

خرید کتاب های کنکور

با تخفیف ویژه

و

ارسال رایگان

Medabook.com

+



یک جله تماس تلفنی رایگان

با مشاوران رتبه برتر

برای انتخاب بهترین منابع

دبیرستان و کنکور

۰۲۱ ۲۸۴۲۵۲۱۰



# فهرست

تست	درس نامه		
۳۱	۸	درس ۱: گزاره	<b>فصل اول</b> آشنایی با مبانی ریاضیات و استدلال
۳۶	۱۵	درس ۲: مجموعه	
۳۹	۲۰	درس ۳: قوانین جبر مجموعه‌ها	
۴۴		آزمون:	
۴۵		سری Z:	
۶۷	۴۷	درس ۱: فضای نمونه‌ای و پیشامد	<b>فصل دوم</b> احتمال
۶۸	۵۰	درس ۲: احتمال هم‌شانس	
۷۴	۵۴	درس ۳: قوانین احتمال	
۷۶	۵۶	درس ۴: احتمال غیرهم‌شانس	
۷۷	۵۸	درس ۵: احتمال شرطی	
۸۰	۶۱	درس ۶: قانون احتمال کل	
۸۳	۶۴	درس ۷: پیشامدهای مستقل	
۸۶		آزمون:	
۸۷		سری Z:	
۱۰۹	۸۹	درس ۱: مقدمه‌ای بر علم آمار	<b>فصل سوم</b> آمار توصیفی
۱۱۶	۱۰۱	درس ۲: شاخص‌های پراکندگی	
۱۲۰		آزمون:	
۱۲۱		سری Z:	
۱۳۰	۱۲۳	درس ۱: روش‌های نمونه‌گیری	<b>فصل چهارم</b> آمار استنباطی
۱۳۱	۱۲۵	درس ۲: برآورد	
۱۳۴		آزمون:	
۱۳۵		سری Z:	
۱۳۷			
۱۹۸			<b>پاسخ‌نامه تشریحی</b> <b>پاسخ‌نامه کلیدی</b>

# درس دوم احتمال هم‌شانسی



## احتمال مقدماتی

در فضای نمونه‌ای هم‌شانسی (همه اعضای  $S$  شانسی یکسان دارند)، احتمال (یعنی شانسی) رخ دادن هر پیشامد، متناسب با تعداد اعضای آن است. یعنی هر چه پیشامد  $A$ ، تعداد عضو بیشتری داشته باشد، شانسی بیشتری دارد، به بیان دقیق‌تر، احتمال پیشامد  $A$  از فضای نمونه‌ای  $S$  برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

تذکره: از این تعریف نتیجه می‌شود که:  $0 < P(\text{پیشامدهای دیگر}) < 1$   $P(S) = 1$   $P(\emptyset) = 0$

مدل‌های مختلفی از سؤال در این قسمت هست: سکه، تاس، عددسازی، کلمه‌سازی، انتخاب، چیدن، ساختن مثلث، گروه‌ها، گوی‌ها و ... در هر کدام از این مدل‌ها، برای محاسبه احتمال، باید بلد باشیم که  $n(S)$  و  $n(A)$  را به سرعت به دست بیاوریم، تیپ‌های مختلف را با هم ببینیم:

۱. پرتاب تاس: در پرتاب تاس دیدیم که فضای نمونه‌ای به صورت  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  در نتیجه  $n(S) = 6$  است، برای احتمال پیشامدی مانند  $A$ : «مضرب ۳ بیاید» تعداد اعضای  $A$  را به دست می‌آوریم:  $A = \{3, 6\}$  پس  $n(A) = 2$  و احتمال آن برابر است با:  $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

آزمون: در پرتاب یک تاس، احتمال کدام پیشامد با بقیه فرق دارد؟

- (۱) مضرب ۳ یا زوج بیاید. (۲) فرد یا اول بیاید.  
(۳) نه مضرب ۴ باشد و نه اول. (۴) مضرب ۳ نیاید.

پاسخ: در پرتاب یک تاس  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  فضای نمونه‌ای است؛ پس  $n(S) = 6$ .

در (۱) می‌خواهیم مضرب ۳ یا زوج باشد. مضرب ۳ عبارت‌اند از ۳ و ۶ و اعداد زوج عبارت‌اند از ۲ و ۴ و ۶؛ پس اجتماع این‌ها می‌شود  $A = \{2, 3, 4, 6\}$  که

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{6}$$

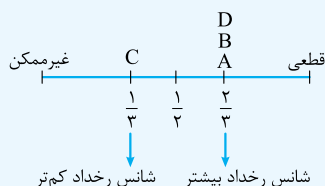
در (۲) احتمال فردها یا اول‌ها را داریم؛ یعنی پیشامد  $B = \{1, 2, 3, 5\}$  که این هم ۴ عضوی است و احتمالش  $P(B) = \frac{4}{6}$  خواهد بود. پس می‌گوییم  $A$  و  $B$  هم‌شانسی هستند.

در (۳) مضرب ۴ نباشد و اول نباشد؛ یعنی ۴ و هم‌چنین ۲ و ۳ و ۵ را نمی‌خواهیم، پس پیشامد مورد نظر  $C = \{1, 6\}$  است که احتمالش

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{2}{6}$$

در (۴) باید مضرب ۳ نیاید؛ یعنی  $D' = \{3, 6\}$ ؛ پس  $D = \{1, 2, 4, 5\}$  که احتمال این هم  $\frac{4}{6}$  خواهد شد؛ پس (۳) با بقیه متفاوت بود.

تذکره: کتاب درسی در مقایسه احتمال پیشامدهای مختلف، (این محور را هم کشیده است):





	۱	۲	۳	۴	۵	۶	تاس اول ←
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	این یعنی تاس اول ۶ و تاس دوم ۲ است.
۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	
۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	
۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	
۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	
۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	
تاس دوم ↑							در این شش خانه روی قطر دو تاس مساوی هم هستند.

**دو تاس** • پرتاب دو تاس یکی از مهم‌ترین مسئله‌های فصل احتمال است. فضای

نمونه‌ای آن  $6^2 = 36$  عضو دارد که در جدول روبه‌رو آن‌ها را می‌آوریم:  
در پرتاب دو تاس ۳۶ حالت به وجود می‌آید که در ۶ حالت (روی قطر) اعداد دو تاس با هم برابرند، در ۱۵ خانه بالاتر از قطر، عدد تاس اول بیشتر است و در ۱۵ خانه پایین‌تر از قطر، عدد تاس دوم بیشتر است.

در هر خانه جدول، مجموع دو تاس را نوشته‌ایم؛ همان‌طور که می‌بینید مثلاً در ۳ تا خانه از ۳۶ خانه، مجموع برابر ۴ است، پس احتمال این که مجموع دو تاس برابر ۴ باشد برابر است با  $\frac{3}{36}$ .

**تکرار** در پرتاب دو تاس همیشه حالت (۱، ۵) با حالت (۵، ۱) فرق دارد و برای این که اشتباه نکنید همواره فرض کنید که دو تاس متمایز هستند. یعنی همیشه بگویید: تاس اول، تاس دوم و ...

بعضی‌ها دوست دارند تعداد حالت‌های مجموع دو تاس را حفظ باشند، جدول زیر به ما کمک می‌کند که با یک الگوی خوب، حالت‌ها را حفظ کنیم:

						بیشترین احتمال					
جمع دو تاس	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد حالت‌ها	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

یک واحد یک واحد کم می‌شود ← یک واحد یک واحد زیاد می‌شود →

مثلاً احتمال این که مجموع دو تاس ۱۱ باشد، برابر است با:  $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

**آزمون** در پرتاب دو تاس، احتمال این که «اختلاف تاس‌ها ۲ یا مجموع دو تاس کم‌تر از ۵ باشد» کدام است؟

- ۱)  $\frac{1}{4}$
- ۲)  $\frac{1}{3}$
- ۳)  $\frac{1}{2}$
- ۴)  $\frac{7}{18}$

**پاسخ** پیشامد مطلوب از اجتماع دوتا پیشامد ساخته شده:

جمع کم‌تر از ۵ باشد  $B$  و اختلاف تاس‌ها ۲ باشد  $A$

جدول را ببینید:

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	B	B	AB			
۲	B	B		A		
۳	AB				A	
۴		A				A
۵			A			
۶				A		

$A$  دارای ۸ عضو و  $B$  شامل ۶ عضو است و ۲ تا عضو هم که مشترک است، پس ۱۲ تا از ۳۶ تا خانه جدول، مطلوب هستند، پس احتمال برابر است با:  $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ .

**۲. پرتاب سکه - جنسیت فرزندان یک خانواده** • وقتی یک سکه را پرتاب می‌کنیم، احتمال «رو» برابر احتمال «پشت» و هر کدام برابر  $\frac{1}{2}$

هستند، دقیقاً مثل این که وقتی بچه‌ای به دنیا می‌آید، احتمال دختر (یا پسر) بودنش،  $\frac{1}{2}$  است، پس آزمایش پرتاب سکه دقیقاً مثل جنسیت فرزندان یک خانواده است. با یک نکته راحت می‌توانیم تمام تست‌های این قسمت را مثل آب خوردن حل کنیم:

**نکته ۱** در یک خانواده با  $n$  فرزند، احتمال این که خانواده  $k$  فرزند پسر (یا دختر) داشته باشد، برابر است با:  $\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$

**نکته ۲** در  $n$  بار پرتاب یک سکه (پرتاب  $n$  تا سکه)، احتمال این که  $k$  بار «رو» بیاید برابر است با:  $\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$

مثلاً اگر ۵ سکه را با هم پرتاب کنیم، احتمال این که ۳ تا سکه رو بیاید برابر است با:  $\frac{\binom{5}{3}}{2^5} = \frac{10}{32}$

**آزمون** در یک خانواده با ۶ فرزند، احتمال این که تعداد پسرها دو برابر تعداد دخترها باشد، کدام است؟

- ۱)  $\frac{15}{64}$
- ۲)  $\frac{1}{2}$
- ۳)  $\frac{1}{4}$
- ۴)  $\left(\frac{15}{64}\right)^2$

**پاسخ** باید تعداد پسرها ۴ تا و تعداد دخترها ۲ تا باشد! پس احتمال این را می‌خواهیم که ۴ تا پسر داشته باشیم:

$$P(۴ تا پسر) = P(۲ تا دختر) = \frac{\binom{6}{4}}{2^6} = \frac{15}{64}$$

**یادآوری**  $\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$



### ۳. کیسه و مهره‌های رنگی

رسیدیم به معروف‌ترین و مهم‌ترین تست‌های احتمال! تست می‌گویید که یک کیسه داریم و درون آن  $n$  مهره سفید و  $m$  مهره سیاه وجود دارد، مثلاً ۳ مهره برمی‌داریم و چه قدر احتمال دارد که ۲ تا سفید باشد؟ در این تست‌ها فضای نمونه‌ای برابر است با: (تعداد انتخاب‌ها) و برای محاسبه تعداد اعضای پیشامد مطلوب، از بین رنگ‌ها انتخاب می‌کنیم. در مثالی که زدیم باید ۲ تا از سفیدها و یکی از سیاه‌ها

$$\text{را انتخاب کنیم: } \frac{\binom{n}{2} \times \binom{m}{1}}{\binom{m+n}{3}}$$

**تذکره** دقت کنید که مجموع انتخاب‌ها در صورت و مجموع انتخاب‌ها در مخرج کسر باید برابر ۳ باشد.

**تست ۱** در کیسه‌ای ۴ مهره سبز، ۳ مهره آبی و ۵ مهره قرمز داریم. اگر ۳ مهره با هم بیرون بیاوریم، شانس کدام اتفاق کم‌تر از بقیه است؟

(۱) سه رنگ متفاوت خارج شود.

(۲) مهره‌های خارج شده فقط از دو رنگ باشند.

(۳) در بین مهره‌های خارج شده، فقط یک آبی باشد.

(۴) در بین مهره‌ها، فقط دو قرمز باشد.

**پاسخ ۱**  $n(S)$  برای همه پیشامدها یکسان و برابر است با  $\frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$ . پس برویم دنبال تعداد عضو پیشامدها:

در (۱) برای سه رنگ متفاوت داریم:

$$n(A) = \binom{3}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{5}{1} = 3 \times 4 \times 5 = 60$$

یک یک یک  
قرمز سبز آبی

در (۲) برای این‌که مهره‌ها فقط از دو رنگ باشند، باید دوتا از مهره‌ها هم‌رنگ و سومی متفاوت باشد؛ یعنی:

$$n(B) = \binom{3}{2} \times \binom{9}{1} + \binom{4}{2} \times \binom{8}{1} + \binom{5}{2} \times \binom{7}{1} = 3 \times 9 + 6 \times 8 + 10 \times 7 = 27 + 48 + 70 = 145$$

دو یکی دو یکی دو یکی  
آبی دیگر سبز دیگر قرمز دیگر

در (۳) فقط یک آبی و بنابراین دوتا از بین سبز و قرمز می‌خواهیم:

$$n(C) = \binom{3}{1} \times \binom{9}{2} = 3 \times 36 = 108$$

یک دوتا دیگر  
آبی دیگر

در (۴) دو قرمز و یکی دیگر می‌خواهیم:

$$n(D) = \binom{5}{2} \times \binom{7}{1} = 70$$

دو یکی دیگر  
قرمز دیگر

پس شانس (۱) از همه کم‌تر است؛ چون تعداد اعضای پیشامدش از همه کم‌تر است.

**تذکره** گاهی اوقات به جای الفاظ کیسه و مهره، تست می‌گویید: چند نوع جاندار یا دانش‌آموزان تجربی و ریاضی و ... ولی داستان همان داستان است!

**تست ۱** از بین ۴ ببر و ۶ تا شیر و ۲ تا زرافه، ۲ تا را انتخاب می‌کنیم، با چه احتمالی حیوانات انتخاب شده از یک نوع نیستند؟

(۱)  $\frac{2}{3}$  (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{3}{4}$

**پاسخ ۱** تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر است با:  $n(S) = \binom{12}{2} = \frac{12 \times 11}{2} = 66$  را با اصل جمع باید به دست بیاوریم:

$$n(A) = \binom{4}{1} \times \binom{6}{1} + \binom{4}{1} \times \binom{2}{1} + \binom{6}{1} \times \binom{2}{1} = 24 + 8 + 12 = 44$$

ببر و شیر ببر و زرافه شیر و زرافه  
۴×۶ ۴×۲ ۶×۲

$$P(A) = \frac{44}{66} = \frac{2}{3}$$

پس احتمال برابر است با:

**۴. کیسه و مهره‌های شماره‌دار** در بعضی از تست‌ها مهره‌های درون کیسه، شماره‌دار هستند و باید تعدادی از آن مهره‌ها را خارج کنیم و

احتمال اتفاق خاص را بررسی کنیم، در این سؤال‌ها دقت کنید که

(۱)  $n(S)$  باز هم برابر (تعداد انتخاب‌ها) کل است.

(۲) ترتیب شماره‌های خارج شده اهمیت ندارد یعنی در این مسائل برخلاف پرتاب دو تاس (۱,۲) و (۲,۱) با هم فرقی ندارند.

(۳) وقتی که شماره‌های ۱ تا  $n$  را در کیسه داریم و ۲ تا مهره خارج می‌کنیم، امکان ندارد که مثلاً ۲ و ۲ خارج شده باشند (پون پرونه «۲» داریم!).

**تست ۱** از میان ۶ گوی با شماره‌های ۱ تا ۶، سه گوی با هم خارج می‌کنیم. با کدام احتمال مجموع شماره‌های خارج شده زوج است؟

(۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{2}{5}$  (۴)  $\frac{3}{5}$



ابتدا  $n(S)$  را به دست می آوریم: **پاسخ ۱۲** |  $n(S) = \binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3} = 20$

مجموع سه عدد وقتی زوج می شود که یا «هر سه عدد زوج باشند» و یا «دوتا از اعداد فرد و دیگری زوج باشد»، پس:

در اعداد ۱ تا ۶، ۳ تا عدد فرد داریم، ۳ تا عدد زوج داریم: {۶، ۴، ۲}

$$n(A) = \binom{3}{3} + \binom{3}{2} \times \binom{3}{1} = 1 + 3 \times 3 = 10$$

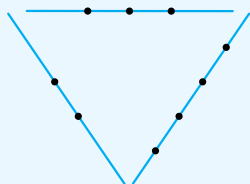
انتخاب انتخاب انتخاب  
۱ زوج ۲ تا فرد ۳ تا زوج

پس احتمال می شود:  $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

**احتمال به کمک آنالیز ترکیبی** • در خیلی از تست ها، برای محاسبه  $n(S)$  و  $n(A)$  برمی گردیم به فصل آنالیز ترکیبی و از مطالبی که آن جا یاد گرفتیم، استفاده می کنیم، خوب! طبیعتاً تنوع این تست ها خیلی زیاد است! در جدول زیر نمونه های اصلی را مرور می کنیم:

P(A)	n(A) و رسیدن به A شمارش پیشامد	خواسته سؤال	n(S)	بیان آزمایش	مدل چیدمان
$\frac{18}{120} = \frac{3}{20}$	$n(A) = 3 \times 6 = 18$ به جز علی و رضا ۳! فقط علی	علی نفر اول باشد و رضا آخر نباشد.	$5! = 120$	۵ نفر کنار هم در صف می ایستند.	
$\frac{24}{60} = \frac{2}{5}$	$\frac{2}{2} \times 4 \times 3 = 24$	کم تر از ۳۰۰ باشد.	$5 \times 4 \times 3 = 60$	با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ عدد سه رقمی با ارقام متمایز می سازیم.	مدل عددسازی
$\frac{16}{120} = \frac{2}{15}$	$4 \times 2! \times 2 = 16$ صف دوتایی بسته S و P حرف دیگر	در کلمه جدید، P و S کنار هم باشند.	$6 \times 5 \times 4 = 120$	با حروف کلمه SPACET کلمه های ۳ حرفی می سازیم.	مدل کلمه سازی

**تست ۱۱** | از نقاط شکل، ۳ تا را انتخاب می کنیم، با کدام احتمال مثلث با رئوس نقاط انتخابی وجود دارد؟



- (۱)  $\frac{27}{28}$
- (۲)  $\frac{20}{21}$
- (۳)  $\frac{79}{84}$
- (۴)  $\frac{13}{14}$

**پاسخ ۱۲** | برای انتخاب ۳ تا از نقاط به تعداد  $n(S) = \binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} = 84$

استفاده از متمم می گوئیم:  $n(A) = n(S) - n(A') = \binom{9}{3} - \left( \binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{2}{3} \right) = 84 - (1 + 4 + 0) = 79$

سه نقطه روی یک خط

دقت کردید؟ یا هر سه نقطه روی خط بالایی اند یا هر سه روی خط سمت راست یا هر سه روی خط سمت چپ (که امکان ندارد چون فقط دوتا نقطه روی این خط است). پس احتمال می شود:

$P(A) = \frac{79}{84}$

**تذکره ۱۱** جایگشت های خاص، یکی در میان ها، بسته بندی اشیا و ... در تست های احتمال خیلی محبوب هستند.

**تست ۱۳** | ۷ کارت با شماره های ۱ تا ۷ را کنار هم می چینیم، چه قدر احتمال دارد که ارقام زوج و فرد یکی در میان قرار بگیرند؟

- (۱)  $\frac{3}{70}$
- (۲)  $\frac{2}{35}$
- (۳)  $\frac{1}{70}$
- (۴)  $\frac{1}{35}$

**پاسخ ۱۴** | از چینش اعداد ۱ تا ۷ به تعداد ۷! صف ایجاد می شود. پس  $n(S) = 7!$

برای یکی در میان شدن باید فرم کلی این جور باشد: فرد زوج فرد زوج فرد زوج فرد، پس حتماً صف با یک عدد فرد شروع شود! پس جایگاه اعداد فرد مشخص است و ۴! جایگشت دارند و جایگاه اعداد زوج نیز مشخص است و ۳! جایگشت دارند، پس:  $n(A) = 3! \times 4!$ ، حالا احتمال را حساب می کنیم:

$P(A) = \frac{3! \times 4!}{7!} = \frac{3!}{5 \times 6 \times 7} = \frac{1}{35}$

**حرف آخر** • همیشه قرار نیست شمارش تعداد اعضای  $n(A)$  با استفاده از اصل ضرب و جمع و ترکیب و این ها باشد. بعضی اوقات، به خصوص در مسائل عددها و برای بررسی بخش پذیری یا اول بودن، تنها راه، نوشتن اعضای S و پیدا کردن اعضای A است.



تست زیر را ببینید:

**تست ۱** با ارقام ۱، ۲، ۴ و ۵ عددی دورقمی می‌سازیم (تکرار ارقام مجاز است). با کدام احتمال اول است؟

$\frac{1}{4}$  (۴)

$\frac{1}{8}$  (۳)

$\frac{3}{16}$  (۲)

$\frac{1}{16}$  (۱)

**پاسخ ۳** اعداد دورقمی با این ارقام عبارت‌اند از:

$n(S) = 4 \times 4 = 16$

$S = \{11, 12, 14, 15, 21, 22, 24, 25, 41, 42, 44, 45, 51, 52, 54, 55\}$

که در بین آن‌ها فقط ۱۱ و ۴۱ اول‌اند. پس  $n(A) = 2$  و احتمال می‌شود  $\frac{2}{16}$  یا  $\frac{1}{8}$ .