشند، $x^y = (\log_{\sqrt{3}} 4)^{\sqrt{3}} = 4$ می شود که عددی گویا است، پس گزینه (۲) هم مثال نقض دارد. در مورد گزینه (۳) هم می توان گفت که اگر $n^2 = 100$ باشد، آن گاه $n = 10$ است. همان طور که می بینید n^2 مضرب ۲۰ است، در حالی که n مضرب ۲۰ نیست. در مورد گزینه (۴)، قبلاً دیده بودیم که مربع هر عدد فرد به فرم $4q+1$ است، پس:

$$a^2 - b^2 = (4q+1) - (4q'+1) = 4q - 4q' = 4(q-q')$$

می دانیم تفاضل اعداد گنگ و گویا عددی گنگ است، پس: **۲ ۲۵**

$$(a+2b) - (a+b) \in \mathbb{Q}' \Rightarrow b \in \mathbb{Q}'$$

از طرفی چون b عددی گنگ و $a+b$ عددی گویا است، پس حتماً a عددی گنگ است.

۱ ۲۶ چون $a+b$ عددی گویا و $a-b$ عددی گنگ هستند، پس حاصل جمع و تفاضل آن ها عددی گنگ است:

$$(a+b) + (a-b) \in \mathbb{Q}' \Rightarrow 2a \in \mathbb{Q}' \Rightarrow a \in \mathbb{Q}'$$

$$(a+b) - (a-b) \in \mathbb{Q}' \Rightarrow 2b \in \mathbb{Q}' \Rightarrow b \in \mathbb{Q}'$$

به کمک برهان خلف می توان ثابت کرد که $a-b$ و $a+2b$ هر دو گنگ هستند. **۱ ۲۷**

۳ ۲۸ روش اثبات، روش برهان خلف است، به این صورت که فرض می کنیم $(a-b)(b-c)(c-a)$ زوج نباشد، پس عددی فرد است. پس هر سه عامل $a-b$ ، $b-c$ و $c-a$ هم باید فرد باشند، چون حاصل ضرب چند عدد فرد، عددی فرد است. از طرفی می دانیم جمع سه عدد فرد، عددی فرد است. پس باید $(a-b) + (b-c) + (c-a)$ عددی فرد باشد، اما مجموع این سه عدد، برابر صفر می باشد و صفر عددی زوج است.

برای گزینه های (۱)، (۲) و (۴) مثال نقض ارائه می کنیم: **۳ ۲۹**

در گزینه (۱)، $a^3 + 6a^2 + 12a = (a+2)^3 - 8$ می باشد. اگر $a = -2 + \sqrt[3]{3}$ باشد، آن گاه $-5 = 3 - 8 = -5 = (a+2)^3 - 8 = (-2 + \sqrt[3]{3} + 2)^3 - 8 = 3 - 8 = -5$ خواهد شد که عددی گویا است. در گزینه (۲) با فرض $a = b = \sqrt{3}$ داریم $\log_b a = \log_{\sqrt{3}} \sqrt{3} = 1$ که عددی گویا است. در گزینه (۴) با فرض $a = \sqrt{3}$ و $b = \sqrt[4]{3}$ حاصل $ab^2 = 3$ می شود که عددی گویا است. اما گزینه (۳) را به صورت زیر می توان اثبات کرد:

$$\frac{a^2 - a - 2}{a^2 - 2a} = \frac{(a-2)(a+1)}{a(a-2)} = \frac{a+1}{a} = 1 + \frac{1}{a}$$

اگر a گنگ باشد، $\frac{1}{a}$ حتماً گنگ است، پس $1 + \frac{1}{a}$ هم گنگ می شود.

۲ ۳۰ ترکیب دو شرطی (ب) نادرست است، زیرا اگر $a = 2$ و $b = -2$ باشد، تساوی $a^2 = b^2$ برقرار است، در حالی که $a = b$ نمی باشد. ترکیب دو شرطی (پ) نیز نادرست است، زیرا اگر $a = -4$ و $b = 1$ باشد، $a < b$ است ولی $a^2 < b^2$ نمی باشد. فقط ترکیب های دو شرطی (الف) و (ت) درست هستند.

به کمک اثبات بازگشتی داریم: **۲ ۳۱**

$$x^2 + y^2 + 1 \geq x + xy + y \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2x + 2xy + 2y$$

نتایج زیر می‌توانند در حل بسیاری از تست‌ها مورد استفاده قرار بگیرند:

۱ اگر $a > 0$ باشد، آن‌گاه $a + \frac{1}{a} \geq 2$ است.

توجه می‌توان نشان داد که اگر $a < 0$ باشد، $a + \frac{1}{a} \leq -2$ است. (این مطلب در کتاب درسی بررسی نشده است).

۲ میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آن‌ها کم‌تر نیست.

$$a, b \geq 0 \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

۳ چون $0 < \theta < 180^\circ$ است، پس $\sin \theta > 0$ است. حال داریم:

$$\frac{2}{\sin \theta} - \cos \theta \times \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \geq k \Rightarrow \frac{2 - \cos^2 \theta}{\sin \theta} \geq k$$

$$\Rightarrow \frac{1 + 1 - \cos^2 \theta}{\sin \theta} \geq k \Rightarrow \frac{1 + \sin^2 \theta}{\sin \theta} \geq k \Rightarrow \frac{1}{\sin \theta} + \sin \theta \geq k$$

می‌دانیم که اگر $x > 0$ آن‌گاه $x + \frac{1}{x} \geq 2$ است، پس چون $\sin \theta > 0$ است، داریم:

$$\frac{1}{\sin \theta} + \sin \theta \geq 2 \Rightarrow \text{Max}(k) = 2$$

ابتدا عبارت داده شده را به صورت مجموع دو کسر می‌نویسیم و داریم:

$$A = \frac{cd(a^2 + b^2) + bd(a^2 + c^2)}{abcd} = \frac{cd(a^2 + b^2)}{abcd} + \frac{bd(a^2 + c^2)}{abcd}$$

$$= \frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{ab} + \frac{a^2}{ac} + \frac{c^2}{ac} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a}$$

با فرض $x = \frac{a}{b} = \frac{1}{x} \cdot \frac{a}{b} = x$ می‌شود. چون a و b مثبت هستند، پس $x > 0$ است.

طبق گزاره «اگر $x > 0$ ، آن‌گاه $x + \frac{1}{x} \geq 2$ می‌باشد.» می‌توان گفت

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \quad \text{با همین استدلال} \quad \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2 \quad \text{می‌باشد، پس داریم:}$$

$$\begin{cases} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \\ \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geq 2 + 2 \Rightarrow A \geq 4 \Rightarrow \min(A) = 4$$

۴ می‌دانیم میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی

آن‌ها کم‌تر نیست، پس:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \quad \frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}, \quad \frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ca}$$

با ضرب طرفین نامساوی‌ها در هم، داریم:

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{2 \times 2 \times 2} \geq abc \Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

۱ ابتدا به کمک اتحاد دوجمله‌ای داریم:

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 = a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} + b^2 + 2 + \frac{1}{b^2}$$

$$= a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + 4$$

$$= (a+b)^2 - 2ab + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 - \frac{2}{ab} + 4$$

$$= (a+b)^2 - 2ab + \left(\frac{a+b}{ab}\right)^2 - \frac{2}{ab} + 4$$

با توجه به فرض مسئله $a+b=1$ است، پس:

$$a+b=1 \Rightarrow (a+b)^2 - 2ab + \left(\frac{a+b}{ab}\right)^2 - \frac{2}{ab} + 4$$

$$= 1 - 2ab + \frac{1}{a^2 b^2} - \frac{2}{ab} + 4 = 1 - 2ab + \frac{1 - 2ab}{a^2 b^2} + 4$$

از طرفی می‌دانیم میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آن‌ها

کم‌تر نیست، پس:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow \frac{1}{2} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow ab \leq \frac{1}{4}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} ab \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 2ab \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -2ab \geq -\frac{1}{2} \\ ab \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{ab} \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{a^2 b^2} \geq 16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 - 2ab + \frac{1 - 2ab}{a^2 b^2} + 4 \geq \left(1 - \frac{1}{2}\right) + 16\left(1 - \frac{1}{2}\right) + 4 = \frac{25}{2}$$

۲ به ازای $x=2$ و $y=4$ حکم $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \leq xy$ برقرار نیست،

زیرا:

$$x=2, y=4 \Rightarrow \left(\frac{2+4}{2}\right)^2 \leq 2 \times 4 \Rightarrow 9 \leq 8 \quad \times$$

گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) به روش برهان خلف اما گزینه (۴) به

کمک اثبات بازگشتی ثابت می‌شود.

۳ عدد ۱ مثال نقض گزینه (۱) است، زیرا 1^2 از ۱ بزرگ‌تر نیست.

برای گزینه (۲) مثال‌های نقض زیادی وجود دارد، مثلاً عکس عدد $\frac{1}{2}$ عدد ۲

است که ۲ کم‌تر از $\frac{1}{2}$ نیست. در گزینه (۳) هم عدد -1 مثال نقض است، زیرا

$$-2 = -1 + \frac{1}{-1} = -1 - 1$$

می‌توان ثابت کرد. نگاه کنید:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

۴ مثال نقض برای نشان دادن نادرستی یک نتیجه‌گیری کلی به کار می‌رود.

اگر a فرد باشد، داریم:

$$a = 2k + 1 \Rightarrow a^2 = (2k + 1)^2 \Rightarrow a^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

$$\Rightarrow a^2 = 4k(k+1) + 1 \Rightarrow a^2 = 8q + 1 \Rightarrow a^2 - 1 = 8q$$

همان‌طور که می‌بینید روش استدلال، اثبات مستقیم است.

چون a یک عدد زوج است، داریم:

$$a = 2k \Rightarrow a(a^2 - 4) = 2k(4k^2 - 4) = 2 \times 4k(k^2 - 1)$$

$$= 8k k(k-1)(k+1) = 8 \times 6q = 48q$$

ضرب سه عدد متوالی مضرب ۶ است.

۳ عدد ۱۵ می‌تواند مثال نقض این حکم باشد.

۱ برای اثبات درستی حکم «مجموع هر دو عدد گویا، یک عدد گویا

است.» از اثبات مستقیم استفاده می‌کنیم. نگاه کنید:

$$a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ و } b, d \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

می‌دانیم ضرب دو عدد صحیح، عددی صحیح و جمع دو عدد صحیح نیز عددی

صحیح است، پس:

$$\frac{ad + bc}{bd} = \frac{m}{n}$$

۵۸ ۲ تنها عددی که بر صفر بخش پذیر است، خود صفر است، پس:

$$2n^2 - 3n - 2 = 0 \Rightarrow (2n+1)(n-2) = 0 \Rightarrow n = -\frac{1}{2}, n = 2$$

فقط یک عدد صحیح وجود دارد. \Rightarrow

۵۹ ۳



چاق و لاغر کردن بخش پذیری:

در بخش پذیری $a|b$ ، اگر a را لاغر و b را چاق فرض کنیم، داریم:

۱ چاق را می توان چاق تر کرد:

$$a|b \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} a|mb$$

$$a|b \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} a|b^n$$

نکته چاق کردن یعنی ضرب کردن در یک عدد صحیح و افزایش توان.

۲ لاغر را می توان لاغرتر کرد.

$$ab|c \Rightarrow a|c \text{ و } b|c$$

$$a^n|b \Rightarrow a|b$$

لاغر کردن یعنی تقسیم کردن بر یک عدد صحیح که حاصل هم عدد صحیح شود و کاهش توان.

تک تک گزینه ها را بررسی می کنیم:

۱) $a|b \xrightarrow{\text{چاق، چاق تر}} a|2b$ ۲) $3a^2|b \xrightarrow{\text{لاغر، لاغرتر}} a|b$

۴) $a^2|b^2 \xrightarrow{\text{با هم لاغر}} a|b \xrightarrow{\text{با هم چاق}} 2a|2b$

اما در مورد گزینه (۳)، لاغر، چاق شده است که نادرست می باشد:

$$a|b \Rightarrow 2a|b$$

لاغر، چاق شده است.

۶۰ ۴ تک تک گزینه ها را بررسی می کنیم:

در گزینه (۱) طرفین رابطه $24ab|18ac$ بر $6a$ تقسیم شده است، اما چون نمی دانیم که a حتماً مخالف صفر است یا خیر، پس چنین کاری مجاز نیست.

در گزینه (۲) برای آن که $a+b$ به b تبدیل شود باید در سمت لاغر از تفریق استفاده کنیم در حالی که نمی توان این کار را کرد. البته می توان مثال نقض هم ارائه کرد. مثلاً اگر $a = -3$ و $b = 4$ باشد، رابطه $a+b|a$ درست است، ولی رابطه $b|a$ نادرست می باشد.

در گزینه (۳) هم از تساوی $a = bc$ می توان نتیجه گرفت که $c|a$. به مثال نقض هم دقت کنید، مثلاً اگر $a = 6$ ، $b = 2$ و $c = 3$ باشند، رابطه $a = bc$ برقرار است در حالی که $6/3$ صحیحی مانند q می شود، بنابراین تک تک گزینه ها را بررسی می کنیم تا ببینیم در کدام گزینه حاصل تقسیم فوق برابر عدد صحیح نمی شود:

اما گزینه (۴) درست است، زیرا چاق را می توان چاق تر کرد. نگاه کنید:

$$a|b+1 \Rightarrow a|(b+1)(b^2-b+1) \Rightarrow a|b^3+1$$

۶۱ ۴



علامت در بخش پذیری تأثیری ندارد:

$$a|b \Rightarrow -a|b, a|-b, -a|-b$$

گزینه (۱) نادرست است، مثلاً $9 \times 12|4 \times 12$ اما $9/4$ و $12/9$ گزینه (۲) نیز نادرست است، مثلاً $9+1|5$ در حالی که $5/9$ و $5/1$ در گزینه (۳) طرفین بر a تقسیم شده است، اما از کجا می دانیم a صفر نیست؟ ولی گزینه (۴) درست است، زیرا چاق در یک منفی ضرب شده است و علامت در بخش پذیری تأثیری ندارد.

۴۸ ۲ این حکم همواره درست نیست، مثلاً اگر $x = \sqrt{3}$ و $y = \frac{2}{\sqrt{3}}$

باشد، $xy = 2$ می شود که عددی گویا است. بنابراین برای نشان دادن نادرستی حکم از مثال نقض استفاده می شود.

۴۹ ۳ همان طور که قبلاً دیدیم، برای اثبات درستی این حکم از روش

برهان خلف استفاده می شود.

۵۰ ۳ اگر $n = 6$ باشد، آن گاه $n^2 = 216 = 24$ مضرب ۲۴ است، در حالی که

۶ مضرب ۲۴ نیست.

۵۱ ۲ اگر $n = 41$ باشد، عدد $n^2 + n + 41$ مضرب ۴۱ می شود، پس اول

نیست. یعنی برای نشان دادن نادرستی این حکم از مثال نقض استفاده کردیم.

۵۲ ۳ به کمک اثبات بازگشتی داریم:

$$x^4 + y^4 \geq xy(x^2 + y^2) \Leftrightarrow x^4 + y^4 \geq x^2y + xy^2$$

$$\Leftrightarrow x^4 - x^2y + y^4 - xy^2 \geq 0 \Leftrightarrow x(x^3 - y^3) + y(y^3 - x^3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^3 - y^3)(x - y) \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2)(x - y) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2(x^2 + xy + y^2) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + xy + y^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$$

همواره درست است. به کمک اثبات بازگشتی داریم:

$$\frac{a+b}{2} \geq \frac{b}{2a} \quad \text{به کمک اثبات بازگشتی داریم:}$$

$$\Leftrightarrow 2a(a+b) \geq b(2a-b) \Leftrightarrow 2a^2 + 2ab \geq 2ab - b^2$$

$$2a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 + a^2 \geq 0 \Rightarrow (a-b)^2 + a^2 \geq 0$$

۵۴ ۳ با توجه به تعریف عاقد کردن که به صورت $b = aq$ می باشد،

گزاره $b|cd$ صحیح است، زیرا: $ab = cd \Rightarrow cd = bq \Rightarrow b|cd$

برای رد گزینه های دیگر می توان از مثال نقض استفاده کرد. مثلاً داریم:

۱) $b = c = 3, a = d = 1$

۲) $a = c = 1, b = d = 3$ ۴) $a = c = 3, b = d = 1$

۵۵ ۳ طبق قرارداد، صفر بر صفر بخش پذیر است. بنابراین گزینه (۳)

صحیح است. در مورد گزینه (۱)، گزاره صحیح به صورت «همه اعداد صحیح، صفر را عاد می کنند» می باشد. در مورد گزینه (۲)، « ± 1 ، همه اعداد صحیح را می شمارند» صحیح است و در مورد گزینه (۴) هم مثال های نقض زیادی مانند ۳، ۲ و ... وجود دارد.

۵۶ ۲ با توجه به تعریف بخش پذیری، اگر $a|b$ آن گاه حاصل $\frac{b}{a}$ عدد

صحیحی مانند q می شود، بنابراین تک تک گزینه ها را بررسی می کنیم تا ببینیم در کدام گزینه حاصل تقسیم فوق برابر عدد صحیح نمی شود:

$$۱) 45^3 | 15^6 \Rightarrow \frac{15^6}{45^3} = \frac{3^6 \times 5^6}{(3^2 \times 5)^3} = \frac{3^6 \times 5^6}{3^6 \times 5^3} = 5^3 \quad \checkmark$$

$$۲) 12^7 | 18^{12} \Rightarrow \frac{18^{12}}{12^7} = \frac{(2 \times 3^2)^{12}}{(2^2 \times 3)^7} = \frac{2^{12} \times 3^{24}}{2^{14} \times 3^7} = \frac{3^{17}}{2^2} \quad \times$$

بنابراین نیازی به بررسی سایر گزینه ها نیست.

۵۷ ۱ چون عدد $3 - 2b - b^2$ بر هر عدد صحیح مانند a بخش پذیر

است، پس $3 - 2b - b^2 = 0$ می باشد. لذا داریم:

$$b^2 - 2b - 3 = 0 \xrightarrow{\text{در این معادله درجه دوم، در این معادله درجه دوم، } b = -1, b = 3}$$

\Rightarrow فقط عدد ۳ عددی طبیعی است.

۶۲ ۴

روش اول: می‌دانیم هر عددی بر خودش بخش پذیر است، پس $a - b \mid a - b$ ، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} a - b \mid a \\ a - b \mid a - b \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} a - b \mid a - (a - b) \Rightarrow a - b \mid b$$

روش دوم: $a = 3$ و $b = 2$ مثال نقضی برای گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) می‌باشند.

۶۳ ۳

در گزینه‌ها در سمت چاق b یا c وجود دارد، پس باید از دو رابطه، b یا c را حذف کنیم:

$$\begin{cases} a \mid b + c \\ a \mid 2c \end{cases} \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} a \mid 2b + 2c \\ a \mid 2c \end{cases} \Rightarrow a \mid (2b + 2c) - 2c \Rightarrow a \mid 2b$$

دقت کنید که در گزینه (۲) سمت چاق رابطه $a \mid 2c$ لاغر شده است، پس نادرست می‌باشد. با توجه به رابطه $a \mid 2b$ ، گزینه (۱) نادرست است چون چاق، لاغر شده است. هم‌چنین گزینه (۴) نیز نادرست است، زیرا هم چاق، لاغر شده و هم طرف لاغر، چاق شده است.

۶۴ ۳

با توجه به گزینه‌ها باید در سمت راست، ab ایجاد کنیم، پس به کمک ویژگی‌های بخش پذیری داریم:

$$\begin{cases} n \mid a - 3 \\ n \mid b + 7 \end{cases} \xrightarrow{\times b} \begin{cases} n \mid ab - 3b \\ n \mid 3b + 21 \end{cases} \Rightarrow n \mid ab + 21$$

۶۵ ۴

تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $b^3 + c^3 \mid a \Rightarrow (b+c)(b^2 - bc + c^2) \mid a \xrightarrow{\text{لاغر، لاغرتر}} b+c \mid a$

۲) $a \mid a - b \xrightarrow{(-1) \text{ برابر لاغر را به چاق اضافه می‌کنیم.}} a \mid -b$

$a \mid a + b \xrightarrow{\text{علامت تأثیری ندارد.}} a \mid b \xrightarrow{\text{لاغر را به چاق اضافه می‌کنیم.}} a \mid a + b$

۳) $a^2 - b^2 \mid a \Rightarrow (a-b)(a+b) \mid a \xrightarrow{\text{لاغر، لاغرتر}} a+b \mid a$

$a+b \mid a+b \xrightarrow{a+b \mid a+b} a+b \mid (a+b) - a \Rightarrow a+b \mid b$

بنابراین حتماً گزینه (۴) نادرست است. مثال نقض برای رد گزاره

« $a^2 \mid a + b \Rightarrow a^2 \mid a - b$ »، $a = 3$ و $b = 15$ است، زیرا $3^2 \mid 3 + 15$ ، در حالی که $3^2 \nmid 15 - 3$.

۶۶ ۳

برای آن‌که این کسر تبدیل به عدد صحیح شود باید مخرج کسر، صورت آن را عا کند، یعنی: $2x + 3 \mid 14 \Rightarrow 2x + 3 = \pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14$

از آن جایی که $2x + 3$ همواره فرد است، پس:

منحنی از ۴ نقطه یا $2x + 3 = \pm 7 \Rightarrow x = 2, -5$
مختصات صحیح می‌گذرد. $2x + 3 = \pm 1 \Rightarrow x = -1, -2$

۶۷ ۲

باید سعی کنیم در سمت راست، m را حذف کنیم:

$a \mid 7m + 6 \xrightarrow{\text{چاق، چاق تر} \times 6} a \mid 42m + 36$

$a \mid 6m + 5 \xrightarrow{\text{چاق، چاق تر} \times 7} a \mid 42m + 35$

$\Rightarrow a \mid (42m + 36) - (42m + 35) \Rightarrow a \mid 1 \Rightarrow a = \pm 1$

۶۸ ۳

سعی می‌کنیم n را در سمت راست بخش پذیری حذف کنیم:

$a \mid 9n + 7 \Rightarrow a \mid 7(9n + 7) - 9(7n + 6) \Rightarrow a \mid -5 \Rightarrow a \mid 5$

$\Rightarrow a = 1$ یا $a = 5$

روش اول: باید سعی کنیم در سمت راست، n را حذف کنیم:

$$\begin{cases} a \mid \Delta n^2 - 2n + 1 \\ a \mid n - 3 \end{cases} \xrightarrow{\times \Delta n} a \mid \Delta n^2 - 1 \Delta n$$

$$\Rightarrow a \mid (\Delta n^2 - 2n + 1) - (\Delta n^2 - 1 \Delta n) \Rightarrow a \mid 13n + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \mid 13n + 1 \\ a \mid n - 3 \end{cases} \xrightarrow{\times 13} a \mid 13n - 39 \Rightarrow a \mid (13n + 1) - (13n - 39) \Rightarrow a \mid 40$$

بنابراین a می‌تواند اعداد ۱ یا ۲ یا ۴ یا ۵ یا ۸ یا ۱۰ یا ۲۰ یا ۴۰ باشد. پس برای a ، ۸ جواب طبیعی وجود دارد.

روش دوم:

اگر $n \mid x - a$ و $n \mid f(x)$ که $f(x)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح بر حسب x باشد، آن‌گاه $n \mid f(a)$.

با توجه به نیم‌نگاه فوق داریم: ریشه $n - 3 = 0$ است.

$$a \mid n - 3, a \mid \Delta n^2 - 2n + 1 \xrightarrow{n=3} a \mid \Delta (3)^2 - 2(3) + 1$$

$$\Rightarrow a \mid 40 \Rightarrow a = 1 \text{ یا } 2 \text{ یا } 4 \text{ یا } 5 \text{ یا } 8 \text{ یا } 10 \text{ یا } 20 \text{ یا } 40$$

باید سعی کنیم در سمت راست، k را حذف کنیم:

$$\begin{cases} a \mid 2k^2 - k + 3 \\ a \mid k^2 + k - 1 \end{cases} \Rightarrow a \mid (2k^2 - k + 3) - 2(k^2 + k - 1) \Rightarrow a \mid -3k + 5 \quad (*)$$

حال اگر بتوانیم در سمت راست، یک عبارت درجه اول دیگر بر حسب k ایجاد کنیم خیلی خوب می‌شود:

$$\begin{cases} a \mid -3k + 5 \\ a \mid k^2 + k - 1 \end{cases} \Rightarrow a \mid k(-3k + 5) + 3(k^2 + k - 1) \Rightarrow a \mid \lambda k - 3 \quad (**)$$

با توجه به روابط (*) و (**): داریم:

$$\begin{cases} a \mid -3k + 5 \\ a \mid \lambda k - 3 \end{cases} \Rightarrow a \mid \lambda(-3k + 5) + 3(\lambda k - 3)$$

$\Rightarrow a \mid 31 \Rightarrow a = 1$ یا $a = 31$

روش اول: باید سعی کنیم در رابطه $n^3 - 3 \mid n^3 - 3$ ، پارامتر n

را در سمت راست حذف کنیم:

$$\begin{cases} n - 3 \mid n^3 - 3 \\ n - 3 \mid n - 3 \end{cases} \xrightarrow{\times n^2} n - 3 \mid n^3 - 3n^2$$

$$\Rightarrow n - 3 \mid (n^3 - 3) - (n^3 - 3n^2) \Rightarrow n - 3 \mid (3n^2 - 3) - (3n^2 - 9n)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n - 3 \mid 3n^2 - 3 \\ n - 3 \mid n - 3 \end{cases} \xrightarrow{\times 3n} n - 3 \mid 3n^2 - 9n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n - 3 \mid 9n - 3 \\ n - 3 \mid n - 3 \end{cases} \xrightarrow{\times 9} n - 3 \mid 9n - 27$$

$\Rightarrow n - 3 \mid (9n - 3) - (9n - 27) \Rightarrow n - 3 \mid 24$

$\Rightarrow n - 3 = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24 \Rightarrow$ مقدار ۱۶

روش دوم:

نیم‌نگاه

$$x - a \mid f(x) \Rightarrow x - a \mid f(a)$$

همواره داریم:

با توجه به نیم‌نگاه فوق داریم:

$$n - 3 \mid n^3 - 3 \Rightarrow n - 3 \mid (3)^3 - 3 \Rightarrow n - 3 \mid 24$$

$$\Rightarrow n - 3 = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24 \Rightarrow 16 \text{ مقدار}$$

روش اول: باید n را در سمت راست حذف کنیم:

$$\begin{cases} 3n + 2 \mid n^2 + 1 \Rightarrow 3n + 2 \mid 3n^2 + 3 \\ 3n + 2 \mid 3n + 2 \xrightarrow{\times n} 3n + 2 \mid 3n^2 + 2n \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3n + 2 \mid (3n^2 + 2n) - (3n^2 + 3)$$

$$\Rightarrow 3n + 2 \mid (3n - 3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3n + 2 \mid 3n - 3 \xrightarrow{\times 2} 3n + 2 \mid 6n - 6 \\ 3n + 2 \mid 3n + 2 \xrightarrow{\times 2} 3n + 2 \mid 6n + 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3n + 2 \mid (6n + 4) - (6n - 6) \Rightarrow 3n + 2 \mid 10$$

$$\Rightarrow 3n + 2 = \pm 1, \pm 10 \xrightarrow{n \in \mathbb{Z}} n = -1, -5$$

روش دوم:

نیم‌نگاه

اگر $ax + b \mid f(x)$ (یعنی ریشه سمت چپ، کسری باشد)، باز هم ریشه ساده‌نشده $ax + b = 0$ را در $f(x)$ قرار می‌دهیم. فقط عدد حاصل را تا جایی که امکان دارد ساده کرده (در صورتی که ساده شوند)، سپس از مخرج آن صرف‌نظر می‌کنیم.

$$3n + 2 \mid n^2 + 1 \xrightarrow{n = -\frac{2}{3}} 3n + 2 \mid \frac{4}{9} + 1 \Rightarrow 3n + 2 \mid \frac{13}{9}$$

$$\Rightarrow 3n + 2 \mid 13 \Rightarrow 3n + 2 = \pm 1, \pm 13 \Rightarrow n = -1, -5$$

روش اول: ابتدا طرفین رابطه $5 \mid 4k + 1$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$5 \mid 4k + 1 \Rightarrow 25 \mid (4k + 1)^2 \Rightarrow 25 \mid 16k^2 + 8k + 1$$

با توجه به رابطه به دست آمده و $25 \mid 16k^2 + 8k + m$ داریم:

$$\begin{cases} 25 \mid 16k^2 + 8k + 1 \\ 25 \mid 16k^2 + 28k + m \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{لاغر، لاغرتر}} 25 \mid 20k + m - 1 \Rightarrow 5 \mid 20k + m - 1$$

حال کافی است از دو رابطه $5 \mid 4k + 1$ و $5 \mid 20k + m - 1$ ، عدد k را در سمت

راست حذف کنیم:

$$\begin{cases} 5 \mid 4k + 1 \\ 5 \mid 20k + m - 1 \end{cases} \Rightarrow 5 \mid (20k + m - 1) - 5(4k + 1) \Rightarrow 5 \mid m - 6$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به گزینه‌ها}} m = 6$$

روش دوم: اگر $k = 1$ باشد، رابطه $5 \mid 4k + 1$ برقرار است، پس به ازای $k = 1$

نیز باید رابطه $25 \mid 16k^2 + 28k + m$ برقرار باشد، پس:

$$25 \mid 16 + 28 + m \Rightarrow 25 \mid 44 + m \xrightarrow{\text{با توجه به گزینه‌ها}} m = 6$$

با توجه به رابطه $7 \mid 4a^2 + mab + b^2$ سعی می‌کنیم در سمت

راست، $4a^2$ و b^2 ایجاد کنیم:

$$\begin{cases} 7 \mid 5a + 3b \\ 7 \mid 21a^2 \end{cases} \Rightarrow 7 \mid 5a(5a + 3b) - 21a^2 \Rightarrow 7 \mid 4a^2 + 15ab$$

$$\begin{cases} 7 \mid 5a + 3b \\ 7 \mid 28b^2 \end{cases} \Rightarrow 7 \mid 28b^2 - 9b(5a + 3b) \Rightarrow 7 \mid b^2 - 45ab$$

حال داریم:

$$\begin{cases} 7 \mid 4a^2 + 15ab \\ 7 \mid b^2 - 45ab \end{cases} \Rightarrow 7 \mid (4a^2 + 15ab) + (b^2 - 45ab)$$

$$\Rightarrow 7 \mid 4a^2 - 30ab + b^2 \Rightarrow m = -30$$

روش دوم: اگر $a = 1$ و $b = 10$ باشند، رابطه $7 \mid 5a + 3b$ برقرار است، پس

باید رابطه $7 \mid 4a^2 + mab + b^2$ نیز به ازای $a = 1$ و $b = 10$ برقرار باشد:

$$7 \mid 4 + m(1)(10) + 100$$

$$\Rightarrow 7 \mid 104 + 10m \xrightarrow{\text{با توجه به گزینه‌ها}} m = -30$$

باید n را در سمت راست حذف کنیم:

$$n^2 - 5n + 3 \mid 3n - 2 \Rightarrow n^2 - 5n + 3 \mid (3n - 2)^2$$

$$\Rightarrow n^2 - 5n + 3 \mid 9n^2 - 12n + 4$$

از طرفی می‌دانیم $n^2 - 5n + 3 \mid n^2 - 5n + 3$ ، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} n^2 - 5n + 3 \mid 9n^2 - 12n + 4 \\ n^2 - 5n + 3 \mid n^2 - 5n + 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow n^2 - 5n + 3 \mid (9n^2 - 12n + 4) - 9(n^2 - 5n + 3)$$

$$\Rightarrow n^2 - 5n + 3 \mid 33n - 23$$

در نتیجه می‌توان گفت:

$$\begin{cases} n^2 - 5n + 3 \mid 33n - 23 \\ n^2 - 5n + 3 \mid 3n - 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow n^2 - 5n + 3 \mid (33n - 23) - 11(3n - 2)$$

$$\Rightarrow n^2 - 5n + 3 \mid -1 \Rightarrow n^2 - 5n + 3 = \pm 1$$

حال باید جواب‌های صحیح $n^2 - 5n + 3 = 1$ و $n^2 - 5n + 3 = -1$ را به

دست آوریم:

$$\begin{cases} n^2 - 5n + 3 = 1 \Rightarrow n^2 - 5n + 2 = 0 \\ n^2 - 5n + 3 = -1 \Rightarrow n^2 - 5n + 4 = 0 \end{cases}$$

چون $\Delta = 17$ است، پس مطمئناً جواب صحیح ندارد.

$$\begin{cases} n^2 - 5n + 3 = 1 \Rightarrow n^2 - 5n + 2 = 0 \\ n^2 - 5n + 3 = -1 \Rightarrow n^2 - 5n + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب = 0}} n = 1, n = 4$$

با توجه به گزینه‌ها سعی می‌کنیم در سمت راست، a را حذف کنیم.

می‌دانیم $3a + 5b \mid 3a + 5b$ ، پس:

$$\begin{cases} 3a + 2b \mid 4a + 7b \xrightarrow{\times 3} 3a + 2b \mid 12a + 21b \\ 3a + 2b \mid 3a + 2b \xrightarrow{\times 4} 3a + 2b \mid 12a + 8b \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3a + 2b \mid (12a + 21b) - (12a + 8b)$$

$$\Rightarrow 3a + 2b \mid 13b \xrightarrow{\times 3} 3a + 2b \mid 39b$$

۲) $a^3 | b^5 \xrightarrow{3 \times 3 \geq 5 \times 2} a^2 | b^3$ غرق

۳) $a^4 | b^3 \xrightarrow{4 \times 2 \geq 3 \times 3} a^3 | b^2$ غرق

۴) $a^3 | b^4 \xrightarrow{3 \times 3 \geq 4 \times 2} a^2 | b^3$ قق

روش اول: ابتدا سمت راست رابطه $a | b + c$ را چاق تر می‌کنیم:

$$a | b + c \xrightarrow{\times c} \begin{cases} a | bc + c^2 \\ a | bc \end{cases} \Rightarrow a | c^2$$

$$a | b + c \xrightarrow{\times b} \begin{cases} a | b^2 + bc \\ a | bc \end{cases} \Rightarrow a | b^2$$

حالا تک تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $a | c^2 \xrightarrow{1 \times 8 \geq 2 \times 3} a^3 | c^4$

۲) $a | b^2 \xrightarrow{\text{توان } 2} a^2 | b^4$ (البته می‌توانستیم مانند گزینه (۱) بررسی کنیم).

۴) $a | b^2, a | c^2 \Rightarrow a | b^2 + c^2$

روش دوم: می‌توانستیم فرض کنیم $a = 2, b = 4, c = 6$ است. با این مقادیر گزینه (۳) نادرست است.

گزینه (۱) درست است. زیرا:

$a | b \xrightarrow{\text{چاق، چاق تر}} a | 2b^3$

اگر طرفین رابطه‌های $b^2 | ac$ و $b | 3$ را در هم ضرب کنیم، داریم:

گزینه (۴) $a | b, b^2 | ac \Rightarrow ab^2 | bac \xrightarrow{\frac{a, b \neq 0}{\div ab}} b | c$

حال با توجه به خاصیت تعدی در رابطه بخش‌پذیری، می‌توان گفت:

گزینه (۲) $a | b, b | c \Rightarrow a | c$

بنابراین حتماً گزینه (۳) نادرست است.

تک تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $a^2 | b^3 \xrightarrow{2 \times 9 \geq 3 \times 4} a^4 | b^9$

اما برای بررسی سایر گزینه‌ها، بخش‌پذیری توانی از c بر توانی از a را می‌خواهیم. پس:

$$\begin{cases} a^2 | b^3 \xrightarrow{\text{توان } 2} a^4 | b^6 \\ b^2 | c^3 \xrightarrow{\text{توان } 3} b^6 | c^9 \end{cases} \xrightarrow{\text{تعدی}} a^4 | c^9$$

۲) $a^4 | c^9 \xrightarrow{4 \times 3 \geq 9 \times 2} a^2 | c^3$ غرق

برای تمرین بیشتر درستی گزینه‌های (۳) و (۴) را بررسی می‌کنیم:

۳) $a^4 | c^9 \xrightarrow{4 \times 3 \geq 9 \times 1} a | c^3$

۴) $a^4 | c^9 \xrightarrow{4 \times 8 \geq 9 \times 3} a^3 | c^8$

به کمک ویژگی‌های بخش‌پذیری داریم:

$a^2 - c^2 | b + c \Rightarrow (a - c)(a + c) | b + c \xrightarrow{\text{لاغر، لاغرتر}}$

$$\begin{cases} a + c | b + c \\ b | a + c \end{cases} \xrightarrow{\text{تعدی}} b | b + c \Rightarrow b | c$$

۸۴ ۳

۷۷ ۱ باید $x - 3 | \Delta x + 3$ و در نتیجه داریم:

$$x - 3 | \Delta x + 3 \Rightarrow x - 3 | \Delta(3) + 3 \Rightarrow x - 3 | 18$$

$$\Rightarrow x - 3 = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$$

از آن جایی که منحنی باید از ربع اول بگذرد، فقط X هایی قابل قبول هستند که هم $X - 3 > 0$ و هم $\frac{\Delta X + 3}{X - 3} > 0$ باشند. پس ۶ جواب قابل قبول وجود دارد.

روش اول: در منحنی با ضابطه ضمنی، ابتدا منحنی را به فرم

$$y = \frac{\Delta X + 3}{X - 3}$$

$$4x^2 + 1 = 3xy + 2y \Rightarrow y = \frac{4x^2 + 1}{3x + 2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 2 | 4x^2 + 1 \\ 3x + 2 | 3x + 2 \end{cases} \Rightarrow 3x + 2 | 3(4x^2 + 1) - 4x(3x + 2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 2 | -8x + 3 \\ 3x + 2 | 3x + 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3x + 2 | 3(-8x + 3) + 8(3x + 2) \Rightarrow 3x + 2 | 25$$

$$\Rightarrow 3x + 2 = \pm 1, \pm 5, \pm 25$$

$$\Rightarrow x = -1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, \frac{23}{3}, 9 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x = -1, 1, 9$$

روش دوم:

$$3x + 2 | 4x^2 + 1 \xrightarrow{x = -\frac{2}{3}} 3x + 2 | 4\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 1$$

$$\Rightarrow 3x + 2 | \frac{25}{9} \Rightarrow \dots$$

چون a عدد طبیعی است، پس حتماً $a \neq 0$ می‌باشد. یعنی

می‌توان طرفین $abc | ab + ac$ را بر a تقسیم کرد (لاغر کرد). حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $abc | ab + ac \xrightarrow{\div a} bc | b + c$

$$\Rightarrow \begin{cases} b | b + c \Rightarrow b | c \\ c | b + c \Rightarrow c | b \end{cases} \xrightarrow{\text{c و b اعداد طبیعی اند.}} b = c$$

۲) $b | c \xrightarrow{\text{چاق، چاق تر}} b | c^2$

۴) $c | b \xrightarrow{\text{با هم چاق}} c^2 | b^2 \xrightarrow{\text{چاق، چاق تر}} c^2 | b^5$

نیم‌نگاه

اگر a و b اعداد صحیح و m, n, m', n' و اعداد طبیعی باشند به طوری که $nm' \geq mn'$ ، آن‌گاه:

$$a^n | b^m \xrightarrow{\text{نزدیک در نزدیک}} a^{n'} | b^{m'} \xrightarrow{\text{دور در دور}}$$

برای اثبات درستی گزینه (۴) می‌توان از نیم‌نگاه فوق هم استفاده کرد:

$$c | b \xrightarrow{1 \times 5 \geq 1 \times 2} c^2 | b^5$$

اما گزینه (۳) نادرست است، چون واضح است که از رابطه $bc | b + c$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $a | b + c$.

تک تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۸۰ ۴

۱) $a^2 | b^3 \xrightarrow{2 \times 4 \geq 3 \times 3} a^3 | b^4$ غرق

۴ ۸۵

۹۱ با توجه به رابطه زیر، $\frac{2^0}{n}$ باید عدد طبیعی و زوج باشد:

$$3^n + 1 \mid (3^n)^{\frac{2^0}{n}} - 1$$

بنابراین n می‌تواند ۱، ۲، ۵، ۱۰ باشد.

۹۲ ابتدا روابط $3 \times 1080 \mid 960$ و $2 \times 960 \mid 1080$ را ساده می‌کنیم:

$$3 \times 1080 \stackrel{\div 3}{\implies} x \mid 360 \quad \text{و} \quad 2 \times 960 \stackrel{\div 2}{\implies} x \mid 480$$

بنابراین مجموعه A به صورت $A = \{x > 0 : x \mid 360, x \mid 480\}$ می‌شود. بزرگ‌ترین عضو مجموعه A ، همان بزرگ‌ترین عدد x است که هم ۳۶۰ و هم ۴۸۰ را می‌شمارد. با توجه به تعریف ب.م.م دو عدد می‌توان گفت بزرگ‌ترین عضو مجموعه A ، ب.م.م ۳۶۰ و ۴۸۰ است. پس:

$$\text{Max}(A) = (360, 480)$$

$$= (3^2 \times 2^2 \times 3^1 \times 5^1, 2^4 \times 3^1 \times 5^1) = 3^2 \times 3^1 \times 5^1 = 120$$

۹۳ چون $(a, p^2) = p$ شده است، پس a دقیقاً یک عامل p دارد (چون مثلاً اگر دو تا یا بیشتر داشت باید $(a, p^2) = p^2$ می‌شد!!!) و هم‌چنین با استدلال مشابه، b نیز دارای عامل p^2 است و بنابراین ab دارای عامل p^3 می‌باشد، پس $(ab, p^5) = p^3$.

۹۴ چون $(a, b^4) = p$ است، واضح است که هم a و هم b حداقل

یک عامل p دارند و واضح است که b^4 دارای حداقل چهار عامل p است و با توجه دوباره به $(a, b^4) = p$ نتیجه می‌گیریم که a فقط یک عامل p دارد. چون اگر بیش از یک عامل p داشته باشد، ب.م.م a و b^4 برابر p نمی‌شد. بنابراین داریم:

$$(a, b) = (p^1 \times \dots, p^4 \times \dots) = p$$

۹۵ از $(a, 9) = 3$ می‌توان نتیجه گرفت که a دقیقاً یک عامل ۳ دارد. هم‌چنین از $(a, 2^3 \times 5) = 2^2$ می‌توان نتیجه گرفت که a دارای 2^2 است. در ضمن عامل ۵ نیز ندارد، چون نتوانسته با ۴۰ فاکتور ۵ تولید کند. از آن جایی که $2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$ ، پس $(a, 360) = 12$.

۳ ۹۶



با توجه به تعریف ب.م.م دو عدد صحیح می‌توان نتیجه گرفت که:

$$(ka, kb) = |k|(a, b) \quad \text{و} \quad (a, b) = (-a, b) = (a, -b) = (-a, -b)$$

از رابطه $a \mid b$ نتیجه می‌گیریم $b = aq$ است. پس:

$$(32a^2, 24ab) = (32a^2, 24a(aq)) = \lambda a^2 (4, 3q)$$

حال با توجه به مقادیر مختلف q ، عدد ۴ فقط می‌تواند فاکتور ۱ یا ۲ یا ۴ بدهد، پس:

$$\lambda a^2 (4, 3q) = \begin{cases} \lambda a^2 \times 1 = \lambda a^2 \\ \lambda a^2 \times 2 = 16a^2 \\ \lambda a^2 \times 4 = 32a^2 \end{cases}$$

۹۷ از رابطه $(b^2, c) \mid a$ می‌توان نتیجه گرفت که $a \mid c$ (چاق، چاق‌تر شده). حال داریم:

$$\begin{cases} a \mid \Delta c + 17 \\ a \mid c \end{cases} \implies a \mid (\Delta c + 17) - \Delta c \implies a \mid 17 \implies a = 1 \text{ یا } a = 17$$



اگر $a \mid b$ و $b \neq 0$ ، آن‌گاه $|a| \leq |b|$.

نتیجه (۱) اگر $a \mid b$ و $|a| > |b|$ ، آن‌گاه $b = 0$ است.

نتیجه (۲) اگر $a \mid b$ و $b \mid a$ ، آن‌گاه $a = \pm b$.

صورت سؤال به زبان ریاضی می‌شود: $ab \mid a + b$ ، بنابراین داریم:

$$ab \mid a + b \implies \begin{cases} a \mid a + b \implies a \mid b \\ b \mid a + b \implies b \mid a \end{cases} \implies a = \pm b \implies |a| = |b|$$

۸۶ می‌دانیم $(a + b)^3 - 3ab(a + b) = a^3 + b^3$ می‌باشد، پس

گزینه (۲) به صورت $a + b \mid a^3 + b^3$ می‌شود که چون توان عددی فرد است، پس همواره برقرار می‌باشد.

۸۷ می‌دانیم $1 + 2^6 = 65$ است، پس:

$$65 \mid 2^n + 1 \implies 2^6 + 1 \mid 2^n + 1 \implies (2^6)^{\frac{n}{6}} + 1 \mid 2^n + 1$$

می‌دانیم رابطه فوق زمانی برقرار است که $\frac{n}{6}$ عددی طبیعی و فرد باشد. پس:

$$\frac{n}{6} = 2k + 1 \implies n = 6(2k + 1)$$

در گزینه‌ها فقط ۳۰ مضرب فرد ۶ می‌باشد.

۸۸ ابتدا $3^{12} - 2^{12}$ را به فرم $a^n - b^n$ می‌نویسیم:

$$3^{36} - 2^{12} = (3^3)^{12} - 2^{12} = 27^{12} - 2^{12}$$

چون ۱۲ عددی زوج است، داریم:

$$27 - 2 \mid 27^{12} - 2^{12} \implies 25 \mid 27^{12} - 2^{12}$$

$$27 + 2 \mid 27^{12} - 2^{12} \implies 29 \mid 27^{12} - 2^{12}$$

واضح است که $27^{12} - 2^{12} = 27^{12} - 2^{12}$ بر ۱۵ بخش پذیر نیست، زیرا بر ۳ بخش پذیر نمی‌باشد.

۸۹ ابتدا ۹۱ را به فرم $3^{\circ} + 4^{\circ}$ می‌نویسیم و داریم:

$$91 = 3^3 + 4^3 \implies 3^3 + 4^3 \mid 3^n - 4^n \implies 3^3 + 4^3 \mid (3^3)^{\frac{n}{3}} - (4^3)^{\frac{n}{3}}$$

برای برقراری رابطه فوق باید $\frac{n}{3}$ عدد طبیعی و زوج باشد، پس:

$$\frac{n}{3} = 2k \implies n = 6k$$

حال تعداد اعداد دورقمی n را می‌خواهیم، پس:

$$10 \leq n \leq 99 \implies 10 \leq 6k \leq 99$$

$$\implies 1/... \leq k \leq 16/... \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} 2 \leq k \leq 16 \implies \text{تعدادها} = 15$$

۹۰ باید سمت لاغر را به صورت $3^{\circ} \pm 2^{\circ}$ بنویسیم. واضح است که

۷ را نمی‌توان به این فرم نوشت اما $3^2 + 2^3$ برابر ۳۵ می‌شود که اگر $3^n - 2^n$ بر ۳۵ بخش پذیر باشد بر ۷ نیز بخش پذیر است. پس:

$$3^3 + 2^3 \mid 3^n - 2^n \implies 3^3 + 2^3 \mid (3^3)^{\frac{n}{3}} - (2^3)^{\frac{n}{3}}$$

برای آن‌که رابطه فوق برقرار باشد باید $\frac{n}{3}$ عددی طبیعی و زوج باشد. پس

$$10 \leq n \leq 99 \implies 10 \leq 6k \leq 99$$

$n = 6k$ خواهد بود و داریم:

$$\implies 1/... \leq k \leq 16/... \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} 2 \leq k \leq 16 \implies \text{تعدادها} = 15$$

۹۸ ۲

طبق تعریف ب.م.م دو عدد صحیح می توان گفت $(a, b) | a$ و $(a, b) | b$. حال داریم:

$$\begin{cases} a | (a, b) \\ (a, b) | b \end{cases} \xrightarrow{\text{تعدی}} a | b$$

۹۹ ۱

فرض می کنیم $d = (n+7, n^2+9n+21)$ باشد. پس:

$$d | n+7, d | n^2+9n+21$$

از قسمت بخش پذیری به یاد داریم که اگر $d | f(x)$ و $d | x-a$ ، آن گاه $d | f(a)$. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} d | n+7 \\ d | n^2+9n+21 \end{cases} \Rightarrow d | (-7)^2+9(-7)+21 \Rightarrow d | 7 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 7$$

در صورت مسأله بیان شده که n مضرب ۷ نیست، پس $n+7$ هم مضرب ۷ نیست. بنابراین ب.م.م (بزرگترین فاکتور) $n+7$ با هیچ عددی نمی تواند ۷ باشد و فقط $d=1$ قابل قبول است.

۱۰۰ ۲

فرض می کنیم $d = (n+4, 9n-5)$ باشد. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} d | n+4 \\ d | 9n-5 \end{cases} \Rightarrow d | 9(-4)-5 \Rightarrow d | -41 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 41$$

با توجه به این که در صورت سؤال گفته شده مقسوم علیه مشترک غیر از یک است، پس $d=41$ می باشد. حال اعداد دورقمی n را می خواهیم. زمانی ب.م.م $n+4$ و $9n-5$ برابر ۴۱ می شود که تک تک آن ها مضرب ۴۱ باشند. کافی است یکی از آن ها را برابر $41k$ قرار دهیم:

$$n+4 = 41k \Rightarrow n = 41k - 4 \xrightarrow{\text{دو رقمی}} k = 1, 2 \Rightarrow \text{عدد دو رقمی}$$

۱۰۱ ۱

اگر فرض کنیم $d = (11n+2, 7n+5)$ باشد، آن گاه:

$$\begin{cases} d | 11n+2 \\ d | 7n+5 \end{cases} \Rightarrow d | 7(11n+2) - 11(7n+5)$$

$$\Rightarrow d | 14 - 55 \Rightarrow d | -41 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 41$$

با توجه به تعریف ب.م.م می توان گفت که مقسوم علیه های مشترک دو عدد، شمارنده ب.م.م دو عدد هستند، بنابراین ۳ نمی تواند مقسوم علیه مشترک دو عدد باشد.

۱۰۲ ۴

روش اول: ابتدا ۱۰۸ را تجزیه می کنیم و داریم:

$$(5p^3, 10^8) = (5p^3, 2^2 \times 3^3)$$

چون p یک عدد اول دورقمی است، پس حتماً ۲ و ۳ نیست، بنابراین $5p^3$ و $2^2 \times 3^3$ هیچ عامل مشترکی غیر از یک ندارند. پس:

$$(5p^3, 10^8) = (5p^3, 2^2 \times 3^3) = 1$$

روش دوم: p را یک عدد اول دورقمی مثلاً ۱۱ در نظر می گیریم:

$$p = 11 \Rightarrow (5p^3, 10^8) = (5 \times 11^3, 2^2 \times 3^3) = 1$$

۱۰۳ ۱

چون $2^6 = 64$ و $3^4 = 81$ و $5^3 = 125$ ، پس عدد ۴۹ را انتخاب می کنیم که نه عامل ۲ دارد و نه ۳ و نه ۵.

۱۰۴ ۳

چون در بین اعداد داده شده $3k+2$ و $3k+1$ متوالی اند، پس نسبت به هم اولند و لذا ب.م.م همه اعداد ۱ است.

روش اول: به کمک ویژگی $(ka, kb) = |k|(a, b)$ ، داریم:

$$(a, 4) = 2 \Rightarrow 2 \left(\frac{a}{2}, 2 \right) = 2 \Rightarrow \left(\frac{a}{2}, 2 \right) = 1 \Rightarrow \frac{a}{2} = 2k+1$$

$$\Rightarrow a = 4k+2$$

$$(b, 4) = 2 \Rightarrow 2 \left(\frac{b}{2}, 2 \right) = 2 \Rightarrow \left(\frac{b}{2}, 2 \right) = 1 \Rightarrow \frac{b}{2} = 2k'+1$$

$$\Rightarrow b = 4k'+2$$

چون $(a, 4) = 2$ و $(b, 4) = 2$ می باشند، پس a و b حتماً بر ۲ بخش پذیرند، لذا مطمئناً $\frac{a}{2}$ و $\frac{b}{2}$ اعداد صحیح هستند. حال داریم:

$$(a+b, 4) = (4k+2+4k'+2, 4) = (4k+4k'+4, 4)$$

$$= 4(k+k'+1, 1) = 4 \times 1 = 4$$

روش دوم: کافی است فرض کنیم $a=2$ و $b=2$ باشند، پس:

$$(a+b, 4) = (2+2, 4) = (4, 4) = 4$$

اگر a^2+3a+3 را به صورت $a^2+3a+2+1$ در نظر بگیریم،

$$(a+1)(a+2)$$

می توان گفت:

$$(a^2+3a+3, 8) = ((a+1)(a+2)+1, 8) = (2k+1, 8) = 1$$

ضرب دو عدد متوالی
مضرب ۲! است.

اگر فرض کنیم $d = (5n+9, 4n+7)$ باشد، آن گاه:

$$\begin{cases} d | 5n+9 \\ d | 4n+7 \end{cases} \Rightarrow d | 4(5n+9) - 5(4n+7) \Rightarrow d | 1 \Rightarrow d = 1$$

بنابراین این دو عدد به ازای هر $n \in \mathbb{Z}$ ، نسبت به هم اول اند و در نتیجه این مسأله به ازای $1 \leq n \leq 50$ جواب دارد.

اگر فرض کنیم $d = (11n+4, 25n+9)$ باشد، آن گاه:

$$d = (11n+4, 25n+9) \Rightarrow \begin{cases} d | 11n+4 \\ d | 25n+9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d | 25(11n+4) - 11(25n+9) \Rightarrow d | 1 \Rightarrow d = 1$$

پس دو عدد فوق، به ازای همه اعداد طبیعی n (از جمله دورقمی ها) نسبت به هم اولند و تعداد اعداد دورقمی برابر $90 - 9 = 81$ است.

اگر فرض کنیم $d = (5n-2, 12n+7)$ باشد، آن گاه:

$$\begin{cases} d | 5n-2 \\ d | 12n+7 \end{cases} \Rightarrow d | 12 \times (5n-2) + (-5) \times (12n+7)$$

$$\Rightarrow d | -59 \Rightarrow d | 59 \Rightarrow d = 59 \text{ یا } d = 1$$

با توجه به این که $5n-2$ و $12n+7$ ، نسبت به هم اول نیستند، بنابراین ب.م.م آن ها باید ۵۹ باشد.

روش اول: از رابطه $a | b$ می توان گفت $a = bq$ و در ضمن چون

a عددی فرد است، پس b و q نیز اعدادی فرد هستند.

$$(60ab, 24b^2) = (60 \times bq \times b, 24b^2) = 12b^2(5q, 2)$$

$$60b^2q$$

فرد

$$= 12b^2 \times 1 = 12b^2$$

روش دوم: این تست را از راه عددگذاری هم می توان حل کرد. مثلاً $a=3$ و $b=1$

در نتیجه $(180, 24) = 12$ و در گزینه ها $12b^2$ به ازای $b=1$ برابر ۱۲ است.



توجه وجود قدرمطلق به خاطر این است که ب.م.م دو عدد، یک عدد طبیعی است. با گذاشتن قدرمطلق از طبیعی بودن ب.م.م مطمئن می‌شویم. با توجه به ویژگی‌های بخش پذیری می‌توان گفت:

$$ac | b \xrightarrow{\text{لاغر، لاغرتتر}} \begin{cases} a | b \\ c | b \end{cases}$$

حال با توجه به نیم‌نگاه گفته شده داریم:

$$a | b \Rightarrow (a, b) = a \quad , \quad c | b \Rightarrow (c, b) = c$$

دقت کنید که چون در صورت سؤال گفته شده a, b و c اعداد طبیعی‌اند، پس برای a و c قدرمطلق نگذاشتیم.

با توجه به گزینه‌ها و ویژگی‌های بخش پذیری، داریم:

$$1) a^3 | b \xrightarrow{\text{لاغر، لاغرتتر}} a | b \Rightarrow (a, b) = a \Rightarrow \checkmark$$

$$2) a^3 | b \xrightarrow{\text{لاغر، لاغرتتر}} a | b \xrightarrow{\text{چاق، چاق‌تر}} a | 3b \Rightarrow (a, 3b) = a \Rightarrow \checkmark$$

$$3) a^3 | b \Rightarrow (a^3, b) = a^3 \Rightarrow \checkmark$$

دقت کنید اگر $(3a, b) = 3 | a$ ، یعنی $3a | b$ که چنین نتیجه‌ای نادرست است، زیرا لاغر، چاق شده است. نگاه کنید:

$$a^3 | b \xrightarrow{\text{لاغر، لاغرتتر}} a | b \xrightarrow{\text{لاغر، چاق‌شده}} 3a | b$$

با توجه به تعریف ب.م.م دو عدد صحیح می‌دانیم $(a, b) | a$ ، بنابراین داریم:

$$(a, b) | a \xrightarrow{\text{چاق، چاق‌تر}} (a, b) | 3a \Rightarrow (3a, (a, b)) = (a, b)$$

با توجه به این‌که کوچک‌ترین عضو A را می‌خواهیم، در واقع دنبال کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد 24 و 28 هستیم، پس:

$$\min(A) = [24, 28] = [3^2 \times 3^1, 2^2 \times 7^1] = 2^2 \times 3^2 \times 7^1 = 168$$

۴ ۱۲۰



با توجه به تعریف ب.م.م دو عدد صحیح می‌توان گفت:

$$a | b \Leftrightarrow [a, b] = |b|$$

می‌دانیم $a^2 | a^3$ ، پس $(a^2, a^3) = a^2$ است. حال داریم:

$$[(a^2, a^3), (a, b^4)] = [a^2, (a, b^4)]$$

از طرفی می‌دانیم $a | a^2$ ، پس $(a, b^4) | a^2$ و این یعنی $[a^2, (a, b^4)] = a^2$ می‌باشد. دقت کنید ب.م.م گرفتن a با b^4 باعث لاغر شدن a شده است.

چون گفته شده a^n بر b^n بخش پذیر است، یعنی $b^n | a^n$.

حال داریم:

$$b^n | a^n \xrightarrow{\text{با هم لاغر}} b | a \Rightarrow [a, b] = |a| \Rightarrow (4)$$

$$b | a \Rightarrow b | a^2 \Rightarrow [b, a^2] = a^2 \Rightarrow (2)$$

$$b | a \Rightarrow (a, b) = |b| \Rightarrow (3)$$

در مورد گزینه (۱) دقت کنید که اگر $(a, b^2) = b^2$ باشد، یعنی $b^2 | a$ ، اما:

$$b | a \xrightarrow{\text{لاغر، چاق‌شده}} b^2 | a$$

۲ ۱۱۱



با توجه به این‌که اگر $(a, b) = d$ باشد، می‌توان گفت d بزرگ‌ترین عددی است که می‌توان از a و b فاکتور گرفت، پس می‌توان گفت که اگر عددی دو عدد صحیح را عاد کند، حتماً ب.م.م دو عدد را نیز عاد می‌کند، و بالعکس. یعنی اگر عددی ب.م.م دو عدد را عاد کند، آن‌گاه هر کدام از دو عدد را نیز عاد می‌کند.

$$m | a, m | b \Leftrightarrow m | (a, b)$$

توجه مقسوم‌علیه‌های مشترک دو عدد، مقسوم‌علیه‌های ب.م.م دو عدد هستند.

فرض می‌کنیم $d = (2a + 3b, a + 4b)$ باشد، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} d | 2a + 3b \\ d | a + 4b \end{cases} \Rightarrow d | (2a + 3b) - 2(a + 4b) \Rightarrow d | -5b \quad (*)$$

$$\begin{cases} d | 2a + 3b \\ d | a + 4b \end{cases} \Rightarrow d | 4(2a + 3b) - 3(a + 4b) \Rightarrow d | 5a \quad (**)$$

علامت در ب.م.م تأثیری ندارد.

$$\xrightarrow{(**)(*)} d | (5a, -5b) \Rightarrow d | 5(a, -b) \Rightarrow d | 5 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 5$$

می‌دانیم وقتی عددی دو عدد را عاد می‌کند، حتماً ب.م.م دو

عدد را نیز عاد می‌کند. پس:

$$a | b, a | c \Rightarrow a | (b, c)$$

بنابراین چون $a | c$ ، پس $(a, c) = a$ و چون $a | (b, c)$ پس داریم:

$$((a, c), (b, c)) = (a, (b, c)) = a$$

مقسوم‌علیه‌های مشترک دو عدد، مقسوم‌علیه‌های ب.م.م دو عدد

نیز هستند. پس کافی است مقسوم‌علیه‌های 20 را پیدا کنیم که اعداد $1, 2, 4, 5, 10, 20$ می‌باشند و تعداد آن‌ها برابر 6 تا است.

۱ ۱۱۴



با توجه به روابط $(a, b) | a$ و $(a, b) | b$ می‌توان نتیجه گرفت ب.م.م دو عدد لاغرتتر از خود اعداد است. پس گرفتن ب.م.م از یک عدد باعث لاغر شدن و بازکردن ب.م.م باعث چاق شدن می‌شود.

$$a | b \xrightarrow{\text{لاغر، لاغرتتر}} (a, b) | b \quad \text{و} \quad a | (b, c) \xrightarrow{\text{چاق، چاق‌تر}} a | b, a | c$$

در گزینه (۱) لاغر، لاغرتتر شده است، بنابراین گزینه (۱) درست است. حال برای تمرین بیشتر، سایر گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم. در گزینه (۲) چاق، لاغر شده و در گزینه (۳) لاغر، چاق شده است، پس هر دو نادرست هستند. گزینه (۴) هم با یک مثال نقض رد می‌شود. مثلاً:

با توجه به این‌که ب.م.م دو عدد از دو عدد چاق‌تر است، داریم:

$$a | bc \xrightarrow{\text{چاق، چاق‌تر}} a | [b, bc]$$

۳ ۱۱۶



با توجه به تعریف بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد، می‌توان گفت:

$$a | b \Leftrightarrow (a, b) = |a|$$

$$\Rightarrow 25 = \frac{\Delta b}{\gamma} \Rightarrow \Delta b = 7 \times 25 \Rightarrow b = 35$$

حال به ازای $b = 35$ مقدار مقسوم یعنی a را به دست می آوریم:

$$a = \Delta b + 17 \xrightarrow{b=35} a = 5 \times 35 + 17 \Rightarrow a = 192$$

فرض می کنیم عدد طبیعی مورد نظر a باشد، پس داریم:

$$a = 5q + \frac{5}{6}q, \quad 0 \leq \frac{5}{6}q < 50$$

اگر به کمک شرط تقسیم، تعداد q ها را پیدا کنیم، تعداد a ها معلوم می شود. پس:

$$0 \leq \frac{5}{6}q < 50 \Rightarrow 0 \leq q < 60 \Rightarrow q = 6, 12, 18, \dots, 54 \Rightarrow 9 \text{ مقدار}$$

توجه کنید که باقی مانده عددی صحیح است، پس برای آن که $\frac{5}{6}q$ عددی صحیح شود باید q مضرب ۶ باشد. حواستان هم هست می خواهیم a عدد طبیعی باشد، پس $q = 0$ قابل قبول نیست.

ابتدا صورت مسئله را به زبان ریاضی می نویسیم:

$$a = 37q + \underbrace{q^2 - 2}_r$$

از آن جایی که بزرگترین مقدار a را می خواهیم، پس باید بزرگترین مقدار q را پیدا کنیم. برای این کار باید از شرط تقسیم که $0 \leq r < b$ است استفاده کنیم، یعنی:

$$0 \leq r < b \Rightarrow 0 \leq q^2 - 2 < 37 \Rightarrow 2 \leq q^2 < 39$$

$$\Rightarrow 1700 \leq q < 6100 \Rightarrow 2 \leq q \leq 6$$

حالا بزرگترین مقدار q یعنی $q = 6$ را در رابطه $a = 37q + q^2 - 2$ قرار می دهیم:

$$\text{Max}(a) = 37(6) + 36 - 2 \Rightarrow \text{Max}(a) = 256 = 16k$$

ابتدا تقسیم را به زبان ریاضی می نویسیم:

$$a = 35q + \frac{1}{4}q^2, \quad 0 \leq \frac{1}{4}q^2 < 35$$

حال برای آن که ببینیم برای a چند جواب طبیعی وجود دارد، باید ببینیم q چند مقدار طبیعی می پذیرد. پس سراغ شرط تقسیم می رویم:

$$0 \leq \frac{1}{4}q^2 < 35 \Rightarrow 0 \leq q^2 < 140 \Rightarrow q = 1, 2, 3, 4$$

از آن جایی که باقی مانده یعنی $\frac{1}{4}q^2$ باید عددی صحیح باشد، پس q باید عددی زوج باشد، یعنی q فقط می تواند ۲ و ۴ را بپذیرد. چون دو مقدار برای q وجود دارد، پس دو جواب برای a وجود دارد. حتماً حواستان بود که چون a یک عدد طبیعی است ما $q = 0$ را کنار گذاشتیم.

ابتدا تقسیم مورد نظر را به زبان ریاضی می نویسیم:

$$a = bq + \frac{1}{9}b^2, \quad 0 \leq \frac{1}{9}b^2 < b$$

واضح است که از شرط تقسیم به راحتی می توانیم تعداد b ها را پیدا کنیم:

$$0 \leq \frac{1}{9}b^2 < b \xrightarrow{\frac{1}{9}b^2 \geq 0} \frac{1}{9}b^2 < b \Rightarrow b^2 - 9b < 0$$

$$\Rightarrow b(b-9) < 0 \Rightarrow 0 < b < 9$$

اما تمام b های به دست آمده، باقی مانده را عددی صحیح نمی کنند. برای آن که

$$b = 6 \text{ و } b = 3 \text{ باشد، پس فقط } b = 3 \text{ و } b = 6$$

قابل قبول هستند. بنابراین دو جواب طبیعی برای b وجود دارد.

می دانیم $[a^x, a^x] = a^x$ است، زیرا $a^x | a^x$. پس داریم:

$$([a^x, a^x], [a^5, b^x]) = (|a^x|, [a^5, b^x])$$

از طرفی واضح است که $[a^5, b^x] | a^x$ ، زیرا $a^x | a^5$ و سمت چاق با ک.م.م گیری چاق تر نیز شده است. پس:

$$(|a^x|, [a^5, b^x]) = |a^x|$$

به جای $[a, b]$ می توان a یا b را قرار داد، چون $[a, b]$ در سمت لاغر است و می توانیم لاغر را لاغرتر کنیم. از طرفی به جای (c, d) می توانیم c یا d یا $[c, d]$ یا cd را قرار دهیم، چون در سمت چاق است و چاق را می توان چاق تر کرد.

بررسی گزینه ها

$$1) [a, b] | (c, d) \xrightarrow{\text{لاغر، لاغرتر}} a | (c, d) \xrightarrow{\text{چاق، چاق تر}} a | [c, d] \checkmark$$

$$2) \begin{cases} [a, b] | (c, d) \xrightarrow{\text{لاغر، لاغرتر}} a | c \Rightarrow (a, c) = a \\ [a, b] | (c, d) \xrightarrow{\text{چاق، چاق تر}} a | [c, d] \end{cases}$$

$$\Rightarrow [(a, c), (c, d)] = [a, (c, d)] = (c, d) \checkmark$$

$$3) [a, b] | (c, d) \xrightarrow{\text{لاغر، لاغرتر}} a | d \Rightarrow (a, d) = a$$

$$\xrightarrow{a|c} [(a, d), c] = [a, c] = c \Rightarrow \times$$

$$4) [a, b] | (c, d) \xrightarrow{\text{چاق، چاق تر}} [a, b] | [c, d]$$

$$\Rightarrow [(c, d), [a, b]] = [a, b] \checkmark$$

همان طور که گفتیم، ب.م.م گرفتن باعث لاغر شدن و ک.م.م

گرفتن باعث چاق شدن می شود.

بررسی گزینه ها

$$1) a | (b, c) \xrightarrow{\text{لاغر، لاغرتر}} (a, b) | c \checkmark$$

$$2) a | (b, c) \xrightarrow{\text{لاغر، لاغرتر}} (a, b) | [b, c] \checkmark$$

$$3) a | (b, c) \xrightarrow{\text{چاق، چاق تر}} a | b \xrightarrow{\frac{[a,b]=|b|}{|b| | [b,c]}} \frac{[a,b]}{|b|} | [b, c] \checkmark$$

$$4) a | (b, c) \xrightarrow{\text{چاق، چاق تر}} a | b \xrightarrow{\frac{[a,b]=|b|}{[a,b]c}} |b| | c \times$$

دلیلی برای درست بودن نتیجه به دست آمده وجود ندارد. البته می توانیم از مثال نقض $a = 3, b = 9, c = 6$ برای رد گزینه (۴) استفاده کنیم.

فرض می کنیم تقسیم مورد نظر، $a = bq + r$ باشد. حال تغییرات

را به این تقسیم اعمال می کنیم:

$$a + 90 = (b + 4)q + r - 2 \xrightarrow{a=bq+r} bq + r + 90 = bq + 4q + r - 2$$

$$\Rightarrow 4q = 92 \Rightarrow q = 23$$

تقسیم مادر ابتدا به صورت $a = b \times 5 + 17$ است. حالا تغییرات

را به این تقسیم اعمال می کنیم:

$$a - 2 = (b - 2) \times 5 + \frac{\Delta b}{\gamma} \xrightarrow{a=5b+17} 5b + 17 - 2 = 5b - 10 + \frac{\Delta b}{\gamma}$$



حال چون بزرگ‌ترین مقدار a را می‌خواهیم، باید بزرگ‌ترین مقدار b و بزرگ‌ترین مقدار q را در یکی از تقسیم‌ها جای‌گذاری کنیم:

$$a = (b-5)(q+7) \xrightarrow[b_{\text{Max}=29}]{q_{\text{Max}=28}} a_{\text{Max}} = (29-5)(28+7) = 840$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 8 + 4 + 0 = 12$$

ابتدا تقسیم را به زبان ریاضی می‌نویسیم و داریم:

$$a = bq + 25, 25 < b \xrightarrow{b=a-122} b + 122 = bq + 25 \Rightarrow 107 = b(q-1)$$

$$\Rightarrow b(q-1) = 1 \times 107 \xrightarrow{b > 25} b = 107, q-1=1 \Rightarrow b=107, q=2$$

بنابراین یک جواب طبیعی برای q وجود دارد.

ابتدا تقسیم را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$165 = br^2 + r, 0 \leq r < b \Rightarrow 165 = r(br+1), 0 \leq r < b$$

با توجه به این‌که $165 = 3 \times 5 \times 11$ می‌باشد، داریم:

$$r(br+1) = 1 \times 165 = 3 \times 55 = 5 \times 33 = 11 \times 15$$

از آن‌جایی‌که $r \geq 0$ و $r < b$ است، پس می‌توان نتیجه گرفت که $r < b+1$ می‌باشد.

لذا فقط حالت‌های زیر ممکن است اتفاق بیفتد. تک‌تک حالت‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$r=1, br+1=165 \Rightarrow b+1=165 \Rightarrow b=164 \quad \checkmark$$

$$r=3, br+1=55 \Rightarrow 3b+1=55 \Rightarrow b=18 \quad \checkmark$$

$$r=5, br+1=33 \Rightarrow 5b+1=33 \quad \times$$

$$r=11, br+1=15 \Rightarrow 11b+1=15 \quad \times$$

بنابراین دو عدد برای b پیدا می‌شود که $b=164$ و $b=18$ می‌باشند.

ابتدا تقسیم را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

همواره برقرار است.

$$105 = bq + q^2, 0 \leq q^2 < b \Rightarrow 105 = q(b+q), q^2 < b$$

از آن‌جایی‌که $105 = 3 \times 5 \times 7$ است، پس حالات زیر داریم:

$$q(b+q) = 1 \times 105 = 3 \times 35 = 5 \times 21 = 7 \times 15$$

حال تک‌تک حالت‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$q=1, b+q=105 \Rightarrow b+1=105 \Rightarrow b=104 \quad \checkmark$$

$$q=3, b+q=35 \Rightarrow b+3=35 \Rightarrow b=32 \quad \checkmark$$

$$q=5, b+q=21 \Rightarrow b+5=21 \Rightarrow b=16 \quad \times (q^2 \leq b)$$

واضح است که هرچه q بزرگ‌تر شود، $b+q$ و در نتیجه b کوچک‌تر می‌شود و دیگر شرط $q^2 < b$ برقرار نیست. پس دو مقدار برای عدد طبیعی b یافت می‌شود.

ابتدا تقسیم را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$102 = b(3r) + r, 0 \leq r < b \Rightarrow 102 = r(3b+1), 0 \leq r < b$$

از آن‌جایی‌که $102 = 2 \times 3 \times 17$ است، پس حالات زیر را داریم:

$$r=1, 3b+1=102 \Rightarrow b = \frac{101}{3} \quad \times$$

$$r=2, 3b+1=51 \Rightarrow b = \frac{50}{3} \quad \times$$

$$r=3, 3b+1=34 \Rightarrow b=11 \quad \checkmark$$

$$r=6, 3b+1=17 \Rightarrow b = \frac{16}{3} \quad \times$$

بنابراین فقط یک جواب برای b یافت می‌شود.

ابتدا تقسیم مورد نظر را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$b + 200 = bq + 15, 15 < b$$

حال داریم:

$$bq - b = 185 \Rightarrow b(q-1) = 1 \times 185 = 5 \times 37$$

بنابراین برای b و $q-1$ دو حالت رخ می‌دهد:

$$\begin{cases} b = 185 \\ q-1 = 1 \Rightarrow q = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 37 \\ q-1 = 5 \Rightarrow q = 6 \end{cases}$$

توجه کنید که با توجه به شرط تقسیم $b > 15$ است. پس حالتی که $b=1$ و $b=5$ باشد قابل قبول نیست.

ابتدا تقسیم را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$542 = b \times 12 + r, 0 \leq r < b$$

حال از تساوی $542 = 12b + r$ ، مقدار r در نامساوی $0 \leq r < b$ قرار

می‌دهیم تا مقادیر ممکن برای b معلوم شود:

$$0 \leq r < b \Rightarrow 0 \leq 542 - 12b < b \Rightarrow \begin{cases} 12b \leq 542 \Rightarrow b \leq 45/100 \\ 12b > 542 \Rightarrow b > 45/100 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b = 42, 43, 44, 45$$

ابتدا تقسیم را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$312 = b \times 11 + r, 0 \leq r < b$$

حال برای آن‌که کوچک‌ترین مقدار r را به دست آوریم، با توجه به تساوی

$r = 312 - 11b$ ، کافی است بزرگ‌ترین مقدار b مشخص شود، پس:

$$0 \leq r < b \Rightarrow 0 \leq 312 - 11b < b \Rightarrow \begin{cases} 312 \geq 11b \Rightarrow b \leq 28/100 \\ 312 < 12b \Rightarrow b > 26 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b = 27, 28$$

بنابراین کوچک‌ترین مقدار باقی‌مانده برابر است با:

$$r = 312 - 11(28) = 4$$

ابتدا صورت مسئله را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$\begin{cases} a = bq + q \\ a = (b-3)(q+5) + 0 \end{cases} \Rightarrow bq + q = bq + 5b - 3q - 15$$

$$\Rightarrow 4q = 5b - 15 \Rightarrow 4q = 5(b-3) \Rightarrow q = 5k \Rightarrow (3)$$

مضرب 5 است

دقت کنید که $q = 5k$ به این معنی نیست که q می‌تواند 15 و 20... هم باشد، زیرا:

$$4q = 5(b-3) \Rightarrow \begin{cases} q = 5k \\ b-3 = 4k \end{cases}$$

$$\xrightarrow{r < b} 5k < 4k + 3 \Rightarrow k < 3 \Rightarrow k = 1, 2 \Rightarrow q = 5, 10$$

ابتدا صورت مسئله را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$\begin{cases} a = bq + q \\ a = (b-5)(q+7) \end{cases} \Rightarrow bq + q = bq + 7b - 5q - 35$$

$$\Rightarrow 6q = 7(b-5) \Rightarrow \begin{cases} q = 7k \\ b-5 = 6k \end{cases}$$

در تقسیم $a = bq + q$ شرط تقسیم به صورت $q < b$ است، پس:

$$q < b \Rightarrow 7k < 6k + 5 \Rightarrow k < 5 \Rightarrow k = 1, 2, 3, 4$$

روش دوم: در تقسیم $a = 37q + 13$ ، به q مقدار صفر می‌دهیم، پس a می‌شود ۱۳. یعنی در تقسیم ۱۳ بر ۳۷ خارج‌قسمت صفر و باقی‌مانده برابر ۱۳ است. حال ۳۰ واحد به ۱۳ اضافه می‌کنیم و خارج‌قسمت و باقی‌مانده تقسیم ۴۳ بر ۳۷ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{43}{37} \begin{array}{r} 1 \\ -37 \\ \hline 6 \end{array} \Rightarrow q=1, r=6$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید به خارج‌قسمت یک واحد اضافه شده و از باقی‌مانده ۷ واحد کم می‌شود.

۱۴۵ ۴ تقسیم مورد نظر به صورت $a = 17b + 40$ است که در آن $40 < b$ می‌باشد. حال فرض می‌کنیم حداقل x واحد باید به مقسوم اضافه کنیم. پس داریم:

$$a + x = (b + 7) \times 17 + 40 - 7 \times 17 + x$$

بنابراین باقی‌مانده تقسیم جدید، $40 - 7 \times 17 + x$ می‌باشد، پس باید در شرط تقسیم صدق کند:

$$0 \leq 40 - 7 \times 17 + x < b + 7 \Rightarrow 0 \leq x - 79 < b + 7 \Rightarrow x \geq 79 \Rightarrow x_{\min} = 79$$

۱۴۶ ۳ در تقسیم $a = bq + r$ گفته شده $a = 15k$ و $b = 21k'$ می‌باشند، پس:

$$15k = 21k'q + r \Rightarrow r = 15k - 21k'q \Rightarrow r = 3(\underbrace{5k - 7k'q}_{q'}) \Rightarrow r = 3q'$$

در بین گزینه‌ها فقط ۲۷ مضرب ۳ است.

نکته: اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، باقی‌مانده تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است.

۱۴۷ ۳ روش اول: چون در این تقسیم صحبت از خارج‌قسمت نشده، پس بهتر است از هم‌نهستی استفاده کنیم اما به کمک قضیه تقسیم، روش حل این‌گونه است. تقسیم داده‌شده به صورت $a = 17q + 9$ می‌باشد. فرض می‌کنیم حداقل x واحد باید به مقسوم اضافه کرد تا باقی‌مانده برابر ۳ شود، پس:

$$a = 17q + 9 \Rightarrow a + x = 17q + 9 + x$$

حال $9 + x$ باید برابر ۳ شود. x که منفی نیست، پس $9 + x$ باید آن‌قدر زیاد شود که بتوانیم یک ۱۷ از آن خارج کنیم و به خارج‌قسمت بدهیم، یعنی:

$$a + x = 17q + \underbrace{9 + x}_{17+3} \Rightarrow a + x = 17(q+1) + 3$$

بنابراین $9 + x = 20$ است، پس $x = 11$ می‌باشد.

روش دوم: این روش را بعد از فراگیری هم‌نهستی بررسی کنید:

$$a \equiv 9 \pmod{17} \Rightarrow a + x \equiv \underbrace{9 + x}_3 \pmod{17} \Rightarrow 9 + x_{\min} = 17 + 3 \Rightarrow x_{\min} = 11$$

۱۴۸ ۲ روش اول: تقسیم داده‌شده به صورت $a = 37q + 13$ است. حال باقی‌مانده تقسیم $3a + 1$ را بر ۳۷ می‌خواهیم. پس:

$$a = 37q + 13 \Rightarrow 3a = 37(3q) + 39 \Rightarrow 3a + 1 = 37(3q) + 40$$

اما ۴۰ نمی‌تواند باقی‌مانده تقسیم عددی بر ۳۷ باشد، پس:

$$3a + 1 = 37(3q) + 37 + 3 \Rightarrow 3a + 1 = 37(\underbrace{3q+1}_{q'}) + 3$$

$$\Rightarrow 3a + 1 = 37q' + 3$$

ابتدا تقسیم را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$a = br + r, 0 \leq r < b$$

از طرفی مجموع عوامل تقسیم برابر ۵۳ است. پس:

$$a + b + r + r = 53 \xrightarrow{a=br+r} br + r + b + r + r = 53 \Rightarrow br + 2r + b = 53$$

$$\Rightarrow r(b+2) + b = 53 \xrightarrow{+3} r(b+2) + b + 3 = 53 + 3$$

$$\Rightarrow (b+2)(r+1) = 56$$

چون $r < b$ است، پس $r+1 < b+2$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$(b+2)(r+1) = 1 \times 56 = 2 \times 28 = 4 \times 14 = 7 \times 8$$

$$r+1=1, b+2=56 \Rightarrow r=0, b=53 \quad \checkmark$$

$$r+1=2, b+2=28 \Rightarrow r=1, b=25 \quad \checkmark$$

$$r+1=4, b+2=14 \Rightarrow r=3, b=11 \quad \checkmark$$

$$r+1=7, b+2=8 \Rightarrow r=6, b=5 \quad \times$$

در هر تقسیم خارج‌قسمت برابر باقی‌مانده است، پس:

$$\begin{cases} a = 23q + q, 0 \leq q < 23 \\ a = 29q' + q', 0 \leq q' < 29 \end{cases} \Rightarrow 23q = 30q'$$

$$\Rightarrow \frac{q}{q'} = \frac{30}{23} = \frac{5}{4} \Rightarrow \begin{cases} q = 5k \\ q' = 4k \end{cases}$$

حال داریم:

$$\begin{cases} q < 23 \Rightarrow 5k < 23 \Rightarrow k_{\max} = 4 \\ q' < 29 \Rightarrow 4k < 29 \Rightarrow k_{\max} = 7 \end{cases} \Rightarrow k_{\max} = 4$$

$$\Rightarrow a_{\max} = 23q_{\max} = 23(5 \times 4) = 460$$

بنابراین رقم یکان برابر صفر است.

۱۴۲ ۲ تقسیم مورد نظر $a = 17b + 53$ است که در آن $53 < b$ می‌باشد. حال فرض می‌کنیم حداکثر x واحد می‌توان به مقسوم‌علیه اضافه کرد.

$$a = 17b + 53 \Rightarrow a = 17(b+x) + 53 - 17x$$

بنابراین داریم:

در تقسیم جدید، باقی‌مانده برابر $53 - 17x$ است و باید در شرط تقسیم صدق کند. پس:

$$0 \leq 53 - 17x < b + x \Rightarrow 53 - 17x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3/00 \Rightarrow x_{\max} = 3$$

۱۴۳ ۳ تقسیم مورد نظر به صورت $a = 35q + 18$ است. حال فرض

می‌کنیم حداکثر x واحد می‌توان به مقسوم اضافه کرد تا خارج‌قسمت ۲ واحد افزایش یابد. پس:

$$a + x = 35(q+2) + 18 + x - 70$$

در تقسیم جدید، باقی‌مانده $18 + x - 70$ است، پس باید در شرط تقسیم صدق کند. یعنی داریم:

$$0 \leq 18 + x - 70 < 35 \Rightarrow 52 \leq x < 87 \Rightarrow x_{\max} = 86$$

دقت کنید اگر سؤال می‌پرسید که حداقل چند واحد می‌توان به مقسوم اضافه کرد، آن‌گاه جواب ۵۲ می‌شد.

۱۴۴ ۴ روش اول: تقسیم مورد نظر به صورت $a = 37q + 13$ می‌باشد.

حال اگر ۳۰ واحد به مقسوم اضافه کنیم، داریم:

$$a + 30 = 37q + 13 + 30 \Rightarrow a + 30 = 37q + 43$$

$$\Rightarrow a + 30 = 37(q+1) + 6$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید به خارج‌قسمت ۱ واحد اضافه شده و از باقی‌مانده ۷ واحد کم می‌شود.



روش دوم: می‌توانیم از راه عددگذاری مسأله را حل کنیم:

$$\begin{cases} a = 13q + 7 \xrightarrow{q=0} a = 7 \\ b = 13q' + 10 \xrightarrow{q'=0} b = 10 \end{cases} \Rightarrow 2a + 3b = 14 + 30 = 44$$

$$\Rightarrow -\frac{44}{5} \frac{13}{3}$$

روش سوم: به کمک رابطه هم‌نهستی داریم:

$$\begin{cases} a \equiv 7 \Rightarrow 2a \equiv 14 \equiv 1 \\ b \equiv 10 \Rightarrow 3b \equiv 30 \equiv 4 \end{cases} \Rightarrow 2a + 3b \equiv 1 + 4 \Rightarrow 2a + 3b \equiv 5$$

روش اول: فرض می‌کنیم $a = 7q + 3$ و $a = 13q' + 5$ باشد.

$$\begin{cases} a = 7q + 3 \xrightarrow{\times 8} 8a = 56q + 24 \\ a = 13q' + 5 \xrightarrow{\times 7} 7a = 91q' + 35 \end{cases} \Rightarrow a = 56(q - q') - 11$$

واضح است که باقی‌مانده تقسیم نمی‌تواند عددی منفی باشد. پس:

$$a = 56(q - q') - 11 + 56 - 56 \Rightarrow a = 56(q - q' - 1) + 45$$

$$\Rightarrow a = 56q'' + 45$$

روش دوم: چون باقی‌مانده در گزینه‌ها داده شده، می‌توان از گزینه‌ها استفاده کرد. در گزینه‌ها عددی مورد قبول است که باقی‌مانده تقسیم آن بر 7 و 8 به ترتیب 3 و 5 باشد. در گزینه‌ها فقط 45 این شرایط را دارد.

روش سوم: چون در تقسیم، صحبت از خارج‌قسمت نشده، پس داریم:

$$\begin{cases} a \equiv 7 \equiv 45 \\ a \equiv 10 \equiv 45 \end{cases} \Rightarrow a \equiv 45 \Rightarrow a \equiv 45$$

روش اول: فرض می‌کنیم $a = 9q + 5$ و $a = 13q' + 6$ باشد، پس:

$$\begin{cases} a = 9q + 5 \xrightarrow{\times 7} 7a = 63q + 35 \\ a = 13q' + 6 \xrightarrow{\times 9} 9a = 117q' + 54 \end{cases} \Rightarrow 2a = 63(q' - q) + 19$$

حال برای آن‌که بتوانیم طرفین را بر 2 تقسیم کنیم، داریم:

$$2a = 63(q' - q) + 19 + 63 - 63 \Rightarrow 2a = 63(q' - q - 1) + 82$$

q'' حتماً زوج است.

بنابراین می‌توان گفت $q'' = 2k$ است، پس:

$$2a = 63(2k) + 82 \xrightarrow{\div 2} a = 63k + 41 \Rightarrow 41 \text{ عددی اول است.}$$

روش دوم: چون در تقسیم، صحبت از خارج قسمت نشده پس به کمک هم‌نهستی مسأله را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} a \equiv 5 \equiv 41 \\ a \equiv 6 \equiv 41 \end{cases} \Rightarrow a \equiv 41 \Rightarrow a \equiv 41 \Rightarrow 41 \text{ عددی اول است.}$$

نتیجه: در یک تقسیم هر اتفاقی که برای مقسوم بیفتد، برای باقی‌مانده هم می‌افتد. مثلاً اگر مقسوم را 3 برابر کنیم، باقی‌مانده هم 3 برابر می‌شود یا اگر مقسوم را به توان 2 برسانیم، باقی‌مانده هم به توان 2 می‌رسد. فقط در آخر باید باقی‌مانده را طوری تعیین کنیم که در شرط تقسیم صدق کند.

روش دوم: تقسیم داده شده به صورت $a = 27q + 13$ است. اگر به مقدار صفر بدهیم، یکی از a ها که 13 است به دست می‌آید، پس:

$$a = 13 \Rightarrow 3a + 1 = 40 \Rightarrow -\frac{37}{3} \frac{1}{1} \Rightarrow r = 3$$

روش سوم: چون در تقسیم، صحبت از خارج قسمت نشده است به کمک هم‌نهستی مسأله را حل می‌کنیم:

$$a \equiv 13 \xrightarrow{\times 2} 2a \equiv 26 \xrightarrow{\times 2} 4a \equiv 52 \Rightarrow 3a + 1 \equiv 2 + 1 \Rightarrow 3a + 1 \equiv 3$$

روش اول: تقسیم مورد نظر $a = 27q + 15$ است. چون a زوج و 15 عددی فرد است، پس $27q$ باید فرد باشد (می‌دانیم «فرد + فرد = زوج»). چون $27q$ فرد است، پس q نیز فرد می‌باشد. بنابراین داریم:

$$a = 27q + 15 \Rightarrow a = 27(2k + 1) + 15 \Rightarrow a = 54k + 42$$

$$\xrightarrow{\div 2} \frac{a}{2} = 27k + 21$$

بنابراین باقی‌مانده تقسیم $\frac{a}{2}$ بر 27، برابر 21 است.

روش دوم: کافی است در تقسیم $a = 27q + 15$ ، به q عددی بدهیم که a زوج شود، مثلاً $q = 1$ حال داریم:

$$a = 27q + 15 \xrightarrow{q=1} a = 42 \Rightarrow \frac{a}{2} = 21 \Rightarrow -\frac{21}{21} \frac{27}{21}$$

روش سوم: چون صحبت از خارج قسمت نشده است به کمک هم‌نهستی مسأله را حل می‌کنیم:

$$a \equiv 15 \xrightarrow{\times 27} 27a \equiv 405 \xrightarrow{\div 27} \frac{a}{27} \equiv 15$$

روش اول: تقسیم را به زبان ریاضی می‌نویسیم و داریم:

$$a = 17q + 4 \Rightarrow a^3 = 17q^3 + 64 \Rightarrow a^3 = 17(q^3 + 4) + 13$$

$$\Rightarrow a^3 = 17q'' + 13$$

روش دوم: به کمک هم‌نهستی داریم:

$$a \equiv 4 \Rightarrow a^3 \equiv 64 \equiv 13$$

تقسیم‌ها را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$\begin{cases} a = 13q + 7 \Rightarrow 2a = 13(2q) + 14 \Rightarrow 2a = 13k + 14 \\ b = 13q' + 10 \Rightarrow 3b = 13(3q') + 30 \Rightarrow 3b = 13k' + 30 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2a + 3b = 13(k + k') + 44$$

بنابراین داریم:

$$2a + 3b = 13(k'' + 3) + 5 \Rightarrow 2a + 3b = 13t + 5$$

۱۵۷ ۳ تقسیم مورد نظر به صورت $a = 7q + 5$ است. حال باقی مانده

تقسیم a بر ۲۸ را می‌خواهیم. می‌دانیم q یکی از حالات $4k + 1, 4k + 2, 4k + 3$ و $4k + 4$ است، پس:

$$a = 7q + 5 \xrightarrow{q=4k} a = 28k + 5$$

$$a = 7q + 5 \xrightarrow{q=4k+1} a = 28k + 12$$

$$a = 7q + 5 \xrightarrow{q=4k+2} a = 28k + 19$$

$$a = 7q + 5 \xrightarrow{q=4k+3} a = 28k + 26$$

البته می‌توانستیم از روش عددگذاری هم این تست را حل کنیم.

۱۵۸ ۳ با در نظر گرفتن همه حالت‌ها داریم:

$$n = 7k \Rightarrow n^2 = 49k^2$$

$$n = 7k + 1 \Rightarrow n^2 = 49k^2 + 14k + 1$$

$$n = 7k + 2 \Rightarrow n^2 = 49k^2 + 28k + 4$$

$$n = 7k + 3 \Rightarrow n^2 = 49k^2 + 42k + 9$$

$$n = 7k + 4 \Rightarrow n^2 = 49k^2 + 56k + 16$$

$$n = 7k + 5 \Rightarrow n^2 = 49k^2 + 70k + 25$$

$$n = 7k + 6 \Rightarrow n^2 = 49k^2 + 84k + 36$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید به ازای هیچ مقدار n ، $n^2 = 7k + 4$ نمی‌شود،

پس این معادله در مجموعه اعداد صحیح جواب ندارد. دقت کنید این سؤال را

به راحتی می‌توانید در قسمت هم‌نهستی حل کنید.

۱۵۹ ۳

نکته

اگر a یک عدد فرد باشد، داریم:

$$a^2 = 4k + 1 \quad \text{و} \quad a^2 = 4k + 1$$

چون a عددی فرد است، پس مربع آن به فرم $4k + 1$ و توان چهارم آن به فرم

$16k' + 1$ است. در نتیجه:

$$a^4 + 4a^2 + 27 = (16k' + 1) + 4(4k + 1) + 27$$

$$= 16k' + 32k + 32 = 16(k' + 2k + 2)$$

۱۶۰ ۴ با توجه به این‌که در گزینه‌ها مجموع مربعات را به فرم $4k + 4$ داده‌ایم، ابتدا باید ببینیم مربع یک عدد طبیعی وقتی تقسیم بر ۴ می‌شود چه

باقی‌مانده‌هایی دارد:

$$a = 4k \Rightarrow a^2 = 4k^2$$

$$a = 4k \pm 1 \Rightarrow a^2 = 4k^2 \pm 8k + 1$$

$$a = 4k + 2 \Rightarrow a^2 = 4k^2 + 16k + 4$$

بنابراین مربع هر عدد طبیعی یا به فرم $4k$ است یا به فرم $4k + 1$. بنابراین داریم:

$$a^2 + b^2 = 4k + 4k' = 4q$$

$$a^2 + b^2 = 4k + 1 + 4k' = 4q + 1$$

$$a^2 + b^2 = 4k + 1 + 4k' + 1 = 4q + 2$$

پس مجموع مربعات دو عدد طبیعی به صورت $4k + 3$ نمی‌تواند باشد.

۱۵۴ ۲ روش اول: فرض می‌کنیم $a = 9q + 5$ و $a = 13q' + 7$ باشد.

از آنجایی که باقی‌مانده تقسیم a بر ۳۹ را می‌خواهیم، شاید وسوسه شوید که $a = 9q + 5$ را به صورت $a = 3(3q + 1) + 2$ بنویسید. اما اگر این کار را

کنید، مجبورید آن را در ۱۳ و $a = 13q' + 7$ ضرب کرده و سپس از هم

کم کنید که $10a$ حاصل می‌شود. شاید پیدا کردن عددی که بتوان آن را بر ۱۰ تقسیم کرد وقت‌گیر باشد. پس فعلاً با $a = 9q + 5$ و $a = 13q' + 7$ کار کرده

و در آخر ۳۹ را در تقسیم ایجاد می‌کنیم:

$$\begin{cases} a = 9q + 5 \Rightarrow 13a = 13 \times 9q + 65 \\ a = 13q' + 7 \Rightarrow 9a = 9 \times 13q' + 63 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4a = 13 \times 9(q - q') + 2 \Rightarrow 4a = 39(3k) + 2 \Rightarrow 4a = 39k' + 2$$

حال باید کاری کنیم تا بر ۴ تقسیم‌پذیر شوند:

$$4a = 39k' + 2 + 2 \times 39 - 2 \times 39 \Rightarrow 4a = 39(k' - 2) + 80$$

$$\Rightarrow a = 39t + 20$$

روش دوم: می‌دانیم $39 = 3 \times 13$ است و از طرفی عددی که باقی‌مانده‌اش بر

۹ برابر ۵ است، باقی‌مانده تقسیمش بر ۳ برابر ۲ می‌باشد، زیرا:

$$a = 9q + 5 \Rightarrow a = 3(3q + 1) + 2$$

حال در گزینه‌ها عددی قبول است که باقی‌مانده تقسیم آن بر ۱۳ برابر ۷ و بر ۳ برابر ۲ باشد. در گزینه‌ها فقط ۲۰ این چنین است.

روش سوم: به کمک هم‌نهستی داریم:

$$\begin{cases} a \equiv 5 \pmod{9} \Rightarrow a \equiv 5 \pmod{3} \\ a \equiv 7 \pmod{13} \end{cases} \Rightarrow a \equiv 20 \pmod{39}$$

۱۵۵ ۳ کافی است n را به فرم‌های $7k, 7k + 1, 7k + 2, 7k + 3$ ،

$7k + 4, 7k + 5, 7k + 6$ در نظر بگیریم و نشان دهیم n^2 به یکی از فرم‌های $7k', 7k' + 1, 7k' + 2, 7k' + 3, 7k' + 4$ است. بنابراین n باید در ۷ حالت

مختلف بررسی شود.

۱۵۶ ۳ روش اول: تقسیم مورد نظر به صورت $a = 4q + 3$ است. حال

باقی‌مانده تقسیم a^2 بر ۸ را می‌خواهیم:

$$a = 4q + 3 \Rightarrow a^2 = (4q + 3)^2 = 16q^2 + 24q + 9$$

$$\Rightarrow a^2 = 8(2q^2 + 3q + 1) + 1$$

روش دوم: کافی است فرض کنیم $a = 3$ است. پس $a^2 = 9$ می‌باشد و داریم:

$$\begin{array}{r} 9 \overline{) 8} \\ - 8 \\ \hline 1 \end{array}$$



$$\begin{cases} a = 6 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow a^2 - b^2 = 32$$

$$\Rightarrow (32, 96) = 32$$

$$\begin{cases} a = 10 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow a^2 - b^2 = 96$$

چون $(a, 90) = 1$ است، پس a نه مضرب ۲ است، نه مضرب ۳ و نه مضرب ۵، بنابراین اولین عدد قابل پذیرش که عبارت را صفر نکند عدد ۷ و عدد بعدی ۱۱ می‌باشد:

$$\begin{cases} a = 7 \Rightarrow a^2 - 1 = 7^2 - 1 = (49 - 1)(49 + 1) = 2^5 \times 3 \times 5^2 \\ a = 11 \Rightarrow a^2 - 1 = 11^2 - 1 = (121 - 1)(121 + 1) = 2^4 \times 3 \times 5 \times 61 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d = 2^4 \times 3 \times 5 = 240$$

کوچک‌ترین عدد قابل پذیرش برای عبارت، $n = 2$ و عدد قابل پذیرش بعدی $n = 3$ است. بنابراین:

$$\begin{cases} n = 2 \Rightarrow n^2(n^2 - 1) = 12 \\ n = 3 \Rightarrow n^2(n^2 - 1) = 72 \end{cases} \Rightarrow (12, 72) = 12$$

عدد ۶۳۹۶۲ به رقم ۲ ختم شده است، پس مربع کامل نیست. عدد ۵۳۴۷۵ رقم یکانش ۵ است ولی چون رقم دهگانش ۲ نیست، پس مربع کامل نمی‌باشد. عدد ۸۳۶۹۳ نیز به ۳ ختم شده است، پس مربع کامل نیست.

باید بررسی کنیم تفاضل کدام دو عدد بر ۱۷ بخش پذیر است. بنابراین تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

- ۱) $321 - 2 = 319 \Rightarrow 319 \neq 17k$ ✗
- ۲) $163 - (-126) = 289 \Rightarrow 289 = 17k$ ✓
- ۳) $220 - 87 = 133 \Rightarrow 133 \neq 17k$ ✗
- ۴) $78 - 17 = 61 \Rightarrow 61 \neq 17k$ ✗

البته می‌توانستیم این‌گونه هم بررسی کنیم که کدام دو عدد در تقسیم بر ۱۷ باقی‌مانده یکسانی دارند. که البته شاید کمی وقت‌گیر بود.

۱۷۱



اگر در یک هم‌نهشتی، پیمانه مجهول بود، باید به کمک تعریف هم‌نهشتی، آن را به بخش پذیری تبدیل کرد تا پیمانه معلوم شود.

$$a \equiv b \Rightarrow m \mid a - b$$

رابطه هم‌نهشتی را به یک رابطه بخش‌پذیری تبدیل می‌کنیم و داریم:

$$73 \equiv 164 \Rightarrow m \mid 164 - 73 \Rightarrow m \mid 91 \xrightarrow{\text{دورقمی } m} m = 13 \text{ یا } 91$$

باید رابطه $(a + 2) - (29 - a) - (a + 5)$ برقرار باشد، پس:

$$a + 2 \mid -2a + 24 \Rightarrow a + 2 \mid -2(-2) + 24$$

$$\Rightarrow a + 2 \mid 28 \Rightarrow a + 2 = 14 \text{ یا } 28$$

دقت کنید $a + 2$ (پیمانه هم‌نهشتی) باید عددی طبیعی باشد. بنابراین a می‌تواند ۶ مقدار صحیح بپذیرد.

چون باقی‌مانده تقسیم عددهای ۶۸ و ۱۴۵ بر m مساوی هستند، پس ۶۸ و ۱۴۵ به پیمانه m هم‌نهشت هستند. لذا داریم:

$$68 \equiv 145 \Rightarrow m \mid 145 - 68 \Rightarrow m \mid 77 \xrightarrow{\text{دورقمی } m} m = 11 \text{ یا } 77$$

ابتدا مربع هر عدد به فرم $5k + 4$ را به دست می‌آوریم:

$$a = 5k + 4 \Rightarrow a^2 = 5k' + 16 \Rightarrow a^2 = 5k'' + 1$$

پس مجموع مربعات آن‌ها برابر است با:

$$a^2 + b^2 = 5k + 1 + 5k' + 1 = 5q + 2$$

روش اول: چون $(a, 12) = 1$ است، پس a مضرب ۲ و ۳ نیست.

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} a = 2k + 1 \Rightarrow a^2 = 4k' + 1 \Rightarrow a^2 - 1 = 4k'' \\ a = 3k \pm 1 \Rightarrow a^2 = 9k'' + 1 \Rightarrow a^2 - 1 = 9k''' \end{cases} \Rightarrow a^2 - 1 = 24q$$

روش دوم:



بزرگ‌ترین شمارنده یک عبارت: برای به دست آوردن بزرگ‌ترین عددی که یک عبارت پارامتری همواره بر آن بخش‌پذیر است، به پارامتر، دو عدد مختلف می‌دهیم. ابتدا کوچک‌ترین عدد قابل پذیرش و سپس عدد قابل پذیرش بعدی و ب.م.م بین آن‌ها را حساب می‌کنیم.

$$(a, 12) = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \Rightarrow 5^2 - 1 = 24 \\ a = 7 \Rightarrow 7^2 - 1 = 48 \end{cases} \Rightarrow (24, 48) = 24$$

روش اول: چون a عددی زوج است، پس $a = 2k$ می‌باشد.

بنابراین داریم:

$$a = 2k \Rightarrow a(a^2 - 4) = 2k(4k^2 - 4) = 8k(k^2 - 1)$$

$$= 8k(k-1)(k+1) = 8 \times 3!q = 48q$$

ضرب سه عدد متوالی مضرب ۳! است.

روش دوم: یک‌بار به a مقدار ۴ و بار دیگر مقدار ۶ می‌دهیم و داریم:

$$\begin{cases} a = 4 \Rightarrow a(a^2 - 4) = 48 \\ a = 6 \Rightarrow a(a^2 - 4) = 192 \end{cases} \Rightarrow (48, 192) = 48$$

روش اول: چون p یک عدد اول دورقمی است، پس مطمئناً ۲ و ۳

نیست و همچنین مضرب ۲ و مضرب ۳ نیز نمی‌باشد، پس:

$$\begin{cases} p = 2k + 1 \Rightarrow p^2 = 4k + 1 \Rightarrow p^2 - 1 = 4k \\ p = 2k' \pm 1 \Rightarrow p^2 = 4k'' + 1 \Rightarrow p^2 - 1 = 4k''' \end{cases} \xrightarrow{(3, 8)=1} p^2 - 1 = 24q$$

واضح است که چون مضرب ۲۴ می‌باشد، پس می‌تواند مضرب ۱۲ و ۸ نیز باشد، اما مضرب ۱۶ نیست.

نتیجه: اگر p یک عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد، داریم:

$$p > 3 \Rightarrow p^2 = 24k + 1$$

اگر p یک عدد اول بزرگ‌تر از ۵ باشد، داریم:

$$p > 5 \Rightarrow p^2 = 240k + 1$$

روش دوم: فرض می‌کنیم $p = 11$ باشد، پس $p^2 - 1 = 120$ می‌شود که مضرب ۸، ۱۲ و ۲۴ است ولی مضرب ۱۶ نیست.

چون p و q اعداد اول بزرگ‌تر از ۵ هستند، پس $240k + 1 = 240k' + 1$ و $q^2 = 24k'' + 1$ است. بنابراین داریم:

$$p^2 + 5q^2 - 6 = (240k + 1) + 5(24k'' + 1) - 6$$

$$= 240k + 120k'' = 120(2k + k'') = 120q$$

کوچک‌ترین اعداد قابل پذیرش برای a و b ، اعداد ۲ و ۶ هستند

و اعداد قابل پذیرش بعدی اعداد ۲ و ۱۰ می‌باشند.

حال باقی مانده تقسیم ۱۶۰ بر m خواسته شده، احتمالاً اگر m را ۱۱ یا ۷۷ در نظر بگیریم، باقی مانده یکسانی به ما می دهند. نگاه کنید:

$$\begin{array}{r} 160 \\ -154 \\ \hline 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} 11 \\ -11 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 160 \\ -154 \\ \hline 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} 77 \\ -77 \\ \hline 0 \end{array}$$

همان طور که ملاحظه کردید باقی مانده تقسیم ۱۶۰ بر m، برابر ۶ است.

۱ ۱۷۴ ابتدا تقسیم را به صورت $A \equiv 23 \pmod{27}$ می نویسیم. می دانیم هر اتفاقی که برای A می افتد برای ۲۳ نیز می افتد. بنابراین داریم:

$$A \equiv 23 \pmod{27} \Rightarrow 2A - 3 \equiv 2 \times 23 - 3 \equiv 43 \pmod{27}$$

به کمک ویژگی های هم نهشتی داریم:

$$a \equiv 13 \pmod{27} \Rightarrow a^3 - 2a + 1 \equiv (-1)^3 - 2(-1) + 1 \equiv 2 \pmod{27}$$

۱ ۱۷۶ تقسیم ها را به زبان ریاضی می نویسیم و سپس به کمک ویژگی های هم نهشتی، داریم:

$$\begin{cases} a \equiv 3 \\ b \equiv 3 \\ c \equiv 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b \equiv 3 + 3 \\ a + b \equiv 6 \\ c \equiv 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a + b) \times c \equiv 6 \times 4 \Rightarrow ac + bc \equiv 0$$

۱ ۱۷۷ می دانیم $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$ می باشد. پس:

$$\begin{cases} a - b \equiv 2 \\ ab \equiv 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a - b)^2 \equiv 4 \\ 2ab \equiv 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a - b)^2 + 2ab \equiv 4 + 6 \equiv 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \equiv 0$$

۲ ۱۷۹ ابتدا $10!$ را باز کرده و اعداد را طوری انتخاب می کنیم که به پیمانه ۱۱ کوچک شوند. مثلاً یکی از انتخاب ها به صورت زیر است:

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \equiv 10 \times 9 \times (8 \times 7) \times (6 \times 5) \times (4 \times 3) \times 2 \equiv (-1) \times (-2) \times 1 \times (-3) \times 1 \times 2 \equiv 12 \equiv 1 \pmod{11}$$

توجه: اگر p عددی اول باشد، همواره داریم:

$$(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$$

۳ ۱۸۰

توجه

باقی مانده تقسیم $n!$ بر عدد اول p در صورتی که $n \geq p$ باشد، برابر صفر است.

واضح است که باقی مانده تقسیم $23!$ و $24!$ بر ۱۷، برابر صفر است. از طرفی می دانیم $16! \equiv -1 \pmod{17}$ است. پس فقط کافی است باقی مانده تقسیم ۸! بر ۱۷ را به دست آوریم:

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \equiv (8 \times 2) \times (6 \times 3) \times (5 \times 7) \times 4 \equiv (-1) \times 1 \times 1 \times 4 \equiv -4 \pmod{17}$$

$$8! + 16! + 23! + 24! \equiv (-4) + (-1) + 0 + 0 \equiv 12 \pmod{17}$$

۳ ۱۸۱ باید هم نهشتی A به پیمانه ۱۲ را به دست آوریم:

$$1! + 2! + 3! + 4! + \dots + 100! \equiv 1! + 2! + 3! \equiv 9 \pmod{12}$$

از این جا به بعد همگی بر ۱۲ بخش پذیرند.

دقت کنید از ۴! به بعد همگی بر ۱۲ بخش پذیرند، زیرا $4 \times 3 = 12$ و در اعداد ۴!، ۵!، ۶!، ... وجود دارد.

۳ ۱۸۲ با توجه به تعریف فاکتوریل می توان گفت عدد $n!$ به ازای $n \geq 5$ حتماً بر ۲۰ بخش پذیر است. پس باقی مانده تقسیم آن ها بر ۲۰، برابر صفر است:

$$1! + 3! + 5! + \dots + 9! \equiv 1! + 3! \equiv 7 \pmod{20}$$

۱ ۱۸۳ چون a و ۷ نسبت به هم اول هستند، پس حتماً a مضرب ۷ نیست. بنابراین داریم:

$$a^7 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow a^6 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow a^5 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow a^4 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow a^3 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow a^2 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow a \equiv 1 \pmod{7}$$

توجه: به طور کلی اگر p یک عدد اول و a مضرب p نباشد، همواره داریم:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

۲ ۱۸۴ تک تک گزینه ها را بررسی می کنیم:

۱) $a \equiv 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, 4 \pmod{5} \Rightarrow a^2 \equiv 0, 1, 4, 9, 16 \pmod{5} \Rightarrow a^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{5}$

۲) $a \equiv 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \pmod{4} \Rightarrow a^2 \equiv 0, 1, 4, 9 \pmod{4} \Rightarrow a^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$ به فرم $4k - 2$ نیست.

۳) $a \equiv 0, \pm 1, \pm 2 \pmod{3} \Rightarrow a^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{3} \Rightarrow a^2 \equiv 0, 1 \pmod{3}$

۴) $a \equiv 0, \pm 1, 2 \pmod{6} \Rightarrow a^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{6}$

توجه

در تمام مسائل هم نهشتی سعی ما این است که اعداد را در پیمانه کوچک کنیم. کافی است مضارب پیمانه را از آن عدد برداریم. مثلاً عدد ۱۷ به پیمانه ۲۰ را بهتر است ۳- در نظر بگیریم یا عدد ۲۷ به پیمانه ۲۳ را به ۴ تبدیل کنیم. چند مثال ببینید:

$$19 \equiv -2 \pmod{20}, 27 \equiv 7 \pmod{20}, 11 \equiv 11 \pmod{20}, 21 \equiv -3 \pmod{20}$$

می دانیم $8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ است. بنابراین داریم:

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \equiv (8 \times 5) \times (6 \times 2) \times (4 \times 3) \times 7 \equiv 40 \times 12 \times 12 \times 7 \equiv 1 \times (-1) \times (-1) \times 7 \equiv 7 \pmod{40}$$

دقت کنید در محاسبات فوق، اعدادی را که کنار هم نوشته ایم به پیمانه ۱۳ کوچک کرده ایم. سعی ما بر این است که اعداد را طوری انتخاب کنیم که وقتی به پیمانه ۱۳ کوچک می شوند، اعداد کوچک تری شوند، ترجیحاً ۱ یا -۱. شما می توانید انتخاب های متفاوتی داشته باشید. مثلاً یک نمونه دیگر را ببینید:

$$(8 \times 4 \times 2) \times (6 \times 5 \times 3) \times 7 \equiv (-1) \times (-1) \times 7 \equiv 7 \pmod{13}$$



۱ ۱۸۵



اگر $a \equiv b^m$ و $n \mid m$ ، آن گاه $a \equiv b^n$ ، یعنی در یک هم‌نهشتی می‌توان به جای پیمانه، مقسوم‌علیه‌های پیمانه را قرار داد. به بیان خودمانی، می‌توان پیمانه را لاغر کرد.

روش اول: چون باقی‌مانده تقسیم a بر 99 برابر 25 است، داریم:

$$a \equiv_{99} 25 \xrightarrow{9 \mid 99} a \equiv_{9} 25$$

اما باقی‌مانده تقسیم a بر 9 نمی‌تواند 25 باشد. پس مضرب مناسبی از پیمانه را از 25 کم می‌کنیم تا باقی‌مانده بزرگ‌تر و یا مساوی صفر و کوچک‌تر از 9 شود:

$$a \equiv_{9} 25 \equiv_{9} 7 \quad \begin{matrix} \uparrow \\ -2 \times 9 \end{matrix}$$

روش دوم: فرض می‌کنیم $a = 25$ باشد. واضح است که باقی‌مانده تقسیم 25 بر 9 برابر 7 است.

۳ ۱۸۶ می‌دانیم در هم‌نهشتی به جای پیمانه می‌توانیم مقسوم‌علیه‌های

پیمانه را نیز قرار دهیم. پس:

$$\begin{cases} a \equiv_{18} 5 \xrightarrow{6 \mid 18} a \equiv_{6} 5 \equiv_{6} -1 \\ b \equiv_{24} 7 \xrightarrow{6 \mid 24} b \equiv_{6} 7 \equiv_{6} 1 \end{cases} \Rightarrow a^{1^0} - 3b^{2^0} \equiv_{6} (-1)^0 - 3(1)^0 \equiv_{6} -4$$

۱ ۱۸۷ می‌دانیم $x \equiv y \mid x - y$ یعنی $7 \mid x - y$ ، حال چون دنبال عددی هستیم

که با 39 در یک کلاس هم‌نهشتی قرار دارد، پس باید دنبال عددی باشیم که با 39 در پیمانه 7 هم‌نهشت باشد. تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} 1) \quad 95 - 39 = 56 = 7k \quad \checkmark & \quad 2) \quad 96 - 39 = 57 \neq 7k \quad \times \\ 3) \quad 97 - 39 = 58 \neq 7k \quad \times & \quad 4) \quad 98 - 39 = 59 \neq 7k \quad \times \end{aligned}$$

البته می‌توانستیم بگوییم چون باقی‌مانده تقسیم 39 بر 7 برابر 4 می‌باشد، پس باید عددی پیدا کنیم که باقی‌مانده تقسیم آن نیز بر 7 برابر 4 باشد که در گزینه‌ها فقط 95 این چنین است.

۴ ۱۸۸ چون رابطه هم‌نهشتی مجموعه Z را به 5 کلاس هم‌نهشتی افزایش

کرده است، پس پیمانه برابر 5 می‌باشد. حال دنبال دو عددی هستیم که در یک کلاس هم‌نهشتی در این پیمانه باشند، پس باید دو عدد به پیمانه 5 هم‌نهشت باشند. تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} 1) \quad 5 \mid 25 - 7 \quad \times & \quad 2) \quad 5 \mid 31 - 3 \quad \times \\ 3) \quad 5 \mid 37 - 1 \quad \times & \quad 4) \quad 5 \mid 37 - 12 \quad \checkmark \end{aligned}$$

۲ ۱۸۹ باید ببینیم -209 به پیمانه 12 یا کدام عدد داده شده هم‌نهشت

است. اما برای سرعت در کار کافی است مضربی از 12 را که می‌شناسیم، مثلاً $240 = 20 \times 12$ را به -209 اضافه کنیم، سپس با برداشتن مضرب مناسبی از 12 از عدد حاصل به عدد گزینه‌ها برسیم:

$$-209 \equiv_{12} 3 \quad \begin{matrix} \uparrow \\ +20 \times 12 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ -2 \times 12 \end{matrix} \quad 1 \equiv_{12} 7$$

۳ ۱۹۰ می‌دانیم اگر p عدد اول بزرگ‌تر از 3 باشد، $p^2 = 24k + 1$

است، پس:

$$[p^2] = [1] \Rightarrow p^2 \equiv_{24} 1 \Rightarrow 24k + 1 \equiv_{24} 1$$

$$\Rightarrow m \mid (24k + 1) - 1 \Rightarrow m \mid 24k$$

با توجه به گزینه‌ها واضح است که m نمی‌تواند 16 باشد.

۱ ۱۹۱ اعدادی که باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر 7 برابر 2 می‌باشد، در کلاس

هم‌نهشتی A قرار دارند و اعدادی که باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر 7 برابر 4 است، در کلاس هم‌نهشتی B خواهند بود و اعدادی که باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر 7 برابر 2 یا 4 نیست در کلاس هم‌نهشتی C می‌باشند. گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$1) \quad \begin{cases} 21 \equiv_{7} 0 \Rightarrow 21 \in C \\ 13 \equiv_{7} 6 \Rightarrow 13 \in C \end{cases} \quad \checkmark \quad 2) \quad \begin{cases} 13 \equiv_{7} 6 \Rightarrow 13 \in C \\ 23 \equiv_{7} 2 \Rightarrow 23 \in A \end{cases} \quad \times$$

$$3) \quad \begin{cases} 21 \equiv_{7} 0 \Rightarrow 21 \in C \\ 23 \equiv_{7} 2 \Rightarrow 23 \in A \end{cases} \quad \times \quad 4) \quad \begin{cases} 23 \equiv_{7} 2 \Rightarrow 23 \in A \\ 22 \equiv_{7} 4 \Rightarrow 22 \in B \end{cases} \quad \times$$

۳ ۱۹۲ چون سه عدد a ، 41 و 132 در یک کلاس هم‌نهشتی به پیمانه

m قرار دارند، پس سه عدد به پیمانه m هم‌نهشت می‌باشند:

$$a \equiv_{m} 41 \equiv_{m} 132 \Rightarrow m \mid 132 - 41 \Rightarrow m \mid 91 \Rightarrow m = 7 \text{ یا } 13 \text{ یا } 91$$

$$\downarrow \\ 7 \times 13$$

چون در سؤال خواسته شده مجموعه Z به تعداد کم‌تری کلاس هم‌نهشتی افزایش شود، پس باید کوچک‌ترین m را انتخاب کنیم، یعنی m باید 7 باشد. پس:

$$a \equiv_{7} 41 \equiv_{7} -1 \Rightarrow a = 7k - 1 \xrightarrow[k=15]{\text{کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی}} a = 104$$

دقت کنید در این سؤال m نمی‌تواند 1 باشد، چون در این صورت همه اعداد صحیح در یک کلاس هم‌نهشتی قرار دارند که آن کلاس هم‌نهشتی $[0]$ است و در این صورت گزینه‌ها دیگر معنایی نداشتند.

۲ ۱۹۳ **روش اول:** مشخص است که یکی از دو گزینه (۱) یا (۲) جواب

است، چون یک عدد در آن واحد، در پیمانه 7 دو باقی‌مانده مختلف ندارد.

$$36a \equiv_{192} 84 \xrightarrow{(12, 84)=12} 3a \equiv_{16} 7 \xrightarrow{16 \equiv_{2} 0} 3a \equiv_{2} 1 \xrightarrow{1 \times 7} 3a \equiv_{2} 7$$

$$3a \equiv_{9} 7 \xrightarrow{(3, 9)=3} a \equiv_{3} 7 \Rightarrow \text{گزینه (۲) نادرست است.}$$

و اما علت درستی گزینه‌های (۳) و (۴) به شرح زیر است:

$$a \equiv_{3} 7 \begin{cases} \times 2 \rightarrow 2a \equiv_{6} 7 \equiv_{6} -1 \\ \times 3 \rightarrow 3a \equiv_{9} 7 \equiv_{9} 7 \end{cases}$$

روش دوم: در این سؤال بعد از این‌که فهمیدید یا گزینه (۱) غلط است یا گزینه (۲)، می‌توانید به a عدد بدهید. مثلاً فرض کنید گزینه (۱) درست است و $a = 3$ می‌باشد. چون $a = 3$ در گزینه‌های (۳) و (۴) هم صدق می‌کند، پس گزینه (۱) واقعاً درست بوده و گزینه (۲) حتماً نادرست است.

۱۹۹ ۳ ابتدا باید روزهای باقی مانده از ۱ فروردین تا ۱۹ آذر را به دست آوریم، سپس عدد حاصل را به پیمانه ۷ کوچک کنیم:

$$2 + 2 \times 3 + 3 \times 3 + 2 \times 3 + 1 \times 7 \equiv 2 + 2 \times 3 + 3 \times 3 + 2 \times 3 - 2 \pmod{7}$$

۲- یعنی ۲ روز قبل از پنجشنبه، یعنی ۱۹ آذر، سهشنبه است.

۲۰۰ ۱ بیست و هفتم اردیبهشت سهشنبه است، پس بیست و چهارم اردیبهشت شنبه است. بنابراین تاریخ شنبه‌های اردیبهشت را به دست می‌آوریم:

$$\begin{matrix} 24 \equiv 17 \equiv 10 \equiv 3 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \text{سومین} \quad \text{دومین} \quad \text{اولین} \\ \text{شنبه} \quad \text{شنبه} \quad \text{شنبه} \end{matrix}$$

بنابراین سومین شنبه اردیبهشت ماه، ۱۷ اردیبهشت است.

۲۰۱ ۳ فرض می‌کنیم آخرین شنبه آبان ماه روز n آبان باشد. پس برای آن که روز n آبان شنبه باشد، باید تعداد روزهای باقی مانده تا آن روز در هم‌نهمتی به پیمانه ۷، برابر صفر شود:

$$6 + 31 + 3 \times 31 + 30 + n \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow -1 + 3 + 3 \times 3 + 2 + n \equiv 0 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow -1 + n \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow n \equiv 1 \pmod{7}$$

چون آخرین شنبه را می‌خواهیم، باید بزرگ‌ترین عددی که به پیمانه ۷ برابر ۱ می‌شود را انتخاب کنیم که عدد ۲۹ می‌باشد.

۲۰۲ ۴ می‌دانیم هر روز ۲۴ ساعت است. بنابراین باید ببینیم ۱۰۰۰ ساعت بعد، شامل چند روز و چند ساعت است:

$$1000 = 24 \times 41 + 16 \Rightarrow \text{روز و } 16 \text{ ساعت}$$

بنابراین ابتدا ببینیم ۴۱ روز بعد، چه روزی و چندشنبه است:

$$41 \equiv -1 \pmod{7}$$

یک روز قبل از سهشنبه، یعنی دوشنبه است. اما ۱۶ ساعت بعد از ساعت ۲۳ روز دوشنبه ۱۷ مهر، ساعت ۱۵ سهشنبه ۱۸ مهرماه است.

$$41 = 31 + 10 \Rightarrow \text{مهر } 10 \Rightarrow \text{روز بعد از هفتم مهر}$$

۲۰۳ ۳ باید ببینیم ۲۰ شهریورماه چند روز قبل از ۲۲ بهمن است. پس:

$$-(31 - 20 + 3 \times 30 + 30 + 22) \equiv -(3 + 3 \times 2 + 2 + 1) \equiv -6 \pmod{7}$$

یعنی یک روز بعد از دوشنبه است، پس ۲۰ شهریور سهشنبه می‌باشد.

۲۰۴ ۲ می‌دانیم در دایره مثلثاتی هر ۳۶۰ درجه که حرکت می‌کنیم، دوباره به نقطه ابتدایی حرکت برمی‌گردیم. چون در خلاف جهت دایره مثلثاتی حرکت کرده‌ایم، پس ۳۲۸۵ را با علامت منفی در نظر می‌گیریم. در نتیجه:

$$-3285 \equiv 360 - 45 \Rightarrow 305 - 45 = 260$$

۱۹۴ ۱ گزینه (۱) نادرست است، زیرا طرفین هم‌نهمتی بر ۵ تقسیم شده و $5 = (5 \times 3) \pmod{5}$ می‌باشند، پس پیمانه باید $6 = \frac{30}{5}$ شود. اما دلیل درستی بقیه گزینه‌ها را ببینید:

$$\begin{aligned} 2) \quad 15a \equiv 20b \pmod{5} &\Rightarrow 3a \equiv 4b \pmod{5} \\ 3) \quad 3a \equiv 4b \pmod{5} &\Rightarrow 3a \equiv 3b \pmod{5} \Rightarrow b \equiv 0 \pmod{5} \\ 4) \quad 3a \equiv 4b \pmod{5} &\Rightarrow 3a \equiv 3b \pmod{5} \Rightarrow a \equiv b \pmod{5} \end{aligned}$$

۱۹۵ ۳ ابتدا طرفین را بر ۳ تقسیم می‌کنیم و داریم:

$$9a \equiv 6b \pmod{3} \Rightarrow 3a \equiv 2b \pmod{3} \Rightarrow 3a \equiv 2b \pmod{3}$$

حال از روی $3a \equiv 2b \pmod{3}$ سایر گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \text{گزینه } 2) \quad 3a \equiv 2b \pmod{3} &\Rightarrow 3a \equiv 2b \pmod{3} \Rightarrow -b \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow b \equiv 0 \pmod{3} \\ \text{گزینه } 1) \quad 3a \equiv 2b \pmod{3} &\Rightarrow 3a \equiv 2b \pmod{3} \Rightarrow a \equiv 0 \pmod{3} \end{aligned}$$

بنابراین نتیجه‌گیری $a \equiv 2 \pmod{3}$ در گزینه (۳) نادرست است.

۱۹۶ ۱ از $(a^2 - 1, m) = 1$ به شکل مبرهنی معلوم می‌شود که حتماً باید طرفین را بر $a^2 - 1$ تقسیم کرد. پس سعی می‌کنیم در طرف اول هم از $a^2 - 1$ فاکتور بگیریم:

$$\begin{aligned} (a^3 - a) - (a^2 - 1) &\equiv a^2 - 1 \pmod{m} \Rightarrow a(a^2 - 1) - (a^2 - 1) \equiv a^2 - 1 \pmod{m} \\ \Rightarrow (a^2 - 1)(a - 1) &\equiv a^2 - 1 \pmod{m} \Rightarrow a - 1 \equiv 1 \pmod{m} \Rightarrow a - 2 \equiv 0 \pmod{m} \Rightarrow m | a - 2 \end{aligned}$$

۱۹۷ ۴ اگر در یک هم‌نهمتی، ضریب یکی از پارامترها به پیمانه بخش پذیر باشد، آن پارامتر قابل محاسبه از این هم‌نهمتی نیست.

b قابل محاسبه از این هم‌نهمتی نیست، چون $18 \equiv 0 \pmod{9}$ و b حذف می‌گردد، پس گزینه (۴) نادرست است. اما دلیل درستی بقیه گزینه‌ها:

$$\begin{aligned} 1) \quad 12a \equiv 18b \pmod{6} &\Rightarrow 2a \equiv 3b \pmod{6} \\ 2) \quad 2a \equiv 3b \pmod{6} &\Rightarrow 4a \equiv 6b \pmod{6} \\ 3) \quad 2a \equiv 3b \pmod{6} &\Rightarrow -a \equiv 0 \pmod{6} \Rightarrow a \equiv 0 \pmod{6} \end{aligned}$$

۱۹۸ ۱ واضح است گزینه (۱) نادرست است، چون ضریب a به پیمانه بخش پذیر است، پس نمی‌توان مقدار a را به دست آورد. اما علت درستی سایر گزینه‌ها:

$$\begin{aligned} 2) \quad 3a \equiv 2b \pmod{6} &\Rightarrow 0 \equiv -1 \times b \pmod{6} \Rightarrow b \equiv 0 \pmod{6} \\ 3) \quad b \equiv 0 \pmod{6} &\Rightarrow b \equiv 3a \pmod{6} \\ 4) \quad 18a \equiv 12b \pmod{6} &\Rightarrow 3a \equiv 2b \pmod{6} \end{aligned}$$

اما در تقسیم بعدی صحبت از خارج قسمت می شود، پس:

$$N = 43q + q, 0 \leq q < 43 \Rightarrow N \leq 43(42) + 42 \Rightarrow N \leq 1848$$

یعنی بیان تقسیم دوم در صورت سؤال به این منظور است که بدانیم N هیچگاه از ۱۸۴۸ بیشتر نمی شود. از طرفی داریم:

$$N = 43q + q \Rightarrow N = 44q \Rightarrow N \equiv 0 \pmod{44}$$

حال داریم:

$$\begin{cases} N \equiv 0 \pmod{44} \\ N \equiv 0 \pmod{44} \end{cases} \Rightarrow N \equiv 0 \pmod{[44, 44]} \Rightarrow N \equiv 0 \pmod{44} \Rightarrow N \equiv 0 \pmod{44}$$

$$N = 1364k + 88 \xrightarrow{N \leq 1848} N = 1452 \Rightarrow \text{رقم یکان} = 2$$

بزرگترین N به ازای $k=1$ به دست می آید.

با توجه به گزینه‌ها، ابتدا به کمک قانون حذف داریم:

$$6a \equiv 3b \pmod{2084} \xrightarrow{\div 3} 2a \equiv b \pmod{694.67} \Rightarrow \text{گزینه (۲)}$$

$$6b \equiv 18c \pmod{6072} \xrightarrow{\div 6} b \equiv 3c \pmod{1012} \Rightarrow \text{گزینه (۴)}$$

حال به کمک خاصیت $a \equiv b \pmod{m}$ و $b \equiv c \pmod{n} \Rightarrow a \equiv c \pmod{(m \cdot n)}$ داریم:

$$\begin{cases} 2a \equiv b \pmod{694.67} \\ b \equiv 3c \pmod{1012} \end{cases} \Rightarrow 2a \equiv 3c \pmod{(28012)} \Rightarrow 2a \equiv 3c \pmod{28012} \Rightarrow 2a \equiv -c \pmod{28012} \Rightarrow \text{گزینه (۱)}$$

۳ ۲۱۰

نکته

اگر در تستی بیش از دو هم‌نهستی وجود داشت، معمولاً برای یکسان کردن طرف دوم باید به سمت اعداد منفی برویم.

کافی است برای یکسان کردن طرف دوم به سمت اعداد منفی برویم:

$$\begin{cases} a \equiv 5 \pmod{12} \\ a \equiv 8 \pmod{15} \\ a \equiv 25 \pmod{22} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 5 \pmod{12} \\ a \equiv -7 \pmod{15} \\ a \equiv -7 \pmod{22} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = 480k - 7 \xrightarrow{\text{کوچکترین } a} a = 473 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 4 + 7 + 3 = 14$$

چون بیش از دو هم‌نهستی داریم، به سمت اعداد منفی می‌رویم:

$$\begin{cases} a \equiv 5 \pmod{11} \\ a \equiv 8 \pmod{14} \\ a \equiv 9 \pmod{15} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 5 \pmod{11} \\ a \equiv -6 \pmod{14} \\ a \equiv -6 \pmod{15} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a \equiv -6 \pmod{[11, 14, 15]} \Rightarrow a \equiv -6 \pmod{231} \Rightarrow a = 231k - 6$$

$$\xrightarrow{\text{کوچکترین } a} a = 2304 \Rightarrow \text{مضرب ۴ و ۹ است، پس مضرب ۳۶ می‌باشد.}$$

۱ ۲۰۵ روش اول: با توجه به صورت سؤال $a \equiv 5 \pmod{9}$ و $a \equiv 6 \pmod{6}$ است و ما

باقی‌مانده تقسیم a بر ۶۳ را می‌خواهیم. اگر طرف دوم روابط هم‌نهستی فوق را یکسان کنیم، به راحتی می‌توانیم به کمک م.م.م ۷ و ۹، عدد ۶۳ را ایجاد کنیم:

$$\begin{cases} a \equiv 5 \pmod{9} \\ a \equiv 6 \pmod{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 5 \pmod{9} \\ a \equiv 6 \pmod{6} \end{cases} \Rightarrow a \equiv 41 \pmod{[9, 6]} \Rightarrow a \equiv 41 \pmod{63}$$

باقی‌مانده یعنی ۴۱ عددی اول است.

روش دوم: ممکن است با خود بگویید پیدا کردن عدد مشترک طرف دوم سخت و

وقت‌گیر است. برای این منظور می‌توانید به عدد ۵، تا ۹ تا و به عدد ۶، تا ۷ تا اضافه کنید تا به یک عدد برابر برسید. مطمئن هستیم این عدد برابر عددی کوچک‌تر از ۶۳ است، چون قرار است همین عدد برابر، باقی‌مانده تقسیم a بر ۶۳ باشد:

$$\begin{cases} a \equiv 5 \pmod{9} \\ a \equiv 6 \pmod{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 5 \pmod{9} \\ a \equiv 6 \pmod{6} \end{cases} \Rightarrow a \equiv 41 \pmod{63}$$

روش سوم: با توجه به خاصیت $a \equiv b \pmod{c} \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{c}$ داریم:

$$\begin{cases} a \equiv 5 \pmod{9} \\ a \equiv 6 \pmod{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7a \equiv 35 \pmod{63} \\ 9a \equiv 54 \pmod{63} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7a \equiv 35 \pmod{63} \\ 9a \equiv 54 \pmod{63} \end{cases} \Rightarrow a \equiv 41 \pmod{63}$$

۴ ۲۰۶

تقسیم‌های داده‌شده را به صورت هم‌نهستی می‌نویسیم و داریم:

$$\begin{cases} a \equiv 12 \pmod{29} \\ a \equiv 17 \pmod{21} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 12 \pmod{29} \\ a \equiv -17 \pmod{21} \end{cases} \Rightarrow a \equiv -17 \pmod{[29, 21]} \Rightarrow a \equiv -17 \pmod{609}$$

$$\Rightarrow a = 609k - 17 \xrightarrow{k=1} a = 592 \Rightarrow \text{رقم وسط} = 9$$

۱ ۲۰۷ تقسیم‌های سؤال به زبان ریاضی $A \equiv 9 \pmod{28}$ و $A \equiv 5 \pmod{23}$ می‌باشند. پس:

$$\begin{cases} 2A \equiv 18 \pmod{28} \\ A \equiv 5 \pmod{23} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A \equiv 18 \pmod{28} \\ A \equiv 5 \pmod{23} \end{cases} \Rightarrow 23A \equiv 299 \pmod{644} \Rightarrow 23A \equiv 299 \pmod{644}$$

$$\xrightarrow{(*) - (**)} 6A \equiv 214 \pmod{644} \Rightarrow 3A \equiv 107 \pmod{322} \Rightarrow 3A \equiv 107 \pmod{322}$$

$$\xrightarrow{\div 3} A \equiv 166 \pmod{322}$$

$$\Rightarrow A = 322k + 166 \xrightarrow{\text{بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی}} A = 948$$

حال باید باقی‌مانده تقسیم ۹۴۸ بر ۱۲ را به دست آوریم. چون ۹۴۸ بر ۴ و هم‌چنین بر ۳ بخش‌پذیر است، پس بر ۱۲ نیز بخش‌پذیر می‌باشد، پس باقی‌مانده تقسیم، برابر صفر است.

۱ ۲۰۸ در تقسیم عدد N بر ۳۱ که باقی‌مانده برابر ۲۶ می‌باشد، صحبت

از خارج قسمت نشده است، پس داریم:

$$N \equiv 26 \pmod{31}$$

۲۱۲ ۴

چون سه هم‌نهشتی داریم، باید به سمت اعداد منفی برویم:

$$\begin{cases} A \equiv 2^{\Delta} - 3 \\ A \equiv 4^{\nabla} - 3 \\ A \equiv 8^{\Pi} - 3 \end{cases} \Rightarrow A \equiv_{[50 \cdot 7 \cdot 11]}^{\Delta} - 3 \Rightarrow A \equiv_{385}^{\Delta} - 3$$

بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی $A = 385k - 3$
 $k=2 \Rightarrow A = 767$

حال باقی‌مانده تقسیم ۷۶۷ را بر ۲۳ به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{r} 767 \mid 23 \\ -69 \\ \hline 77 \\ -69 \\ \hline 8 \end{array} \Rightarrow r = 8$$

۲ ۲۱۳

اگر بیش از دو هم‌نهشتی داشتیم و بتوان خیلی سریع دوتا از آن‌ها را یکی کرد، آن دو را یکی می‌کنیم و سپس هم‌نهشتی حاصل را با سومی در نظر می‌گیریم و ادامه ماجرا ...

هم‌نهشتی‌های سؤال $X \equiv 1^{\circ}$ ، $X \equiv 1^{\Delta}$ و $X \equiv 1^{\Pi}$ می‌باشند. دو هم‌نهشتی آخر را به راحتی می‌توان به یک هم‌نهشتی تبدیل کرد:

$$\begin{cases} X \equiv 1^{\Delta} \\ X \equiv 1^{\Pi} \end{cases} \Rightarrow X \equiv_{[4 \cdot 5]}^{\Delta} 1 \Rightarrow X \equiv 1^{\circ}$$

حال با $X \equiv 1^{\circ}$ و $X \equiv 0^{\circ}$ کار را ادامه می‌دهیم:

$$\begin{cases} X \equiv 1^{\circ} \\ X \equiv 0^{\circ} \end{cases} \Rightarrow X \equiv_{[20 \cdot 11]}^{\circ} 121 \Rightarrow X \equiv_{220}^{\circ} 121 \Rightarrow X = 220k + 121$$

سه‌رقمی $\Rightarrow k = 0, 1, 2, 3 \Rightarrow$ جواب ۴

دقت کنید استدلال ما برای رسیدن سریع به ۱۲۱ می‌تواند این‌گونه باشد؛ بگوییم هر مضرب ۲۰ که به یک اضافه کنیم، رقم یکان عدد حاصل ۱ می‌شود. حال کدام مضرب ۱۱ است که رقم یکانش ۱ است؟ که به عدد ۱۲۱ می‌رسیم.

۲۱۴ ۳

برای آن‌که معادله $6X \equiv 2a + 5$ دارای جواب باشد باید رابطه $(6, 9) \mid 2a + 5$ برقرار باشد، پس:

با توجه به گزینه‌ها $(6, 9) = 3 \Rightarrow 3 \mid 2a + 5 \Rightarrow a = 41$

۲۱۵ ۴

برای آن‌که معادله $42X \equiv 5a$ دارای جواب باشد باید رابطه $5a \mid (42, 15)$ برقرار باشد. پس:

با توجه به گزینه‌ها $(42, 15) = 3 \Rightarrow 3 \mid 5a \Rightarrow a = 9$

۲۱۶ ۲

برای آن‌که معادله $42X \equiv 5n - 2$ جواب داشته باشد باید $(42, 15) \mid 5n - 2$ برقرار باشد، پس:

$(42, 15) = 3 \Rightarrow 3 \mid 5n - 2 \Rightarrow 5n - 2 \equiv 0^{\circ}$

$\Rightarrow 5n \equiv 2^{\circ} \Rightarrow n \equiv 1^{\circ} \Rightarrow n = 2k + 1$

حال تعداد اعداد دورقمی n را می‌خواهیم:

$10 \leq n < 100 \Rightarrow 10 \leq 3k + 1 < 100 \Rightarrow 9 \leq 3k < 99$

$\Rightarrow 3 \leq k < 33 \Rightarrow$ تعداد n ها = ۳۰

باید سعی کنیم a را تنها کنیم. ابتدا ۱۳ را با ۹ کوچک می‌کنیم:

$13a \equiv 11 \Rightarrow 4a \equiv 11$

حال اگر ۹ واحد به ۱۱ اضافه کنیم، طرفین هم‌نهشتی بر ۴ بخش پذیر می‌شود و داریم:

کوچک‌ترین سه‌رقمی $4a \equiv 11 \Rightarrow a \equiv 5 \Rightarrow a = 9k + 5 \Rightarrow a = 104$
 $k=11$

باید سعی کنیم X را تنها کنیم:

$19X \equiv 1 \Rightarrow -10X \equiv 1 \Rightarrow 30 \equiv 1 \Rightarrow X \equiv -3$
 $(-10, 29) = 1$

X دورقمی است. $\Rightarrow X = 29k - 3 \Rightarrow k = 1, 2, 3$

باید سعی کنیم X را تنها کنیم:

$72X \equiv 1 \Rightarrow 10X \equiv 1 \Rightarrow 10X \equiv -30 \Rightarrow X \equiv -3$
 $(10, 72) = 2$

حال می‌خواهیم X سه‌رقمی باشد. پس:

$100 \leq X < 1000 \Rightarrow 100 \leq 31k - 3 < 1000 \Rightarrow 103 \leq 31k < 1003$

$\Rightarrow 3/... \leq k < 32/... \Rightarrow 4 \leq k \leq 32 \Rightarrow$ تعداد X ها = ۲۹

ابتدا A و 53 را به پیمانه ۷ کوچک می‌کنیم:

$1! + 3! + 5! + 7! + \dots + 7! \equiv 7 + 6 + 12 \equiv 1$ ، $53 \equiv 4$

از این جا به بعد بر ۷ بخش پذیرند.

بنابراین معادله $Ax \equiv 53$ به صورت $x \equiv 4$ می‌باشد. یعنی $x = 7k + 4$ است. حال می‌خواهیم X دورقمی باشد، پس:

$10 \leq 7k + 4 < 99 \Rightarrow 6 \leq 7k < 95$

$\Rightarrow 1/... \leq k < 13/... \Rightarrow 1 \leq k \leq 13 \Rightarrow$ مقدار ۱۳

سعی می‌کنیم! $10!$ و 3^4 را به پیمانه ۱۱ کوچک کنیم. ۱۱

عددی اول است. می‌دانیم اگر p عددی اول باشد، $(p-1)! \equiv -1$ است. پس $10! \equiv -1$ می‌باشد. از طرفی داریم:

$3^2 \equiv 11 - 2 \Rightarrow 3^{10} \equiv 11 - 3 \cdot 2 \equiv 11$

$\Rightarrow 3^{50} \equiv 11 \equiv 12 \Rightarrow 3^{49} \equiv 4$
 $(3, 11) = 1$

بنابراین معادله هم‌نهشتی $(10!)x \equiv 3^4$ به صورت $-x \equiv 4$ ساده می‌شود.

$-x \equiv 4 \Rightarrow x \equiv -4$

پس داریم:

کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی $\Rightarrow x = 11k - 4 \Rightarrow x = 106 \Rightarrow$ رقم یکان = ۶
 $k=10$

۲۲۶ ۴ باید $0 \equiv (3x-1)(5x-3) \equiv 17$ باشد. حال سعی ماین است

که x را تنها کنیم: $2x-1 \equiv 17 \Rightarrow 2x \equiv 18 \xrightarrow{(2,17)=1} x \equiv 9$

$\Rightarrow x = 17k + 9 \xrightarrow{x < 25} k = 0$

$3x + 2 \equiv 0 \Rightarrow 3x \equiv -2 \equiv 15 \Rightarrow x \equiv 5$

$\Rightarrow x = 17k + 5 \xrightarrow{x < 25} k = 0, 1$

$5x - 3 \equiv 0 \Rightarrow 5x \equiv 3 \equiv 20 \Rightarrow x \equiv 4$

$\Rightarrow x = 17k + 4 \xrightarrow{x < 25} k = 0, 1$

بنابراین برای x پنج عدد طبیعی کوچکتر از ۲۵ وجود دارد.

۲۲۷ ۴ باید x را تنها کنیم:

$2x^2 - x - 6 \equiv 0 \Rightarrow (2x+3)(x-2) \equiv 53$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+3 \equiv 53 \Rightarrow 2x \equiv 50 \Rightarrow x \equiv 25 \\ x-2 \equiv 53 \Rightarrow x \equiv 55 \end{cases} \xrightarrow{(2,53)=1} x \equiv 25$$

بزرگترین عدد سه رقمی به ازای $k = 18$ از تساوی $x = 53k + 25$ به دست می آید که برابر ۹۷۹ است که رقم یکان آن ۹ می باشد.

۲۲۸ ۳ وقتی $2 - x + 3x^2$ بر ۴۱ بخش پذیر است، یعنی $0 \equiv 3x^2 + x - 2 \equiv 41$

است، پس: $3x^2 + x - 2 \equiv 0 \Rightarrow (3x-2)(x+1) \equiv 41 \Rightarrow \begin{cases} 3x-2 \equiv 41 \\ x+1 \equiv 41 \end{cases}$

حال از هر معادله به دست آمده مقادیر دورقمی x را به دست می آوریم:

$3x - 2 \equiv 41 \Rightarrow 3x \equiv 43 \equiv -39 \Rightarrow x \equiv -13$

$\Rightarrow x = 41k - 13 \xrightarrow{\text{دورقمی } x} x = 28, x = 69$

$x + 1 \equiv 41 \Rightarrow x \equiv 40 \Rightarrow x = 41k - 1 \xrightarrow{\text{دورقمی } x} x = 40, x = 81$

بنابراین ۴ عدد طبیعی دورقمی برای x وجود دارد.

۲۲۹ ۲ رابطه $1 \equiv x^2 + 6x$ را به صورت $0 \equiv x^2 + x - 1 \equiv 6x$ می نویسیم

و داریم:

$6x^2 + x - 1 \equiv 0 \Rightarrow (3x-1)(2x+1) \equiv 39 \Rightarrow \begin{cases} 3x-1 \equiv 39 \\ 2x+1 \equiv 39 \end{cases}$

حال از هر کدام از معادلات x ، بزرگترین مقدار سه رقمی x را می یابیم:

معادله جواب ندارد. $3x - 1 \equiv 39 \Rightarrow 3x \equiv 40 \Rightarrow x \equiv 13 \frac{2}{3}$

$2x + 1 \equiv 39 \Rightarrow 2x \equiv 38 \equiv -2 \Rightarrow x \equiv -1 \equiv 39$

بزرگترین عدد سه رقمی $x = 994 \Rightarrow x = 39k - 2 \Rightarrow$ رقم یکان $k = 26$

۲۲۲ ۳ وقتی رابطه هم نهستی ۱۵ کلاس هم نهستی ایجاد کرده، پس

پیمانه هم نهستی ۱۵ است. از طرفی چون $6a^4$ در کلاس هم نهستی [۹] قرار دارد، پس $6a^4$ با ۹ در پیمانه ۱۵ هم نهست هستند. بنابراین داریم:

$6a^4 \equiv 9 \Rightarrow 2a^4 \equiv 3 \Rightarrow a^4 \equiv 6 \Rightarrow a \equiv 15$

حال اگر ۱۵ واحد به ۵ اضافه کنیم، طرفین هم نهستی بر ۱۰ بخش پذیر می شوند:

$10a \equiv 5 \Rightarrow a \equiv 2 \Rightarrow a = 3k + 2 \xrightarrow{\text{رقم است } a} a = 20, 50, 80 \leq a \leq 9$

۲۲۳ ۴ ابتدا تقسیم داده شده را به زبان ریاضی می نویسیم:

$a = b \times 25 + 17, 17 < b$

در صورت سؤال گفته شده، a مضرب ۶ است. حال باید بررسی کنیم برای آن که a مضرب ۶ باشد، b چگونه است. پس:

$a \equiv 0 \Rightarrow 25b + 17 \equiv 0 \Rightarrow b - 1 \equiv 0 \Rightarrow b \equiv 1 \Rightarrow b = 6k + 1$

دهگان کوچکترین عدد طبیعی a را می خواهیم، باید کوچکترین b که به فرم $6k + 1$ است و در نامساوی $b > 17$ صدق می کند را به دست آوریم:

$b > 17 \xrightarrow{b=6k+1} 6k+1 > 17 \Rightarrow k_{\min} = 3 \Rightarrow b_{\min} = 6(3)+1=19$

بنابراین کوچکترین عدد طبیعی a برابر است با:

$a_{\min} = 25(19) + 17 \Rightarrow a_{\min} = 492 \Rightarrow$ رقم دهگان $= 9$

۲۲۴ ۲ ابتدا تقسیم گفته شده را به زبان ریاضی می نویسیم:

$a = b \times 21 + 37, 37 < b$

حال برای a دو شرط داریم. یکی این که مضرب ۵ است و دیگری این که سه رقمی می باشد. پس داریم:

$a \equiv 0 \Rightarrow 21b + 37 \equiv 0 \Rightarrow b + 2 \equiv 0 \Rightarrow b \equiv -2$

$\Rightarrow b = 5k - 2 \xrightarrow{b > 37} k_{\min} = 8$

دقت کنید اگر $k = 8$ باشد، a حتماً سه رقمی است، پس باید حواسمان باشد که a چهاررقمی نشود. پس:

$a < 1000 \Rightarrow 21b + 37 < 1000 \Rightarrow 21(5k-2) + 37 < 1000$

$\Rightarrow 105k - 5 < 1000 \Rightarrow 105k < 1005 \Rightarrow k_{\max} = 9$

چون دو مقدار برای k به دست آمده، پس دو مقدار برای b و در نتیجه دو مقدار برای a وجود دارد.

۲۲۵ ۴ ابتدا تقسیم داده شده را به زبان ریاضی می نویسیم:

$a = b \times 25 + 13, 13 < b$

حال باید ببینیم برای آن که a مضرب ۷ باشد، b باید چگونه باشد. پس:

$a \equiv 0 \Rightarrow 25b + 13 \equiv 0 \Rightarrow 4b - 1 \equiv 0$

$\Rightarrow 4b \equiv 1 \Rightarrow b \equiv 4 \Rightarrow b = 7k + 2$

بزرگترین عدد سه رقمی a را می خواهیم، پس:

$a < 1000 \Rightarrow 25b + 13 < 1000 \xrightarrow{b=7k+2} 25(7k+2) + 13 < 1000$

$\Rightarrow 175k < 937 \Rightarrow k < 5 \dots \Rightarrow k_{\max} = 5$

$\Rightarrow a_{\max} = 25(7 \times 5 + 2) + 13 = 938$

\Rightarrow مجموع ارقام $= 9 + 3 + 8 = 20$

از آن جایی که گفته شده دو عبارت نسبت به هم غیراول اند، پس $d = 29$. کافی است یکی از عبارت‌ها را مضرب 29 قرار دهیم.

$$\Delta n - 2 \equiv 0 \Rightarrow \Delta n \equiv 2 \pmod{29} \xrightarrow{+5} n \equiv 12 \pmod{29} \quad (\Delta, 29)=1$$

$$\Rightarrow n = 29k + 12 \xrightarrow{1 \leq n \leq 99} 10 \leq 29k + 12 \leq 99 \Rightarrow k = 0, 1, 2, 3 \Rightarrow \text{مقدار 4}$$

فرض می‌کنیم $d = (13n - 3, \Delta n + 4)$ باشد: **۲۳۵ ۱**

$$\begin{cases} d | \Delta n + 4 \\ d | 13n - 3 \end{cases} \Rightarrow d | 13(\Delta n + 4) - \Delta(13n - 3) \Rightarrow d | 67 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 67$$

چون دو عبارت نسبت به هم اول نیستند، پس $d = 67$ قابل قبول است، یعنی هر دو عبارت باید مضرب 67 باشند:

$$\Delta n + 4 \equiv 0 \Rightarrow \Delta n \equiv -4 \equiv 13 \pmod{67} \xrightarrow{+5} n \equiv 26 \pmod{67} \quad (\Delta, 67)=1$$

$$\Rightarrow n = 67k + 26 \Rightarrow k = 0, 1$$

فرض می‌کنیم $d = (11n + 2, 9n - 5)$ باشد، پس: **۲۳۶ ۳**

$$\begin{cases} d | 11n + 2 \\ d | 9n - 5 \end{cases} \Rightarrow d | 9(11n + 2) - 11(9n - 5) \Rightarrow d | 73 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 73$$

چون دو عبارت نسبت به هم غیراول اند، پس $d = 73$ است. حال کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی n را به دست می‌آوریم:

$$9n - 5 \equiv 0 \Rightarrow 9n \equiv 5 \pmod{73} \xrightarrow{+3} 3n \equiv 26 \pmod{73} \quad (\Delta, 73)=1$$

$$\xrightarrow{+3} n \equiv 33 \pmod{73} \Rightarrow n = 73k + 33$$

کوچک‌ترین سه‌رقمی $n = 106 \Rightarrow$ رقم یکان $= 6$

فرض می‌کنیم $d = (6n + 5, 17n + 13)$ باشد، پس: **۲۳۷ ۴**

$$\begin{cases} d | 6n + 5 \\ d | 17n + 13 \end{cases} \Rightarrow d | 17(6n + 5) - 6(17n + 13) \Rightarrow d | 7 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 7$$

چون دو عبارت نسبت به هم اول نیستند، پس $d = 7$ می‌باشد. حال داریم:

$$6n + 5 \equiv 0 \Rightarrow 6n \equiv -5 \pmod{7} \Rightarrow -n \equiv -5 \pmod{7} \Rightarrow n \equiv 5 \pmod{7} \Rightarrow n = 7k + 5$$

می‌دانیم هیچ عدد مربع کاملی به فرم $7k + 5$ نمی‌باشد، زیرا:

$$n \equiv 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \pmod{7} \Rightarrow n^2 \equiv 0, 1, 4, 2 \pmod{7}$$

فرض می‌کنیم $d = (11n - 3, 2n + 7)$ باشد، در این صورت داریم: **۲۳۸ ۲**

$$\begin{cases} d | 11n - 3 \\ d | 2n + 7 + 13 \end{cases} \Rightarrow d | 2(11n - 3) - 11(2n + 7) \Rightarrow d | -83 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 83$$

چون گفته شده دو عبارت نسبت به هم اول اند، پس $d = 83$ نباید قابل قبول باشد. پس یکی از آن‌ها را مضرب 83 قرار می‌دهیم تا ببینیم به ازای چه n هایی این اتفاق می‌افتد و اولین آن‌ها کدام است!!

$$2n + 7 \equiv 0 \Rightarrow 2n \equiv -7 \pmod{83} \xrightarrow{+2} n \equiv 38 \pmod{83} \Rightarrow n = 83k + 38$$

کوچک‌ترین عددی که به ازای آن دو عبارت، نسبت به هم غیراول می‌شوند $n = 38$ است، پس به ازای هر $n \leq 37$ نسبت به هم اول اند.

۲۳۰ ۳ باید $x^3 - 3x + 4 \equiv 0$ باشد. حال داریم:

$$x^3 - 3x + 4 \equiv 0 \Rightarrow x^3 - x - 2x + 4 \equiv 0 \Rightarrow (x(x^2 - 1)) - 2x + 4 \equiv 0$$

ضرب سه عدد متوالی

$$\Rightarrow ((x-1) \times x \times (x+1)) - 2x + 4 \equiv 0$$

$$\Rightarrow -2x + 4 \equiv 0 \Rightarrow 2x \equiv 4 \pmod{3!q} \xrightarrow{+2} x \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow x = 3k + 2$$

حال x های دورقمی را پیدا می‌کنیم:

$$10 \leq x \leq 99 \Rightarrow 10 \leq 3k + 2 \leq 99 \Rightarrow 8 \leq 3k \leq 97$$

$k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3 \leq k \leq 32 \Rightarrow$ تعداد x ها $= 30$

فرض می‌کنیم که $d = (9n + 2, 11n + 7)$ باشد، در این صورت: **۲۳۱ ۲**

$$\begin{cases} d | 11n + 7 \\ d | 9n + 2 \end{cases} \Rightarrow d | 9(11n + 7) - 11(9n + 2) \Rightarrow d | 63 - 22$$

$$\Rightarrow d | 41 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 41$$

چون دو عبارت نسبت به هم اول نیستند، پس $d = 41$ قابل قبول است. یعنی هر دو عبارت باید مضرب 41 باشند (کافی است یکی از آن‌ها را مضرب 41 قرار دهیم):

$$9n + 2 \equiv 0 \Rightarrow 9n \equiv -2 \equiv 39 \pmod{41} \xrightarrow{+1} 9n \equiv 41$$

$$\xrightarrow{+3} 3n \equiv 13 \pmod{41} \xrightarrow{+3} n \equiv 18 \pmod{41} \quad (\Delta, 41)=1$$

$$\Rightarrow n = 41k + 18 \xrightarrow{k=0} \min(n) = 18 \Rightarrow \text{مضرب 6}$$

اگر فرض کنیم $d = (11n - 5, 9n + 2)$ باشد، آن‌گاه: **۲۳۲ ۱**

$$\begin{cases} d | 11n - 5 \\ d | 9n + 2 \end{cases} \Rightarrow d | 9(11n - 5) - 11(9n + 2) \Rightarrow d | -67 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 67$$

حال برای این‌که نسبت به هم غیراول باشند، باید دو عبارت مضرب 67 باشند:

$$9n + 2 \equiv 0 \Rightarrow 9n \equiv -2 \equiv 133 \pmod{67} \xrightarrow{+3} 3n \equiv 44 \pmod{67} \quad (\Delta, 67)=1$$

$$\xrightarrow{+3} n \equiv 37 \pmod{67} \Rightarrow n = 67k + 37 \xrightarrow{\text{دورقمی}} k = 0$$

با فرض $d = (9n + 4, 12n - 5)$ داریم: **۲۳۳ ۲**

$$\begin{cases} d | 12n - 5 \\ d | 9n + 2 \end{cases} \Rightarrow d | 3(12n - 5) - 4(9n + 4) \Rightarrow d | -21 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 31$$

حال چون نسبت به هم اول نیستند، پس باید هر دو مضرب 31 باشند:

$$9n + 4 \equiv 0 \Rightarrow 9n \equiv -4 \equiv 27 \pmod{31} \xrightarrow{+9} n \equiv 3 \pmod{31} \quad (\Delta, 31)=1$$

$$\Rightarrow n = 31k + 3 \Rightarrow k = 1, 2, 3 \Rightarrow \text{جواب 3}$$

با فرض $d = (7n + 3, 5n - 2)$ داریم: **۲۳۴ ۲**

$$\begin{cases} d | 5n - 2 \\ d | 7n + 3 \end{cases} \Rightarrow d | 7(5n - 2) - 5(7n + 3) \Rightarrow d | 29 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 29$$



۲۴۵) ابتدا توانی از ۷ را پیدا می‌کنیم تا به پیمانه ۵۷ برابر ۱ یا -۱ شود:

$$7^3 \equiv 1 \xrightarrow{\text{توان } 57} 7^{15} \equiv 1 \xrightarrow{\times 7^2} 7^{17} \equiv 49$$

حال چون $7^{17} + a$ بر ۵۷ بخش پذیر است، داریم:

$$7^{17} + a \equiv 0 \Rightarrow 49 + a \equiv 0 \xrightarrow{\text{با توجه به گزینه‌ها}} a = 8$$

۲۴۶) **روش اول:** ابتدا باقی‌مانده تقسیم 2^{11} بر ۲۳ را به دست می‌آوریم:

$$2^{11} \equiv 2^5 \times 2^6 \equiv 9 \times (-5) \equiv 1$$

حال باقی‌مانده تقسیم A بر ۲۳ برابر است با:

$$(2^{11} + 7) \times 9 \equiv (1 + 7) \times 9 \equiv 3$$

۲۴۷) **روش دوم:** حاصل 2^{11} را به راحتی می‌توانیم حساب کنیم. می‌دانیم $2^{10} = 1024$ است، پس $2^{11} = 2048$ می‌باشد و داریم:

$$(2^{11} + 7) \times 9 \equiv (2048 + 7) \times 9 \equiv (1 + 7) \times 9 \equiv 3$$

۲۴۸) رابطه هم‌باقی‌مانده بر ۱۱ همان رابطه هم‌نهشتی در پیمانه ۱۱ است. از آن جایی که ۱۱ عددی اول است، داریم:

$$5^{10} \equiv 1 \Rightarrow 5^{10} \in [1]_{11}$$

۲۴۹) چون a و ۱۵ نسبت به هم اول‌اند، پس a مضرب ۳ و مضرب ۵ نیست. چون ۳ و ۵ عددی اول‌اند، می‌توان گفت:

$$\begin{cases} a^2 \equiv 1 \xrightarrow{\text{توان } 2} a^4 \equiv 1 \\ a^4 \equiv 1 \xrightarrow{[3,5]} a^4 \equiv 1 \Rightarrow a^4 \equiv 15 \Rightarrow a^4 + 23 \equiv 24 \equiv 9 \end{cases}$$

۲۵۰) **روش اول:** چون پیمانه عدد اول ۱۱ می‌باشد، پس $3^{10} \equiv 1$ است. حال با به توان رساندن و ضرب کردن در توان‌های ۳ به 3^{48} می‌رسیم:

$$3^{10} \equiv 1 \xrightarrow{\text{توان } 4} 3^{40} \equiv 1 \xrightarrow{\times 3^8} 3^{48} \equiv 1 \times 3^4 \equiv 4 \times 4 \equiv 4$$

۲۵۱) **روش دوم:** ابتدا توانی از ۳ را پیدا می‌کنیم که باقی‌مانده تقسیم آن بر ۱۱ برابر ۱ یا -۱ باشد:

$$3^3 \equiv 27 \equiv 5 \xrightarrow{\times 3} 3^4 \equiv 15 \equiv 4 \xrightarrow{\times 3} 3^5 \equiv 12 \equiv 1$$

$$\Rightarrow (3^5 \equiv 1)^9 \Rightarrow 3^{45} \equiv 1 \xrightarrow{\times 3^3} 3^{48} \equiv 27 \equiv 5$$

۲۵۰) به نظر می‌رسد به دلیل اول بودن ۱۷ بگوییم $13^{16} \equiv 1$ است. این هم‌نهشتی کاملاً درست است اما برای رسیدن از 13^{16} به 13^{43} دچار مشکل می‌شویم. چون وقتی آن را به توان ۲ می‌رسانیم 13^{32} شده که در مرحله بعد باید طرفین را در 13^{11} ضرب کنیم که 13^{11} عدد کوچکی نیست. با کمی دقت متوجه می‌شویم که $13^{17} \equiv -1$ است، پس:

$$13^{17} \equiv -1 \xrightarrow{\text{توان } 21} 13^{42} \equiv -1 \xrightarrow{\times 13} 13^{43} \equiv 13 \equiv 4$$

۲۳۹) ابتدا ب.م.م دو عدد $4n + 1$ و $5n - 3$ را به دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم $d = (5n - 3, 4n + 1)$ باشد، پس:

$$\begin{cases} d \mid 4n + 1 \\ d \mid 5n - 3 \end{cases} \Rightarrow d \mid 5(4n + 1) - 4(5n - 3) \Rightarrow d \mid 17 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 17$$

حال بررسی می‌کنیم به ازای چند عدد طبیعی و دورقمی n، اعداد $4n + 1$ و $5n - 3$ نسبت به هم اول نیستند، یعنی ب.م.م آن‌ها ۱۷ است. پس:

$$4n + 1 \equiv 0 \Rightarrow 4n \equiv -1 \equiv 16 \xrightarrow{-(4,17)=1} n \equiv 4$$

$$\Rightarrow n = 17k + 4 \xrightarrow{\text{دورقمی } n} k = 1, 2, 3, 4, 5$$

بنابراین به ازای ۵ عدد طبیعی، ب.م.م دو عدد $4n + 1$ و $5n - 3$ برابر ۱۷ است، پس به ازای $85 = 90 - 5$ عدد دورقمی دو عبارت نسبت به هم اول‌اند (حتماً می‌دانید که تعداد اعداد دورقمی ۹۰ تا است!!!).

۲۴۰) ابتدا ۵۱ را به پیمانه ۷ کوچک می‌کنیم و داریم:

$$51 \equiv 2 \Rightarrow 51^{131} \equiv 2^{131}$$

حال باقی‌مانده تقسیم 2^{131} بر ۷ را به دست می‌آوریم. چون ۷ عددی اول است، می‌توان گفت $2^6 \equiv 1$ می‌باشد. پس:

$$2^6 \equiv 1 \xrightarrow{\text{توان } 21} 2^{126} \equiv 1 \xrightarrow{\times 2^5} 2^{131} \equiv 2^5 \equiv 4$$

توجه کنید می‌توانستیم از $2^3 \equiv 1$ نیز شروع کنیم و به 2^{131} برسیم.

۲۴۱) می‌دانیم ۱۷ عددی اول است و ۳ مضرب ۱۷ نیست. پس:

$$3^{16} \equiv 1 \xrightarrow{\times 3^4} 3^{20} \equiv 3^4 \equiv 13$$

۲۴۲) ابتدا کوچک‌ترین توان ۳ را که از ۴۱ بیشتر شود، پیدا می‌کنیم:

$$3^4 \equiv 81 \equiv -1 \xrightarrow{\text{توان } 7} 3^{28} \equiv -1 \xrightarrow{\times 3^3} 3^{31} \equiv -27$$

$$\Rightarrow 3^{31} - 9 \equiv -27 - 9 \equiv 5$$

۲۴۳) ابتدا کوچک‌ترین توان ۲ را که از ۴۳ بیشتر شود، پیدا می‌کنیم و داریم:

$$2^6 \equiv 64 \equiv -1 \Rightarrow 2^{42} \equiv -1$$

بنابراین $2^7 \equiv -1$ می‌باشد، پس:

$$2^7 \equiv -1 \xrightarrow{\text{توان } 3} 2^{21} \equiv -1 \xrightarrow{\times 2^5} 2^{26} \equiv -32 \equiv 11$$

۲۴۴) باید $3^{15} + a^{17} \equiv 0$ باشد. چون ۱۷ عددی اول است، ابتدا طرفین را در ۳ ضرب می‌کنیم و داریم:

$$3^{15} + a^{17} \equiv 0 \Rightarrow 3^{16} + 3a^{17} \equiv 0 \Rightarrow 1 + 3a^{17} \equiv 0$$

$$\Rightarrow 3a^{17} \equiv -1 \equiv -18 \xrightarrow{-(3,17)=1} a^{17} \equiv -6 \Rightarrow a = 17k - 6$$

حال باید تعداد اعداد دورقمی a را پیدا کنیم:

$$10 \leq a \leq 99 \Rightarrow 10 \leq 17k - 6 \leq 99 \Rightarrow 16 \leq 17k \leq 105$$

$$\Rightarrow \text{عدد } 6 \Rightarrow \dots \leq k \leq \dots \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} 1 \leq k \leq 6$$

۳ ۲۵۶



برای به دست آوردن باقی‌مانده تقسیم a^{b^c} بر m ، ابتدا توانی از a پیدا می‌کنیم که در هم‌نهشتی به پیمانه m برابر ۱ شود. سپس با به توان رساندن و ضرب کردن به a^{b^c} می‌رسیم.

ابتدا توانی از ۷ را پیدا می‌کنیم که به پیمانه ۴۳ هم‌نهشت ۱ شود:

$$7^2 \equiv 49 \equiv 6 \pmod{43} \xrightarrow{\times 7} 7^3 \equiv 42 \equiv -1 \pmod{43} \xrightarrow{\text{توان } 2} 7^6 \equiv 1 \pmod{43}$$

سپس باقی‌مانده تقسیم 17^9 را بر ۶ به دست می‌آوریم:

$$17^6 \equiv -1 \pmod{6} \xrightarrow{\text{توان } 9} 17^9 \equiv -1^3 \equiv -1 \equiv 5 \pmod{6} \Rightarrow 17^9 = 6q + 5$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$7^6 \equiv 1 \pmod{43} \xrightarrow{\text{توان } q} 7^{6q} \equiv 1 \pmod{43} \xrightarrow{\times 7^5} 7^{6q+5} \equiv 7^5 \pmod{43} \Rightarrow 7^{17^9} \equiv 7^5 \pmod{43}$$

حال اگر باقی‌مانده تقسیم 7^5 بر 43 را به دست آوریم، کار تمام است:

$$7^2 \equiv 49 \equiv 6 \pmod{43} \xrightarrow{\times 7} 7^3 \equiv 42 \equiv -1 \pmod{43} \xrightarrow{\times 7^2} 7^5 \equiv -49 \equiv -6 \equiv 37 \pmod{43}$$

از حسابان (۱) به یاد دارید که $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ۳ ۲۵۷

پس:

$$(1+2+\dots+1380)^{1380} = \left(\frac{1380 \times 1381}{2}\right)^{1380} = (690 \times 1381)^{1380}$$

بنابراین باقی‌مانده تقسیم $(1+2+\dots+1380)^{1380}$ بر 1380 برابر است با:

$$(1+2+\dots+1380)^{1380} \equiv (690 \times 1381)^{1380} \equiv 690^{1380} \cdot 1381^{1380} \pmod{1380}$$

دقت کنید $690 = 2 \times 345$ می‌باشد، پس واضح است که اگر 690 به توان

1380 برسد، حتماً مضرب 1380 می‌شود.

۳ ۲۵۸ واضح است $5 + 7 = 12$ و $5 \times 7 = 35$ است. پس:

$$(5+7)^{19} \equiv 5^{19} + 7^{19} \pmod{35} \Rightarrow 12^{19} \equiv 5^{19} + 7^{19} \pmod{35} \Rightarrow 12^{19} - 5^{19} - 7^{19} \equiv 0 \pmod{35}$$

چون $23 = 11 + 12$ است، داریم:

$$23^{51} \equiv 11^{51} + 12^{51} \pmod{35} \Rightarrow 23^{51} - 11^{51} - 12^{51} \equiv 0 \pmod{35}$$

۳ ۲۶۰



در محاسبه باقی‌مانده تقسیم اعداد توان‌دار بر m ، اگر m مرکب بود به جای m یک مقسوم‌علیه m را قرار می‌دهیم (پیمانه را لاغر می‌کنیم). فقط باید از عددی به جای m استفاده کنید که گزینه‌ها به پیمانه جدید متفاوت شوند.

همین ابتدای کار توجه کنید که گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست هستند، چون باقی‌مانده هیچ‌گاه منفی نمی‌شود. به جای ۳۳ می‌توان هم ۳ قرار داد و هم ۱۱، اما

به ازای ۳، گزینه‌های (۳) و (۴) با صفر هم‌نهشت می‌شوند ($18 \equiv 0$ و $18 \equiv 0$).

ولی اگر ۱۱ را قرار دهیم گزینه‌ها متفاوت می‌شوند ($18 \equiv 7$ و $18 \equiv 4$):

$$-6 \times 36 \equiv -6 \times 3 \equiv -18 \pmod{11} \Rightarrow (-1) \times 6^3 \equiv -1 \pmod{11} \Rightarrow (-6)^{23} \equiv 1 \pmod{11}$$

$$11 \equiv -6 \times 3 \pmod{11} \Rightarrow (-6)^{23} \equiv 1 \pmod{11}$$

که ۱۵ در پیمانه ۱۱ با ۴ هم‌نهشت است، پس گزینه (۳) صحیح می‌باشد.

۴ ۲۵۱

وقتی عدد $a + 7^{15}$ مضرب ۱۷ است، یعنی $7^{15} + a \equiv 0 \pmod{17}$ می‌باشد.

چون ۱۷ عددی اول است و می‌دانیم $7^{16} \equiv 1 \pmod{17}$ می‌باشد، پس طرفین رابطه هم‌نهشتی را در ۷ ضرب می‌کنیم تا بتوانیم از این قاعده استفاده کنیم:

$$7^{15} + a \equiv 0 \pmod{17} \xrightarrow{\times 7} 7^{16} + 7a \equiv 0 \pmod{17}$$

$$\Rightarrow 1 + 7a \equiv 0 \pmod{17} \xrightarrow{\text{با توجه به گزینه‌ها}} a = 12$$

۴ ۲۵۲

چون $7^{20} + a$ مضرب ۱۹ است، پس $7^{20} + a \equiv 0 \pmod{19}$ می‌شود. بنابراین 7^{20} را به پیمانه ۱۹ کوچک می‌کنیم:

$$7^{18} \equiv 1 \pmod{19} \xrightarrow{\text{توان } 11} 7^{198} \equiv 1 \pmod{19} \xrightarrow{\times 7^2} 7^{200} \equiv 49 \equiv 11 \pmod{19}$$

پس در رابطه $7^{20} + a \equiv 0 \pmod{19}$ می‌توان به جای 7^{20} عدد ۱۱ را قرار داد. حال داریم:

$$7^{20} + a \equiv 0 \pmod{19} \Rightarrow 11 + a \equiv 0 \pmod{19} \xrightarrow{\text{با توجه به گزینه‌ها}} a = 8$$

۳ ۲۵۳



می‌دانیم اگر a مضرب عدد اول p نباشد، همواره $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ می‌باشد. حال با ضرب طرفین در a ، داریم:

باید کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی a را تعیین کنیم به طوری که $a^{49} + 12a \equiv 1 \pmod{7}$ شود. چون ۷ عددی اول است، داریم:

$$a^7 \equiv a \pmod{7} \xrightarrow{\text{توان } 7} a^{49} \equiv a^7 \equiv a \pmod{7} \Rightarrow a^{49} + 12a \equiv a + 12a \equiv 13a \equiv 1 \pmod{7}$$

بنابراین در رابطه $a^{49} + 12a \equiv 1 \pmod{7}$ به جای $a^{49} + 12a$ می‌توان $-a$ قرار داد، پس:

$$-a \equiv 1 \pmod{7} \xrightarrow{\text{کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی}} a = 104 \xrightarrow{k=15} a = 7k - 1$$

\Rightarrow رقم یکان = ۴

توجه کنید که a حتماً مضرب ۷ نیست، چون اگر مضرب ۷ بود باقی‌مانده تقسیم $a^{49} + 12a$ بر ۷ برابر صفر می‌شد. به همین دلیل $a^7 \equiv a \pmod{7}$ می‌باشد.

۲ ۲۵۴

می‌دانیم $13^p \equiv 13 \pmod{13}$ است، داریم:

$$13^p - 13 \equiv 0 \pmod{13} \Rightarrow p | 12 \Rightarrow p = 2, p = 3$$

۴ ۲۵۵

با توجه به این که ۱۸۵ و ۲۴ در یک کلاس هم‌نهشتی به پیمانه m هستند، پس $24 \equiv 185 \pmod{m}$ می‌باشد. چون پیمانه مجهول است، رابطه هم‌نهشتی را به رابطه بخش‌پذیری تبدیل می‌کنیم و داریم:

$$m | 185 - 24 \Rightarrow m | 161 \Rightarrow m = 7 \text{ یا } m = 161 \text{ یا } m = 23$$

از آن جایی که $(m, 7) = 1$ می‌باشد، پس $m = 23$ مورد قبول است. حال باید باقی‌مانده تقسیم 23^{23} بر ۷ را به دست آوریم:

$$\begin{cases} 23^2 \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow 23^{23} \equiv 2^{23} \pmod{7} \\ \Rightarrow 23^{23} \equiv 4 \pmod{7} \\ 23^2 \equiv 1 \pmod{7} \xrightarrow{\text{توان } 7} 23^{14} \equiv 1 \pmod{7} \xrightarrow{\times 2^2} 23^{16} \equiv 4 \pmod{7} \end{cases}$$



حال باید کوچکترین n را پیدا کنیم:

$$25 \equiv 25 \pmod{7} \Rightarrow 27 \equiv 28 \pmod{7} \Rightarrow 31 \equiv 24 \pmod{7} \Rightarrow 2^0 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 2^1 \equiv 2 \pmod{7}$$

پس کوچکترین n برابر 2^0 است. البته می توانستیم برای پیدا کردن کوچکترین n از گزینه‌ها نیز استفاده کنیم. از کوچکترین عدد گزینه‌ها شروع می‌کنیم:

$$21^0 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 21^1 \equiv 21 \pmod{7} \Rightarrow 21^2 \equiv 21 \pmod{7} \Rightarrow 21^3 \equiv 21 \pmod{7} \Rightarrow 21^4 \equiv 21 \pmod{7}$$

$$\downarrow$$

$$1024$$

اما از $21^0 \equiv 1 \pmod{7}$ می‌توان نتیجه گرفت $21^0 \equiv 1 \pmod{7}$ است، پس کوچکترین n برابر 2^0 می‌باشد.

۲۶۷ باید $2^n + 1 \equiv 65 \pmod{12}$ باشد، یعنی $2^n \equiv -1 \pmod{12}$. بنابراین ابتدا کوچکترین توان 2 را پیدا می‌کنیم که باقی‌مانده تقسیم آن بر 65 برابر -1 شود:

$$2^k \equiv -1 \pmod{12} \Rightarrow (2^k + 1) \equiv 0 \pmod{12} \Rightarrow 2^k + 1 \equiv 0 \pmod{12}$$

$$\Rightarrow 2^k + 1 \equiv 0 \pmod{12} \Rightarrow n = 12k + 6$$

$$\Rightarrow 1 \leq 12k + 6 < 100 \Rightarrow -5 \leq 12k < 94$$

$$\Rightarrow -\frac{5}{12} \leq k < \frac{94}{12} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} 0 \leq k < 7 \Rightarrow \text{تعداد} = 8$$

۲۶۸ چون $42 \equiv -1 \pmod{43}$ می‌باشد، پس می‌توان نوشت $7^n - 1 \equiv 42^n - 1 \pmod{43}$ و این

یعنی $7^n \equiv 1 \pmod{43}$. پس باید ابتدا کوچکترین توان 7 را پیدا کنیم که باقی‌مانده تقسیم آن بر 43 برابر 1 شود:

$$7^2 \equiv 49 \pmod{43} \Rightarrow 7^3 \equiv 343 \pmod{43} \Rightarrow 7^4 \equiv 2401 \pmod{43} \Rightarrow 7^5 \equiv 16807 \pmod{43}$$

$$\Rightarrow 7^6 \equiv 117649 \pmod{43} \Rightarrow n = 6k \Rightarrow 1 \leq 6k < 50 \Rightarrow k = 1, 2, \dots, 8 \Rightarrow \text{جواب} = 8$$

۲۶۹ ابتدا باید کوچکترین توان 11 که باقی‌مانده تقسیم آن بر 19 برابر 1 می‌باشد را پیدا کنیم:

$$11^1 \equiv 11 \pmod{19} \Rightarrow 11^2 \equiv 121 \pmod{19} \Rightarrow 11^3 \equiv 1331 \pmod{19} \Rightarrow 11^4 \equiv 14641 \pmod{19}$$

$$\Rightarrow 11^5 \equiv 161051 \pmod{19} \Rightarrow a = 3k \Rightarrow 10 \leq 3k \leq 99 \Rightarrow 4 \leq k \leq 33$$

$$\Rightarrow \text{تعداد} = 33 - 4 + 1 = 30$$

۲۷۰ اگر بتوانیم توانی از 5 را پیدا کنیم که در هم‌نهشتی به پیمانه 31 برابر 1 یا -1 شود، خیلی خوب می‌شود:

$$5^3 \equiv 125 \pmod{31} \Rightarrow 5^4 \equiv 625 \pmod{31} \Rightarrow 5^5 \equiv 3125 \pmod{31} \Rightarrow 5^6 \equiv 15625 \pmod{31}$$

$$\Rightarrow 5^{3n+2} \equiv 5^2 \pmod{31} \Rightarrow 5^{6n+4} \equiv 5^4 \pmod{31} \Rightarrow 5^{9n+6} \equiv 5^6 \pmod{31}$$

حال در هم‌نهشتی به پیمانه 31 ، به جای 5^{6n+4} عدد 5 و به جای 5^{9n+6} عدد -6 را قرار می‌دهیم و داریم:

$$5^{6n+4} + 5^{9n+6} + 1 \equiv 5 + (-6) + 1 \equiv 0 \pmod{31}$$

بنابراین برای هر عدد طبیعی n ، عبارت داده‌شده بر 31 بخش‌پذیر است.

۲۶۱ می‌توانیم به جای پیمانه از 7 یا 8 استفاده کنیم، اما از کدام

استفاده کنیم؟ گزینه‌های (۲) و (۳) به پیمانه 7 دو عدد یکسان می‌شوند ($32 \equiv 4 \pmod{7}$ و $25 \equiv 4 \pmod{7}$). اما به پیمانه 8 تمام گزینه‌ها متفاوت هستند. نگاه کنید:

$$1) 31 \equiv 7 \pmod{8} \quad 2) 32 \equiv 0 \pmod{8} \quad 3) 25 \equiv 1 \pmod{8} \quad 4) 26 \equiv 2 \pmod{8}$$

پس هم‌نهشتی 31^{1000} را به پیمانه 8 به دست می‌آوریم:

$$32 \equiv 0 \pmod{8} \xrightarrow{\text{توان } 500} 31^{1000} \equiv 1 \pmod{8}$$

بنابراین باقی‌مانده تقسیم 31^{1000} بر عدد 56 برابر 25 است، زیرا $25 \equiv 1 \pmod{8}$ می‌باشد.

۲۶۲ به جای 35 از 5 استفاده می‌کنیم، چون گزینه‌ها به پیمانه 5

تبدیل به اعداد متفاوتی می‌شوند:

$$\left. \begin{aligned} 6 \equiv 1 \pmod{5} &\Rightarrow 6^6 \equiv 1 \pmod{5} \\ 3^4 \equiv 1 \pmod{5} &\Rightarrow 3^6 \equiv 3 \pmod{5} \\ 2^4 \equiv 1 \pmod{5} &\Rightarrow 2^6 \equiv 4 \pmod{5} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 6^6 + 3^6 - 2^6 \equiv 1 + 1 - 1 \equiv 1 \pmod{5}$$

۲۶۳ به جای 35 ، هم می‌توان 5 قرار داد و هم 7 ، ولی چون همه

گزینه‌ها کوچک‌تر از 7 هستند، باقی‌مانده‌های متفاوتی بر 7 خواهند داشت. پس

کافی است باقی‌مانده تقسیم عدد را بر 7 پیدا کنیم و هم‌چنین بر اساس قضیه

فرما داریم: $2^6 \equiv 1 \pmod{7}$ و $3^6 \equiv 1 \pmod{7}$. بنابراین:

$$3^{42} - 2^{42} \equiv (3^6)^7 - (2^6)^7 \equiv 1^7 - 1^7 \equiv 0 \pmod{7}$$

۲۶۴ می‌دانیم $-1 \equiv 64 \pmod{65}$ است و با توان‌هایی از 4 ، 2 و 8 می‌توان 64

را ساخت. پس:

$$2^65 + 4^65 + 8^65 \equiv (2^7)^9 \times 2^1 + (4^7)^9 \times 4^2 + (8^7)^9 \times 8^3 \pmod{65}$$

$$\equiv 2^64 + 4^64 + 8^64 \pmod{65}$$

۲۶۵ ابتدا پایه‌ها را به پیمانه 12 کوچک می‌کنیم:

$$241^n + 242^n + \dots + 251^n \equiv 1^n + 2^n + 3^n + \dots + 11^n \pmod{12}$$

$$\Rightarrow 1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n + (-5^n) + (-4^n)$$

$$+ (-3^n) + (-2^n) + (-1)^n \pmod{12}$$

واضح است که اگر n یک عدد فرد و بزرگ‌تر از 1 باشد، حاصل عبارت $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$

با حاصل عبارت $(-5^n) + (-4^n) + (-3^n) + (-2^n) + (-1)^n$ قرینه یکدیگر

شده و مجموع آن‌ها صفر می‌شود. حال اگر n برابر 1 نباشد، 6^n نیز مضرب 12 شده

و به پیمانه 12 صفر می‌شود، پس به ازای اعداد طبیعی یک‌رقمی 3 ، 5 ، 7 و 9 باقی‌مانده

تقسیم برابر صفر است. توجه کنید به ازای n های زوج، باقی‌مانده صفر نمی‌شود.

۲۶۶ ابتدا رابطه بخش‌پذیری را به رابطه هم‌نهشتی تبدیل می‌کنیم

و داریم:

$$25 \mid 6^n - 3^n \Rightarrow 6^n - 3^n \equiv 0 \pmod{25} \Rightarrow 3^n (2^n - 1) \equiv 0 \pmod{25}$$

در رابطه اخیر واضح است که 3^n مضرب 25 نیست، پس حتماً $2^n - 1$ مضرب

25 می‌باشد و داریم:

$$2^n - 1 \equiv 0 \pmod{25} \Rightarrow 2^n \equiv 1 \pmod{25}$$

۲۷۵ در عدد داده شده بعضی ارقام به طور متناوب تکرار شده است، پس:

$$\overline{ababab} = \overline{ab} + 10^3 \overline{ab} + 10^6 \overline{ab} = 10101 \overline{ab} = 3 \times 37 \times 7 \times 13 \times \overline{ab}$$

\downarrow
111×91

باتوجه به اعداد به دست آمده واضح است که این عدد ممکن است مضرب ۳۱ نباشد. دلیل استفاده از قید ممکن، به خاطر \overline{ab} است، شاید \overline{ab} برابر ۳۱ یا ۶۲ یا ۹۳ باشد. در این صورت مضرب ۳۱ هم می شود.

۲۷۶ طبق گفته های سؤال، $\overline{abcabc} = n^2$ می باشد. پس:

$$\overline{abcabc} = n^2 \Rightarrow \overline{abc} + 1000 \overline{abc} = n^2$$

$$\Rightarrow \overline{abc} = \frac{n^2}{111}$$

\downarrow
11×91

$$\Rightarrow \overline{abc} = \frac{n^2}{11 \times 91} \Rightarrow \overline{abc} = \frac{n^2}{7 \times 11 \times 13}$$

واضح است برای آن که سمت چپ تساوی نیز مربع کامل باشد، باید $\overline{abc} = 11 \times 13 \times k^2$ باشد، پس:

$$\overline{abc} = 143k^2$$

\swarrow $k=1$ $\overline{abc} = 143 \Rightarrow a+b+c = 8$
 \searrow $k=2$ $\overline{abc} = 572 \Rightarrow a+b+c = 14$

بنابراین بیشترین مقدار مجموع ارقام عدد \overline{abc} برابر ۱۴ است.

۲۷۷ طبق صورت سؤال $\overline{ababab} = 111 \times n^2$ است، پس:

$$\overline{ababab} = 111 \times n^2 \Rightarrow \overline{ab} + 100 \overline{ab} + 10000 \overline{ab} = 111 \times n^2$$

$$\Rightarrow 10101 \overline{ab} = 111 \times n^2 \Rightarrow 91 \overline{ab} = n^2 \Rightarrow \overline{ab} = \frac{n^2}{91}$$

\downarrow
91×111

$$\Rightarrow a+b = 9+1 = 10$$

۲۷۸ با عددی مواجهیم که ارقام آن به طور متناوب تکرار می شوند، پس:

$$\overline{aabb} = n^2 \Rightarrow a \cdot b + 10 \cdot a \cdot b = n^2 \Rightarrow 11 \cdot a \cdot b = n^2$$

واضح است برای آن که سمت چپ تساوی نیز مربع کامل شود، باید $a \cdot b = 11k^2$ باشد. حال به k عدد می دهیم تا اولاً یک عدد سه رقمی حاصل شود، ثانیاً رقم دهگان آن نیز صفر باشد:

$$a \cdot b = 11k^2 \xrightarrow{k=8} a \cdot b = 704 \Rightarrow a = 7, b = 4$$

حال باقی مانده تقسیم \overline{ab} یعنی ۷۴ بر ۱۳ را می خواهیم. پس:

$$\begin{array}{r} 13 \\ 74 \overline{) 74} \\ \underline{-65} \\ 9 \end{array} \Rightarrow r = 9$$

۲۷۹ طبق صورت سؤال $\overline{ababab} = n^2$ است. پس:

$$111 \times (\overline{ab} + 100 \overline{ab} + 10000 \overline{ab}) = n^2 \Rightarrow 111 \times 10101 \overline{ab} = n^2$$

\downarrow
111×91

$$\Rightarrow 111^2 \times 91 \overline{ab} = n^2$$

واضح است اگر $\overline{ab} = 91$ باشد، سمت چپ تساوی نیز مربع کامل می شود. حال باقی مانده تقسیم \overline{ba} بر ۱۶ برابر است با:

$$\begin{array}{r} 16 \\ 19 \overline{) 16} \\ \underline{-16} \\ 0 \end{array} \Rightarrow r = 3$$

۲۷۱ اگر توانی از ۷ را پیدا کنیم که در هم نهشتی به پیمانه ۴۳ برابر ۱ یا -۱ شود، حل مسأله بسیار راحت می شود:

$$7^2 \equiv 6 \pmod{43} \Rightarrow 7^3 \equiv 42 \pmod{43} \Rightarrow 7^4 \equiv -1 \pmod{43}$$

بنابراین 7^{6n+4} و 7^{2n} به پیمانه ۴۳ برابر است با:

$$7^3 \equiv -1 \pmod{43} \xrightarrow{\text{توان } n} 7^{3n} \equiv (-1)^n \pmod{43}$$

$$7^3 \equiv -1 \pmod{43} \xrightarrow{\text{توان } 2n} 7^{6n} \equiv 1 \pmod{43} \Rightarrow 7^{6n+4} \equiv 7^4 \pmod{43}$$

حال در هم نهشتی به پیمانه ۴۳، به جای 7^{6n+4} عدد -7 و به جای 7^{2n} عدد $(-1)^n$ را قرار می دهیم:

$$7^{6n+4} + 7^{2n} + 6 \equiv 0 \pmod{43} \Rightarrow (-7) + (-1)^n + 6 \equiv 0 \pmod{43} \Rightarrow -1 + (-1)^n \equiv 0 \pmod{43}$$

واضح است اگر n عددی زوج باشد، $(-1)^n = 1$ و $-1 + 1 = 0$ برابر صفر شده و در هم نهشتی فوق صدق می کند.

۲۷۲ ابتدا بررسی کنیم کدام توان ۱۱ در هم نهشتی به پیمانه ۱۷ برابر ۱ یا -۱ می شود:

$$11^2 \equiv 2 \pmod{17} \xrightarrow{\text{توان } 4} 11^8 \equiv 16 \pmod{17} \Rightarrow 11^{8n} \equiv (-1)^n \pmod{17}$$

$$11^8 \equiv 16 \pmod{17} \Rightarrow 11^{16n} \equiv 1 \pmod{17} \Rightarrow 11^{16n+7} \equiv 11^7 \pmod{17}$$

$$11^7 \equiv -1 \pmod{17} \Rightarrow 11^{16n+7} \equiv -1 \pmod{17} \Rightarrow 11^{16n+17} \equiv 11^7 \pmod{17}$$

$$11^7 \equiv (-1) \pmod{17} \Rightarrow 11^{16n+17} \equiv (-1) \pmod{17}$$

حال داریم:

$$11^{8n} + 11^{16n+7} + 7 \equiv 0 \pmod{17} \Rightarrow (-1)^n + 11 + 7 \equiv 0 \pmod{17} \Rightarrow (-1)^n + 1 \equiv 0 \pmod{17}$$

واضح است برای آن که $1 + (-1)^n$ صفر شود، n باید فرد باشد.

۲۷۳ ابتدا به کمک ویژگی های توان، عدد $15^{4n} + 9^{3n+1} \times 10^{6n+2} - 5$ را ساده تر می کنیم:

$$15^{4n} + 9^{3n+1} \times 10^{6n+2} - 5 = 15^{4n} + 3^{6n+2} \times 10^{6n+2} - 5$$

$$= 15^{4n} + 3^6 \times 10^{6n+2} - 5$$

حال ۱۵ و ۳۰ را به پیمانه ۷ کوچک می کنیم:

$$15^{4n} + 3^6 \times 10^{6n+2} - 5 \equiv 1^{4n} + 3^{6n+2} - 5 \pmod{7}$$

بنابراین داریم:

$$3^6 \equiv 1 \pmod{7} \xrightarrow{\text{توان } n} 3^{6n} \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 3^{6n+2} \equiv 3^2 \pmod{7} \Rightarrow 3^{6n+2} - 4 \equiv 3^2 - 4 \pmod{7}$$

پس به ازای هر عدد طبیعی n ، عدد $15^{4n} + 9^{3n+1} \times 10^{6n+2} - 5$ بخش پذیر است.

۲۷۴ ابتدا باید به کمک هم نهشتی به پیمانه ۲۳، 5^{2n+1} را به صورت توانی از ۲ بنویسیم:

$$5^2 \equiv 2 \pmod{23} \xrightarrow{\text{توان } n} 5^{2n} \equiv 2^n \pmod{23} \Rightarrow 5^{2n+1} \equiv 5 \times 2^n \pmod{23}$$

حال داریم:

$$5^{2n+1} + 3^{n+4} + 3^{n+1} \equiv 5 \times 2^n + 16 \times 2^n + 2 \times 2^n \pmod{23} \equiv 23 \times 2^n \pmod{23} \equiv 0 \pmod{23}$$

بنابراین به ازای تمام مقادیر طبیعی n ، عبارت $5^{2n+1} + 3^{n+4} + 3^{n+1}$ بر عدد

۲۳ بخش پذیر است.



۲۸۶ ۱ می‌دانیم $44 = 4 \times 11$ است، پس بخش پذیری مجموع دو عدد $4b56$ و $233a$ را بر ۴ و ۱۱ بررسی کنیم:

$$\overline{4b56} + \overline{233a} \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow \overline{56} + \overline{3a} \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow \overline{3a} \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow a = 2, a = 6$$

$$\overline{4b56} + \overline{233a} \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow 6 - 5 + b - 4 + a - 3 + 3 - 2 \equiv 0 \pmod{11}$$

$$\Rightarrow a + b - 5 \equiv 0 \pmod{11}$$

حال یکبار به ازای $a = 2$ و بار دیگر به ازای $a = 6$ مقدار b را می‌یابیم:

$$\begin{cases} a + b - 5 \equiv 0 \pmod{11} \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow b - 3 \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow b = 3$$

$$\begin{cases} a + b - 5 \equiv 0 \pmod{11} \\ a = 6 \end{cases} \Rightarrow b + 1 \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow b = 10$$

بنابراین $a + b = 5$ است.

۲۸۷ ۴ می‌دانیم $44 = 4 \times 11$ است. پس:

$$\overline{a73b8} \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow \overline{b8} \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow b = 0, 2, 4, 6, 8$$

$$\overline{a73b8} \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow 8 - b + 3 - 7 + a \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow a - b + 4 \equiv 0 \pmod{11}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 7 \end{cases}, \begin{cases} b = 2 \\ a = 9 \end{cases}, \begin{cases} b = 4 \\ a = 0 \end{cases} \text{ (غ ق ق)}, \begin{cases} b = 6 \\ a = 2 \end{cases}, \begin{cases} b = 8 \\ a = 4 \end{cases}$$

بنابراین کوچک‌ترین N عدد 27368 می‌باشد که باقی‌مانده تقسیم آن بر ۹ برابر است با:

$$27368 \equiv 8 + 6 + 3 + 7 + 2 \equiv 26 \pmod{9}$$

۲۸۸ ۲ عدد داده‌شده بر ۴۴ بخش‌پذیر است، پس هم بر ۴ و هم بر ۱۱ بخش‌پذیر است و چون مضرب ۵۵ نیست، بنابراین مضرب ۵ هم نیست، (زیرا مجبور است بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد).

$$\overline{a70b} \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow \overline{b0} \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow b = 0 \text{ یا } 4 \text{ یا } 8$$

$b = 0$ قابل قبول نیست، چون در این صورت عدد، مضرب ۵ هم می‌شود. بنابراین ۸ یا ۴ $b = 4$ حال داریم:

$$\overline{a70b} \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow b - 0 + 7 - a \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow a - b \equiv 7$$

$$\begin{cases} b = 4 \Rightarrow a \equiv 11 \pmod{11} \Rightarrow a = 0 \text{ (غ ق ق یا } 11 < a \leq 9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 8 \Rightarrow a \equiv 15 \pmod{11} \Rightarrow a = 4 \Rightarrow a + b = 12 \end{cases}$$

۲۸۹ ۱ کافی است دورقم دورقم از سمت راست جدا کرده و آن‌ها را با هم جمع

$$\overline{a63b29} \equiv 0 \pmod{99} \Rightarrow \overline{29} + \overline{3b} + \overline{a6} \equiv 0 \pmod{99} \Rightarrow \overline{29} + \overline{ab} + \overline{36} \equiv 0 \pmod{99}$$

$$\Rightarrow \overline{65} + \overline{ab} \equiv 0 \pmod{99} \Rightarrow \overline{ab} = 34 \Rightarrow a = 3, b = 4$$

(*) دقت کنید در جمع چند عدد اگر جای یکان‌ها را با هم، جای دهگان‌ها را با هم و ... عوض کنیم، حاصل جمع تغییری نمی‌کند، مثلاً $56 = 19 + 37$ است و $17 + 39$ نیز 56 می‌شود. برای این‌که مطلب فوق را بهتر ببینید، یک بار اعداد را زیر هم می‌نویسیم:

$$\begin{array}{r} 29 \\ + 3b \\ \hline 29 \\ + 36 \\ \hline 65 \\ + a6 \\ \hline \overline{ab} = 34 \Rightarrow a = 3, b = 4 \end{array}$$

۲۸۰ ۳ با توجه به صورت سؤال، $\overline{abc} - \overline{cba} = 77k$ است، پس:

$$(c + 10b + 100a) - (a + 10c + 100b) = 77k$$

$$\Rightarrow 99a - 99c = 77k \Rightarrow 99(a - c) = 77k$$

$$\xrightarrow{\div 11} 9(a - c) = 7k \Rightarrow a - c = 7k' \xrightarrow{a \neq c} \begin{cases} a = 9, c = 2 \\ a = 8, c = 1 \end{cases}$$

دقت کنید a و c مقادیر دیگری را نمی‌پذیرند، چون \overline{abc} و \overline{cba} اعداد سه‌رقمی هستند. در ضمن b می‌تواند از صفر تا ۹ باشد. بنابراین بزرگ‌ترین عدد \overline{abc} برابر 992 می‌باشد که از $961 = 31^2$ و 31 واحد بیشتر است.

۲۸۱ ۱ به کمک قواعد بخش‌پذیری بر ۸، ۹ و ۱۱ داریم:

$$\begin{cases} \overline{736521} \equiv 1 \pmod{8} \\ \overline{736521} \equiv 1 + 2 + 5 + 6 + 3 + 7 \equiv 24 \pmod{9} \\ \overline{736521} \equiv 1 - 2 + 5 - 6 + 3 - 7 \equiv -6 \pmod{11} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع باقی‌مانده‌ها} = 1 + 6 + 5 = 12$$

۲۸۲ ۲ سه‌رقم سه‌رقم از سمت راست جدا می‌کنیم و داریم:

$$\overline{a1aba} \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow \overline{aba} - \overline{a1} \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow (100a + 10b + a) - (10a + 1) \equiv 0 \pmod{11}$$

$$\Rightarrow \overline{9a} + 10b - 1 \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow 10b - 1 \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow 10b \equiv 1 \pmod{11} \xrightarrow{\text{باتوجه به گزینه‌ها}} b = 5$$

۲۸۳ ۲ دو رقم دو رقم از سمت راست جدا می‌کنیم و داریم:

$$\overline{5ab32} \equiv 0 \pmod{101} \Rightarrow 32 - \overline{ab} + 5 \equiv 0 \pmod{101} \Rightarrow \overline{ab} = 37$$

حال باقی‌مانده تقسیم 53732 بر ۹ را به دست می‌آوریم:

$$53732 \equiv 2 + 3 + 7 + 3 + 5 \equiv 20 \pmod{9}$$

۲۸۴ ۱ می‌دانیم $36 = 4 \times 9$ می‌باشد، پس:

$$\overline{a746b} \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow \overline{6b} \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow b = 0, 4, 8 \quad (*)$$

$$\overline{a746b} \equiv 0 \pmod{9} \Rightarrow b + 6 + 4 + 7 + a \equiv 0 \pmod{9} \Rightarrow b + a - 1 \equiv 0 \pmod{9}$$

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 1 \end{cases}, \begin{cases} b = 4 \\ a = 6 \end{cases}, \begin{cases} b = 8 \\ a = 2 \end{cases}$$

بنابراین بزرگ‌ترین N عدد 67464 می‌باشد. حال باقی‌مانده تقسیم عدد

$$67464 \equiv 4 - 6 + 4 - 7 + 6 \equiv 1 \pmod{11} \text{ بر ۱۱ برابر است با:}$$

۲۸۵ ۳ می‌دانیم $44 = 4 \times 11$ است. پس باید بخش‌پذیری عدد $12a3b$

بر ۴ و ۱۱ را بررسی کنیم:

$$\overline{12a3b} \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow \overline{3b} \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow b = 2, b = 6$$

$$\overline{12a3b} \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow b - 3 + a - 2 + 1 \equiv 0 \pmod{11}$$

$$\Rightarrow a + b - 4 \equiv 0 \pmod{11} \begin{cases} b = 2 \Rightarrow a - 2 \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow a = 2 \\ b = 6 \Rightarrow a + 2 \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow a = 9 \end{cases}$$

بنابراین دو عدد به صورت $12a3b$ بر ۴۴ بخش‌پذیر است.

۲۹۷ باید ببینیم $2a^{P+2} - 5$ به پیمانه 10 با کدام عدد هم‌نهشت است. پس از رابطه $2 - 2 = 10k$ ، $3a^P = 10k$ را به پیمانه 10 کوچک می‌کنیم:

$$3a^P \equiv -2 \pmod{10} \Rightarrow 3a^P \equiv -12 \pmod{10} \xrightarrow{(3,10)=1} a^P \equiv -4 \pmod{10}$$

از طرفی چون رقم یکان a^P با رقم یکان a^{P+2} فرقی ندارد، داریم:

$$2a^{P+2} - 5 \equiv 2 \times (-4) - 5 \equiv -13 \pmod{10}$$

۲۹۸ در واقع رقم یکان 18^2 خواسته شده است. می‌دانیم باقی‌مانده تقسیم 2 بر 4 برابر صفر است. پس:

$$18^2 \equiv (-2)^4 \equiv 6 \pmod{10}$$

۲۹۹ ابتدا $1378!$ و $1379!$ را بر 4 تقسیم می‌کنیم. چون باقی‌مانده تقسیم، صفر می‌شود، پس به جای آن‌ها 4 قرار می‌دهیم و داریم:

$$1378! + 1379! \equiv 8^4 + 9^4 \equiv (-2)^4 + (-1)^4 \equiv 16 + 1 \equiv 17 \pmod{10}$$

۳۰۰ باید هم‌نهشتی عدد را به پیمانه 10 به دست آوریم. ابتدا 61 را بر 4 تقسیم می‌کنیم، باقی‌مانده 1 می‌شود. پس به جای تمام توان‌ها 1 قرار می‌دهیم:

$$(101)^{61} + (102)^{61} + \dots + (989)^{61} \equiv 101 + 102 + \dots + 989 \pmod{10} \\ \equiv 1 + 2 + \dots + 889 \equiv \frac{889 \times 890}{2} \equiv 889 \times 445 \equiv 9 \times 5 \equiv 5 \pmod{10}$$

۳۰۱ باید هم‌نهشتی $A^B + B^A$ را به پیمانه 10 به دست آوریم. یک‌بار A و B را به پیمانه 10 و بار دیگر به پیمانه 4 کوچک می‌کنیم:

$$\begin{cases} A \equiv 1! + 2! + 3! + \dots + 1382! \Rightarrow A \equiv 1! + 2! + 3! + 4! \equiv 3 \pmod{10} \\ B \equiv 2! + 4! + \dots + 1382! \Rightarrow A \equiv 2! + 4! \equiv 6 \pmod{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A \equiv 1! + 2! + 3! + \dots + 1382! \Rightarrow A \equiv 1! + 2! + 3! \equiv 1 \pmod{4} \\ B \equiv 2! + 4! + \dots + 1382! \Rightarrow B \equiv 2! \equiv 2 \pmod{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A^B + B^A \equiv 3^2 + 6^1 \equiv 5 \pmod{10}$$

۳۰۲ برای به دست آوردن رقم یکان، باید هم‌نهشتی $3^{n+5} + 6^{n+5}$ را به پیمانه 10 به دست آوریم. حال کافی است $n + 5$ را بر 4 تقسیم کنیم که باقی‌مانده به ازای مقادیر مختلف n یکی از اعداد $0, 1, 2, 3$ خواهد بود. در هر حالت، رقم یکان را به دست می‌آوریم:

$$r = 0 \Rightarrow 3^{n+5} + 6^{n+5} \equiv 3^4 + 6^4 \equiv 7 \pmod{10}$$

$$r = 1 \Rightarrow 3^{n+5} + 6^{n+5} \equiv 3^1 + 6^1 \equiv 9 \pmod{10}$$

$$r = 2 \Rightarrow 3^{n+5} + 6^{n+5} \equiv 3^2 + 6^2 \equiv 3 \pmod{10}$$

$$r = 3 \Rightarrow 3^{n+5} + 6^{n+5} \equiv 3^3 + 6^3 \equiv 5 \pmod{10}$$

بنابراین بزرگ‌ترین رقم یکان برابر 7 است.

۲۹۰ دورقم دورقم از سمت راست جدا کرده و زیر هم می‌نویسیم:

$$\begin{array}{r} \overline{5abb6} \equiv 0 \pmod{99} \Rightarrow \overline{b6} + \overline{ab} + 5 \equiv 0 \pmod{99} \Rightarrow \overline{a} + \overline{b} \\ + \frac{5}{99} \end{array}$$

واضح است برای این‌که $5 + b + 6$ به ما 9 بدهد، باید $b = 8$ باشد. دقت کنید در این صورت $a = 0$ می‌باشد.

۲۹۱ باید دو رقم دو رقم از سمت راست جدا کنیم. سپس اعداد را زیر هم بنویسیم:

$$\overline{1ab562} \equiv 0 \pmod{99} \Rightarrow \overline{62} + \overline{b5} + \overline{1a} \equiv 0 \pmod{99}$$

$$\begin{array}{r} 62 \\ + b5 \\ + 1a \\ \hline \end{array} \Rightarrow a=2, b=2 \Rightarrow a+b=4$$

۲۹۲ ابتدا دو رقم دو رقم از سمت راست جدا می‌کنیم، سپس اعداد را زیر هم می‌نویسیم:

$$\overline{82a6b} \equiv 0 \pmod{99} \Rightarrow \overline{6b} + \overline{2a} + 8 \equiv 0 \pmod{99} \Rightarrow \overline{2a} + \overline{b} + \frac{8}{99}$$

دقت کنید $a + b + 8$ باید به ما 9 بدهد. اگر $a + b = 1$ یا $a + b = 11$ باشد این اتفاق رخ می‌دهد. اما به ازای $a + b = 1$ حاصل جمع فوق برابر 89 می‌شود که قابل قبول نیست، پس:

$$a + b = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} b = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$a + b = 11 \Rightarrow \begin{cases} a = 2, b = 9 \\ a = 9, b = 2 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} a = 3, b = 8 \\ a = 8, b = 3 \end{cases}$$

$$\text{یا } \begin{cases} a = 4, b = 7 \\ a = 7, b = 4 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} a = 5, b = 6 \\ a = 6, b = 5 \end{cases}$$

بنابراین 8 عدد پنج‌رقمی به صورت $\overline{82a6b}$ بر 99 بخش‌پذیر است.

۲۹۳ چون دو عدد $3a - 5$ و $4a - 7$ رقم یکان برابر دارند، پس به پیمانه 10 هم‌نهشت هستند. در نتیجه داریم:

$$4a - 7 \equiv 3a - 5 \pmod{10} \Rightarrow a \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 9a + 6 \equiv 9 \times 2 + 6 \equiv 24 \pmod{10}$$

۲۹۴ رقم یکان $n!$ وقتی $n \geq 5$ باشد، حتماً صفر است، چون در این صورت در $n!$ حتماً $10 = 2 \times 5$ حضور دارد. بنابراین داریم:

$$(1! + 3! + \dots + 1381!)(2! + 4! + \dots + 1380!)$$

$$\equiv (1 + 6 + 0 + \dots + 0)(2 + 24 + 0 + \dots + 0) \equiv 7 \times 6 \equiv 42 \equiv 2 \pmod{10}$$

۲۹۵ زمانی رقم یکان $a^n - a$ صفر می‌شود که وقتی n را بر 4 تقسیم کنیم، باقی‌مانده 1 شود. در این صورت به جای n عدد 1 را قرار می‌دهیم و

$$0 \equiv a^1 - a \equiv a^1 - a \pmod{10}$$

وقتی بر 4 تقسیم می‌شود، باقی‌مانده‌اش 1 شود. در گزینه‌ها، 93 این چنین است.

۲۹۶ چون $a^P = 10k + 7$ است، رقم یکان a^P برابر 7 می‌باشد. حال چون به توان a^P ، 4 واحد اضافه شده، پس رقم یکان تغییری نمی‌کند.



فقط y را می‌خواهیم، پس داریم: **۲ ۳۰۹**

$$14x + 18y = 10 \Rightarrow 7x + 9y = 5 \Rightarrow \sqrt[1]{7x + 9y} \equiv 5$$

$$\Rightarrow 9y \equiv 5 - 7x \Rightarrow 9y \equiv 5 - 7x \xrightarrow{(2,7)=1} y \equiv -1$$

بزرگ‌ترین سهرقمی

$$y = 7k - 1 \Rightarrow 7k - 1 < 1000 \Rightarrow 7k < 1001$$

$$\Rightarrow 7k < 91 \times 11 \Rightarrow k < 13 \times 11 \Rightarrow k < 143$$

$$\Rightarrow k_{Max} = 142 \Rightarrow y_{Max} = 7(142) - 1 = 993$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 9 + 9 + 3 = 21$$

چون x را می‌خواهیم طرفین، را به پیمانه ۸۷ هم‌نهشت قرار **۱ ۳۱۰**

می‌دهیم و آن را به صورت معادله هم‌نهشتی درمی‌آوریم:

$$57x - 87y \equiv 342 \Rightarrow -30x \equiv -6$$

$$\xrightarrow{\div(-6)} \Delta x \equiv 1 \equiv 30 \xrightarrow{\div 5} x \equiv 6$$

با توجه به گزینه‌ها

$$\Rightarrow x = 29k + 6 \xrightarrow{k=4} x = 122 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 5$$

ابتدا حاصل (۲۲۱، ۳۵۷) را به دست آورده، سپس طرفین معادله را **۲ ۳۱۱**

بر آن تقسیم می‌کنیم:

$$(221, 357) = (17 \times 13, 3 \times 7 \times 17) = 17 \Rightarrow 13x + 21y = 1$$

حال چون فقط x را می‌خواهیم، داریم:

$$13x + 21y = 1 \Rightarrow 13x + 21y \equiv 1 \Rightarrow 13x \equiv 1 - 21y$$

$$\Rightarrow -8x \equiv -20 \xrightarrow{\div(-4)} 2x \equiv 5 \equiv 26 \xrightarrow{(2,21)=1} x \equiv 13$$

مقدار $k = 0, 1, 2, 3, 4$

ابتدا طرفین معادله $7x + 5y = 130$ را به پیمانه ۵ هم‌نهشت **۲ ۳۱۲**

می‌کنیم:

$$7x + 5y = 130 \Rightarrow 7x + 5y \equiv 0 \Rightarrow 7x \equiv 0 \Rightarrow x \equiv 0 \Rightarrow x = 5k$$

حال $x = 5k$ را در معادله قرار می‌دهیم:

$$7x + 5y = 130 \Rightarrow 7(5k) + 5y = 130 \xrightarrow{\div 5} 7k + y = 26 \Rightarrow y = 26 - 7k$$

جواب‌های معادله را در مجموعه اعداد طبیعی می‌خواهیم. پس:

$$\begin{cases} x = 5k \\ y = 26 - 7k \end{cases} \Rightarrow k = 1, 2, 3 \Rightarrow \text{جواب ۳}$$

طرفین معادله سیاله را به پیمانه ۱۴ هم‌نهشت می‌کنیم: **۳ ۳۱۳**

$$15x + 14y = 1050 \Rightarrow 15x + 14y \equiv 0 \Rightarrow 15x \equiv 0 \Rightarrow x = 14k$$

حال $x = 14k$ را در معادله قرار می‌دهیم:

$$15(14k) + 14y = 1050 \Rightarrow 15k + y = 75 \Rightarrow y = 75 - 15k$$

جواب‌های معادله را در مجموعه اعداد طبیعی می‌خواهیم. پس:

$$\begin{cases} x = 14k \\ y = 75 - 15k \end{cases} \Rightarrow k = 1, 2, 3, 4 \Rightarrow \text{جواب ۴}$$

باید هم‌نهشتی $3^{n+3} + 4^{n+3}$ را به پیمانه ۱۰ به دست آوریم و **۲ ۳۰۳**

بینیم چه n هایی کوچک‌ترین رقم یکان را تولید می‌کنند. برای این کار باید $n + 3$ را بر ۴ تقسیم کنیم که با یکی از حالات زیر مواجهیم:

$$r = 0 \Rightarrow 3^4 + 4^4 \equiv 1 + 6 \equiv 7 \quad r = 1 \Rightarrow 3^1 + 4^1 \equiv 7$$

$$r = 2 \Rightarrow 3^2 + 4^2 \equiv 5 \quad r = 3 \Rightarrow 3^3 + 4^3 \equiv 1$$

بنابراین کوچک‌ترین رقم یکان به ازای n هایی به دست می‌آید که به ازای آن‌ها باقی‌مانده تقسیم $n + 3$ بر ۴ برابر ۳ است. پس:

$$n + 3 \equiv 3 \Rightarrow n \equiv 0 \Rightarrow n = 4k$$

حالا n های دو رقمی را می‌خواهیم. بنابراین داریم:

$$10 \leq n < 100 \Rightarrow 10 \leq 4k < 100$$

$$\Rightarrow 2/5 \leq k < 25 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} 3 \leq k \leq 24 \Rightarrow \text{تعداد ها} = 22$$

باید رابطه $1 - 5n \mid 60, 84$ برقرار باشد. پس: **۲ ۳۰۴**

$$(60, 84) \mid 5n - 1 \Rightarrow 12 \mid 5n - 1 \xrightarrow{\text{با توجه به گزینه‌ها}} n = 29$$

باید رابطه $1 - 7n \mid 24, 39$ برقرار باشد. پس: **۲ ۳۰۵**

$$(24, 39) \mid 7n + 1 \Rightarrow 3 \mid 7n + 1 \Rightarrow 7n + 1 \equiv 0 \Rightarrow 7n \equiv -1$$

$$\Rightarrow n \equiv -1 \Rightarrow n = 3k - 1$$

حال تعداد اعداد طبیعی و دورقمی n را به دست می‌آوریم:

$$10 \leq n \leq 99 \Rightarrow 10 \leq 3k - 1 \leq 99 \Rightarrow 11 \leq 3k \leq 100$$

$$\Rightarrow 3/10 \leq k \leq 33/10 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} 4 \leq k \leq 33 \Rightarrow \text{تعداد ها} = 30$$

باید $a^2 + 2 \mid 3, 6$ برقرار باشد. پس: **۴ ۳۰۶**

$$(3, 6) = 3 \Rightarrow 3 \mid a^2 + 2 \Rightarrow a^2 + 2 = 3k$$

$$\Rightarrow a^2 = 3k - 2 \Rightarrow a^2 = 3k' + 1$$

می‌دانیم اگر a مضرب ۳ نباشد، a^2 به فرم $3k + 1$ است. بنابراین باید از مجموعه $\{1, 2, \dots, 20\}$ ، a هایی را انتخاب کنیم که مضرب ۳ نباشند. پس:

$$\text{تعداد ها} = 20 - \left[\frac{20}{3} \right] = 14$$

دقت کنید $\left[\frac{20}{3} \right]$ تعداد مضارب ۳ را مشخص می‌کند.

شرط وجود جواب آن است که $3 \mid (a, 18)$ برقرار باشد. از آن جایی **۲ ۳۰۷**

که $18 = 2 \times 3^2$ می‌باشد، پس اگر a زوج یا مضرب ۹ باشد، رابطه $3 \mid (a, 18)$ برقرار نیست. پس از اعداد نابیشتر از ۵۰، اعداد مضرب ۲ یا مضرب ۹ حذف می‌کنیم:

$$50 - \left[\frac{50}{2} \right] - \left[\frac{50}{9} \right] + \left[\frac{50}{18} \right] = 50 - 25 - 5 + 2 = 22$$

توجه کنید اعداد مضرب ۱۸ را دوبار حذف کردیم. یکبار موقع حذف مضارب ۲ و بار دیگر هنگام حذف مضارب ۹. پس یکبار، مضارب ۱۸ را برگرداندیم.

چون فقط b را می‌خواهیم، طرفین معادله را به پیمانه ضرب a ، **۴ ۳۰۸**

یعنی ۱۵ هم‌نهشت قرار می‌دهیم:

$$15a + 23b = 12 \Rightarrow 15a + 23b \equiv 12 \Rightarrow 8b \equiv 12$$

$$\Rightarrow 8b \equiv 12 \xrightarrow{\div 4} 2b \equiv 3 \equiv 18 \xrightarrow{(2,15)=1} b \equiv 9$$

۳۱۴ ۲

ابتدا طرفین معادله $25x + 12y = 1110$ را به پیمانه ۱۲ هم‌نهشت

می‌کنیم:

$$25x + 12y = 1110 \Rightarrow 25x + 12y \stackrel{12}{\equiv} 1110$$

$$\Rightarrow 25x \stackrel{12}{\equiv} 12y \stackrel{12}{\equiv} 1110 \Rightarrow x \stackrel{12}{\equiv} 6 \Rightarrow x = 12k + 6$$

حال $x = 12k + 6$ را در معادله قرار می‌دهیم:

$$25(12k + 6) + 12y = 1110 \Rightarrow 25(12k) + 12y = 960$$

$$\Rightarrow 25k + y = 80 \Rightarrow y = 80 - 25k$$

جواب‌های معادله را در مجموعه اعداد طبیعی می‌خواهیم. پس:

$$\begin{cases} x = 12k + 6 \\ y = 80 - 25k \end{cases} \Rightarrow k = 0, 1, 2, 3 \Rightarrow \text{جواب ۴}$$

۳۱۵ ۱

ابتدا حاصل $(357, 629)$ را به دست آورده، سپس طرفین معادله

را بر آن تقسیم می‌کنیم:

$$(357, 629) = (17 \times 21, 17 \times 37) = 17 \Rightarrow 21x + 37y = 1$$

حال طرفین معادله سیاله را به پیمانه ۲۱ هم‌نهشت می‌کنیم:

$$21x + 37y = 1 \Rightarrow 21x + 37y \stackrel{21}{\equiv} 1 \Rightarrow 37y \stackrel{21}{\equiv} 1$$

$$\Rightarrow -5y \stackrel{21}{\equiv} -20 \xrightarrow[(-5, 21)=1]{\div(-5)} y \stackrel{21}{\equiv} 4 \Rightarrow y = 21k + 4$$

مقدار y را در معادله قرار داده تا x مشخص شود:

$$21x + 37(21k + 4) = 1 \Rightarrow 21x + 37(21k) = -147$$

$$\xrightarrow{\div 21} x + 37k = -7 \Rightarrow x = -37k - 7$$

بنابراین کم‌ترین مقدار $x + y$ برابر است با:

$$x + y = (-37k - 7) + (21k + 4) = -16k - 3 \xrightarrow[k=-1]{\text{کوچک‌ترین عدد مثبت}} x + y = 13$$

۳۱۶ ۲

ابتدا طرفین معادله را به پیمانه ۹ هم‌نهشت می‌کنیم:

$$9x + 11y = 1000 \Rightarrow 9x + 11y \stackrel{9}{\equiv} 1000 \Rightarrow 11y \stackrel{9}{\equiv} 1000$$

$$\Rightarrow 2y \stackrel{9}{\equiv} 10 \xrightarrow[(2, 9)=1]{\div 2} y \stackrel{9}{\equiv} 5 \Rightarrow y = 9k + 5$$

حال $y = 9k + 5$ را در معادله قرار می‌دهیم:

$$9x + 11(9k + 5) = 1000 \Rightarrow 9x + 11(9k) = 945$$

$$\Rightarrow x + 11k = 105 \Rightarrow x = 105 - 11k$$

جواب‌های معادله در مجموعه اعداد طبیعی عبارتند از:

$$\begin{cases} y = 9k + 5 \\ x = 105 - 11k \end{cases} \Rightarrow k = 0, 1, 2, 3, \dots, 9 \Rightarrow \text{جواب ۱۰}$$

فرض می‌کنیم x تمبر ۵۰ ریالی و y تمبر ۹۰ ریالی می‌خواهیم. پس:

۳۱۷ ۳

$$50x + 90y = 850 \Rightarrow 5x + 9y = 85 \Rightarrow 5x + 9y \stackrel{5}{\equiv} 85$$

$$\Rightarrow 9y \stackrel{5}{\equiv} 85 \xrightarrow[-1]{\div 9} y \stackrel{5}{\equiv} 0 \xrightarrow{\times(-1)} y \stackrel{5}{\equiv} 0 \Rightarrow y = 5k$$

حال $y = 5k$ را در معادله قرار می‌دهیم:

$$5x + 9(5k) = 85 \xrightarrow{\div 5} x + 9k = 17 \Rightarrow x = 17 - 9k$$

بنابراین کم‌ترین مقدار $x + y$ که همان کم‌ترین تعداد تمبر لازم برای بسته

می‌باشد برابر است با:

$$x + y = (17 - 9k) + (5k) = 17 - 4k$$

از طرفی حواسمان هست که x و y منفی نیستند، چون x و y تعداد تمبرها

می‌باشند، پس k فقط می‌تواند صفر و یک باشد:

$$x + y = 17 - 4k \xrightarrow[k=1]{\text{کم‌ترین مقدار}} x + y = 13$$

فرض می‌کنیم x تمبر ۱۵۰ ریالی و y تمبر ۲۵۰ ریالی داریم. پس:

۳۱۸ ۱

$$150x + 250y = 3700 \xrightarrow{\div 50} 3x + 5y = 74 \Rightarrow 3x + 5y \stackrel{3}{\equiv} 74$$

$$\Rightarrow 5y \stackrel{3}{\equiv} 74 \xrightarrow[-1]{\div 5} -y \stackrel{3}{\equiv} -1 \Rightarrow y \stackrel{3}{\equiv} 1 \Rightarrow y = 3k + 1$$

حال $y = 3k + 1$ را در معادله قرار می‌دهیم:

$$3x + 5(3k + 1) = 74 \Rightarrow 3x + 5(3k) = 69 \xrightarrow{\div 3} x + 5k = 23$$

$$\Rightarrow x = 23 - 5k$$

چون تعداد تمبرها منفی نمی‌شود، پس:

$$\begin{cases} x = 23 - 5k \\ y = 3k + 1 \end{cases} \Rightarrow k = 0, 1, 2, 3, 4 \Rightarrow \text{طریق ۵}$$

باید معادله $200A + 150B = 7550$ را حل کنیم:

۳۱۹ ۴

$$200A + 150B = 7550 \Rightarrow 4A + 3B = 151 \Rightarrow 4A + 3B \stackrel{3}{\equiv} 151$$

$$\Rightarrow 4A \stackrel{3}{\equiv} 151 \xrightarrow{\div 4} A \stackrel{3}{\equiv} 1 \Rightarrow A = 3k + 1$$

حال $A = 3k + 1$ را در معادله قرار می‌دهیم:

$$4(3k + 1) + 3B = 151 \Rightarrow 4(3k) + 3B = 147 \xrightarrow{\div 3} 4k + B = 49$$

$$\Rightarrow B = 49 - 4k$$

بنابراین $A + B$ برابر است با:

$$A + B = (3k + 1) + (49 - 4k) = 50 - k$$

چون تعداد تمبرها منفی نیست، پس k از صفر تا ۱۲ می‌تواند باشد و به ازای

$k = 12$ کم‌ترین مقدار $A + B$ حاصل می‌شود که برابر $38 = 50 - 12$ است.

ابتدا طرفین معادله را بر ۷ تقسیم می‌کنیم و داریم:

۳۲۰ ۳

$$7x + 21y = 28 \Rightarrow x + 3y = 4$$

چون ضریب x برابر ۱ است، با فرض $y = k$ مقدار $x = 4 - 3k$ خواهد بود.

حال داریم:

$$\begin{cases} -20 < x < 20 \Rightarrow -20 < 4 - 3k < 20 \Rightarrow -24 < -3k < 16 \\ \Rightarrow -5/\dots < k < 8 \\ -20 < y < 20 \Rightarrow -20 < k < 20 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} -5 \leq k < 8 \Rightarrow \text{جواب ۱۳}$$