فصل ۱: مجموعه‌ها

معرفی مجموعه

مجموعه: دسته‌ای از اشیای مشخص و دوبه‌دو متمایز را مجموعه می‌گویند. به هر کدام از این اشیا، عضو مجموعه می‌گویند. برای نشان‌دادن «عضویت» از نماد $\in$ و «عضویت‌نداشتن» از نماد $\notin$ استفاده می‌کنند. ممکن است عضو یک مجموعه، خودش مجموعه باشد. اگر ترتیب اعضای یک مجموعه را عوض کنیم یا عضوهای یک مجموعه تکراری باشند، مجموعه تغییری نمی‌کند.

مجموعه‌ی تهی: مجموعه‌ای که هیچ عضوی ندارد و با نماد $\varnothing$ یا $\{\ \}$ نمایش داده می‌شود.

مجموعه‌ی متناهی: مجموعه‌ای که تعداد عضوهای آن قابل شمارش باشند.

مجموعه‌ی نامتناهی: مجموعه‌ای که تعداد عضوهای آن بی‌شمار است.

کدام‌یک از موارد زیر یک مجموعه را مشخص می‌کند؟

الف) سه شهر زیبای ایران

ب) اعداد گویای بین صفر و ۱

الف) مجموعه نیست. صفت «زیبایی» یک صفت کاملاً مشخص نیست و سلیقه‌ای است.

ب) مجموعه است. با آن‌که اعضای آن بی‌شمار هستند ولی مشخص و دوبه‌دو متمایز هستند.

کدام‌یک از مجموعه‌های زیر متناهی و کدام نامتناهی است؟

الف) مجموعه‌ی پرندگان روی کره‌ی زمین

ب) مجموعه‌ی نقطه‌های روی یک خط راست

الف) متناهی است. هرچند تعداد آن‌ها خیلی زیاد است ولی بالاخره تمام می‌شوند.

ب) نامتناهی است. تعداد آن‌ها را نمی‌توانیم با شمارش تعیین کنیم.

تعداد عضوهای هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $\{a,b,b\}$

ب) $\{۱,\{۱\},\{۱,۱\},\{۱,۱,۱\}\}$

پ) $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\ \}\}$

ت) $\{\{۱,۲,۳,۴,۵\}\}$

ث) $\{\{۱,۲,\{۱,۲\}\},\{۱,۲\}\}$

ج) $\{\{\{\{\{۰\}\}\}\}\}$

چ) $\{\{\{a\},\{a,a\}\},\{\{a\}\}\}$

الف) دوعضوی است و عضوهای آن عبارت‌اند از a و b.

ب) دوعضوی است و عضوهای آن ۱ و $\{۱\}$ هستند.

پ) دوعضوی است و عضوهای آن $\varnothing$ و $\{\varnothing\}$ هستند.

ت) یک‌عضوی است و تنها عضو آن $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ است.

ث) دوعضوی است با عضوهای $\{۱,۲\}$ و $\{۱,۲,\{۱,۲\}\}$

ج) یک‌عضوی است و تنها عضو آن $\{\{\{\{۰\}\}\}\}$ است.

چ) یک‌عضوی است و تنها عضو آن $\{\{a\}\}$ است.

اگر $A=\{۵,\{۵\},\{۵,\{۵\},۳\},\{\ \},\{\varnothing\}\}$ کدام‌یک از موارد زیر درست و کدام نادرست است؟

الف) $\{\{\ \},\{\varnothing\}\}\in A$

ب) $۳\in A$

پ) $\{۵,\{۵\}\}\notin A$

ت) $\varnothing\in A$

ث) $۵\in A$

موارد «الف» و «ب» نادرست و موارد «پ»، «ت» و «ث» درست هستند.

مجموعه‌های مساوی

اگر دو مجموعه‌ی A و B چنان باشند که هر عضو A درون B و هر عضو B درون A باشد، آن‌گاه دو مجموعه‌ی A و B را مساوی می‌گوییم و می‌نویسیم: $A=B$.

کدام‌یک از مجموعه‌های زیر با هم مساوی‌اند؟

الف) $A=\{\{x,y,z\}\}$, $B=\{x,y,z\}$ ب) $A=\{\{۰\}\}$, $B=\{\{۰\},\{۰,۰\}\}$

الف) مساوی نیستند. مجموعه‌ی A یک‌عضوی و مجموعه‌ی B سه‌عضوی است.

ب) مساوی‌اند و هر دو دارای یک عضو $\{۰\}$ هستند.

اگر دو مجموعه‌ی A و B مساوی باشند، چند مقدار برای x می‌توان یافت؟ $A=\{۵x-۳,x+۸\}$, $B=\{۵x+۱۲,-x-۹\}$

اگر $۵x+۱۲=۵x-۳$ باشد، آن‌گاه به رابطه‌ی $۱۵=۰$ می‌رسیم که غیرممکن است. بنابراین باید $۵x-۳=-x-۹$ باشد که از حل معادله به دست می‌آید $x=-۱$. اگر به ازای $x=-۱$ دو عبارت $x+۸$ و $۵x+۱۲$ با هم برابر باشند، آن‌گاه دو مجموعه‌ی A و B مساوی خواهند شد که اگر عدد -۱ را در دو رابطه قرار دهیم، به تساوی $۷=۷$ می‌رسیم. پس اگر $x=-۱$ باشد، دو مجموعه مساوی‌اند.

اگر داشته باشیم: $\{(۲y-۵),(۲۵-۳y)\}=\{a\}$، مقدار a چه‌قدر است؟

باید داشته باشیم: $۲y-۵=۲۵-۳y \Rightarrow ۵y=۳۰ \Rightarrow y=۶$

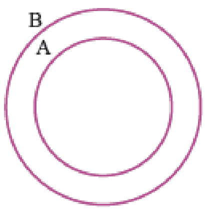
اگر $y=۶$ باشد، آن‌گاه $a=۲(۶)-۵=۷$ خواهد بود.

دو مجموعه‌ی هم‌ارز

اگر تعداد عضوهای دو مجموعه با هم برابر باشد، دو مجموعه را هم‌ارز می‌گویند. به عنوان مثال مجموعه‌های A، B و C هم‌ارزند.

$A=\{۱,۲\}$ $B=\{a,b\}$ $C=\{\{۷\},\{۸,۹\}\}$

زیرمجموعه



مجموعه‌ی A را زیرمجموعه‌ی B می‌گوییم، هرگاه هر عضو A، عضوی از B نیز باشد و می‌نویسیم $A\subset B$.

توجه داشته باشید اگر $A\subset B$ و $B\subset A$ باشد، آن‌گاه $A=B$ خواهد بود.

همین‌طور، واضح است که اگر $A\subset B$ و $B\subset C$ باشد، آن‌گاه $A\subset C$ است.

در مورد زیرمجموعه‌ها به نکات زیر توجه داشته باشید:

۱) در مجموعه‌ای مانند $A=\{۷,۸,۹\}$، برای آن‌که نشان دهیم ۷ زیرمجموعه‌ی A است، آن را به صورت $\{۷\}\subset A$ می‌نویسیم ولی در مورد عضوبودن، می‌نویسیم $۷\in A$. به عبارت دیگر استفاده از نمادهای $۷\subset A$ یا $\{۷\}\in A$ نادرست است.

۲) تهی زیرمجموعه‌ی تمام مجموعه‌ها است. $\varnothing\subset A$

۳) هر مجموعه، زیرمجموعه‌ی خودش است. $A\subset A$

اگر $A=\{x,\{\{x\}\},\{x,y,z\},\varnothing\}$، آن‌گاه کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست است؟

الف) $\varnothing\in A$ ب) $\varnothing\subset A$

پ) $\{\varnothing,x\}\subset A$ ت) $\{\{\{x\}\}\}\subset A$

ث) $\{x,y,z\}\subset A$ ج) $\{x\}\subset A$

چ) $\{\{x\},x\}\subset A$

با توجه به نکته‌ی ذکرشده، فقط موارد «ث» و «چ» نادرست و بقیه‌ی موارد درست هستند. برای قسمت «ث» باید بنویسیم: $\{\{x,y,z\}\}\subset A$ و برای قسمت «چ»، $\{\{\{x\}\},x\}\subset A$

تمام زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $A=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$ را بنویسید.

زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی A عبارت‌اند از:

۱) مجموعه‌ی تهی: $\varnothing$

۲) زیرمجموعه‌های یک‌عضوی: $\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

۳) زیرمجموعه‌های دوعضوی: $\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

$\{\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

۴) زیرمجموعه‌ی سه‌عضوی که همان A است: $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

اگر A یک مجموعه‌ی n عضوی باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی A دارای ۲^n زیرمجموعه است.

به همه‌ی زیرمجموعه‌های A به‌جز خودش، زیرمجموعه‌های محض A می‌گویند. بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های محض A برابر $۲^n-۱$ می‌باشد.

هر یک از مجموعه‌های زیر چند زیرمجموعه‌ی محض دارند؟

الف) $\varnothing$ ب) $\{\{\{۱\}\}\}$

الف) مجموعه‌ی تهی دارای $۲^۰=۱$ زیرمجموعه است. (تنها زیرمجموعه‌ی تهی، مجموعه‌ی تهی است). بنابراین مجموعه‌ی تهی زیرمجموعه‌ی محض ندارد.

ب) مجموعه‌ی داده‌شده یک‌عضوی است لذا $۲^۱=۲$ زیرمجموعه دارد که فقط یکی از آن‌ها زیرمجموعه‌ی محض آن است.

پاسخ پرسش‌های زیر را به دست آورید.

الف) تعداد زیرمجموعه‌های محض یک مجموعه ۵۱۱ تا است. این مجموعه چند عضو دارد؟

ب) تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی ۵۰عضوی، چند برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی ۴۵عضوی است؟

پ) تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $n+۸$ عضوی، چند برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $n-۳$ عضوی است.

ت) اگر به تعداد عضوهای یک مجموعه، ۴ تا اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن چند برابر می‌شود؟

ث) تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی k عضوی، ۹۶تا بیشتر از تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $k-۲$ عضوی است. k را پیدا کنید.

ج) اگر به تعداد عضوهای یک مجموعه، ۴ تا اضافه کنیم، به تعداد زیرمجموعه‌های آن ۴۸۰ تا اضافه می‌شود. این مجموعه، چند زیرمجموعه‌ی محض دارد؟

الف) داریم: $۲^n-۱=۵۱۱ \Rightarrow ۲^n=۵۱۲ \Rightarrow n=۹$

ب) $\dfrac{۲^{۵۰}}{۲^{۴۵}}=۲^۵=۳۲$ (برابر)

پ) $\dfrac{۲^{n+۸}}{۲^{n-۳}}=۲^{n+۸-n+۳}=۲^{۱۱}=۲۰۴۸$ (برابر)

ت) اگر مجموعه‌ی موردنظر n عضوی باشد، پس ۲^n زیرمجموعه دارد. اگر به تعداد عضوهای آن ۴ تا اضافه کنیم، مجموعه‌ی جدید $۲^{n+۴}$ زیرمجموعه خواهد داشت. بنابراین: $\dfrac{۲^{n+۴}}{۲^n}=۲^۴=۱۶$ (برابر)

ث) داریم: $۲^k=۹۶+۲^{k-۲} \Rightarrow ۲^k-۲^{k-۲}=۹۶ \Rightarrow ۲^{k-۲}(۲^۲-۱)=۹۶ \Rightarrow ۲^{k-۲}=۳۲ \Rightarrow k=۷$

ج) برطبق مسئله: $۲^n+۴۸۰=۲^{n+۴}$

پس: $۲^{n+۴}-۲^n=۴۸۰ \Rightarrow ۲^n(۲^۴-۱)=۴۸۰ \Rightarrow ۲^n=۳۲ \Rightarrow n=۵$

بنابراین مجموعه‌ی موردنظر $۲^۵-۱=۳۱$ زیرمجموعه‌ی محض دارد.

تعداد زیرمجموعه‌های m عضوی از یک مجموعه‌ی k عضوی برابر است با: $\dfrac{k!}{m!(k-m)!}$

مجموعه‌ی $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ را در نظر بگیرید.

الف) مجموعه‌ی A چند زیرمجموعه‌ی دوعضوی دارد؟

ب) چند زیرمجموعه دارد که بیش از دو عضو دارند؟

پ) چند زیرمجموعه دارد که حتماً شامل ۱ و ۲ هست؟

ت) چند زیرمجموعه دارد که شامل ۵ نیست؟

ث) چند زیرمجموعه دارد که شامل ۶ و ۷ هست ولی ۳ و ۴ را ندارد؟

ج) در چند زیرمجموعه، بزرگ‌ترین عضو ۵ است؟

چ) در چند زیرمجموعه، کوچک‌ترین عضو ۳ است؟

ح) در چند زیرمجموعه، مجموع بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو، ۹ است؟

خ) چند زیرمجموعه حداکثر ۶ عضو دارد؟

د) حاصل‌جمع بزرگ‌ترین عضوهای هر زیرمجموعه‌ی ناتهی از مجموعه‌ی فوق برابر با چه عددی است؟

الف) تعداد زیرمجموعه‌های دوعضوی A برابر است با: $\frac{7!}{2!(7-2)!}=\frac{7\times6\times5!}{1\times2\times5!}=21$

ب) تعداد کل زیرمجموعه‌های A برابر است با: $2^7=128$

تعداد زیرمجموعه‌های یک‌عضوی A برابر ۷ تا و تعداد زیرمجموعه‌های دوعضوی آن ۲۱ تا است و مجموعه‌ی تهی هم که عضوی ندارد باید از کل زیرمجموعه‌ها کسر کرد، پس تعداد زیرمجموعه‌های A که بیش از دو عضو دارند برابر است با: $128-(1+7+21)=99$

پ) اعداد ۱ و ۲ حتماً باید عضو زیرمجموعه‌ها باشند، در کنار ۱ و ۲ پنج عضو ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ هستند که با آن‌ها می‌توانیم 2^5 زیرمجموعه بسازیم، پس پاسخ مسئله $32=2^5$ می‌باشد. به عبارت دیگر ابتدا (۲،۱) را کنار بگذارید سپس تعداد زیرمجموعه‌ها بدون این دو عضو را پیدا کرده و این دو عضو را به آن‌ها اضافه کنید.

ت) عضو ۵ را کنار می‌گذاریم با اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۶ و ۷ می‌توانیم $2^6=64$ زیرمجموعه بسازیم که شامل ۵ نباشد.

ث) اعداد ۶ و ۷ را برداشته و ۳ و ۴ را کنار می‌گذاریم. بنابراین با ۱، ۲ و ۵ می‌توانیم $2^3=8$ زیرمجموعه بسازیم که شامل ۶ و ۷ باشد و ۳ و ۴ را نداشته باشد.

ج) مجموعه‌ی $\{1,2,3,4,5\}$ را در نظر بگیرید. عضو ۵ حتماً باید در زیرمجموعه‌ها باشد پس با سایر عضوها $2^4=16$ زیرمجموعه می‌توانیم بسازیم که حتماً شامل ۵ است و در ضمن سایر عضوها کوچک‌تر از ۵ هستند.

چ) مجموعه‌ی $\{3,4,5,6,7\}$ را در نظر بگیرید. در کنار عدد ۳ با عضوهای ۴، ۵، ۶ و ۷ می‌توانیم $2^4=16$ زیرمجموعه بسازیم که حتماً شامل ۳ است و سایر عضوها بزرگ‌تر از ۳ هستند.

ح) در جدول زیر تمام حالت‌هایی که مجموع کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو برابر ۹ هستند و تعداد زیرمجموعه‌هایی که با آن‌ها می‌توان ساخت، آمده است.

بزرگ‌ترین عضو	کوچک‌ترین عضو	سایر عضوها	تعداد زیرمجموعه‌هایی که می‌توانیم با بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو بسازیم.
۷	۲	۶،۵،۴،۳	$2^4=16$
۶	۳	۵،۴	$2^2=4$
۵	۴	–	۱

بنابراین در $21=1+4+16$ زیرمجموعه، مجموع بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضوها برابر ۹ است.

خ) تنها زیرمجموعه‌ای که ۷ عضو دارد، همان مجموعه‌ی A است. پس در $127=1-128$ زیرمجموعه، تعداد عضوها حداکثر ۶ عضو است.

د) عدد ۷ در 2^6 زیرمجموعه، بزرگ‌ترین عضو است.

عدد ۶ در 2^5 زیرمجموعه، بزرگ‌ترین عضو است.

عدد ۵ در 2^4 زیرمجموعه، بزرگ‌ترین عضو است.

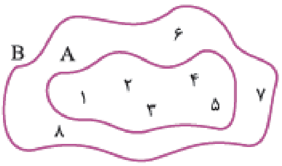
⋮

عدد ۱ در 2^0 زیرمجموعه، بزرگ‌ترین عضو است.

پس مجموع بزرگ‌ترین عضوهای هر زیرمجموعه‌ی ناتهی برابر است با:

$$(۷\times ۲^{۶})+(۶\times ۲^{۵})+(۵\times ۲^{۴})+(۴\times ۲^{۳})+(۳\times ۲^{۲})+(۲\times ۲^{۱})+(۱\times ۲^{۰})=۷۶۹$$

اگر $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $B=\{۱,۲,۳,...,۸\}$ و $A\subset X\subset B$، آن‌گاه به جای X چند مجموعه می‌توانیم قرار دهیم؟



چون $A\subset X$ پس هر عضو مجموعه‌ی A، عضوی از مجموعه‌ی X نیز هست. لذا مجموعه‌ی X، حتماً شامل ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ می‌باشد. بنابراین به همراه عضوهای A، با سه عضو ۶، ۷ و ۸ می‌توانیم $۲^{۳}=۸$ مجموعه بسازیم. به عبارت دیگر، باید زیرمجموعه‌هایی از مجموعه‌ی $B=\{۱,۲,۳,...,۸\}$ را انتخاب کنیم که حتماً شامل ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ هستند.

مجموعه‌ی توانی

اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد، مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های A را مجموعه‌ی توانی A می‌گوییم و آن را با نماد $P(A)$ نمایش می‌دهیم.

اگر A مجموعه‌ای سه‌عضوی باشد، مجموعه‌ی $P(P(A))$ چند عضو دارد؟

مجموعه‌ی $P(A)$ دارای $۲^{۳}=۸$ عضو است و $P(P(A))$ دارای $۲^{۸}=۲۵۶$ عضو می‌باشد.

اگر $A=\{۰,\{۱\}\}$، آن‌گاه $P(A)$ را نمایش دهید.

$P(A)=\{\varnothing,\{۰\},\{\{۱\}\},\{۰,\{۱\}\}\}$

اگر مجموعه‌ی A دارای n عضو باشد، مجموعه‌ی توانی A دارای چند زیرمجموعه است؟

چون A دارای n عضو است پس $P(A)$ دارای ۲^{n} عضو می‌باشد، پس $P(A)$ دارای $۲^{۲^{n}}$ زیرمجموعه است.

اگر $A=\{a,\{a\},\varnothing\}$ باشد، کدام‌یک از موارد زیر درست و کدام نادرست است؟

الف) $a\in P(A)$ ب) $\{a\}\in P(A)$ پ) $\{\{a\}\}\in P(A)$

ت) $\varnothing\subset P(A)$ ث) $\varnothing\in P(A)$ ج) $\{\varnothing\}\in P(A)$

چ) $\{\varnothing\}\subset P(A)$ ح) $\{a,\varnothing\}\in P(A)$ خ) $\{a,\{a\}\}\subset P(A)$

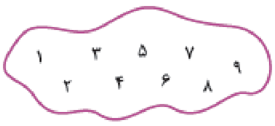
با توجه به تعریف مجموعه‌ی $P(A)$ موارد (الف)، (ث)، (چ) و (خ) نادرست و بقیه‌ی موارد درست هستند.

نمایش مجموعه‌ها به زبان ریاضی

علاوه بر نمایش مجموعه‌ها به وسیله‌ی آکلاد ($\{\ \}$)، مجموعه‌ها را می‌توان درون یک شکل هندسی نیز نمایش داد. به این نوع نمایش از مجموعه‌ها، نمودار ون گفته می‌شود.

گاهی نیز برای مشخص‌کردن یک مجموعه، از توصیف ویژگی مشترک آن استفاده می‌کنیم. به عنوان مثال اعداد ۱ تا ۹ را می‌توانیم به ۳ روش مشخص کنیم:

۱) نمودار ون:



۲) آکلاد ($\{\ \}$): $\{۱,۲,۳,...,۹\}$

۳) توصیفی: مجموعه‌ی اعداد طبیعی یک‌رقمی.

روش دیگر نمایش مجموعه‌ها، استفاده از نماد ریاضی است که در این قسمت بیشتر به آن می‌پردازیم. همان‌طور که در کتاب درسی آموختید ویژگی مشترک مجموعه‌ی بالا را با علائم ریاضی به صورت مقابل نمایش می‌دهیم: $\{x\mid x\in\mathbb{N},x<۱۰\}$

نمونه‌ای از مجموعه‌های معروف که به زبان ریاضی نمایش داده شده‌اند در زیر آمده است:

$E=\{۲k\mid k\in\mathbb{N}\}$: مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج

$O=\{۲k-۱\mid k\in\mathbb{N}\}$: مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد

$W=\{k-۱\mid k\in\mathbb{N}\}$: مجموعه‌ی اعداد حسابی

$Q=\{\frac{p}{q}\mid p,q\in\mathbb{Z},q\neq ۰\}$: مجموعه‌ی اعداد گویا

اعضای مجموعه‌های زیر را بنویسید.

الف) $A=\{x\mid x\in\mathbb{Z},\frac{۴}{x}\in\mathbb{Z}\}$

ب) $B=\{\frac{۴}{x}\mid x\in\mathbb{N}\}$

پ) $C=\{x\mid \sqrt{x}\in\mathbb{N},x<۱۰۰\}$

ت) $D=\{\sqrt{x}\mid x\in\mathbb{N},x<۱۰۰\}$

ث) $E=\{x^۲\mid \frac{x}{۲}\in\mathbb{Z},-۶<x<۶\}$

ج) $F=\{\frac{۱}{x+۱}\mid x\in\mathbb{N},\frac{۵x-۷}{۲}<۴\}$

چ) $G=\{۲^x\mid \sqrt{۴-x}\in\mathbb{N},x>-۱۳\}$

ح) $H=\{x\mid x\in\mathbb{N},x^۲+x=۰\}$

الف) مجموعه‌ی همه‌ی اعداد صحیحی که حاصل تقسیم ۴ بر آن‌ها عددی صحیح باشد، عبارت‌اند از ۱، ۱−، ۲، ۲−، ۴ و ۴−، پس:

$A=\{-۴,-۲,-۱,۱,۲,۴\}$

ب) اعضای مجموعه‌ی B عبارت‌اند از: $B=\{\frac{۴}{۱},\frac{۴}{۲},\frac{۴}{۳},\frac{۴}{۴},\frac{۴}{۵},\dots\}$

پ) اعدادی که کوچک‌تر از ۱۰۰ هستند و جذر آن‌ها عددی طبیعی است عبارت‌اند از: $C=\{۸۱,۶۴,۴۹,۳۶,۲۵,۱۶,۹,۴,۱\}$

ت) جذر اعدادی که طبیعی بوده و کوچک‌تر از ۱۰۰ هستند، عبارت‌اند از: $D=\{\sqrt{۱},\sqrt{۲},\sqrt{۳},\dots,\sqrt{۹۹}\}$

ث) اعدادی که بین ۶ و ۶− هستند را می‌نویسیم: $-۵,-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۴,۵$

از این تعداد، اعدادی که نصف آن‌ها عددی صحیح می‌شود عبارت‌اند از: $-۴,-۲,۰,۲,۴$

و مجذور آن‌ها جواب مسئله است: $E=\{(-۴)^۲,(-۲)^۲,۰^۲,۲^۲,۴^۲\}=\{۱۶,۴,۰\}$

ج) داریم: $\frac{۵x-۷}{۲}<۴ \Rightarrow ۵x-۷<۸ \Rightarrow ۵x<۱۵ \Rightarrow x<۳$

اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۳ عبارت‌اند از ۲ و ۱ و از آن‌جا: $F=\{\frac{۱}{۱+۱},\frac{۱}{۱+۲}\}=\{\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳}\}$

چ) برای آن‌که $\sqrt{۴-x}\in\mathbb{N}$ باشد، باید:

$\sqrt{۴-x}=۱ \Rightarrow x=۳$

$\sqrt{۴-x}=۲ \Rightarrow x=۰$

$\sqrt{۴-x}=۳ \Rightarrow x=-۵$

$\sqrt{۴-x}=۴ \Rightarrow x=-۱۲$

پس: $G=\{۲^۳,۲^۰,۲^{-۵},۲^{-۱۲}\}=\{\frac{۱}{۸},۱,\frac{۱}{۳۲},\frac{۱}{۴۰۹۶}\}$

ح) اگر $x^۲+x=۰$ باشد، آن‌گاه $x(x+۱)=۰$ و از آن‌جا $x=۰$ یا $x=-۱$ خواهد بود که هیچ‌کدام متعلق به اعداد طبیعی نیستند لذا مجموعه‌ی H تهی می‌باشد.

در مثال‌های زیر، مجموعه‌ها با بیش از یک متغیر نمایش داده شده‌اند.

برای پیداکردن عضوهای آن‌ها می‌توانیم از جدول استفاده کنیم.

اعضای مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $A=\{x^y\mid x,y\in\mathbb{N},x+y<۵\}$

ب) $B=\{\frac{۱}{x+y}\mid x,y\in\mathbb{Z},xy=۶\}$

پ) $C=\{\frac{x}{y}\mid x,y\in\mathbb{N},x+y=۷\}$

ت) $D=\{a^b\mid a,b\in\mathbb{Z},a^۲+b^۲=۱۰\}$

ث) $F=\{ab\mid a,b\in\mathbb{N},۳a+۲b<۱۲\}$

الف) دو عدد طبیعی که مجموع آن‌ها کوچک‌تر از ۵ است را مطابق جدول زیر می‌نویسیم، سپس با توجه به شرایط مسئله، عدد اول را به توان عدد دوم می‌رسانیم.

x	y	x+y	x^y
۱	۱	۲	$۱^۱=۱$
۱	۲	۳	$۱^۲=۱$
۱	۳	۴	$۱^۳=۱$
۲	۱	۳	$۲^۱=۲$
۲	۲	۴	$۲^۲=۴$
۳	۱	۴	$۳^۱=۳$

بنابراین: $A=\{۱,۲,۳,۴\}$

ب) در جدول زیر اعداد صحیحی که حاصل‌ضرب آن‌ها ۶ است، آمده است.

به دلیل تقارن $\frac{۱}{x+y}$ جابه‌جایی x و y حالت جدیدی ایجاد نمی‌کند.

x	y	xy	$\frac{۱}{x+y}$
۱	۶	۶	$\frac{۱}{۱+۶}=\frac{۱}{۷}$
۲	۳	۶	$\frac{۱}{۲+۳}=\frac{۱}{۵}$
−۱	−۶	۶	$\frac{۱}{-۱-۶}=-\frac{۱}{۷}$
−۲	−۳	۶	$\frac{۱}{-۲-۳}=-\frac{۱}{۵}$

بنابراین: $B=\{-\frac{۱}{۷},-\frac{۱}{۵},\frac{۱}{۷},\frac{۱}{۵}\}$

پ) داریم:

x	y	x+y	$\frac{x}{y}$
۱	۶	۷	$\frac{۱}{۶}$
۲	۵	۷	$\frac{۲}{۵}$
۳	۴	۷	$\frac{۳}{۴}$
۴	۳	۷	$\frac{۴}{۳}$
۵	۲	۷	$\frac{۵}{۲}$
۶	۱	۷	۶

پس: $C=\{\frac{۱}{۶},\frac{۲}{۵},\frac{۳}{۴},\frac{۴}{۳},\frac{۵}{۲},۶\}$

ت) دو عدد صحیح که مجموع مربعات آن‌ها ۱۰ است، در جدول زیر آمده است.

a	b	$a^۲+b^۲$	a^b
۱	۳	۱۰	$(۱)^۳=۱$
۱	-۳	۱۰	$(۱)^{-۳}=۱$
-۱	۳	۱۰	$(-۱)^۳=-۱$
-۱	-۳	۱۰	$(-۱)^{-۳}=-۱$
۳	۱	۱۰	$(۳)^۱=۳$
۳	-۱	۱۰	$(۳)^{-۱}=\frac{۱}{۳}$
-۳	۱	۱۰	$(-۳)^۱=-۳$
-۳	-۱	۱۰	$(-۳)^{-۱}=-\frac{۱}{۳}$

پس: $D=\{-۳,-۱,-\frac{۱}{۳},۱,\frac{۱}{۳},۳\}$

ث) داریم:

a	b	$۳a+۲b$	ab
۱	۱	۵	۱
۱	۲	۷	۲
۱	۳	۹	۳
۱	۴	۱۱	۴
۲	۱	۸	۲
۲	۲	۱۰	۴
۳	۱	۱۱	۳

پس: $F=\{۱,۲,۳,۴\}$

مجموعه‌های زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

الف) $A=\{۴,۷,۱۰,...\}$

ب) $B=\{-۱,-۳,-۵,...\}$

پ) $C=\{-۱,-\sqrt{۲},-\sqrt{۳},-۲\}$

ت) $D=\{۱,\frac{۲۵}{۱۰},\frac{۱۲۵}{۱۵},\frac{۶۲۵}{۲۰},...\}$

ث) $E=\{۲,۵,۱۰,۱۷,۲۶,...\}$

ج) $F=\{۱,۷,۲۵,۷۹,...\}$

چ) $G=\{-۱,+۲,-۳,+۴,...\}$

ح) $H=\{-۲۹,-۱۹,-۹\}$

الف) اگر از هر عضو مجموعه یک واحد کم کنیم، مضارب ۳ به دست می‌آید. پس: $A=\{۳x+۱ \mid x\in\mathbb{N}\}$

ب) قرینه‌ی اعداد فرد به صورت مقابل نمایش داده می‌شود: $B=\{-(۲x-۱) \mid x\in\mathbb{N}\}$

پ) $C=\{-\sqrt{x} \mid x\in\mathbb{N}, x<۵\}$

ت) صورت کسرها، توان‌های طبیعی ۵ و مخرج کسرها، مضارب طبیعی ۵ هستند، پس: $D=\{\frac{۵^x}{۵x} \mid x\in\mathbb{N}\}$

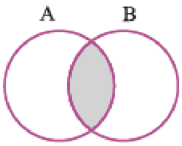
ث) اگر یکی از اعداد مجموعه کم کنیم، مجذورهای کامل طبیعی به دست می‌آید. پس: $E=\{x^2+1 | x\in\mathbb{N}\}$

ج) اگر به هر عضو مجموعه، دوتا اضافه کنیم، توان‌های طبیعی ۳ را خواهیم داشت. پس: $F=\{3^x-2 | x\in\mathbb{N}\}$

چ) برای آن‌که اعضای یک مجموعه را یکی‌درمیان، منفی و مثبت کنیم، $(-1)^x$ را در آن ضرب می‌کنیم. لذا: $G=\{(-1)^x\times x | x\in\mathbb{N}\}$

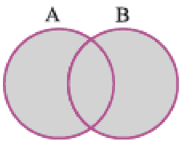
ح) اگر از هر کدام از عضوهای مجموعه یکی کم کنید قرینه‌ی مضرب‌های ۱۰ به دست می‌آید، پس: $H=\{-10x+1 | x\in\mathbb{N}, x<4\}$

اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها



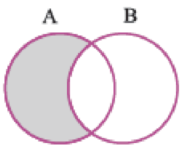
اشتراک دو مجموعه، اشتراک دو مجموعه‌ی A و B را با نماد $A\cap B$ نمایش می‌دهیم و مجموعه‌ی همه‌ی عضوهایی است که هم عضو مجموعه‌ی A و هم عضو مجموعه‌ی B هستند.

$$A\cap B=\{x | x\in A \text{ و } x\in B\}$$



اجتماع دو مجموعه، اجتماع دو مجموعه‌ی A و B را با نماد $A\cup B$ نمایش می‌دهیم و مجموعه‌ای است شامل همه‌ی اعضایی که حداقل در یکی از دو مجموعه‌ی A و B باشند.

$$A\cup B=\{x | x\in A \text{ یا } x\in B\}$$



تفاضل دو مجموعه، تفاضل دو مجموعه‌ی A و B را با نماد $A-B$ نمایش می‌دهیم و شامل همه‌ی اعضایی است که عضو مجموعه‌ی A باشند ولی عضو B نباشند.

$$A-B=\{x | x\in A \text{ و } x\notin B\}$$

قضیه‌های مربوط به اجتماع، اشتراک و تفاضل

۱) اگر $A\subset B$ و $A\subset C$، آن‌گاه: $A\subset B\cap C$

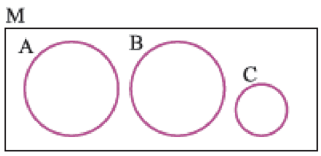
۲) اگر $A\subset C$ و $B\subset C$، آن‌گاه: $A\cup B\subset C$

۳) برای هر سه مجموعه‌ی A، B و C داریم:
$$\begin{cases}(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)\\(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)\end{cases}$$

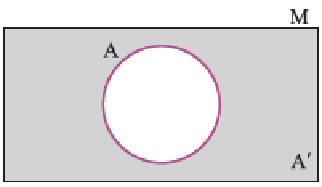
۴) برای هر دو مجموعه‌ی A و B، اگر $A\subset B$، آن‌گاه:
$$\begin{cases}A\cap B=A\\A\cup B=B\end{cases}$$

۵) برای هر سه مجموعه‌ی A، B و C:
$$\begin{cases}A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)\\A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)\end{cases}$$

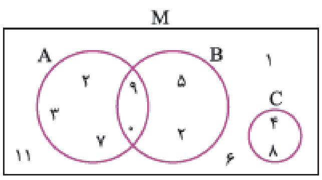
مجموعه‌ی مرجع، مجموعه‌ای است که همه‌ی مجموعه‌های موردنظر مسئله، زیرمجموعه‌ی آن هستند. مجموعه‌ی مرجع را معمولاً با M نمایش می‌دهند.



متمم یک مجموعه، اگر A زیرمجموعه‌ای دلخواه از مجموعه‌ی مرجع باشد، متمم A، شامل همه‌ی عضوهایی از مجموعه‌ی مرجع هستند که در A قرار ندارند. متمم A را با A' نمایش می‌دهند.



با توجه به نمودار مقابل اعضای مجموعه‌ی $(A-B)\cup(C'\cap B)'$ را بنویسید.



$A-B=\{2,3,7\}$

$C'\cap B=\{0,9,2,5\}$ $\quad (C'\cap B)'=\{2,3,7,1,6,11,4,8\}$ $\quad (A-B)\cup(C'\cap B)'=\{2,3,7,1,6,11,4,8\}$

فرض کنید مجموعه‌ی مرجع، اعداد طبیعی یک‌رقمی و A مجموعه‌ی اعداد اول یک‌رقمی و $B=\{x \mid x\in \mathbb{N}, \frac{۹}{x}\in \mathbb{N}\}$ و $C=\{x-۱ \mid x\in A\}$ باشد. در این صورت اعضای مجموعه‌های زیر را بنویسید.

الف) $(A\cap B)\cup C'$

ب) $(A'\cap C)-(B-C)$

داریم:

$M=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$

$A=\{۲,۳,۵,۷\} \Rightarrow A'=\{۱,۴,۶,۸,۹\}$

$B=\{۱,۳,۹\} \Rightarrow B'=\{۲,۴,۵,۶,۷,۸\}$

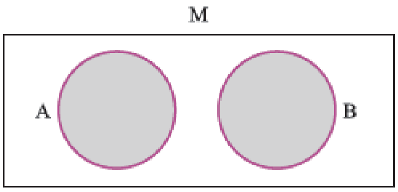
$C=\{۱,۲,۴,۶\} \Rightarrow C'=\{۳,۵,۷,۸,۹\}$

الف) $(A\cap B)\cup C'=\{۳\}\cup\{۳,۵,۷,۸,۹\}=\{۳,۵,۷,۸,۹\}$

ب) $(A'\cap C)-(B-C)=\{۱,۴,۶\}-\{۳,۹\}=\{۱,۴,۶\}$

دو مجموعه‌ی جدا از هم: اگر اشتراک دو مجموعه تهی باشد، آن دو مجموعه را جدا از هم می‌نامیم.

$A\cap B=\varnothing$



برای هر دو مجموعه‌ی A و B، اگر $A\cap B=\varnothing$ باشد، آن‌گاه: $A\subset B'$

اگر A و B دو مجموعه‌ی دلخواه و M مجموعه‌ی مرجع باشد، با استفاده از نمودار ون می‌توانیم رابطه‌های زیر را بین مجموعه‌ها ثابت کنیم:

۱) $M'=\varnothing$

۲) $\varnothing'=M$

۳) $(A')'=A$

۴) $A\cup A'=M$

۵) $A\cap A'=\varnothing$

۶) $A\cup A=A$

۷) $A\cap A=A$

۸) $A\cup\varnothing=A$

۹) $A\cup M=M$

۱۰) $A\cap\varnothing=\varnothing$

۱۱) $A\cap M=A$

۱۲) $A-B=A\cap B'$

۱۳) $A\subset B \Rightarrow B'\subset A'$

۱۴) $\begin{cases} A\cap(A'\cup B)=A\cap B \\ A\cup(A'\cap B)=A\cup B \end{cases}$ (شبه جذب)

۱۵) $\begin{cases} (A\cap B)'=A'\cup B' \\ (A\cup B)'=A'\cap B' \end{cases}$ (دمورگان)

برای دو مجموعه‌ی دلخواه A و B ثابت کنید: (قوانین جذب)

الف) $A\cap(A\cup B)=A$

ب) $A\cup(A\cap B)=A$

الف) به جای A قرار می‌دهیم $A\cup\varnothing$، در این صورت:

$(A\cup\varnothing)\cap(A\cup B)=A\cup(\underbrace{\varnothing\cap B}_{\varnothing})=A\cup\varnothing=A$

ب) به جای A قرار می‌دهیم $A\cap M$، در این صورت:

$(A\cap M)\cup(A\cap B)=A\cap(\underbrace{M\cup B}_{M})=A\cap M=A$

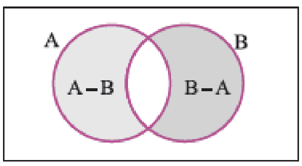
گاهی می‌توانیم روابط بین مجموعه‌ها را از روش عضوگیری ثابت کنیم. به عنوان نمونه یکی از قوانین دمورگان را از این روش اثبات می‌کنیم.

ثابت کنید: $(A\cap B)'=A'\cup B'$

فرض کنید $x\in(A\cap B)'$ باشد. در این صورت $x\notin(A\cap B)$، پس $x\notin A$ یا $x\notin B$، لذا $x\in A'$ یا $x\in B'$، پس $x\in A'\cup B'$. به همین ترتیب می‌توانیم ثابت کنیم اگر $x\in(A'\cup B')$ باشد، آن‌گاه $x\in(A\cap B)'$ است.

تفاضل متقارن دو مجموعه: اگر A و B دو مجموعه‌ی دلخواه باشند، تفاضل متقارن A و B را با نماد $A\Delta B$ نشان می‌دهیم و عبارت است از:

$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$



اگر $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و $B=\{۴,۵,۶,۷\}$، آن‌گاه $A\Delta B$ را به دست آورید.

$$\begin{cases} A-B=\{۱,۲,۳\} \\ B-A=\{۷\} \end{cases} \Rightarrow A\Delta B=\{۱,۲,۳,۷\}$$

برای دو مجموعه‌ی دلخواه A و B همواره داریم:

الف) $A\Delta B=B\Delta A$

ب) $A\Delta\varnothing=A$

پ) $A\Delta A=\varnothing$

ت) $A\Delta A'=M$

اثبات:

الف) $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)=(B-A)\cup(A-B)=B\Delta A$

ب) $A\Delta\varnothing=(A\cup\varnothing)-(A\cap\varnothing)=A-\varnothing=A$

پ) $A\Delta A=(A\cup A)-(A\cap A)=A-A=\varnothing$

ت) $A\Delta A'=(A\cup A')-(A\cap A')=M-\varnothing=M$

هر یک از موارد زیر را ثابت کنید.

الف) $A\cap(A\cup B')'=\varnothing$

ب) $(A-B)\cap(B\cup A')=\varnothing$

پ) $(A\cap B)-A=\varnothing$

ت) $[B\cap(A\cap B)']\cup[A\cap(A-B)']=B$

ث) $[[(M\cap A)'-A']'\cap A']'=A$

ج) $A-(A-B)=A\cap B$

چ) $(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A')=A$

ح) $(A\Delta B)'=A'\Delta B$

خ) $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$

الف) $A\cap(A\cup B')'=A\cap(A'\cap B)=(A\cap A')\cap B=\varnothing\cap B=\varnothing$

ب) $(A-B)\cap(B\cup A')=(A\cap B')\cap(B\cup A')=[(A\cap B')\cap B]\cup[(A\cap B')\cap A']=[A\cap\underbrace{(B'\cap B)}_{\varnothing}]\cup[\underbrace{(A\cap A')}_{\varnothing}\cap B']$

$=(A\cap\varnothing)\cup(\varnothing\cap B')=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$

پ) $(A\cap B)-A=(A\cap B)\cap A'=(A\cap A')\cap B=\varnothing\cap B=\varnothing$

ت) $[B\cap(A\cap B)']\cup[A\cap(A-B)']=[B\cap(A'\cup B')]\cup[(A\cap(A\cap B')']=[(B\cap A')]\cup[\underbrace{(B\cap B')}_{\varnothing}]\cup[A\cap(A'\cup B)]$

$=[(B\cap A')\cup\varnothing]\cup[\underbrace{(A\cap A')}_{\varnothing}\cup(A\cap B)]=(B\cap A')\cup(B\cap A)=B\cap\underbrace{(A'\cup A)}_{M}=B\cap M=B$

ث) $[[(\underbrace{M\cap A}_{A})'-A']'\cap A']'=[[\underbrace{A'-A'}_{\varnothing}]'\cap A']'=[\underbrace{M\cap A'}_{A'}]'=(A')'=A$

ج) $A-(A-B)=A\cap(A-B)'=A\cap[(A\cap B')]'=A\cap(A'\cup B)=\underbrace{(A\cap A')}_{\varnothing}\cup(A\cap B)=\varnothing\cup(A\cap B)=A\cap B$

چ) $(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A')=[(A\cap B')\cup(A\cap B)]\cup(B\cap A)=[A\cap\underbrace{(B\cup B')}_{M}]\cup(B\cap A)$

$=[\underbrace{A\cap M}_{A}]\cup(B\cap A)=A\cup(B\cap A)\overset{\text{جذب}}{=\!=}A$

ح) $(A\Delta B)'=[(A\cup B)-(A\cap B)]'=[(A\cup B)\cap(A\cap B)']'=(A\cup B)'\cup(A\cap B)$

$=(A'\cap B')\cup(B\cap A)=(A'-B)\cup(B-A')=A'\Delta B$

خ) $(A\cap B)\Delta(A\cap C)=[(A\cap B)\cup(A\cap C)]-[(A\cap B)\cap(A\cap C)]=[A\cap(B\cup C)]-[A\cap(B\cap C)]$

$=A\cap[(B\cup C)-(B\cap C)]=A\cap(B\Delta C)$

برای هر n مجموعه، مانند $A_1,A_2,\dots,A_n$، اجتماع این n مجموعه یعنی $A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n$ را برای سادگی به صورت $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ نمایش می‌دهیم. همین‌طور اشتراک آن‌ها را به صورت $\bigcap_{i=1}^{n}A_i$ می‌نویسیم.

اگر $A_۱ = \{۱,۲\}$، $A_۲ = \{۱,۲,۳\}$ و $A_۳ = \{۱,۲,۳,۴\}$ و ... باشد، آن‌گاه اعضای هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $\bigcup_{i=۱}^{۱۰} A_i$ ب) $\bigcap_{i=۱}^{۱۰} A_i$

الف) $\bigcup_{i=۱}^{۱۰} A_i = A_۱ \cup A_۲ \cup \dots \cup A_{۱۰} = \{۱,۲,۳,\dots,۱۱\}$ ب) $\bigcap_{i=۱}^{۱۰} A_i = \{۱,۲\}$

اگر $A_n = \{x \mid \frac{۱}{n} \le x < \frac{۲}{n}, n \in \mathbb{N}\}$، آن‌گاه مطلوب است:

الف) $\bigcup_{i=۱}^{۵} A_i$ ب) $\bigcap_{i=۱}^{۵} A_i$ پ) $\bigcup_{i=۱}^{\infty} A_i$

$A_۱ = \{x \mid ۱ \le x < ۲\}$ $A_۲ = \{x \mid \frac{۱}{۲} \le x < ۱\}$

$A_۳ = \{x \mid \frac{۱}{۳} \le x < \frac{۲}{۳}\}$ $A_۴ = \{x \mid \frac{۱}{۴} \le x < \frac{۱}{۲}\}$

$A_۵ = \{x \mid \frac{۱}{۵} \le x < \frac{۲}{۵}\}$

بنابراین:

الف) $A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳ \cup A_۴ \cup A_۵ = \{x \mid \frac{۱}{۵} \le x < ۲\}$ ب) $A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳ \cap A_۴ \cap A_۵ = \varnothing$

پ) $A_۱ \cup A_۲ \cup \dots = \{x \mid ۰ < x < ۲\}$

عدد اصلی یک مجموعه

تعداد اعضای یک مجموعه‌ی متناهی مانند A را عدد اصلی آن مجموعه می‌گوییم و با $n(A)$ نمایش می‌دهیم. دانستن دو رابطه‌ی زیر می‌تواند در حل مسائل مفید باشد.

۱ $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

۲ $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

هم‌چنین اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، آن‌گاه: $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

در یک کلاس ۴۶ نفره، ۵ نفر از دانش‌آموزان، به هیچ رشته‌ی ورزشی علاقه ندارند. ۲۰ نفر والیبال، ۲۵ نفر پینگ‌پنگ و ۲۲ نفر فوتبال بازی می‌کنند. اگر ۱۰ نفر فقط والیبال و پینگ‌پنگ، ۸ نفر فقط پینگ‌پنگ و فوتبال و ۶ نفر فقط والیبال و فوتبال بازی کنند،

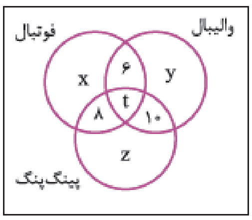
الف) چند نفر فقط فوتبال بازی می‌کنند؟

ب) چند نفر فقط یک رشته‌ی ورزشی را انجام می‌دهند؟

پ) چند نفر هر سه رشته‌ی ورزشی را انجام می‌دهند؟

ت) چند نفر والیبال بازی می‌کنند ولی فوتبال بازی نمی‌کنند؟

ابتدا نمودار مقابل را رسم کنید.



تعداد کسانی که فقط فوتبال بازی می‌کنند، x و تعداد کسانی که فقط والیبال بازی می‌کنند، y و تعداد نفراتی که فقط پینگ‌پنگ بازی می‌کنند، z و تعداد نفراتی که هر سه را بازی می‌کنند، t می‌نامیم. توجه داشته باشید چون ۵ نفر از دانش‌آموزان به هیچ رشته‌ی ورزشی علاقه ندارند، بنابراین تعداد نفراتی که ورزش می‌کنند، $۴۶ - ۵ = ۴۱$ نفر هستند یعنی:

$x + y + z + t + ۶ + ۸ + ۱۰ = ۴۱ \Rightarrow x + y + z + t = ۴۱ - ۲۴ = ۱۷$

هم‌چنین با توجه به نمودار: $y + t + ۶ + ۱۰ = ۲۰ \Rightarrow y + t = ۴$ (۲) $x + t + ۶ + ۸ = ۲۲ \Rightarrow x + t = ۸$ (۱)

$z + t + ۸ + ۱۰ = ۲۵ \Rightarrow z + t = ۷$ (۳)

رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳) را با هم جمع می‌کنیم: $3t+x+y+z=19 \Rightarrow 2t+\underbrace{(x+y+z+t)}_{17}=19 \Rightarrow t=1$

و از آن‌جا: $x=7$ ، $y=3$ و $z=6$ پس:

الف) تعداد نفراتی که فقط فوتبال بازی می‌کنند: $x=7$

ب) تعداد نفراتی که فقط به یک رشته‌ی ورزشی علاقه‌مند هستند: $x+y+z=7+6+3=16$

پ) تعداد نفراتی که به هر سه رشته‌ی ورزشی علاقه‌مندند: $t=1$

ت) تعداد نفراتی که والیبال بازی می‌کنند ولی فوتبال بازی نمی‌کنند: $3+10=13$

مجموعه‌ها و احتمال

در سال هشتم آموختید که احتمال رخدادن یک پیشامد، به این صورت محاسبه می‌شود: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد کل حالت‌ها}}$: احتمال رخدادن پیشامد A که در آن S مجموعه‌ی همه‌ی حالت‌های ممکن و A مجموعه‌ی شامل حالت‌های مطلوب است. اکنون چند مثال از احتمال‌ها را بررسی می‌کنیم.

دو تاس را پرتاب می‌کنیم. چه‌قدر احتمال دارد تفاضل اعداد روشده برابر ۲ باشد؟

در پرتاب دو تاس، کل حالت‌ها $36=6\times6$ تا است که در جدول زیر آمده است.

خانه‌هایی که تفاضل دو عدد برابر ۲ است، رنگ شده است. بنابراین اگر A احتمال آن باشد که تفاضل دو عدد روشده ۲ باشد، آن‌گاه: $P(A)=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

تاس ۲ / تاس ۱	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱						
۲						
۳						
۴						
۵						
۶						

یک جعبه حاوی ۲ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سبز است. جعبه‌ی دیگر شامل ۳ مهره‌ی سفید و ۵ مهره‌ی سبز است. از هر جعبه یک مهره به تصادف خارج می‌کنیم.

الف) چه‌قدر احتمال دارد که هر دو مهره سفید باشند؟

ب) چه‌قدر احتمال دارد که مهره‌ی اول و دوم هم‌رنگ نباشند؟

الف) احتمال آن‌که مهره‌ی اول سفید باشد، $\frac{2}{6}$ و احتمال آن‌که مهره‌ی دوم سفید باشد، $\frac{3}{8}$ است. بنابراین احتمال آن‌که مهره‌ی اول سفید و مهره‌ی دوم سفید باشد، $\frac{2}{6}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{8}$ خواهد بود.

ب) احتمال آن‌که مهره‌ی اول سفید و مهره‌ی دوم سبز باشد: $\frac{2}{6}\times\frac{5}{8}=\frac{5}{24}$

احتمال آن‌که مهره‌ی اول سبز و مهره‌ی دوم سفید باشد: $\frac{4}{6}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{4}$

بنابراین احتمال هم‌رنگ‌نبودن مهره‌ها: $\frac{5}{24}+\frac{1}{4}=\frac{11}{24}$

سکه‌ای را ۳ بار پرتاب می‌کنیم. چه‌قدر احتمال دارد حداقل یک بار «دو» بیاید؟

فضای نمونه، $۸ = ۲^۳$ حالت است. حالت‌هایی که حداقل یک بار «رو» مشاهده شده است، مشخص شده‌اند.

بار سوم	بار دوم	بار اول
ر	ر	ر
پ	ر	ر
ر	پ	ر
پ	پ	ر
ر	ر	پ
پ	ر	پ
ر	پ	پ
پ	پ	پ

بنابراین: $P(A) = \frac{۷}{۸}$

در پرتاب هم‌زمان دو تاس چه‌قدر احتمال دارد لااقل یکی از اعداد روشده‌ی دو تاس مضرب ۳ باشد؟

حالت‌هایی که لااقل یکی از اعداد ۳ یا ۶ یا هر دو باشند، مطلوب ما است:

تاس ۲ / تاس ۱	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱						
۲						
۳						
۴						
۵						
۶						

بنابراین: $P(A) = \frac{۲۰}{۳۶} = \frac{۵}{۹}$

در یک عدد سه‌رقمی بدون صفر احتمال آن‌که لااقل دو رقم آن یکسان باشد، چه‌قدر است؟

اگر هر دو رقم یکسان یا هر ۳ رقم یکسان باشند، مطلوب مسئله است. تعداد حالت‌هایی که هر سه رقم متفاوت باشند را پیدا کرده و احتمال مکمل آن جواب مسئله است. اگر A' احتمال آن باشد که هر سه رقم متفاوت باشند: $P(A') = \frac{۹}{۹} \times \frac{۸}{۹} \times \frac{۷}{۹} = \frac{۵۶}{۸۱} \Rightarrow P(A) = ۱ - \frac{۵۶}{۸۱} = \frac{۲۵}{۸۱}$

جدول زیر تعداد لامپ‌های موجود ۶۰ وات و ۱۰۰ وات از تولیدات دو کارخانه‌ی A و B است. اگر یک لامپ به تصادف برداشته شود، با کدام احتمال این لامپ ۱۰۰ وات است؟

	۶۰	۱۰۰
A	۲۰	۱۴
B	۲۲	۳۴

تعداد کل لامپ‌ها: $۲۰ + ۱۴ + ۲۲ + ۳۴ = ۹۰$

تعداد کل لامپ‌های ۱۰۰ وات: $۱۴ + ۳۴ = ۴۸$

پس: $P(A) = \frac{۴۸}{۹۰} = \frac{۸}{۱۵}$

پرسش‌های تشریحی

۱- کدام‌یک از موارد زیر درست و کدام نادرست است؟

الف) $\{x\} \subset \{x,\{x\}\}$

ب) $\{\varnothing\} \subset \{\{\varnothing,\{x,y\}\}\}$

پ) $a \notin \{a,\{a,b\}\}$

ت) $\{\ \} \in \{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

۲- اگر دو مجموعه‌ی $A=\{۲^x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ و $B=\{۳^y \mid y \in \mathbb{Z}\}$ مساوی باشند، مقادیر x و y را بیابید.

۳- اگر $A=\{۳,\{۳\},\{۳,۳,۳\}\}$، آن‌گاه $P(P(P(A)))$ چند عضو دارد؟

۴- اگر $A=\{۲,\{۲\}\}$، عضوهای مجموعه‌ی $P(A)$ را بنویسید.

۵- اگر $A=\{۱,۲,۳,\ldots,۱۰\}$ باشد:

الف) چند زیرمجموعه از A شامل دقیقاً یک عدد اول است؟

ب) چند زیرمجموعه از A حداقل یک عدد اول دارد؟

پ) در چند زیرمجموعه از A بزرگ‌ترین عضو ۷ است؟

ت) در چند زیرمجموعه از A کوچک‌ترین عضو ۷ است؟

ث) در چند زیرمجموعه از A عدد زوج وجود ندارد؟

ج) در چند زیرمجموعه از A، حاصل‌ضرب کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو ۱۸ است؟

چ) مجموعه‌ی A چند زیرمجموعه‌ی حداکثر ۳ عضوی دارد؟

ح) مجموعه‌ی A چند زیرمجموعه‌ی حداقل ۸ عضوی دارد؟

خ) مجموعه‌ی A چند زیرمجموعه‌ی ۴ عضوی دارد که حتماً شامل ۳ است؟

د) مجموعه‌ی A چند زیرمجموعه‌ی ۳ عضوی دارد که شامل ۵ نیست؟

۶- اگر $A=\{۱,۲,۳,\ldots,۱۰\}$، $B=\{۵,۶,۷,۸\}$ و $C=\{۱۰,۱۱,۱۲\}$ و مجموعه‌ی مرجع $M=\{۱,۲,۳,\ldots,۱۴\}$ باشد، اعضای هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $A' \cup (B \cap C')$

ب) $(A-B)-(B-C)$

پ) $(A' \cap B)'-(B' \cup A)'$

۷- اگر $A=\{x \mid x \in \mathbb{Z}, x<-۴\}$، $B=\{x \mid x \in \mathbb{N}, x>۵\}$ و $C=\{x \mid x \in \mathbb{Z}, -۱۰<x<۱۰\}$ و مجموعه‌ی مرجع اعداد صحیح باشد، اعضای مجموعه‌های زیر را به زبان ریاضی مشخص کنید.

الف) $(A'-B') \cap C$

ب) $(B' \cap C') \cup (C-A')$

۸- ثابت کنید (قانون شبه جذب)

الف) $A \cap (A' \cup B)=A \cap B$

ب) $A \cup (A' \cap B)=A \cup B$

۹- به روش عضوگیری ثابت کنید: $(A\cup B)'=A'\cap B'$

۱۰- ثابت کنید:

الف) اگر $A\subset B$ و $A\subset B'$، آن‌گاه: $A=\varnothing$

ب) اگر $B\subset A$ و $B'\subset A$، آن‌گاه: $A=M$

۱۱- ثابت کنید اگر $A\cup B=M$ و $A\cap B=\varnothing$، آن‌گاه: $A=B'$

۱۲- ثابت کنید: $(A\Delta B)-C=(A-C)\Delta(B-C)$

۱۳- اگر $A\subseteq B$ باشد، ثابت کنید: $A\Delta B=B-A$

۱۴- اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، ثابت کنید: $A\Delta B=A\cup B$

۱۵- در پرتاب ۵ بار متوالی یک سکه، چه‌قدر احتمال دارد ۲ یا ۳ بار شیر ظاهر شود؟

۱۶- احتمال آن‌که از میان ۳ نفر، لااقل دو نفر در یک فصل سال متولد شده باشند، چه‌قدر است؟

۱۷- از مجموعه‌ی اعداد $\{۱۰۰,۱۰۱,...,۶۰۰\}$ عددی به تصادف انتخاب شده است. چه‌قدر احتمال دارد این عدد مضرب ۴ یا مضرب ۹ باشد؟

۱۸- در پرتاب ۳ تاس احتمال آن‌که مجموع ۳ تاس عددی فرد باشد، چند برابر آن است که مجموع ۳ تاس برابر ۵ باشد؟

۱۹- دو تاس سفید و یک تاس قرمز را پرتاب می‌کنیم. احتمال آن‌که عدد تاس قرمز کوچک‌تر از عدد تاس‌های سفید باشد، چه‌قدر است؟

۲۰- در پرتاب ۳ تاس،احتمال آن‌که فقط دو تاس از ۳ تاس مساوی باشند، چه‌قدر است؟

تمرین‌های مروری

۱- کدام‌یک از موارد زیر یک مجموعه را مشخص می‌کند؟

الف) مردان شجاع سرزمین پارس

ب) درختان کاج شهر تهران

پ) اتومبیل‌های لوکس ۲۰۱۵

ت) اعداد اول

ث) نقاط روی یک دایره به شعاع ۵cm

ج) ستارگان منظومه‌ی شمسی

۲- کدام‌یک از مجموعه‌های زیر تهی است؟

الف) مجموعه‌ی اعداد اول مضرب ۳

ب) مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱

پ) مجموعه‌ی اعداد گویای بین ۰/۹۹۹ و ۱

ت) مجموعه‌ی زیرمجموعه‌های محض مجموعه‌ی تهی

۳- کدام‌یک از مجموعه‌های زیر متناهی و کدام نامتناهی است؟

الف) مجموعه‌ی همه‌ی ماهی‌های درون اقیانوس‌ها

ب) مجموعه‌ی همه‌ی کتاب‌های چاپ‌شده در کره‌ی زمین

پ) مجموعه‌ی اعداد گنگ بین صفر و یک

ت) مجموعه‌ی مضرب‌های ۵

ث) $\{x \mid x\in\mathbb{Z}, -x\in\mathbb{N}\}$

ج) $\{(-۱)^x \mid x\in\mathbb{Z}\}$

چ) $\{x \mid x+۲=x\}$

۴- اگر $A=\{2,3,4,\{2,4\},\{2,3,4\},\{4\}\}$، آن‌گاه کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست و کدام نادرست است؟

الف) $\{4\}\subset A$

ب) $\{4\}\in A$

پ) $\{\{2,3,4\}\}\in A$

ت) $\{\ \}\subset A$

ث) $\{2,\{2,4\}\}\subset A$

ج) $\{\{4,\{4\},\{2,4\}\}\}\subset A$

چ) $\{2,3,4\}\subset A$

ح) $\{\varnothing\}\subset A$

۵- هر کدام از مجموعه‌های زیر چند عضو دارند؟

الف) $\{\{\{\varnothing\},\varnothing\},\{\varnothing\},\varnothing\}$

ب) $\{\{1,2,3,\dots,100\}\}$

پ) $\{2,2/1,2/2,2/3,\dots,10\}$

ت) $\{-5,-\frac{13}{3},-\frac{11}{3},\dots,61\}$

ث) $\{2^{10}\times 2,2^{10}\times 2^2,2^{10}\times 2^3,\dots,2^{21}\}$

ج) $\{2^{20}+2,2^{20}+4,2^{20}+8,\dots,2^{21}\}$

چ) $\{3^{100},3^{100}+1,3^{100}+2,\dots,3^{101}\}$

ح) $\{8,\{8\},\{8,8\},\{8,8,8\}\}$

خ) $\{\{1\},\{1,\{1\}\},\{1,1\},\{1,\{1\},\{1,1\}\}\}$

د) $\{5-1^x \mid x\in\mathbb{N}\}$

ذ) $\{-x\mid \frac{x}{2}\in\mathbb{N},-5<x<5\}$

۶- اگر دو مجموعه‌ی A و B مساوی باشند، x و y را پیدا کنید.

الف) $A=\{3x-4,y+3\},B=\{y+9,x\}$

ب) $A=\{1,x,x-3\},B=\{3-x,2,-1\}$

۷- در کدام‌یک از موارد زیر مجموعه‌های A و B با هم مساوی‌اند؟

الف) $A=\{-x\mid x\in\mathbb{N}\},B=\{x\mid -x\in\mathbb{N}\}$

ب) $A=\{\sqrt{x}\mid x\in\mathbb{N}\},B=\{x\mid \sqrt{x}\in\mathbb{N}\}$

پ) $\{\frac{1}{x}\mid x\in\mathbb{Z}\},B=\{\dots,-\frac{1}{3},-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\}$

ت) $A=\{5x\mid \frac{x}{5}\in\mathbb{N},x<50\},B=\{5x\mid x\in\mathbb{N},1\le x\le 9\}$

۸- مجموعه‌های زیر را در نظر بگیرید.

$A=\{x\mid x^2+5x-6=0\}$ $\quad B=\{x\mid x\in\mathbb{N},-2<x<3\}$ $\quad C=\{x\mid x\in\mathbb{N},x<10,\frac{\sqrt{x}}{2}\in\mathbb{N}\}$

کدام‌یک از مجموعه‌های بالا با مجموعه‌ی $\{1,2\}$ هم‌ارز است؟

۹- در هر یک از موارد زیر با توجه به مجموعه‌ی A، مشخص کنید مجموعه‌ی B چند عضو دارد؟

الف) $A=\{-3,-1,\frac{1}{3},\sqrt{2},\sqrt{3},0,6\}$ $\quad B=\{x\mid x\in A,\frac{x^2}{3}\in\mathbb{N}\}$

ب) $A=\{1,2,3,4,5\}$ $\quad B=\{x\mid x\in A,3x+2\in P\}$ (P *مجموعه‌ی اعداد اول است*)

۱۰- اگر $A=\{\{a,b\},\{a\}\}$ تمام عضوهای $P(A)$ را بنویسید.

۱۱- اگر A مجموعه‌ای دوعضوی باشد، $P(P(P(A)))$ چند عضوی است؟

۱۲- اگر $A=\{\varnothing\}$ باشد، مجموعه‌ی $P(P(P(A)))$ چند عضو دارد؟

۱۳- مجموعه‌های توانی $P(\varnothing)$ و $P(P(\varnothing))$ هر کدام چند عضو دارند؟

۱۴- مجموعه‌ی A دارای n عضو است. مجموعه‌ی توانی A چند زیرمجموعه دارد؟

۱۵- مجموعه‌ای ۸ عضو دارد. چند زیرمجموعه از آن بیشتر از ۵ عضو دارد؟

۱۶- اگر از تعداد عضوهای یک مجموعه، یک عضو کم کنیم، از تعداد زیرمجموعه‌هایش چند درصد کم می‌شود؟

۱۷- اگر به تعداد عضوهای یک مجموعه‌ی n عضوی، ۴ تا اضافه کنیم، به تعداد زیرمجموعه‌هایش ۲۴۰ تا اضافه می‌شود. n برابر با چه عددی است؟

۱۸- مجموع عضوهای دو مجموعه‌ی A و B برابر ۱۲ و مجموع زیرمجموعه‌های دو مجموعه‌ی A و B برابر ۱۶۰ است. A و B هر کدام چند عضو دارند؟

۱۹- اگر مجموعه‌ی A، ۲۰عضوی و مجموعه‌ی B، ۱۲عضوی باشد:

الف) $A \cap B$ حداکثر چند عضوی است؟

ب) $A \cap B$ حداقل چند عضوی است؟

پ) $A \cup B$ حداکثر چند عضوی است؟

ت) $A \cup B$ حداقل چند عضوی است؟

۲۰- تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی یک مجموعه‌ی n عضوی، ۱/۵ برابر تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی آن است. n برابر با چه عددی است؟

۲۱- اگر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی، برابر $۳۲^{n-۴}$ باشد، n را پیدا کنید.

۲۲- اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم بوده و به ترتیب دارای ۵ و ۷ عضو باشند، $(A \cup B) \cap (A - B)$ چند زیرمجموعه‌ی محض دارد؟

۲۳- مجموعه‌ی $A = \{۱,۲,۳,\ldots,۲۰\}$ را در نظر بگیرید.

الف) این مجموعه، چند زیرمجموعه‌ی یک‌عضوی و چند زیرمجموعه‌ی ۱۹عضوی دارد؟

ب) این مجموعه، چند زیرمجموعه‌ی دوعضوی و چند زیرمجموعه‌ی ۱۸عضوی دارد؟

۲۴- اگر $A = \{۱,۲,۳,\ldots,۱۰۰\}$ و $B = \{۹۰,۹۱,۹۲,\ldots,۱۵۰\}$، چند زیرمجموعه از A وجود دارد که زیرمجموعه‌ی B هم باشد؟

۲۵- اگر $A = \{۲۰!+۲,۲۰!+۳,\ldots,۲۰!+۱۹\}$ باشد، آن‌گاه A چند زیرمجموعه دارد که عضوهای آن عدد اول هستند؟

۲۶- در مجموعه‌ی $A = \{۱,۲,۳,\ldots,۱۰۰\}$ بزرگ‌ترین زیرمجموعه‌ای که اختلاف هیچ دو عضو آن اول نباشد، چند عضوی است؟

۲۷- در چند زیرمجموعه از مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,\ldots,۱۱,۱۲\}$ دقیقاً یک عدد اول آمده است؟

۲۸- بزرگ‌ترین زیرمجموعه‌ای که از مجموعه‌ی $A = \{۱,۲,۳,\ldots,۴۰\}$ می‌توان ساخت که بزرگ‌ترین شمارنده‌ی مشترک هر دو عضو دلخواه آن برابر یک باشد، چند عضوی است؟

۲۹- در چند زیرمجموعه از مجموعه‌ی $A = \{۱,۲,۳,\ldots,۱۱\}$ حداکثر ۵ عدد فرد وجود دارد؟

۳۰- در چند زیرمجموعه از مجموعه‌ی $A = \{۱,۲,۳,\ldots,۱۱\}$ حداقل یک عدد زوج وجود دارد؟

۳۱- اعضای هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $\{x \mid x \in \mathbb{N}, -۴ < x < ۴\}$

ب) $\{\frac{۱}{x} \mid \frac{۱}{x} \in \mathbb{N}\}$

پ) $\{۲^x \mid \sqrt{x} \in \mathbb{N}, x \leq ۱۰۰\}$

ت) $\{(-۱)^x \mid x \in \mathbb{N}\}$

ث) $\{۲x \mid \frac{x}{۳} \in \mathbb{N}, -۵ < ۵x - ۱۰ < ۱۵\}$

ج) $\{\frac{\sqrt{x}}{۲} \mid \frac{\sqrt{x}}{۲} \in \mathbb{N}, ۲۰ < x < ۲۰۰\}$

چ) $\{\frac{3y}{2} \mid \frac{3y}{2} \in \mathbb{Z}, -2 < y < 8\}$

ح) $\{j+1 \mid j^2 < 36, j \in \mathbb{Z}\}$

خ) $\{x^{4-a} \mid a \in \mathbb{N}, a^2 - a + 1 < 10\}$

د) $\{n \mid n \in \mathbb{Z}, 2^n < 100\}$

ذ) $\{15^x \mid \frac{x}{3} \in \mathbb{N}, \frac{6}{x} \in \mathbb{Z}\}$

ر) $\{x \mid \frac{5x-3}{4} \in \mathbb{N}\}$

ز) $\{n \mid n \in \mathbb{Z}, \frac{n^2-200}{n} \in \mathbb{Z}\}$

۳۲- الف) مجموعه‌ی A چندعضوی است؟ $A = \{x+y \mid x,y \in \mathbb{N}, 5x + y < 30\}$

ب) اعضای هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

$C = \{\frac{1}{x-y} \mid x,y \in \mathbb{N}, x + 3y = 20\}$ $\qquad$ $B = \{\frac{1}{xy} \mid x,y \in \mathbb{Z}, xy = 8\}$

$E = \{x-y \mid x,y \in \mathbb{N}, 2^{x+y} < 40\}$ $\qquad$ $D = \{2^x - 2^y \mid x,y \in \mathbb{Z}, x^2 + y^2 = 26\}$

۳۳- هر یک از مجموعه‌های زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

الف) $\{-3, 0, 3\}$

ب) $\{2, 4, 8, 16, 32\}$

پ) $\{1, 4, 9, 16, \ldots, 100\}$

ت) $\{1, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \frac{1}{64}, \ldots\}$

ث) $\{2, 6, 12, 20, 30, 42\}$

ج) $\{-1, +2, -3, +4, \ldots\}$

چ) $\{-1, -2, +3, +4, -5, -6, +7, +8, \ldots\}$

ح) $\{1, 1, 2, 6, 24, 120, 720\}$

خ) $\{\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \ldots\}$

د) $\{\frac{3}{2}, \frac{6}{4}, \frac{9}{8}, \frac{12}{16}, \ldots\}$

ذ) $\{9, 99, 999, \ldots\}$

ر) $\{1, 11, 111, 1111, \ldots\}$

ز) $\{5, 55, 555, \ldots\}$

ژ) $\{11, 101, 1001, 10001, \ldots\}$

س) $\{-2, 3, 8, 13, \ldots\}$

ش) $\{1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots\}$

ص) $\{1, \frac{5}{2}, 5, \frac{17}{2}, 13, \ldots\}$

ض) $\{-6, -13, -20, -27, \ldots\}$

۳۴- اگر $M = \{1,2,3,4,5,6\}$ **و** $\{1,2,3\} \cup X = \{1,2,3,4,5\}$**، تمام مجموعه‌های ممکن برای X را پیدا کنید.**

۳۵- اگر $M = \{1,2,3,4,5,6\}$ **و** $\{1,2,3\} \cap X = \{2,3,4\}$**، تمام مجموعه‌های ممکن برای X را پیدا کنید.**

۳۶- اگر $(X-B) \cup (X \cap B) = A$ **باشد، مجموعه‌ی X را تعیین کنید.**

۳۷- اگر $A = \{1,2,3,4\}$**،** $B = \{3,4,5,6\}$ **و** $A \cap B \subset X \subset A \cup B$ **چند مجموعه به جای X می‌توان قرار داد؟**

۳۸- اگر $A = \{1,2,3,\ldots,10\}$**،** $B = \{5,6,7,8\}$ **و** $C = \{10,11,12\}$ **و مجموعه‌ی مرجع** $M = \{1,2,3,\ldots,14\}$**: آن‌گاه اعضای هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.**

الف) $A' \cup (B \cap C')$

ب) $B - (A \cup B)'$

پ) $(A-B) - (B-C)$

ت) $(C' \cap B') \cap (A \cup B)'$

ث) $(A' - B')' - C'$

۳۹- اگر $A=\{۱,۲,\dots,۱۰\}$ و $B=\{۵,۶,\dots,۱۵\}$، آن‌گاه اعضای مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $A\Delta B$

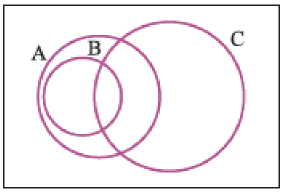
ب) $(A\cup B)\Delta(A\cap B)$

۴۰- اگر $A_۱=\{۱,۲,۳\}$، $A_۲=\{۲,۳,۴\}$، $A_۳=\{۳,۴,۵\}$ و $A_۴=\{۴,۵,۶\}$: آن‌گاه هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

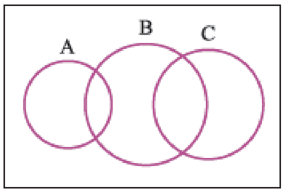
الف) $\bigcup\limits_{i=۱}^{۴}A_i$

ب) $\bigcap\limits_{i=۱}^{۴}A_i$

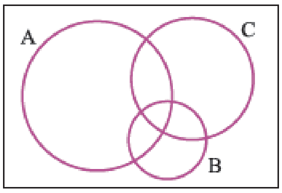
۴۱- با توجه به شکل داده‌شده، ناحیه‌ی مربوط به هر مجموعه را هاشور بزنید.



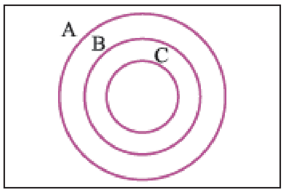
الف) $(A-C)\cap B$



ب) $(A-B)\cup(C-B)$



پ) $(A\cap B\cap C)\cup(A-C)$



ت) $A-B-C$

۴۲- درستی تساوی‌های زیر را تحقیق کنید.

الف) $[(A-B)'\cup B']'\cap A=\varnothing$

ب) $[(M-A)']'\cup A=M$

پ) $[A\cup(B\cup A')-A']\cup(A\cap B)=A$

ت) $[(A-M')\cup B]\cap A=A$

ث) $[(\varnothing-A)'-B']\cap B'=\varnothing$

ج) $[(A-B)\cup(A\cap C)]\cup(A\cap C')=A$

چ) $[(A\cup A')\cap(B\cap M)]\cap B'=\varnothing$

ح) $[(A'\cap C)'-C']\cup C=M$

خ) $[(A'\cap B')\cap C']'\cup C'=M$

۴۳- در یک کلاس ۳۳ نفره، ۱۷ نفر به فیزیک و ۲۱ نفر به ریاضی علاقه‌مند هستند. اگر بدانیم ۵ نفر به هیچ‌کدام از این دو درس علاقه‌مند نیستند، چند نفر از دانش‌آموزان هم به ریاضی و هم به فیزیک علاقه‌مند هستند؟

۴۴- در یک اداره از میان ۴۰ نفر:

۱۵ نفر عینک می‌زنند.

۲۲ نفر کلاه بر سر می‌گذارند.

۲۰ نفر کاپشن می‌پوشند.

۸ نفر هم عینک می‌زنند هم کلاه بر سر می‌گذارند.

۶ نفر هم کلاه بر سر می‌گذارند هم کاپشن می‌پوشند.

۵ نفر هم عینک می‌زنند، هم کاپشن می‌پوشند.

۴ نفر از هر سه، یعنی عینک و کلاه و کاپشن استفاده می‌کنند.

الف) چند نفر در این اداره ۲ تا از هیچ‌کدام از موارد عینک، کلاه و کاپشن استفاده نمی‌کنند؟

ب) چند نفر دقیقاً از یکی از موارد عینک، کلاه یا کاپشن استفاده می‌کنند؟

پ) چند نفر دقیقاً از دوتا از وسایل ذکرشده استفاده می‌کنند؟

۴۵- اگر $A-C=B-C$ باشد، آیا می‌توان نتیجه گرفت $A=B$؟

۴۶- اگر $A_n=\{۲n,۲n+۱,۲n+۲,...,۳n\}$ در این صورت:

الف) $\bigcup_{i=۵}^{۸}A_i$ را مشخص کنید.

ب) $\bigcap_{i=۱۰}^{۱۳}A_i$ را مشخص کنید.

۴۷- اگر $A_n=\{n^۲,n^۲+۲,n^۲+۴,...,n^۳\}$، آن‌گاه $\bigcap_{i=۳}^{۵}A_i$ را مشخص کنید.

۴۸- اگر $A_n=\{x\,|\,x\in\mathbb{N},x<۲n-۳\}$، در این صورت $A_۷\cap A_۵$ را بیابید.

۴۹- سه مجموعه مانند A، B و C بیابید به طوری که $A\in B$، $B\in C$ و $A\in C$ باشد.

۵۰- سه مجموعه مانند A، B و C بیابید به طوری که $A\in B$، $B\in C$ و $A\notin C$ باشد.

۵۱- یک سکه‌ی سالم را سه بار پرتاب می‌کنیم. چه‌قدر احتمال دارد حداکثر دو بار «پشت» بیاید؟

۵۲- دو تاس را پرتاب می‌کنیم.

الف) چه‌قدر احتمال دارد جمع دو عدد روشده لااقل ۸ شود؟

ب) چه‌قدر احتمال دارد حداقل یکی از اعداد زوج باشد؟

پ) چه‌قدر احتمال دارد مجموع دو عدد زوج باشد؟

۵۳- تعداد کسانی که به پرسش مطرح‌شده پاسخ درست داده‌اند مطابق جدول زیر از لحاظ جنسیت و سن دسته‌بندی شده‌اند. اگر فقط یک جایزه به یکی از آن‌ها داده شود، با کدام احتمال این فرد مرد و بیشتر از ۳۰ سال دارد؟

	مرد	زن
بیش از ۳۰ سال	۴۸	۳۵
کم‌تر از ۳۰ سال	۸۲	۷۵

۵۴- روی ۳۰۰ کارت اعداد ۱ تا ۳۰۰ را نوشته‌ایم. یک کارت به تصادف رو می‌کنیم. چه‌قدر احتمال دارد که کارت روشده مضرب ۳ و ۵ باشد ولی مضرب ۷ نباشد؟

۵۵- در پرتاب هم‌زمان دو سکه‌ی یکسان و یک تاس، با کدام احتمال، دو سکه به صورت متفاوت و عدد تاس زوج ظاهر می‌شود؟

۵۶- هر یک از ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ را به روی ۵ کارت یکسان نوشته‌ایم. ابتدا به تصادف یک کارت بیرون کشیده سپس کارت دیگری از بین بقیه بیرون می‌کشیم. با کدام احتمال شماره‌های این دو کارت اعداد متوالی‌اند؟

پرسش‌های ۴ گزینه‌ای

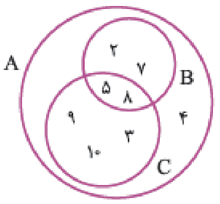
۱- اگر A و B دو زیرمجموعه از اعداد طبیعی و A متناهی و B نامتناهی باشد، کدام‌یک از مجموعه‌های زیر حتماً نامتناهی است؟

۱) $A'\cup B'$ ۲) $A\cap B'$ ۳) $A\cup B'$ ۴) $A'\cap B'$

۲- اگر A مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد و B مجموعه‌ی اعداد اول باشد، کدام مجموعه‌ی زیر متناهی و غیرتهی است؟

۱) $A-B$ ۲) $B-A$ ۳) $A\cap B$ ۴) $A-(A\cup B)$

۳- با توجه به شکل مقابل، مجموعه‌ی $(A\cap B)-(B-C)$ چند عضو دارد؟



۱) هیچ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴- مجموعه‌ی $A\cup B$ دارای ۵ عضو، $A\cap B$ دارای دو عضو و $A-B$ نیز دارای دو عضو است. مجموعه‌ی $B-A$ چند عضو دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۵- در یک مجموعه‌ی ۵ عضوی، تعداد زیرمجموعه‌هایی که بیش از دو عضو داشته باشند، برابر است با:

۱) ۱۲ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۶

۶- اگر $A\subset B$ و $A\subset B'$ کدام گزینه‌ی زیر صحیح است؟

۱) $A=M$ ۲) $A=B$ ۳) $A=\varnothing$ ۴) $B=\varnothing$

۷- متمم مجموعه‌ی $[A-(A-B)]\cup(A\cap B)'$ کدام است؟

۱) A ۲) B' ۳) $A'\cup B'$ ۴) $\varnothing$

۸- اگر A_2 مجموعه‌ی زیرمجموعه‌های دوعضوی مجموعه‌ی $A=\{a,b,c,d,e\}$ و B_2 مجموعه‌ی زیرمجموعه‌های دوعضوی $B=\{a,b,c,e,f\}$ باشند، مجموعه‌ی $A_2\cap B_2$ چند عضو دارد؟

۱) ۱۰ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۹- اگر $A=\{\varnothing,\{0\},\{\varnothing\}\}$ و $B=\{\varnothing,0\}$ مجموعه‌ی $B-A$ چند زیرمجموعه دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) صفر

۱۰- مجموعه‌ی $\{a,b,\{a\},\{b\}\}$ دارای چند زیرمجموعه، شامل عضو a می‌باشد؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۱۱- اگر $A=\{1,\{1\},\{1,2\},\{2\},2\}$ و $B=\{x\,|\,x\in\mathbb{R},x^2+2=3x\}$ باشد، آن‌گاه تعداد زیرمجموعه‌های غیرتهی مجموعه‌ی $A-B$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۲- اگر $A=\{2\}$، $B=\{2,\{2\}\}$ و $C=\{\{2\},\{2,\{2\}\}\}$ کدام رابطه درست است؟

۱) $B\subset C$ ۲) $A\subset B$ ۳) $A\subset C$ ۴) هر سه گزینه صحیح است.

۱۳- اگر $A_1=\{1,2,3,...,10\}$، $A_2=\{2,3,...,11\}$ و $A_3=\{3,4,...,12\}$ و ... آن‌گاه مجموعه‌ی $A_1\cap A_2\cap...\cap A_8$ چند عضو دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۴- اگر $A=\{1,2,3,4\}$ و $B=\{2,3,4,5\}$ چند مجموعه مانند X در رابطه‌ی $(A\cap B)\subset X\subset(A\cup B)$ صدق می‌کند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۵- اگر $A=\{a,b,\{a\},\{b\}\}$ باشد، مجموعه‌ی $A-\{A\}$ چند زیرمجموعه‌ی غیرتهی دارد؟

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۱۵

۱۶- اگر A و B دو مجموعه‌ی غیرتهی باشند، $(A\cap B')-(B-A)$ برابر کدام مجموعه است؟

۱) B' ۲) $\varnothing$ ۳) $A\cap B$ ۴) $A-B$

۱۷- اگر A مجموعه‌ی اعداد دورقمی و $B=\{7k;k\in A\}$ باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی توانی $(A\cap B)$ چند عضو دارد؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

۱۸- مجموعه‌ی A دارای ۱۴ عضو و مجموعه‌ی B دارای ۱۷ عضو و مجموعه‌ی $A\cap B$ دارای ۵ عضو است. $(A-B)\cup(B-A)$ چند عضو دارد؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۰ ۳) ۲۱ ۴) ۲۲

۱۹- مجموعه‌ی $\{a,b,\{a\},\{b\}\}$ دارای چند زیرمجموعه است شامل عضو $\{a\}$ نیست؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۲۰- اگر $A\cup(B-A)=B$ باشد، آن‌گاه:

۱) $A\subseteq B$ ۲) $B\subseteq A$ ۳) $A=\varnothing$ ۴) $B=\varnothing$

۲۱- چند زیرمجموعه از مجموعه‌ی $\{a,b,\{b,a\},\{a,b\}\}$ عضو $\{a,b\}$ را ندارد؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۸

۲۲- اگر $A_n=\{1,2,3,\dots,n\}$ در این صورت حاصل $A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n$ کدام است؟

۱) A_1 ۲) A_n ۳) A_n-A_1 ۴) $A_n\cap A_1$

۲۳- مجموعه‌ی $A=\{3,4,5,6,7\}$ چند زیرمجموعه دارد که حتماً شامل یک عدد زوج است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۱۲ ۴) ۴

۲۴- کدام مجموعه، زیرمجموعه‌ی سایر مجموعه‌ها است؟

۱) $\{\{\varnothing\}\}$ ۲) $\varnothing\cup\{\varnothing\}$ ۳) $\varnothing\cap\{\varnothing\}$ ۴) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

۲۵- اگر $A=\{x\mid x\in\mathbb{Z}, x<-2\}$ و $B=\{3x-5\mid x\in\mathbb{N}, x<4\}$ باشند، آن‌گاه $A\cap B$ چند عضو دارد؟

۱) هیچ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۱

۲۶- اگر $A=\{2,3,6,7,8\}$ و $B=\{2,4,5,6\}$ باشد، مجموعه‌ی $(A\cup B)-[A-(A\cap B)]$ چند عضو دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۷- A، B و C سه مجموعه هستند و داریم $A\subset B\subset C$، آن‌گاه $(A\cup B)\cap(A\cup C)$ کدام است؟

۱) A ۲) B ۳) $A\cup C$ ۴) $B\cup C$

۲۸- اگر $A=\{x\mid x\in\mathbb{Z}, -1<\frac{x}{3}+1<2\}$، آن‌گاه مجموعه‌ی A چند زیرمجموعه‌ی محض دارد؟

۱) ۶۳ ۲) ۳۱ ۳) ۱۲۷ ۴) ۲۵۵

۲۹- اگر $A=\{\{2\},2\}$، آن‌گاه کدام گزینه‌ی زیر، زیرمجموعه‌ی $P(A)$ نیست؟

۱) $\{2\}$ ۲) $\{\{\{2\}\}\}$ ۳) $\varnothing$ ۴) $\{\{2\}\}$

۳۰- در چند زیرمجموعه از مجموعه‌ی $A=\{x\mid x\in\mathbb{N}, ۴<x<۱۱\}$، کوچک‌ترین عضو برابر ۸ است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۲

۳۱- در پرتاب دو سکه و دو تاس، فضای نمونه دارای چند حالت است؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۷۲ ۴) ۱۴۴

۳۲- درون جعبه‌ای ۳ مهره‌ی قرمز، ۴ مهره‌ی آبی و ۲ مهره‌ی زرد وجود دارد. یک مهره به تصادف خارج می‌کنیم و بعد از نگاه‌کردن دوباره مهره را سر جایش می‌گذاریم. سپس دوباره مهره‌ی دیگری را خارج می‌کنیم. چه‌قدر احتمال دارد که هر دو مهره‌ی مشاهده‌شده، قرمز باشد؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۲۷}$

۳۳- جعبه‌ای ۵ مهره‌ی سفید، ۳ مهره‌ی سیاه و ۲ مهره‌ی آبی دارد. یک مهره خارج می‌کنیم. سپس آن را کنار می‌گذاریم. سپس مهره‌ی دیگری را برمی‌داریم. اگر مهره‌ی اول سفید باشد، چه‌قدر احتمال دارد که مهره‌ی دوم سیاه باشد؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۱۰}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

۳۴- در پرتاب ۳ تاس چه‌قدر احتمال دارد که هر سه عدد مشاهده‌شده، یک‌جور باشد؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۳۶}$ ۳) $\frac{۱}{۲۱۶}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

۳۵- از مجموعه‌ی $A=\{۱۰,۱۱,۱۲,\dots,۹۹\}$ یک عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم. چه‌قدر احتمال دارد که دهگان عدد انتخاب‌شده بزرگ‌تر از یکان آن باشد؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۹}{۲۰}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ‌نامهٔ پرسش‌های تشریحی

۱- الف) درست ب) نادرست پ) نادرست ت) درست

۲-
$$A=\{۲^x\mid x\in\mathbb{Z}\}=\{\cdots,۲^{-۲},۲^{-۱},۲^۰,۲^۱,۲^۲,\cdots\}$$
$$B=\{۳^y\mid y\in\mathbb{Z}\}=\{\cdots,۳^{-۲},۳^{-۱},۳^۰,۳^۱,۳^۲,\cdots\}$$

فقط در حالت $x=y=۰$ دو مجموعه مساوی خواهند بود.

۳-
$$A=\{۳,\{۳\},\{۳,۳,۳\}\}=\{۳,\{۳\},\{۳\}\}=\{۳,\{۳\}\}$$

بنابراین مجموعه‌ی A دارای دو عضو است لذا:

$P(A)$ دارای $۲^۲=۴$ عضو است.

$P(P(A))$ دارای $۲^۴=۱۶$ عضو است.

$P(P(P(A)))$ دارای $۲^{۱۶}=۶۵۵۳۶$ عضو است.

۴-
$$A=\{۲,\{۲\}\}$$
$$P(A)=\{\varnothing,\{۲\},\{\{۲\}\},\{۲,\{۲\}\}\}$$

-۵ $A=\{۱,۲,۳,\cdots,۱۰\}$

الف) عدد ۲ به همراه ۱۰،۹،۸،۶،۴،۱ می‌تواند $۲^۶$ زیرمجموعه بسازد.

به همین ترتیب هر کدام از اعداد ۳، ۵ و ۷ نیز، مانند ۲، به همراه ۱۰،۹،۸،۶،۴،۱ می‌توانند $۲^۶$ زیرمجموعه بسازند. پس مجموعاً $۴\times۲^۶=۲۵۶$ جواب مسئله است.

ب) تعداد زیرمجموعه‌هایی که هیچ عدد اولی ندارند، با استفاده از اعداد ۱۰،۹،۸،۶،۴،۱ به تعداد $۲^۶$ حالت ساخته می‌شوند. بنابراین تعداد زیرمجموعه‌هایی که حداقل یک عدد اول دارند، برابر $۲^{۱۰}-۲^۶=۹۶۰$ می‌باشد.

پ) کافی است در مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$ همه‌ی زیرمجموعه‌هایی که شامل عدد ۷ است را پیدا کنیم که تعداد آن‌ها $۲^۶=۶۴$ تا است.

ت) کافی است در مجموعه‌ی $\{۷,۸,۹,۱۰\}$ همه‌ی زیرمجموعه‌هایی که شامل عدد ۷ است را پیدا کنیم که تعداد آن‌ها $۲^۳=۸$ تا است.

ث) تمام زیرمجموعه‌هایی که با مجموعه‌ی $\{۱,۳,۵,۷,۹\}$ می‌توان ساخت، $۲^۵=۳۲$ تا می‌باشد.

ج)

تعداد زیرمجموعه‌هایی که می‌توان ساخت	سایر عضوها	حاصل‌ضرب کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضوها	بزرگ‌ترین عضو	کوچک‌ترین عضو
$۲^۲=۴$	۴،۵	۱۸	۶	۳
$۲^۶=۶۴$	۳،۴،۵،۶،۷،۸	۱۸	۹	۲

بنابراین تعداد کل زیرمجموعه‌هایی که شرایط مسئله را دارند $۶۸=۴+۶۴$ تا است.

چ) ۱- مجموعه‌ی تهی

۲- زیرمجموعه‌های یک‌عضوی که تعداد آن‌ها ۱۰ تا است.

۳- زیرمجموعه‌های دوعضوی: $\frac{۱۰!}{۲!۸!}=۴۵$

۴- زیرمجموعه‌های سه‌عضوی: $\frac{۱۰!}{۳!۷!}=۱۲۰$

بنابراین مجموعاً $۱+۱۰+۴۵+۱۲۰=۱۷۶$ زیرمجموعه‌ی حداکثر ۳ عضوی دارد.

ح) تعداد زیرمجموعه‌های ۹عضوی و ۱۰عضوی را پیدا می‌کنیم و از کل زیرمجموعه‌ها کم می‌کنیم.

۱- تعداد زیرمجموعه‌های ۱۰عضوی که فقط یکی است.

۲- تعداد زیرمجموعه‌های ۹ عضوی: $\frac{۱۰!}{۹!۱!}=۱۰$

بنابراین تعداد زیرمجموعه‌هایی که حداقل ۸ عضو دارند برابر $۱۰۲۴-۱۰-۱=۱۰۱۳$ تا است.

خ) عضو ۳ را انتخاب می‌کنیم. اکنون تعداد زیرمجموعه‌هایی که ۳عضوی بوده و با مجموعه‌ی $\{۱,۲,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰\}$ را می‌توانیم بسازیم را پیدا می‌کنیم: $\frac{۹!}{۳!۶!}=۸۴$

د) کافی است از مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,۴,۶,۷,۸,۹,۱۰\}$ تعداد زیرمجموعه‌های ۳عضوی را پیدا کنیم که تعداد آن‌ها $\frac{۹!}{۳!۶!}=۸۴$ تا است.

-۶ با توجه به مجموعه‌های A، B، C و M داریم:

$B'=\{۱,۲,۳,۴,۹,۱۰,۱۱,۱۲,۱۳,۱۴\}$

$A'=\{۱۱,۱۲,۱۳,۱۴\}$

$B\cap C'=\{۵,۶,۷,۸\}$

$C'=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۳,۱۴\}$

$A-B=\{۱,۲,۳,۴,۹,۱۰\}$

الف) $A'\cup(B\cap C')=\{۵,۶,۷,۸,۱۱,۱۲,۱۳,۱۴\}$

$B-C=\{۵,۶,۷,۸\}$

ب) $(A-B)-(B-C)=\{۱,۲,۳,۴,۹,۱۰\}$

پ) $\begin{cases}(A'\cap B)'=\varnothing'=M\\(B'\cup A)'=M'=\varnothing\end{cases}\Rightarrow(A'\cap B)'-(B'\cup A)'=M-\varnothing=M$

۷- $B=\{۶,۷,۸,\cdots\}$ $\quad$ $A=\{\cdots,-۷,-۶,-۵\}$

$A'=\{-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,\cdots\}$ $\quad$ $C=\{-۹,-۸,\cdots,۸,۹\}$

$C'=\{\cdots,-۱۲,-۱۱,-۱۰\}\cup\{۱۰,۱۱,۱۲,\cdots\}$ $\quad$ $B'=\{\cdots,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۴,۵\}$

پس: ب) $\{\cdots,-۷,-۶,-۵\}=\{x\mid x\in\mathbb{Z}, x<-۴\}$ $\quad$ الف) $\{۶,۷,۸,۹\}=\{x\mid x\in\mathbb{Z}, ۵<x<۱۰\}$

۸- الف) $A\cap(A'\cup B)=(A\cap A')\cup(A\cap B)=\varnothing\cup(A\cap B)=A\cap B$

ب) $A\cup(A'\cap B)=(A\cup A')\cap(A\cup B)=M\cap(A\cup B)=A\cup B$

۹- فرض کنید $x\in(A\cup B)'$ باشد. در این صورت $x\notin(A\cup B)$، پس $x\notin A$ و $x\notin B$ لذا، $x\in A'$ و $x\in B'$، پس $x\in A'\cap B'$ در نتیجه هر عضو دلخواه از $(A\cup B)'$ متعلق به $A'\cap B'$ است. به طور مشابه می‌توان ثابت کرد که هر عضو دلخواه متعلق به $A'\cap B'$ نیز متعلق به $(A\cup B)'$ است. پس: $(A\cup B)'=A'\cap B'$

۱۰- الف) $\left.\begin{array}{l}A\subset B\\ A\subset B'\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{قضیه‌ی (۱)}} A\subset B\cap B' \Rightarrow A\subset\varnothing$

از طرفی $\varnothing\subset A$، پس $A=\varnothing$

ب) $\left.\begin{array}{l}B\subset A\\ B'\subset A\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{قضیه‌ی (۲)}} B\cup B'\subset A\Rightarrow M\subset A$

از طرفی $A\subset M$ پس $A=M$

۱۱- $\left.\begin{array}{l}A\cap B=\varnothing \Rightarrow A\subset B'\\ A\cup B=M \Rightarrow B'\subset A\end{array}\right\}\Rightarrow A=B'$

۱۲- در مثال (خ) درسنامه مربوط به عملگر Δ، ثابت کردیم: $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$

پس: $(A\Delta B)-C=(A\Delta B)\cap C'=C'\cap(A\Delta B)=(C'\cap A)\Delta(C'\cap B)=(A-C)\Delta(B-C)$

۱۳- چون $A\subset B$، پس $A\cup B=B$ و $A\cap B=A$ خواهد بود بنابراین: $A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)=B-A$

۱۴- A و B جدا از هم هستند پس $A\cap B=\varnothing$ لذا: $A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)=(A\cup B)-\varnothing=A\cup B$

۱۵- $\frac{۱۰}{۳۲}+\frac{۱۰}{۳۲}=\frac{۲۰}{۳۲}=\frac{۵}{۸}$

۱۶- ابتدا احتمال آن‌که هر ۳ نفر در فصل‌های متفاوتی به دنیا آمده باشند را پیدا می‌کنیم: $P(A')=\frac{۴\times۳\times۲}{۴\times۴\times۴}=\frac{۳}{۸}$

پس احتمال موردنظر مسئله برابر است با: $P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۳}{۸}=\frac{۵}{۸}$

۱۷- تعداد مضارب ۴ و تعداد مضارب ۹ را که بین ۱۰۰ و ۶۰۰ هستند، پیدا می‌کنیم: مضارب ۴: $۱۰۰\le ۴k\le ۶۰۰ \Rightarrow ۲۵\le k\le ۱۵۰$

که تعداد آن‌ها ۱۲۶ تا است. مضارب ۹: $۱۰۰\le ۹k\le ۶۰۰ \Rightarrow ۱۱/۱\le k\le ۶۶/۶$

که تعداد اعداد صحیح بزرگ‌تر از ۱۱ و کوچک‌تر از ۶۶ برابر ۵۵ تا است. از طرفی مضارب ک.م.م ۴ و ۹ یعنی ۳۶، هم در مضرب‌های ۴ و هم در مضرب‌های ۹ آمده‌اند. یعنی دوباره تکرار شده‌اند که باید یک بار آن‌ها حذف شود: مضارب ۳۶: $۱۰۰\le ۳۶k\le ۶۰۰ \Rightarrow ۲/۷\le k\le ۱۶/۶$

که تعداد آن‌ها ۱۴ تا است.

پس: تعداد اعدادی که مضرب ۴ یا ۹ هستند $=(۱۲۶+۵۵)-۱۴=۱۶۷$

پس اگر A احتمال موردنظر مسئله باشد: $P(A)=\frac{۱۶۷}{۵۰۱}=\frac{۱}{۳}$

۱۸- تعداد حالت‌هایی که مجموع سه تاس عددی فرد باشد برابر است با: $۶ \times ۶ \times ۳ = ۱۰۸$

زیرا تاس اول و دوم هر طور که باشند برای تاس سوم، ۳ انتخاب وجود دارد تا بتواند مجموع اعداد روشده را فرد کند، پس اگر A احتمال آن باشد که مجموع دو عدد روشده فرد است.
$$P(A) = \frac{۱۰۸}{۲۱۶} = \frac{۱۸}{۳۶}$$

برای آن‌که مجموع ۳ تاس برابر ۵ شود، ۶ حالت زیر وجود دارد:

تاس ۳	تاس ۲	تاس ۱
۳	۱	۱
۲	۲	۱
۱	۳	۱
۱	۲	۲
۲	۱	۲
۱	۱	۳

بنابراین اگر B احتمال آن باشد که مجموع تاس‌های روشده ۵ باشد:
$$P(B) = \frac{۶}{۲۱۶} = \frac{۱}{۳۶} \Rightarrow \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{۱۸}{۳۶}}{\frac{۱}{۳۶}} = ۱۸$$

۱۹- اگر عدد تاس قرمز ۱ باشد، برای دو تاس دیگر ۵×۵ حالت خواهیم داشت.

اگر عدد تاس قرمز ۲ باشد، برای دو تاس دیگر ۴×۴ حالت خواهیم داشت.

اگر عدد تاس قرمز ۳ باشد، برای دو تاس دیگر ۳×۳ حالت خواهیم داشت.

⋮

اگر عدد تاس قرمز ۶ باشد برای دو تاس دیگر ۰×۰ حالت خواهیم داشت.

پس:
$$P(A) = \frac{(۵\times۵)+(۴\times۴)+(۳\times۳)+(۲\times۲)+(۱\times۱)}{۲۱۶} = \frac{۵۵}{۲۱۶}$$

۲۰- ابتدا تعداد اعضای پیشامد مطلوب را پیدا می‌کنیم:
$$\overset{\text{تاس۱}}{۶} \times \overset{\text{تاس۲}}{۱} \times \overset{\text{تاس۳}}{۵} = ۳۰$$

چون تاس‌های ۱، ۲ و ۳ می‌توانند جابه‌جا شوند، پس تعداد کل حالت‌ها $۹۰ = ۳۰ \times ۳$ خواهد بود پس اگر A احتمال موردنظر باشد:
$$P(A) = \frac{۹۰}{۲۱۶} = \frac{۵}{۱۲}$$

پاسخ‌نامهٔ پرسش‌های ۴ گزینه‌ای

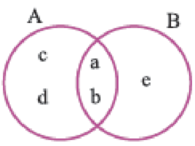
۱- **گزینه ۱**

۲- **گزینه ۲** $B = \{۲,۳,۵,۷,\cdots\}$ $A = \{۱,۳,۵,\cdots\}$

واضح است که $B - A = \{۲\}$ است، زیرا تنها عدد اول زوج، عدد ۲ می‌باشد.

۳- **گزینه ۲** $(A \cap B) - (B - C) = \{۵,۸\}$ $B - C = \{۲,۷\}$ $A \cap B = \{۲,۵,۷,۸\}$

۴- **گزینه ۴** دو مجموعه‌ی مقابل شرایط مسئله را دارند. بنابراین $B - A$ دارای یک عضو خواهد بود.



۵- **گزینه ۴** یک مجموعه‌ی ۵ عضوی دارای $۳۲ = ۲^۵$ زیرمجموعه است. از این تعداد یک زیرمجموعه تهی، و پنج زیرمجموعه دارای یک عضو هستند. تعداد زیرمجموعه‌های دوعضوی آن نیز برابر $۱۰ = \frac{۵!}{۲!۳!}$ است. پس: $۱۶ = (۱۰+۵+۱) - ۳۲$ = تعداد زیرمجموعه‌هایی که بیش از دو عضو دارند

۶- **گزینه ۳** از طرفی $\varnothing \subset A$ پس: $A = \varnothing$

$$\left.\begin{matrix} A \subset B \\ A \subset B' \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \subset B \cap B' \Rightarrow A \subset \varnothing$$

۷- **گزینه ۴**

$$[A-(A-B)] \cup (A\cap B)' = [A \cap (A \cap B')'] \cup (A \cap B)' = [\underbrace{A \cap (A' \cup B)}_{\text{شبه جذب}}] \cup (A \cap B)'$$

$$= (A \cap B) \cup (A \cap B)' = M$$

بنابراین متمم M برابر $\varnothing$ خواهد بود.

۸- **گزینه ۴** چون عضوهای مشترک دو مجموعه، c، b، a و e هستند، پس کافی است تعداد زیرمجموعه‌های دوعضوی که می‌توان با یک مجموعه‌ی ۴ عضوی تشکیل دهیم را پیدا کنیم که تعداد آن‌ها $۶ = \frac{۴!}{۲!۲!}$ تا است.

۹- **گزینه ۲** چون $B - A = \{۰\}$، پس این مجموعه $۲ = ۲^۱$ زیرمجموعه دارد.

۱۰- **گزینه ۲** به همراه عضو a با عضوهای دیگر می‌توانیم $۸ = ۲^۳$ زیرمجموعه بسازیم.

۱۱- **گزینه ۳** در مجموعه‌ی B، اگر $x^۲ + ۲ = ۳x$ باشد، آن‌گاه $x = ۱$ و یا $x = ۲$ خواهد بود. پس: $A - B = \{\{۱\}, \{۱,۲\}, \{۲\}\}$

لذا $A - B$ دارای $۸ = ۲^۳$ زیرمجموعه است که یکی از زیرمجموعه‌ها تهی و ۷ تای دیگر غیرتهی هستند.

۱۲- **گزینه ۲**

۱۳- **گزینه ۱** داریم: $A_۸ = \{۸, ۹, ۱۰, \cdots, ۱۷\}$

پس $\bigcap_{i=۱}^{۸} A_i = \{۸, ۹, ۱۰\}$ که دارای سه عضو است.

۱۴- **گزینه ۳** $A \cup B = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$ $\quad A \cap B = \{۲,۳,۴\}$

مجموعه‌ی x حتماً باید شامل ۲، ۳ و ۴ باشد، بنابراین در مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ تعداد زیرمجموعه‌هایی که شامل ۲، ۳ و ۴ باشد به همراه عضوهای ۴ و ۵ می‌تواند به $۴ = ۲^۲$ حالت تشکیل شود.

۱۵- **گزینه ۴** $A - \{A\} = \{a, b, \{a\}, \{b\}\} - \{\{a, b, \{a\}, \{b\}\}\} = A$

که مجموعه‌ی A دارای $۱۵ = ۱ - ۲^۴$ زیرمجموعه‌ی ناتهی است.

۱۶- **گزینه ۴** **روش اول** $(A \cap B') - (B - A) = (A \cap B') \cap (B \cap A')'$

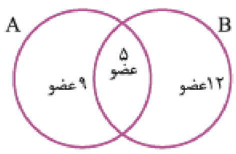
$$= (A \cap B') \cap (B' \cup A) = [(A \cap B') \cap B'] \cup [(A \cap B') \cap A] = (A \cap B') \cup (A \cap B') = A \cap B' = A - B$$

روش دوم $A \cap B' = A - B$ واضح است که $A - B$ و $B - A$ اشتراکی ندارند. پس: $(A - B) - (B - A) = A - B$

۱۷- **گزینه ۴** $B = \{۷۰, ۷۷, ۸۴, ۹۱, ۹۸, \cdots, ۶۹۳\}$ $\quad A = \{۱۰, ۱۱, ۱۲, \cdots, ۹۹\}$

بنابراین مجموعه‌ی توانی $A \cap B$ دارای $۳۲ = ۲^۵$ عضو است. $A \cap B = \{۷۰, ۷۷, ۸۴, ۹۱, ۹۸\}$

۱۸- **گزینه ۳**



واضح است که $(A-B) \cup (B-A)$ دارای $۲۱ = ۱۲ + ۹$ عضو می‌باشد.

۱۹- **گزینه ۲** عضو $\{a\}$ را از مجموعه کنار می‌گذاریم بنابراین با عضوهای دیگر می‌توانیم $۸ = ۲^۳$ زیرمجموعه بسازیم.

۲۰- **گزینه ۱** $A \cup (B - A) = A \cup (B \cap A') = A \cup B$

چون $A \cup B = B$، پس: $A \subseteq B$

۲۱- گزینه ۱ $۲^۲ = ۴$

۲۲- گزینه ۲

۲۳- گزینه ۲ عضو ۴ به همراه ۵،۳ و ۷ می‌تواند $۸ = ۲^۳$ زیرمجموعه تشکیل دهد. به همین ترتیب عضو ۶ نیز ۸ زیرمجموعه‌ی دیگر می‌تواند بسازد، پس مجموعاً $۱۶ = ۸ + ۸$ جواب مسئله خواهد بود.

۲۴- گزینه ۳ $\varnothing$ زیرمجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها است.

۲۵- گزینه ۱ $A \cap B = \varnothing$ $B = \{-۲,۱,۴\}$ $A = \{\dots,-۵,-۴,-۳\}$

۲۶- گزینه ۳ $A \cup B = \{۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$ $B = \{۲,۴,۵,۶\}$ $A = \{۲,۳,۶,۷,۸\}$

$(A \cup B) - [A - (A \cap B)] = \{۲,۴,۵,۶\}$ $A - (A \cap B) = \{۳,۷,۸\}$ $A \cap B = \{۲,۶\}$

۲۷- گزینه ۲

۲۸- گزینه ۴ $-۱ < \frac{x}{۳} + ۱ < ۲ \Rightarrow -۳ < x + ۳ < ۶ \Rightarrow -۶ < x < ۳ \Rightarrow A = \{-۵,-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲\}$

چون مجموعه‌ی A دارای ۸ عضو است پس $۲۵۵ = ۱ - ۲^۸$ زیرمجموعه‌ی محض دارد.

۲۹- گزینه ۱ $P(A) = \{\varnothing, \{۲\}, \{\{۲\}\}, \{\{۲\},۲\}\}$ $A = \{\{۲\},۲\}$

همان‌طور که مشاهده می‌شود $\{۲\}$ عضو $P(A)$ است نه زیرمجموعه‌ی آن.

۳۰- گزینه ۱ عضوهای مجموعه‌ی A عبارت‌اند از: $A = \{۱,۲,۳,\cdots,۱۰\}$. اکنون مجموعه‌ی $\{۸,۹,۱۰\}$ را در نظر بگیرید. به همراه عضو ۸، می‌توانیم با عضوهای ۹و۱۰، تعداد $۴ = ۲^۲$ زیرمجموعه بسازیم که ۸ کوچک‌ترین عضو آن مجموعه‌ها است.

۳۱- گزینه ۴ $۲^۲ \times ۶^۲ = ۱۴۴$

۳۲- گزینه ۳ $\frac{۳}{۹} \times \frac{۳}{۹} = \frac{۱}{۹}$

۳۳- گزینه ۱ در واقع کافی است تعداد مهره‌های سفید را ۴ تا در نظر گرفته و مسئله را حل کنید.

۳۴- گزینه ۲ فضای نمونه دارای $۲۱۶ = ۶^۳$ حالت است. هر سه عدد مشاهده‌شده می‌توانند (۱,۱,۱) یا (۲,۲,۲) یا ... (۶,۶,۶)باشند.

پس $\frac{۱}{۳۶} = \frac{۶}{۲۱۶}$ احتمال دارد که هر سه مهره‌ی مشاهده‌شده یک‌جور باشند.

۳۵- گزینه ۲ فضای نمونه دارای ۹۰ عضو است. تعداد اعدادی که دهگان آن‌ها بزرگ‌تر از یکان آن‌هاست عبارت‌اند از:

۱۰
۲۰,۲۱
۳۰,۳۱,۳۲
۴۰,۴۱,۴۲,۴۳
۵۰,۵۱,۵۲,۵۳,۵۴
۶۰,۶۱,۶۲,۶۳,۶۴,۶۵
۷۰,۷۱,۷۲,۷۳,۷۴,۷۵,۷۶
۸۰,۸۱,۸۲,۸۳,۸۴,۸۵,۸۶,۸۷
۹۰,۹۱,۹۲,۹۳,۹۴,۹۵,۹۶,۹۷,۹۸

که تعداد آن‌ها $۴۵ = ۹ + \cdots + ۳ + ۲ + ۱$ تا است. پس احتمال موردنظر $\frac{۴۵}{۹۰} = \frac{۱}{۲}$ می‌باشد.