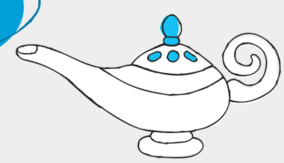

جبر
و
معادله
فصل۱

درس اول
مجموع جملات دنباله‌های حسابی



دنبالهٔ حسابی

از قدیم گفته‌اند کار از محکم‌کاری عیب نمی‌کند. ما مهندس‌ها هم که آدم‌های جدی هستیم و عاشق محکم‌کاری! لذا بهتر است در ابتدای بحث مروری داشته باشیم بر مطالبی که سال گذشته در مورد دنباله‌های حسابی و هندسی آموخته‌ایم و بعد سر فرصت، مباحث شگفت‌انگیز بعدی را مطرح کنیم.

مثال **اعداد ...,۱,۴,۹,۱۶,۲۵ را در نظر بگیرید. آیا می‌توانید عدد بعد از ۲۵ و اعداد بعدی را حدس بزنید؟**

حل مسلماً می‌توانید! همهٔ ما در چند ثانیهٔ اولِ مواجه‌شدن با این سؤال متوجه می‌شویم اعداد نوشته‌شده در «الگوی» معینی قرار دارند. در واقع ضمیر ناخودآگاه ما فریاد می‌زند که این اعداد را به شکل روبه‌رو ببینیم: $۱^۲,۲^۲,۳^۲,۴^۲,۵^۲,...$

پس با توجه به این‌که منطقاً اعداد بعدی نیز باید از همین «الگو» پیروی کنند، بعد از ۲۵، اعداد زیر قرار خواهند گرفت: $۳۶,۴۹,۶۴,...$

آیا از سال گذشته به خاطر دارید به اعدادی که مانند مثال قبل، پشت سر هم قرار می‌گیرند چه می‌گفتید؟ بله، درست است! دنباله.

هر تعداد عدد را که پشت سر هم قرار می‌گیرند، دنباله می‌نامیم و این اعداد را جملات دنباله می‌گوییم.

جملات یک دنباله ممکن است از الگوی خاصی پیروی کنند یا نکنند. در مثال ما، همهٔ جملات از «الگوی خاصی» پیروی می‌کنند؛ در واقع اگر جملهٔ اول دنباله را با $t_۱$، جملهٔ دوم را با $t_۲$ و به همین ترتیب جملهٔ nاُم (یا جملهٔ عمومی) را با t_n نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$t_۱ = ۱^۱ , t_۲ = ۲^۲ , ... , t_n = n^۲$$

یعنی جملهٔ عمومی دنبالهٔ فوق $t_n = n^۲$ می‌باشد.

مثال **اعداد طبیعی فرد متوالی را با شروع از ۱ بنویسید و این اعداد را به عنوان یک دنباله بررسی کنید. آیا می‌توانید یک الگوی کلی برای این اعداد بیان کنید و جملهٔ عمومی این دنباله را حدس بزنید؟**

حل ممکن است پیش خودتان بگویید: «آقا شوخی می‌کنید؟» و از سادگی سؤال حیرت کرده باشید. ولی نه، شوخی در کار نیست. قصد دارم به کمک همین سؤال ساده، مفهوم «دنبالهٔ حسابی» را خدمتتان یادآوری کنم. خب، اعداد موردنظر به شکل $۱,۳,۵,۷,۹,...$ می‌باشند. همان‌طوری که همه درست حدس زده‌اید، اعداد این دنباله از الگوی خاصی پیروی می‌کنند و جملهٔ عمومی دنباله $a_n = ۲n - ۱$ می‌باشد. این الگو، الگویی درجه‌اول برحسب n می‌باشد که به آن «الگوی خطی» می‌گوییم.

به طور کلی الگوهایی را که جملهٔ عمومی آن‌ها به شکل $t_n = an + b$ است را الگوهای خطی می‌نامیم که در آن‌ها a و b اعداد دلخواه و ثابت هستند.

و حتماً به یاد دارید دنباله‌هایی که الگوی خطی داشتند را «دنبالهٔ حسابی» می‌نامیدیم؛ پس دنبالهٔ اعداد طبیعی فرد متوالی با شروع از ۱ که جملهٔ عمومی آن الگویی درجه اول دارد و یک دنبالهٔ خطی است، در واقع یک دنبالهٔ حسابی می‌باشد. یک بار دیگر به جملات این دنباله دقت کنید! چه ویژگی مهمی در این جملات می‌بینید؟ قطعاً متوجه شده‌اید که تفاضل هر دو جملهٔ متوالی این دنباله مقدار ثابتی است.

$$a_۲ - a_۱ = ۲ \quad , \quad a_۳ - a_۲ = ۲ \quad , \quad a_۴ - a_۳ = ۲ \quad , \quad ... \quad , \quad a_n - a_{n-۱} = ۲$$

یا به بیان دیگر هر جمله‌ای از افزودن یک مقدار ثابت (یعنی ۲) به جملهٔ قبلی به دست می‌آید.

دنباله‌ای که در آن هر جمله (به‌جز جملهٔ اول) با اضافه‌شدن عددی ثابت به جملهٔ قبل از خودش به دست می‌آید، یک «دنبالهٔ حسابی» نامیده می‌شود و به آن عدد ثابت، قدرنسبت دنباله می‌گویند.

به زبان ریاضی می‌نویسیم:

۲) $a_{n+1} = a_n + d$ ۱) $a_{n+1} - a_n = d$

خداییش دقت کردین d در واقع نباید اسمش قدرنسبت باشه! اسم واقعیش «قدر تفاضل» باید باشه، چون اندازه (قدر) یک تفاضله $(a_{n+1} - a_n)$، ولی ما هم مثل بقیهٔ دوستان، بهش قدرنسبت خواهیم گفت.

مثال **جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی $a_n = 7n + 4$ می‌باشد، قدرنسبت دنباله را به دست آورید.**

حل همان‌طور که گفتیم برای پیداکردن قدرنسبت کافی است $a_{n+1} - a_n$ را محاسبه کنیم:

$$a_{n+1} - a_n = (7(n+1)+4) - (7n+4) = (7n+11) - (7n+4) = 7$$

نکته هر دنبالهٔ درجه‌اول برحسب n یک دنبالهٔ حسابی است که در آن ضریب n، همان قدرنسبت است.

مثال **اگر جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی a و قدرنسبت آن d باشد، چند جملهٔ متوالی از این دنباله را بنویسید و با الگوی به دست آمده جملهٔ عمومی دنباله را حدس بزنید.**

حل دقیقاً کاری را انجام می‌دهیم که صورت سؤال گفته! چند جمله از دنباله را می‌نویسیم. جملهٔ اول که برابر a است؛ چون در دنبالهٔ حسابی هر جمله از جملهٔ قبلی d واحد بیشتر است، جملهٔ دوم می‌شود $a+d$ و به همین ترتیب جملهٔ سوم می‌شود $(a+d)+d$ یعنی $a+2d$. اگر کار را به همین ترتیب ادامه دهیم، خواهیم داشت:

$$\underset{a_1}{a}, \underset{a_2}{a+d}, \underset{a_3}{a+2d}, \underset{a_4}{a+3d}, \ldots$$

الان زمانش رسیده که جملهٔ عمومی را حدس بزنیم. بله، درسته! $a_n = a + (n-1)d$.

جملهٔ عمومی هر دنبالهٔ حسابی به شکل مقابل می‌باشد: $a_n = a_1 + (n-1)d$

نگاهی دیگر به سؤال بالا و جملات یک دنبالهٔ حسابی

همیشه سر کلاس به دانش‌آموزانم می‌گویم در بحث دنباله حتی یک فرمول هم لازم نیست که بلد باشید (هر چند که بلدبودن فرمول‌ها ضرری هم ندارد!) بچه‌ها می‌پرسند چه‌طور؟ خب، برای شما هم توضیح می‌دهم:

کافی است سؤالات زیر را با هم پاسخ بدهیم:

۱) در یک دنبالهٔ حسابی، جملهٔ دوم چه‌قدر از جملهٔ اول بیشتر است؟ d

۲) در یک دنبالهٔ حسابی، جملهٔ سوم چه‌قدر از جملهٔ دوم بیشتر است؟ d

۳) در یک دنبالهٔ حسابی، جملهٔ سوم چه‌قدر از جملهٔ اول بیشتر است؟ $2d$

۴) در یک دنبالهٔ حسابی، جملهٔ دهم چه‌قدر از جملهٔ هفتم بیشتر است؟ $3d$

۵) در یک دنبالهٔ حسابی، جملهٔ nاُم چه‌قدر از جملهٔ mاُم بیشتر است؟ $(n-m)d$

و نهایتاً به این سؤال می‌رسیم که:

۶) در یک دنبالهٔ حسابی، جملهٔ nاُم چه‌قدر از جملهٔ اول بیشتر است؟ $(n-1)d$

یعنی: $a_n - a_1 = (n-1)d \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d$

ملاحظه کردید که منطق ساده‌ای حکم‌فرماست. بدون این‌که فرمولی حفظ کنیم، تفاضل جملات را به شکل مضربی از قدرنسبت بیان می‌کنیم. برای این‌که تمرین خود را به حد کمال برسانیم، به مثال‌های سادهٔ زیر هم دقت کنید:

۳) $a_{10} - a_{30} = -20d$ ۲) $a_{11} - a_3 = 8d$ ۱) $a_7 = a_1 + 6d$

۶) $d = \dfrac{a_5 - a_2}{(5-2)}$ ۵) $a_{31} = a_{40} - 9d$ ۴) $a_{11} = a_5 + 6d$

کمی تأمل و مکث کنید! بعد از این‌که تمامی موارد بالا را به درستی هضم کردید، به سراغ مثال‌های بعدی برویم.

مثال **در یک دنبالهٔ حسابی جملات هفتم و نوزدهم به ترتیب -۵ و ۴۳ می‌باشند.**

الف **قدرنسبت دنباله را به دست آورید.**

ب **جملهٔ سی و پنجم دنباله را بنویسید.**

حل خب بیایید سؤال را از دو راه مختلف حل کنیم؛ یک بار به کمک فرمول و یک بار بدون کمک فرمول.

راه اول **(به کمک فرمول)** $a_{۱۹}=۴۳ \Rightarrow a+۱۸d=۴۳$ $\quad$ $a_۷=-۵ \Rightarrow a+۶d=-۵$

از حل دو معادله دو مجهول حاصل (کم‌کردن دو رابطه از هم) خواهیم داشت: $۱۲d=۴۸ \Rightarrow d=۴\ ,\ a=-۲۹$

و اکنون می‌توانیم جملهٔ سی و پنجم را به دست آوریم: $a_{۳۵}=a+۳۴d=-۲۹+۳۴(۴)=۱۰۷$

راه دوم **(بدون کمک فرمول)** در راه دوم تمرکز خود را روی «تفاضل جملات» می‌گذاریم:

$$a_{۱۹}-a_۷=۱۲d \Rightarrow ۴۳-(-۵)=۱۲d \Rightarrow d=۴$$

از سوی دیگر: $a_{۳۵}-a_{۱۹}=۱۶d \Rightarrow a_{۳۵}-۴۳=۱۶(۴) \Rightarrow a_{۳۵}=۱۰۷$

نکته با داشتن جملات mاُم و nاُم یک دنبالهٔ حسابی، قدرنسبت از رابطهٔ $d=\frac{a_m-a_n}{m-n}$ به دست می‌آید.

مثال **اگر نخستین جام جهانی فوتبال، سال ۱۹۳۰ در اروگوئه برگزار شده باشد، جام جهانی ۲۰۱۸ روسیه چندمین دورهٔ این جام خواهد بود؟**

حل خب، می‌دانیم جام جهانی هر ۴ سال یک بار برگزار می‌شود؛ پس سال‌های برگزاری، دنباله‌ای حسابی با جملهٔ اول ۱۹۳۰ و قدرنسبت ۴ خواهد بود و سؤال این است که ۲۰۱۸ جملهٔ چندم این دنباله است:

$$a_n=۲۰۱۸=a_۱+(n-۱)d \Rightarrow ۲۰۱۸=۱۹۳۰+(n-۱)\times ۴ \Rightarrow ۴(n-۱)=۸۸ \Rightarrow n-۱=۲۲ \Rightarrow n=۲۳$$

یعنی جام جهانی ۲۰۱۸، می‌بایستی جام بیست و سوم باشد. البته در واقعیت، جام جهانی روسیه جام بیست و یکم خواهد بود چون متأسفانه در سال‌های ۱۹۴۲ و ۱۹۴۶ به خاطر جنگ جهانی دوم، جام جهانی فوتبال برگزار نشد.

نکته $a_n=a_۱+(n-۱)d \Rightarrow n=\frac{a_n-a_۱}{d}+۱$

به زبان عامیانه! در یک دنبالهٔ حسابی، تعداد جملات برابر است با: جملهٔ آخر منهای جملهٔ اول، تقسیم بر قدرنسبت، به علاوهٔ ۱.

مثال **مجموع سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی ۱۲ است. جملهٔ وسط دنباله چه عددی است؟**

حل یک روش برای حل این سؤال این است که سه جملهٔ متوالی دنباله را به ترتیب با a، $a+d$ و $a+۲d$ نمایش دهیم:

پس: $a+(a+d)+(a+۲d)=۱۲ \Rightarrow ۳a+۳d=۱۲ \Rightarrow a+d=۴$ ($a+d$ همان جملهٔ وسط است.)

ولی به نظر من بهتر است وقتی از سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ حسابی صحبت می‌شود، آن را به شیوه‌ای متقارن به صورت $a-d,a,a+d$ نمایش دهیم، یعنی در این سؤال: $(a-d)+a+(a+d)=۱۲ \Rightarrow ۳a=۱۲ \Rightarrow a=۴$

مثال **مسئلهٔ زیر از پاپیروس رایند (Rhind Papyrus) به دست آمده است، آن را حل کنید.**

«۱۰۰ قرص نان را بین ۵ مرد چنان تقسیم کنید که سهم‌های دریافت‌شده، دنبالهٔ حسابی تشکیل دهند و یک‌سوم مجموع سه سهم بزرگ‌تر برابر مجموع دو سهم کوچک‌تر باشد.»

حل ملاحظه می‌کنیم که ۵ سهم داریم که تشکیل دنبالهٔ عمومی می‌دهند؛ یعنی: $a-۲d,a-d,a,a+d,a+۲d$. بدیهی است که مجموع سهم‌ها باید ۱۰۰ باشد؛ پس: $(a-۲d)+(a-d)+a+(a+d)+(a+۲d)=۱۰۰$

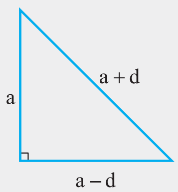
پس $۵a=۱۰۰$، یعنی $a=۲۰$. از سوی دیگر طبق صورت مسئله:

$$\frac{۱}{۳}(a+a+d+a+۲d)=a-d+a-۲d \Rightarrow \frac{۱}{۳}(۶۰+۳d)=۴۰-۳d \Rightarrow ۲۰+d=۴۰-۳d \Rightarrow ۴d=۲۰ \Rightarrow d=۵$$

پس سهم‌ها، $۱۰,۱۵,۲۰,۲۵,۳۰$ می‌باشند.

تست سه ضلع مثلث قائم‌الزاویه‌ای تشکیل دنبالهٔ عمومی می‌دهند. اگر محیط مثلث $۴۸\ m$ باشد، مساحت این مثلث چند متر مربع است؟

۱) ۴۸ ۲) ۹۶ ۳) ۱۹۲ ۴) ۲۰۰



پاسخ گزینهٔ ۲ اضلاع مثلث را $a-d, a, a+d$ در نظر می‌گیریم. چون مثلث قائم‌الزاویه است، از قضیهٔ فیثاغورس استفاده می‌کنیم:

$$(a+d)^۲ = a^۲ + (a-d)^۲ \Rightarrow a^۲ + ۲ad + d^۲ = a^۲ + a^۲ - ۲ad + d^۲ \Rightarrow a^۲ = ۴ad \Rightarrow a = ۴d$$

یعنی اضلاع مثلث $۳d, ۴d, ۵d$ می‌باشند.

از سوی دیگر چون محیط مثلث $۴۸\ m$ است: $۳d + ۴d + ۵d = ۴۸ \Rightarrow d = ۴$

یعنی سه ضلع مثلث $۱۲, ۱۶, ۲۰$ می‌باشند و می‌دانیم که مساحت مثلث قائم‌الزاویه برابر نصف حاصل‌ضرب دو ضلع قائم می‌باشد:

$$S = \frac{۱۲ \times ۱۶}{۲} = ۹۶\ m^۲$$

نکته اگر سه ضلع مثلث قائم‌الزاویه‌ای تشکیل دنبالهٔ عمومی بدهند، اضلاع آن $۵d$، $۴d$ و $۳d$ می‌باشند. (متناسب با اعداد فیثاغورسی می‌باشند.)

مثال اگر سه عدد c, b, a تشکیل یک دنبالهٔ حسابی بدهند، بین آن‌ها چه رابطه‌ای برقرار است؟

حل این سؤال بسیار ساده و روشن خواهد بود. اگر تمرکز خود را بر روی تفاضل محاسبات بگذاریم:

$$c - b = b - a \Rightarrow a + c = ۲b \Rightarrow b = \frac{a+c}{۲}$$

یعنی اگر سه عدد تشکیل دنبالهٔ عمومی بدهند، عدد وسطی میانگین دو عدد دیگر است. به عدد وسط (b) واسطهٔ حسابی یا میانگین حسابی a و c می‌گویند.

نکته اگر a, b, c تشکیل دنبالهٔ حسابی بدهند: $b = \frac{a+c}{۲}$.

مثال بین -۷ و ۴۳، ۹ عدد چنان نوشته‌ایم که دنبالهٔ حاصل، یک دنبالهٔ حسابی باشد. سومین عضو این دنباله چه عددی است؟

حل اول یک توضیح بدهم و با یک اصطلاح آشنا بشوید: «اگر بین a و b، n عدد چنان بنویسیم که یک دنبالهٔ حسابی پدید بیاید، به این n عدد، واسطه‌های حسابی بین a و b می‌گویند و اصطلاحاً می‌گویند بین a و b، n واسطهٔ حسابی درج کرده‌ایم.»

حال برویم سراغ حل مسئله: اعداد موردنظر را به شکل مقابل نمایش می‌دهیم:

$$-۷, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, ۴۳$$

$\longleftarrow$ ۹ واسطهٔ عددی $\longrightarrow$

با این شرایط -۷ واقعاً جملهٔ اول دنباله است. ۴۳ جملهٔ چندم؟ بله، «یازدهم». پس: $a_{۱۱} = a_۱ + ۱۰d \Rightarrow ۴۳ = -۷ + ۱۰d \Rightarrow d = ۵$

پس واسطه‌ها به ترتیب $-۲, ۳, ۸, ۱۳, ۱۸, ۲۳, ۲۸, ۳۳, ۳۸$ می‌باشند یعنی سومین عضو دنبالهٔ حاصل، ۳ می‌باشد. (سومین واسطه ۸ است!)

در حالت کلی اگر بین a و b تعداد n واسطهٔ حسابی درج کنیم: $d = \frac{b-a}{n+۱}$

تست اگر $a_۱, a_۲, \dots, a_{۱۰}$ جملات متوالی یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول ۹ و قدرنسبت ۸ باشند، حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\frac{۱}{\sqrt{a_۲}+\sqrt{a_۱}} + \frac{۱}{\sqrt{a_۳}+\sqrt{a_۲}} + \dots + \frac{۱}{\sqrt{a_{۱۰}}+\sqrt{a_۹}}$$

۱) ۱ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

پاسخ گزینهٔ ۳ بگذارید حل تست را این‌طور شروع کنم! وقتی نگاهتان به عبارت $\frac{۱}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$ برخورد می‌کند، بلافاصله چه چیزی به ذهنتان خطور می‌کند؟

هیچی! مزاح می‌فرمایید. همگی به طور غیرارادی سعی می‌کنیم مخرج عبارت را گویا کنیم. درسته؟ یعنی:

$$\frac{۱}{\sqrt{m}+\sqrt{n}} = \frac{۱}{\sqrt{m}+\sqrt{n}} \times \frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{m-n}$$

پس:

$$\frac{۱}{\sqrt{a_۲}+\sqrt{a_۱}} + \frac{۱}{\sqrt{a_۳}+\sqrt{a_۲}} + \dots + \frac{۱}{\sqrt{a_{۱۰}}+\sqrt{a_۹}} = \frac{\sqrt{a_۲}-\sqrt{a_۱}}{a_۲-a_۱} + \frac{\sqrt{a_۳}-\sqrt{a_۲}}{a_۳-a_۲} + \dots + \frac{\sqrt{a_{۱۰}}-\sqrt{a_۹}}{a_{۱۰}-a_۹}$$

$$=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{d}+\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{d}+\cdots+\frac{\sqrt{a_{10}}-\sqrt{a_9}}{d}=\frac{(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1})+(\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2})+\cdots+(\sqrt{a_{10}}-\sqrt{a_9})}{d}=\frac{\sqrt{a_{10}}-\sqrt{a_1}}{d}$$

دقت کنید به صورت تلسکوپی $\sqrt{a_2}$ها، $\sqrt{a_3}$ها، ... و $\sqrt{a_9}$ها، حذف می‌شوند و فقط $\sqrt{a_{10}}$ و $-\sqrt{a_1}$ باقی می‌مانند:

$$=\frac{\sqrt{a_1+9d}-\sqrt{a_1}}{8}=\frac{\sqrt{81}-\sqrt{9}}{8}=\frac{9-3}{8}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

مثال **در یک دنبالهٔ عمومی (حسابی)، مجموع جملات هفتم و نوزدهم برابر ۳۰ است. جملهٔ سیزدهم برابر چه عددی است؟**

حل **راه اول**

$$a_7+a_{19}=a_1+6d+a_1+18d=2a_1+24d=30 \Rightarrow a_1+12d=15 \Rightarrow a_{13}=15$$

راه دوم

$$a_7+a_{19}=(a_{13}-6d)+(a_{13}+6d)=2a_{13}=30 \Rightarrow a_{13}=15$$

در سؤال بالا مجموع جملات پنجم و بیست و یکم چه عددی است؟ $a_5+a_{21}=a_1+4d+a_1+20d=2a_1+24d=30$

یعنی مجموع a_7+a_{19} برابر است با مجموع a_5+a_{21} و آن هم برابر است با: $2a_{13}=a_{13}+a_{13}$. به نظر شما چه مشابهتی در این مجموع‌ها وجود دارد؟ بله جمع اندیس‌ها ۲۶ است.

نکته قانون اندیس‌ها:

در یک دنبالهٔ عمومی:

۱) $m+n=p+q \Rightarrow a_m+a_n=a_p+a_q$

۲) $m+n=2p \Rightarrow a_m+a_n=2a_p$

۳) $m+n+p=q+r+s \Rightarrow a_m+a_n+a_p=a_q+a_r+a_s$

تست **در یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۵، اگر $t_{17}^2-t_{11}^2=900$ باشد، جملهٔ چهاردهم دنباله کدام است؟**

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۳۰

پاسخ **گزینهٔ ۳** حاشیه نرویم!

$$t_{17}^2-t_{11}^2=(t_{17}-t_{11})\underbrace{(t_{17}+t_{11})}_{\text{جمع اندیس‌ها:۲۸}}=6d(2t_{14})=12dt_{14}=12(5)t_{14}=900 \Rightarrow t_{14}=\frac{900}{60}=15$$

دنبالهٔ هندسی

اکنون که دنبالهٔ حسابی را مرور کردیم، مرور دنبالهٔ هندسی بسیار ساده‌تر خواهد بود؛ زیرا کم‌وبیش منطق‌هایی که برای دنبالهٔ حسابی آموختیم، برای دنباله‌های هندسی هم قابل به‌کارگیری است.

مثال **فرض کنید نوعی بیماری در هر روز توسط یک بیمار به ۲ فرد سالم منتقل می‌شود، اگر در روز اول ۳ بیمار داشته باشیم، الگویی کلی برای تعداد افرادی که در هر روز مبتلا می‌شوند به دست آورید و جملهٔ عمومی تعداد افرادی که در روز n اُم مبتلا می‌شوند را بنویسید.**

حل خیلی ساده است؛ در روز اول ۳ بیمار داریم و هر بیمار، بیماری خود را به ۲ نفر منتقل می‌کند؛ پس در روز دوم بیماری به $3\times2=6$ نفر منتقل می‌شود. هر یک از این ۶ نفر بیماری را به ۲ نفر دیگر منتقل می‌کنند؛ پس در روز سوم بیماری به $3\times2\times2=12$ نفر منتقل می‌شود و این فرایند ادامه می‌یابد. تعداد مبتلایان در هر روز را می‌توان به شکل مقابل، نمایش داد: $3, 3\times2, 3\times2^2, 3\times2^3, \ldots$

با توجه به این الگو، جملهٔ عمومی دنبالهٔ تعداد مبتلایان در روز n اُم را چگونه می‌نویسید؟ بله، درست است! $a_n=3\times2^{n-1}$.

آیا این دنباله، دنباله‌ای حسابی است؟ جواب قطعاً منفی است؛ زیرا تفاضل هر دو جملهٔ متوالی این دنباله عدد ثابتی نیست: $a_2-a_1=4$، ولی $a_3-a_2=6$!

چه ارتباطی میان جملات متوالی این دنباله می‌یابید؟ قطعاً درست فهمیده‌اید، در این دنباله هر جمله‌ای از ضرب عددی ثابت (یعنی ۲) در جملهٔ ماقبل خود به دست آمده است و یا به بیانی دیگر نسبت هر دو جملهٔ متوالی عدد ثابتی است (در این‌جا ۲). چنین دنباله‌ای را دنبالهٔ هندسی می‌نامند.

دنبالهٔ هندسی، دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به‌جز جملهٔ اول) از ضرب جملهٔ قبل از خودش در عددی ثابت به دست می‌آید، این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می‌نامیم.

به زبان ریاضی می‌نویسیم:

۱) $\frac{a_{n+1}}{a_n}=r$

۲) $a_{n+1}=a_n.r$

این‌جا r دیگر بی‌چون‌وچرا «قدرنسبت» است زیرا «اندازهٔ (قدر)» «نسبت» دو جملهٔ متوالی دنباله است.

مثال در هر مورد قدرنسبت دنباله‌های هندسی زیر را تعیین کنید.

الف) $3,6,12,...$ ب) $2,\frac{2}{3},\frac{2}{9},...$ ج) $3,-\frac{3}{2},\frac{3}{4},...$ د) $2,5,8,...$

حل مطمئن هستم بی‌نهایت از طرح چنین سؤال ساده‌ای تعجب کرده‌اید ولی اندکی صبر پیشه کنید از طرح این سؤال ساده هدف خاصی دارم:

الف) نسبت هر دو جملهٔ متوالی در این دنباله ۲ است، یعنی $r=2$. ملاحظه می‌کنید جملات این دنباله مدام در حال بزرگ‌شدن می‌باشند، به چنین دنباله‌ای «دنبالهٔ صعودی» می‌گویند.

ب) نسبت هر دو جملهٔ متوالی در این دنباله $\frac{1}{3}$ است، یعنی $r=\frac{1}{3}$. ملاحظه می‌کنید جملات این دنباله مدام در حال کوچک‌شدن می‌باشند، به چنین دنباله‌ای «دنبالهٔ نزولی» می‌گویند.

ج) نسبت هر دو جملهٔ متوالی در این دنباله $-\frac{1}{2}$ است، یعنی $r=-\frac{1}{2}$. ملاحظه می‌کنید جملات این دنباله به طور متناوب کاهش و افزایش می‌یابند. به چنین دنباله‌ای «دنبالهٔ غیریکنوا» می‌گویند.

د) مطمئناً خودتان فهمیده‌اید که این دنباله اصلاً دنبالهٔ هندسی نیست! زیرا نسبت جملات متوالی عدد ثابتی نیست.

نکته در یک دنبالهٔ حسابی اگر $d \ge 0$ باشد، دنباله صعودی است و اگر $d \le 0$ باشد، دنباله نزولی است. اما در یک دنبالهٔ هندسی اگر جملهٔ اول مثبت باشد و $r \ge 1$، دنباله صعودی است (اگر جملهٔ اول منفی باشد دنباله با این شرایط نزولی است)، اگر جملهٔ اول مثبت باشد و $0 \le r \le 1$، دنباله نزولی است (اگر جملهٔ اول منفی باشد دنباله با این شرایط صعودی است) و اگر $r<0$، دنباله غیریکنوا است.

اگر به خاطر داشته باشید که حتماً دارید، خدمت مبارکتان عرض کردم در مورد دنبالهٔ حسابی طرز فکر به‌دردبخور این است که روی «تفاضل» جملات تمرکز کنید و این تفاضل را به صورت مضربی از قدرنسبت بیان کنید. در مورد دنبالهٔ هندسی باید تمرکز خود را روی «نسبت» جملات بگذارید. به مثال‌های زیر دقت کنید:

۱) $\frac{a_2}{a_1}=r$ ۲) $\frac{a_3}{a_2}=r$ ۳) $\frac{a_{10}}{a_9}=r$ ۴) $\frac{a_3}{a_1}=r^2$

۵) $\frac{a_{10}}{a_3}=r^7$ ۶) $a_5=a_1.r^4$ ۷) $\frac{a_3}{a_7}=\frac{1}{r^4}$ ۸) $a_{10}=a_{13}\times\frac{1}{r^3}$

پس می‌توان گفت: $\frac{a_n}{a_1}=r^{n-1} \Rightarrow a_n=a_1.r^{n-1}$ جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی

و یا می‌توان گفت: $\frac{a_m}{a_n}=r^{m-n}$

جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی به صورت مقابل می‌باشد: $a_n=a_1.r^{n-1}$

نکته با داشتن جملات m اُم و n اُم یک دنبالهٔ هندسی، قدرنسبت از رابطهٔ $\frac{a_m}{a_n}=r^{m-n}$ به دست می‌آید.

مثال جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی غیرصعودی به شکل $2,x,18,...$ می‌باشند، جملهٔ پنجم دنباله را تعیین کنید.

حل آن‌چه در اختیار ما است جملات اول و سوم می‌باشند، پس سریع دست به کار می‌شویم: $\frac{a_3}{a_1}=r^2=\frac{18}{2}=9 \Rightarrow r^2=9 \Rightarrow r=\pm 3$

اما چون دنباله «غیرصعودی» است، جواب $r=-3$ قابل‌قبول ما است. پس: $a_5=a_1.r^4=2(-3)^4=162$.

تست در یک دنبالهٔ هندسی جملات هفتم و نوزدهم به ترتیب ۵ و ۱۰ می‌باشند، جملهٔ چهل و سوم کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۴۰ ۴) ۸۰

پاسخ گزینهٔ ۳ شاید این تست ساده بهترین مصداق باشد برای این‌که درک کنیم، تفکر مبتنی بر نسبت جملات، خیلی بهتر از فرمول است:

راه اول (نسبت جملات)

$$\frac{a_{19}}{a_7}=\frac{10}{5}=2=r^{12}$$

$$\frac{a_{43}}{a_{19}}=r^{24}=(r^{12})^2=2^2=4 \Rightarrow a_{43}=4a_{19}=4\times 10=40$$

راه دوم (فرمول)

$$\left.\begin{matrix} a_7=a_1r^6 \\ a_{19}=a_1r^{18}\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{5}{10}=\frac{1}{r^{12}} \Rightarrow r^{12}=2 \Rightarrow r=\pm\sqrt[12]{2}$$

از سوی دیگر چون $a_7=5$ است، می‌نویسیم: $a_1r^6=5$، یعنی $a_1\times\sqrt{2}=5$، پس $a_1=\frac{5}{\sqrt{2}}$، در انتها می‌نویسیم:

$$a_{43}=a_1.r^{42}=\frac{5}{\sqrt{2}}(\pm\sqrt[12]{2})^{42}=\frac{5}{\sqrt{2}}(\sqrt{2})^7=\frac{5}{\sqrt{2}}\times 8\sqrt{2}=40$$

قبول دارید که راه طولانی و نامناسبی بود؟

مثال **اگر سه عدد a,b,c تشکیل دنبالهٔ هندسی بدهند، بین آن‌ها چه رابطه‌ای برقرار است؟**

حل باز هم فکرمان را معطوف نسبت‌ها می‌کنیم، اگر این سه عدد تشکیل دنباله‌ای هندسی بدهند: $\frac{b}{a}=\frac{c}{b} \Rightarrow b^2=ac \Rightarrow b=\pm\sqrt{ac}$

در این حالت b را واسطهٔ هندسی یا میانگین هندسی دو عدد a و c می‌نامند.

نکته اگر a,b,c تشکیل دنبالهٔ هندسی بدهند، آن‌گاه: $b^2=ac$

مثال **ثابت کنید واسطهٔ حسابی دو عدد مثبت، بزرگ‌تر یا مساوی واسطهٔ هندسی آن‌هاست. (چه زمانی واسطه‌های حسابی و هندسی برابرند؟)**

حل بدیهی است که $(\sqrt{a}\pm\sqrt{c})^2\geq 0$ (مربع هر عددی مثبت است!)؛ بنابراین: $a+c\pm2\sqrt{ac}\geq 0$، در نتیجه: $a+c\geq\pm2\sqrt{ac}$ و یا $\frac{a+c}{2}\geq\pm\sqrt{ac}$. یعنی ثابت کردیم واسطهٔ حسابی بزرگ‌تر یا مساوی واسطهٔ هندسی است. حالت تساوی زمانی رخ می‌دهد که $(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2=0$، یعنی $a=c$.

نکته واسطهٔ حسابی دو عدد همواره بزرگ‌تر یا مساوی واسطهٔ هندسی است. حالت تساوی زمانی رخ می‌دهد که دو عدد برابر باشند. در این حالت واسطه نیز با دو عدد برابر خواهد بود.

نکته سه عدد a,b,c فقط در یک صورت هم دنبالهٔ هندسی تشکیل می‌دهند و هم حسابی! این‌که هر سه با هم برابر باشند یعنی قدرنسبت دنبالهٔ حسابی صفر و قدرنسبت دنبالهٔ هندسی ۱ باشد. (البته اگر هر سه عدد صفر باشند قدرنسبت دنبالهٔ هندسی هر عددی می‌تواند باشد.)

مثال **بین ۳ و ۱۹۲ تعداد ۵ واسطهٔ هندسی درج کرده‌ایم. اگر واسطه‌ها همگی مثبت باشند، دومین واسطه برابر چه عددی است؟**

حل عین همین مسئله را در مورد دنباله‌های حسابی هم حل کردیم. راه‌حل شبیه راه‌حل قبلی است:

$$\underbrace{3}_{\text{جملهٔ اول}},\square,\square,\square,\square,\square,\underbrace{192}_{\text{جملهٔ هفتم}}$$

$$\frac{a_7}{a_1}=r^6 \Rightarrow \frac{192}{3}=64=r^6 \Rightarrow r=\pm2$$

چون همهٔ واسطه‌ها مثبت هستند: $r=2$، پس واسطه‌ها به ترتیب $6,12,24,48,96$ می‌باشند و دومین واسطه ۱۲ است.

نکته اگر بین a و b تعداد n واسطهٔ هندسی درج کنیم: $r^{n+1}=\frac{b}{a}$

مثال **جملات اول، هفتم و نوزدهم یک دنبالهٔ حسابی، سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی می‌باشند. قدرنسبت دنبالهٔ هندسی برابر چه عددی است؟**

حل اگر جملات دنبالهٔ حسابی را با a_n نمایش دهیم: a_1,a_7,a_{19} تشکیل یک دنبالهٔ هندسی می‌دهند؛ پس: $a_7^2=a_1.a_{19}$

بنابراین: $(a_1+6d)^2=a_1.(a_1+18d) \Rightarrow a_1^2+12a_1d+36d^2=a_1^2+18a_1d \Rightarrow 36d^2=6a_1d \Rightarrow 6d=a_1$

در این صورت: $a_7=a_1+6d=12d$, $a_{19}=a_1+18d=24d$، یعنی دنبالهٔ هندسی موردنظر $6d,12d,24d$ می‌باشد در نتیجه قدرنسبت آن برابر ۲ است.

نکته اگر جملات m اُم، n اُم و p اُم یک دنبالهٔ حسابی سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، آن‌گاه: $r=\frac{p-n}{n-m}$

بد نیست نکتهٔ بالا را ثابت کنید!

مثال **در یک دنبالهٔ هندسی حاصل‌ضرب جملات هفتم، نوزدهم و بیست و پنجم برابر ۵ است. جملهٔ هفدهم برابر چه عددی است؟**

حل اگر بخواهید بدون استفاده از نکته به خصوصی سؤال را حل کنید بسیار ساده است:

$$a_7.a_{19}.a_{25}=a_1.r^6.a_1.r^{18}.a_1.r^{24}=a_1^3.r^{48}=5 \Rightarrow a_1.r^{16}=\sqrt[3]{5} \Rightarrow a_{17}=\sqrt[3]{5}$$

اما قانون اندیس‌ها برای دنباله‌های هندسی نیز به شکل زیر برقرار است:

نکته قانون اندیس‌ها در یک دنبالهٔ هندسی:

① $m+n=p+q \Rightarrow a_m.a_n=a_p.a_q$

② $m+n=2p \Rightarrow a_m.a_n=a_p^2$

③ $m+n+p=q+s+t \Rightarrow a_m.a_n.a_p=a_q.a_s.a_t$

پس در سؤال بالا هم می‌توانستیم بگوییم: $7+19+25=51=17+17+17 \Rightarrow a_7.a_{19}.a_{25}=a_{17}^3=5 \Rightarrow a_{17}=\sqrt[3]{5}$

مثال **سه عدد تشکیل یک دنبالهٔ هندسی می‌دهند. اگر مجموع آن‌ها ۲۱ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۶۴ باشد، آن سه عدد را تعیین کنید.**

حل سه عدد را $\frac{a}{r}, a, ar$ می‌نامیم:

① $\frac{a}{r}.a.ar=64 \Rightarrow a^3=64 \Rightarrow a=4$

② $\frac{a}{r}+a+ar=21 \Rightarrow \frac{4}{r}+4+4r=21 \Rightarrow \frac{4}{r}+4r=17 \Rightarrow 4r^2-17r+4=0 \Rightarrow r=\frac{17\pm\sqrt{289-64}}{8}=4$ یا $\frac{1}{4}$

پس سه عدد ۱,۴,۱۶ می‌باشند.

حالا که خیالمون راحت شده مجدداً تسلط خود را روی مسائل دنباله‌های حسابی و هندسی باز یافته‌ایم، زمان آن فرا رسیده که یک گام دیگر به سمت جلو حرکت کنیم. چالش جدید پیش روی ما که اتفاقاً خیلی جذاب و شیرین هم هست محاسبهٔ مجموع جملات یک دنباله می‌باشد. بگذارید یک داستان جالب و نه چندان واقعی براتون تعریف کنم:

مجموع جملات دنبالهٔ حسابی

حدود سال ۱۷۸۵ میلادی یوهان کارل فردریش گاوس تقریباً ۸ ساله و دانش‌آموز دبستان بود. معلم کارل روزی دل‌ودماغ تدریس نداشت، لذا برای این‌که مدتی بتواند استراحت کند و به نوعی از شر شاگردان هم خلاص باشد سؤالی را در کلاس مطرح کرد. «بچه‌ها، سریع مشغول بشوید و حاصل‌جمع اعداد ۱ تا ۱۰۰ را به دست آورید.» این سؤال را گفت و خودش را آماده کرد تا چرت یک ساعته‌ای بزند. اما پس از مدت بسیار کوتاهی صدای شیطنت پسربچه‌ای آرامش او را به هم زد. فریاد زد: بچه جون مگه مسئله را حل کرده‌ای که این‌قدر سروصدا راه انداخته‌ای؟ پسرک جواب داد: بله آقا. معلم دوباره فریاد زد: این غیرممکن است چگونه؟ و کارل گاوس که بعدها شاهزادهٔ ریاضی لقب گرفت با خونسردی شروع به توضیح‌دادن کرد:

«آقا، اگر جمع اعداد ۱ تا ۱۰۰ را به شکل مقابل بنویسیم: $1+2+3+4+\cdots+97+98+99+100$

جمع اولین عدد و آخرین عدد می‌شود $1+100=101$، جمع دومین عدد و عدد یکی مانده به آخر هم همان می‌شود: $2+99=101$ و به همین ترتیب هم جمع سومین عدد و عدد دوتا مانده به آخر $3+98=101$. خب حالا چند جفت از این ۱۰۱ها داریم؟ معلوم است دیگر ۱۰۰ عدد داشتیم پس ۵۰ جفت ۱۰۱ داریم پس جمع همهٔ اعداد می‌شود: $50\times101=5050$»

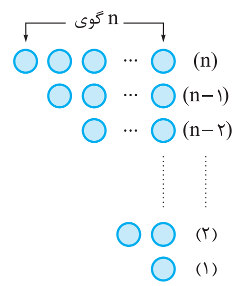
(می‌گن معلم گاوس هنوز زیر میز قایم شده نور بهش می‌خوره جیغ می‌کشه.)

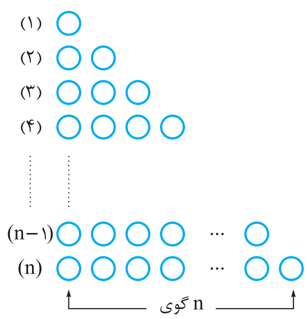
ایدهٔ گاوس بسیار هوشمندانه بود و امروزه هم همین ایدهٔ ساده برای محاسبهٔ مجموع جملات دنباله‌های حسابی به کار می‌رود.

مثال **حاصل‌جمع اعداد طبیعی ۱ تا n را به دست آورید.**

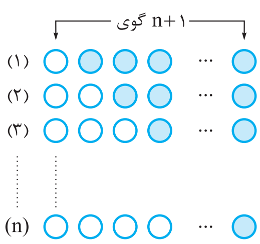
حل در این‌جا هم می‌توانیم ایدهٔ گاوس را به راحتی به کار ببریم ولی برای این‌که تنوعی هم باشد، بیایید این ایده را به صورت ویژوال (تصویری) بیان کنیم:

جمع اعداد ۱ تا n یعنی جمع تعداد گوی‌ها در دو شکل مقابل هم رسم شده است:





اگر این دو شکل را با هم ادغام کنیم به شکل زیر خواهیم رسید:



پرواضح است که تعداد کل گوی‌ها در این حالت $n\times(n+1)$ می‌باشد که دو برابر مجموع اعداد ۱ تا n است پس مجموع اعداد ۱ تا n برابر است با: $\frac{n(n+1)}{2}$. (یا به روش گاوس: جمع اولی و آخری می‌شود: $n+1$، جمع دومی و یکی مانده به آخری هم همین‌طور ... در کل چند جفت از این $(n+1)$ها داریم؟ $\frac{n}{2}$ تا. پس جمع اعداد ۱ تا n می‌شود: $\frac{n(n+1)}{2}$.)

نکته جمع اعداد طبیعی ۱ تا n برابر است با: $\frac{n(n+۱)}{۲}$

مثال **۲۰ نقطهٔ متمایز روی محیط دایره‌ای قرار دارند، با این نقاط چند وتر می‌توان رسم کرد؟**

حل یکی از این نقاط را در نظر بگیرید، با این نقطه چند وتر می‌توان رسم کرد؟ ۱۹تا (این نقطه را می‌توان به یکی از ۱۹ نقطهٔ باقی‌مانده وصل کرد تا وتری حاصل شود.) حال برویم سراغ نقطه‌ای دیگر، با این نقطهٔ دوم چند وتر می‌توان رسم کرد؟ بله ۱۸تا (قبلاً نقطهٔ اول را به آن وصل کرده‌ایم پس در این حالت ۱ وتر کم‌تر قابل رسم است.) اگر همین استدلال را ادامه دهیم تعداد وترهای قابل رسم برابر است با:

$$۱۹+۱۸+۱۷+\ldots+۲+۱=\frac{۱۹\times ۲۰}{۲}=۱۹۰$$

اکنون زمان آن فرا رسیده که به کمک ایدهٔ ساده و خلاقانهٔ گاوس، مجموع جملات یک دنبالهٔ حسابی را به دست آوریم: بگذارید در ابتدای بحث یک تعریف ساده خدمتتان ارائه کنم (تعریفی که در کتاب درسی جایش خالی است!): به مجموع n جملهٔ اول هر دنباله، رشته یا «سری» گفته می‌شود و آن را با «S_n» نمایش می‌دهند. به عنوان مثال دنبالهٔ $a_n=n^۲$ را در نظر بگیرید، مجموع n جملهٔ اول این دنباله یک سری می‌باشد:

$$S_۱=۱\,,\,S_۲=۱+۴=۵\,,\,S_۳=۱+۴+۹=۱۴\,,\ldots,S_n=۱+۴+۹+\cdots+n^۲$$

به همین ترتیب:

نکته مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی، سری حسابی نام دارد که آن را با S_n نمایش می‌دهند: $S_n=a_۱+a_۲+\cdots+a_n$

(که در آن a_iها جملات یک دنبالهٔ حسابی می‌باشند.)

حال بیایید به اتفاق، S_n را محاسبه کنیم:

$$S_n=a_۱+a_۲+a_۳+\cdots+a_{n-۲}+a_{n-۱}+a_n=\underbrace{a_۱+(a_۱+d)+(a_۱+۲d)+\cdots+(a_n-۲d)+(a_n-d)+a_n}_{a_۱+a_n}$$

ملاحظه می‌کنیم جمع یک جمله از اول سری با جمله‌ای از آخر سری برابر است با $a_۱+a_n$. حال چند جفت از این $a_۱+a_n$ها داریم؟ درست است: $\frac{n}{۲}$.

پس:

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$$

حال اگر بیاییم به جای a_n هم، $a_۱+(n-۱)d$ را جای‌گذاری کنیم خواهیم داشت:

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)$$

نکته مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی از دو فرمول زیر به دست می‌آید:

۱) $S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$ ۲) $S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)$

به شخصه من فرمول اول را خیلی ترجیح می‌دهم چون پر از مفهوم می‌باشد و بیان فارسی آن دلچسب‌تر است؛ مجموع جملات دنبالهٔ حسابی برابر است با: جملهٔ اول به علاوهٔ جملهٔ آخر ضربدر نصف تعداد جملات.

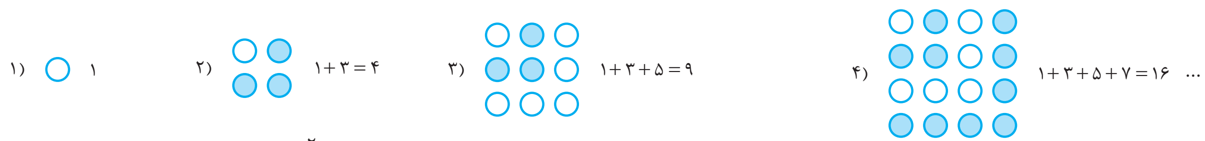
مثال **حاصل‌جمع n عدد اول فرد طبیعی را به دست آورید.**

حل دنبالهٔ اعداد فرد طبیعی دنبالهٔ حسابی با جملهٔ عمومی $a_n=۲n-۱$ می‌باشد. پس:

$$S_n=۱+۳+\cdots+(۲n-۱)=\overset{\text{تعداد}}{\frac{n}{۲}}(\underset{\text{جملهٔ اول}}{۱}+\underset{\text{جملهٔ آخر}}{۲n-۱})=n^۲$$

پس جمع اعداد فرد متوالی با شروع از ۱ تا ۱۱ ($۱۱=۲\times۶-۱$)، برابر است با: ۳۶.

این مسئله یک حل تصویری هم دارد که گفتن آن خالی از لطف نیست. به شکل زیر دقت کنید:



ملاحظه می‌کنید در هر مرحله تعداد گوی‌ها برابر مربعی کامل است: $\Rightarrow ۱+۳+\cdots+(۲n-۱)=n^۲$

نکته ۱) $۱+۲+۳+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$ ۲) $۲+۴+۶+\cdots+۲n=n(n+۱)$ ۳) $۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)=n^۲$

مثال در یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول ۲ و قدرنسبت ۳:

الف) مجموع ۱۰ جملهٔ اول را به دست آورید.

ب) مجموع جملات هفدهم تا سی و پنجم را به دست آورید.

ج) مجموع ۱۲ جملهٔ سوم دنباله را به دست آورید.

حل

الف) $S_{10}=\frac{10}{2}(a_1+a_{10})=\frac{10}{2}(a_1+a_1+9d)=5(2+2+27)=155$

ب) برای به دست آوردن مجموع جملات هفدهم تا سی و پنجم دو راه وجود دارد؛ هر دو راه را خدمتتان توضیح می‌دهم ولی من راه دوم را می‌پسندم چون طرز فکر آن خیلی ساده و تکراری است:

راه اول $a_{17}+a_{18}+\cdots+a_{35}=S_{35}-S_{16}$

متوجه شدید که مجموع جملات ۱۷ اُم تا ۳۵ اُم همان مجموع ۳۵ جملهٔ اول است که در آن جای جملات اول تا شانزدهم خالی است یعنی S_{35} بدون S_{16}.

$$S_{35}-S_{16}=\frac{35}{2}(a_1+a_{35})-\frac{16}{2}(a_1+a_{16})=\frac{35}{2}(2a_1+34d)-\frac{16}{2}(2a_1+15d)=35(a_1+17d)-8(2a_1+15d)$$

$$=19a_1+475d=38+1425=1463$$

راه دوم (راه‌حل ساده‌تر)

$$S_{17-35}=\frac{\text{تعداد جملات}}{2}(\text{جملهٔ آخر}+\text{جملهٔ اول})=\frac{19}{2}(a_{17}+a_{35})=\frac{19}{2}(a_1+16d+a_1+34d)$$

(دقت کنید تعداد جملات برابر است با: $35-17+1$.)

$$=\frac{19}{2}(2a_1+50d)=19(a_1+25d)=19(2+75)=19\times 77=1463$$

ج) ۱۲ جملهٔ سوم از جملهٔ ۲۵ اُم شروع می‌شود و به جملهٔ ۳۶ اُم ختم می‌شود؛ پس:

$$S_{25-36}=\frac{12}{2}(a_{25}+a_{36})=6(a_1+24d+a_1+35d)=6(2a_1+59d)=6(4+177)=6\times 181=1086$$

مثال در یک دنبالهٔ حسابی مجموع سی و پنج جملهٔ اول ۱۰۵ است، جملهٔ هجدهم دنباله را به دست آورید.

حل

$$S_{35}=\frac{35}{2}(a_1+a_{35})=105 \Rightarrow a_1+a_{35}=6$$

اما طبق قانون اندیس‌ها داریم: $a_1+a_{35}=2a_{18}$، پس:

$$2a_{18}=6 \Rightarrow a_{18}=3$$

تست در یک دنبالهٔ حسابی اگر جملهٔ بیست و پنجم برابر ۶ باشد، مجموع جملات یازدهم تا سی و نهم برابر با کدام گزینه است؟

۱) ۱۶۸ ۲) ۱۷۴ ۳) ۸۴ ۴) ۸۷

پاسخ گزینهٔ ۲

$$S_{11-39}=\frac{39-11+1}{2}(a_{11}+a_{39})=\frac{29}{2}(\underbrace{a_{11}+a_{39}}_{\text{جمع اندیس‌ها:}50})=\frac{29}{2}(2a_{25})=29\times a_{25}=29\times 6=174$$

نکته اگر تعداد جملات یک دنبالهٔ حسابی فرد باشد: $S_n=n\times(\text{جملهٔ وسط})$

در این تست تعداد جملات فرد است، (۲۹ جمله) و جملهٔ وسط جملهٔ یازدهم و سی و نهم جملهٔ بیست و پنجم است: $\frac{11+39}{2}=25$

مثال در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع ۳۰ جملهٔ اول با مجموع ۵۰ جملهٔ اول برابر است. مجموع ۸۰ جملهٔ اول برابر چه عددی است؟

حل **راه اول** اطلاعات مسئله را عیناً پیاده‌سازی می‌کنیم:

$$S_{30}=S_{50} \Rightarrow \frac{30}{2}(a_1+a_{30})=\frac{50}{2}(a_1+a_{50}) \Rightarrow 15(2a_1+29d)=25(2a_1+49d) \Rightarrow 3(2a_1+29d)=5(2a_1+49d)$$

$$\Rightarrow 6a_1+87d=10a_1+245d \Rightarrow 4a_1+158d=0 \Rightarrow 2a_1+79d=0$$

$$S_{80}=\frac{80}{2}(a_1+a_{80})=40(a_1+a_1+79d)=40(2a_1+79d)=40(0)=0$$

راه دوم این راه‌حل کمی مفهومی‌تر است:

$$S_{30}=S_{50} \Rightarrow S_{31-50}=0 \Rightarrow \frac{20}{2}(a_{31}+a_{50})=0 \Rightarrow a_{31}+a_{50}=0 \xrightarrow{\text{قانون اندیس‌ها}} a_1+a_{80}=0 \Rightarrow S_{80}=0$$

نکته در یک دنبالهٔ حسابی اگر $S_m=S_n$ باشد، آن‌گاه $S_{m+n}=0$.

مثال **مجموع همهٔ اعداد طبیعی سه‌رقمی مضرب ۷ چه‌قدر می‌شود؟**

حل پرواضح است که اعداد طبیعی مضرب ۷ دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت ۷ می‌سازند: $۷,۱۴,۲۱,۲۸,...$

اما ما به دنبال اعداد سه‌رقمی مضرب ۷ هستیم و طبیعتاً برای محاسبهٔ مجموع آن‌ها به اولین آن‌ها، آخرین آن‌ها و تعداد آن‌ها نیاز داریم.

اگر اعداد مضرب ۷ را با $۷k$ نمایش دهیم، لازم است که: $۱۰۰ \le ۷k \le ۹۹۹ \Rightarrow ۱۴/۲ \le k \le ۱۴۲/۷ \Rightarrow ۱۵ \le k \le ۱۴۲$

یعنی اولین عدد سه‌رقمی مضرب ۷ برابر $۱۰۵ = ۱۵ \times ۷$، آخرین عدد برابر $۹۹۴ = ۱۴۲ \times ۷$ و تعداد آن‌ها برابر $۱۲۸ = ۱ + ۱۵ - ۱۴۲$

می‌باشد. پس مجموع آن‌ها برابر است با: $\frac{۱۲۸}{۲}(۱۰۵ + ۹۹۴) = ۷۰۳۳۶$

تست **در دنبالهٔ حسابی $۵,۸,۱۱,...$ حداقل چند جمله را با هم جمع کنیم تا مجموع از ۵۰۰ بیشتر شود؟**

۱) ۱۷ ۲) ۱۸ ۳) ۱۹ ۴) ۲۰

پاسخ **گزینهٔ۲** مجهول ما در این تست «n» است یعنی n چه‌قدر باشد تا $S_n > ۵۰۰$؟

$$\frac{n}{۲}(a_۱ + a_n) > ۵۰۰ \Rightarrow \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d) > ۵۰۰ \Rightarrow \frac{n}{۲}(۱۰ + ۳(n-۱)) > ۵۰۰ \Rightarrow n(۳n + ۷) > ۱۰۰۰$$

برای حل این نامعادله توصیه می‌کنیم ابتدا آن را به شکل $n(۳n) > ۱۰۰۰$ تقریب بزنید. یعنی از ۷ صرف‌نظر کنید.

پس: $۳n^۲ > ۱۰۰۰ \Rightarrow n^۲ > ۳۳۳/۳ \Rightarrow n \ge ۱۹$

حالا دقت کنید ۱۹ حتماً در نامعادله صدق می‌کند ولی حال که مجدداً $۷n$ را هم وارد جریان بازی کرده‌اید شاید ۱۸ یا حتی ۱۷ کوچک‌ترین اعدادی باشند که در نامعادله صدق می‌کنند، $۳n^۲ + ۷n > ۱۰۰۰$

$$n = ۱۸ : ۳n^۲ + ۷n = ۳(۳۲۴) + ۷(۱۸) = ۹۷۲ + ۱۲۶ = ۱۰۹۸ > ۱۰۰۰$$

$$n = ۱۷ : ۳n^۲ + ۷n = ۳(۲۸۹) + ۷(۱۷) = ۸۶۷ + ۱۱۹ = ۹۸۶$$

پس حداقل n، ۱۸ است.

مثال **حاصل‌جمع اعداد یک جدول ضرب ۷×۵ را به دست آورید.**

حل یک جدول ضرب ۷×۵، جدولی شامل ۵ سطر و ۷ ستون به شکل مقابل است:

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴
۳	۶	۹	۱۲	۱۵	۱۸	۲۱
۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰	۲۴	۲۸
۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵

قصد داریم جمع کل اعداد جدول را به دست آوریم. خب از یک‌جا شروع کنیم: جمع

اعداد سطر اول برابر است با: $\frac{n(n+۱)}{۲} = \frac{۷ \times ۸}{۲} = ۲۸$

اعداد سطر دوم چه رابطه‌ای با سطر اول دارند؟

بله، دو برابر آن‌ها هستند پس مجموع اعداد سطر دوم برابر است با: ۲×۲۸ و به همین ترتیب مجموع اعداد سطر سوم برابر است با: ۳×۲۸

... پس مجموع کل اعداد جدول ضرب برابر است با: $۲۸ + ۲ \times ۲۸ + ۳ \times ۲۸ + \cdots + ۵ \times ۲۸ = ۲۸(۱ + ۲ + \cdots + ۵)$

$$= ۲۸ \times \frac{۵ \times ۶}{۲} = ۲۸ \times ۱۵ = ۴۲۰$$

نکته مجموع اعداد یک جدول ضرب $m \times n$ برابر است با: $\frac{m(m+۱)n(n+۱)}{۴}$

تست **یک دنبالهٔ حسابی ۱۰۰۰ جمله دارد، اگر مجموع ۳ جملهٔ اول آن $۵ - \sqrt{۲}$ و مجموع سه جملهٔ آخر آن $۴ + \sqrt{۲}$ باشد، مجموع کل جملات دنباله کدام است؟**

۱) ۵۰۰ ۲) ۱۵۰۰ ۳) ۳۰۰۰ ۴) $۵۰۰(۱+\sqrt{۲})$

پاسخ **گزینهٔ۲** خب این‌جا فرق یک دانش‌آموز که فقط متکی به فرمول است با دانش‌آموزی که مفاهیم را آموخته است مشخص می‌شود. من اگر جای شما باشم تا ۳۰ دقیقه روی این تست فکر می‌کنم و بعد خواندن کتاب را ادامه می‌دهم. پس فعلاً خداحافظ! سلام دوباره، حل شد؟ امیدوارم. یادتون هست که گفتم برای محاسبهٔ مجموع جملات یک دنبالهٔ حسابی به چه چیزهایی نیاز دارید؟ بله، مجموع جملهٔ اول و آخر و تعداد جملات. در این‌جا که تعداد جملات ۱۰۰۰ است پس می‌ماند مجموع جملات اول و آخر. به شکل زیر دقت کنید:

مجموع سه جملهٔ اول $۵ - \sqrt{۲}$ و مجموع سه جملهٔ آخر $۴ + \sqrt{۲}$ است. مجموع کل این جملات ۹ است. اما چون $a_۱ + a_{۱۰۰۰} = a_۲ + a_{۹۹۹} = a_۳ + a_{۹۹۸}$ $(۳x = ۹)$، متوجه می‌شویم $a_۱ + a_{۱۰۰۰} = \frac{۹}{۳} = ۳$. به همین سادگی!

$$\boxed{a_۱}, \boxed{a_۲}, \boxed{a_۳}, \ldots\ldots, \boxed{a_{۹۹۸}}, \boxed{a_{۹۹۹}}, \boxed{a_{۱۰۰۰}}$$

x x x

$\underbrace{a_۱, a_۲, a_۳}_{۵-\sqrt{۲}}$ $\underbrace{a_{۹۹۸}, a_{۹۹۹}, a_{۱۰۰۰}}_{۴+\sqrt{۲}}$

$$S_{۱۰۰۰} = ۵۰۰(a_۱ + a_{۱۰۰۰}) = ۵۰۰ \times ۳ = ۱۵۰۰$$

مثال مجموع جملات یک دنبالهٔ حسابی از رابطهٔ $S_n = \frac{n(3n+5)}{2}$ به دست می‌آید.

الف) a_1 را به دست آورید.
ب) a_{10} را به دست آورید.
ج) قدرنسبت دنباله برابر چه عددی است؟

حل بیایید این مسئله را بدون استفاده از نکتهٔ به خصوصی حل کنیم ولی در انتها نکات مربوطه را هم خواهم گفت:

الف) S_1 همان a_1 است: $S_1 = \frac{1\times 8}{2} = 4 = a_1$

ب) برای به دست آوردن a_{10} قبول دارید که S_{10} را باید حساب کنیم و S_9 را از آن کم کنیم؟ نه!؟؟

$$a_{10} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_9) = S_{10} - S_9 \Rightarrow a_{10} = \frac{10\times 35}{2} - \frac{9\times 32}{2} = 175 - 144 = 31$$

ج) اما قدرنسبت! $S_1 = a_1 = 4\ ,\ S_2 = a_1 + a_2 = \frac{2(11)}{2} = 11$

پس $a_2 = 7$ و چون $a_1 = 4$، یعنی $d = 7 - 4 = 3$.

حال که مسئله حل شد به نکات زیر دقت کنید و بعد مجدداً مسئله را حل می‌کنیم:

در هر سری حسابی: $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_n = \frac{n^2}{2}d + a_1 n - \frac{n}{2}d = n^2(\frac{d}{2}) + n(a_1 - \frac{d}{2})$

یعنی «هر سری حسابی دنباله‌ای درجه‌دوم برحسب n است و ضریب n^2، $\frac{d}{2}$ است.»

نکته در هر سری حسابی:

1. S_n دنباله‌ای درجه ۲ برحسب n است.
2. $S_1 = a_1$
3. ضریب n^2، $\frac{d}{2}$ است.

حل مجدد سؤال قبل:

الف) $a_1 = S_1 = 4$

ب) $\text{ضریب } n^2 : \frac{3}{2} = \frac{d}{2} \Rightarrow d = 3 \Rightarrow a_{10} = a_1 + 9d = 4 + 27 = 31$

ج) $d = 2(\text{ضریب } n^2) = 3$

تست در ۲۰ جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ می‌باشد. حاصل $a_1 + 2d$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ (گزینهٔ ۴) کافی است اطلاعات تست را پیاده‌سازی کنیم:

$$a_1 + a_3 + \cdots + a_{19} = 135 \Rightarrow \frac{10}{2}(a_1 + a_{19}) = 135 \Rightarrow 5(2a_1 + 18d) = 135 \Rightarrow 2a_1 + 18d = 27 \quad (1)$$

(دقت کنید جملات ردیف فرد دنبالهٔ حسابی، خود دنباله‌ای حسابی می‌باشند ولی با قدرنسبت 2d.)

از سوی دیگر:

$$a_2 + a_4 + \cdots + a_{20} = 150 \Rightarrow \frac{10}{2}(a_2 + a_{20}) = 150 \Rightarrow 5(a_1 + d + a_1 + 19d) = 150 \Rightarrow 2a_1 + 20d = 30 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \Rightarrow d = \frac{3}{2}, a_1 = 0 \Rightarrow a_1 + 2d = 3$$

مسائل تشریحی درس اول

۱- مجموع ۱۰ جملهٔ اول دنبالهٔ $a_n = ۳n - ۲$ را بیابید.

۲- در دنبالهٔ عددی ...,۳۱-,۳۵- مجموع جملات منفی چه‌قدر است؟

۳- مجموع اعداد فرد بخش‌پذیر بر ۷ و کوچک‌تر از ۳۰۰ را محاسبه کنید.

۴- اگر مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ عددی از رابطهٔ $S_n = ۵n^۲ - ۳n$ به دست آید:

الف) قدرنسبت را به دست آورید.

ب) جملهٔ دهم را به دست آورید.

ج) مجموع جملات هفدهم تا سی و یکم دنباله را به دست آورید.

د) جملهٔ عمومی دنباله را به دست آورید.

۵- مقدار عبارت مقابل را بیابید. $A = ۱۰۰^۲ - ۹۹^۲ + ۹۸^۲ - ۹۷^۲ + \cdots + ۲^۲ - ۱^۲$

۶- مجموع ۶ جملهٔ اول یک دنبالهٔ عددی ۸۷ و مجموع ۱۰ جملهٔ اول آن ۲۴۵ است. جملهٔ اول و قدرنسبت این دنباله را بیابید.

۷- مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ عددی $a_n = ۳n - ۱$ برابر ۲۲۲ است. n را بیابید.

۸- مجموع هفده جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی ۳۴۰ است؛ جملهٔ نهم دنباله را به دست آورید.

۹- هر یک از تغییرات زیر چه تأثیری روی مجموع ۱۵ جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی دارد؟

الف) ۲ واحد از جملهٔ اول کم شود.

ب) ۱ واحد به قدرنسبت اضافه شود.

ج) ۴ واحد از جملهٔ اول کم شود و ۲ واحد به قدرنسبت اضافه شود.

۱۰- در یک دنبالهٔ حسابی مجموع جملات ردیف فرد تا جملهٔ نهم برابر ۸ و مجموع جملات ردیف زوج تا جملهٔ دهم برابر ۳ است. قدرنسبت دنباله را بیابید.

پرسش‌های چندگزینه‌ای درس اول

۱- در دنبالهٔ حسابی ...,۳,۷,۱۱ مجموع جملات با شروع از جملهٔ هشتم و ختم به جملهٔ شانزدهم کدام است؟

۱) ۳۷۶ ۲) ۲۹۷ ۳) ۴۶۸ ۴) ۴۲۳

۲- اگر مجموع جملات یک دنبالهٔ حسابی $S_n = (a-۱)n^۳ + an^۲ + n + b - ۲$ باشد و قدرنسبت دنباله برابر d باشد، $a + b + d$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۳- مجموع همهٔ اعداد طبیعی سه‌رقمی که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر ۷ مساوی ۱ باشد، کدام است؟

۱) ۲۴×۱۱۰۱ ۲) ۴۸×۱۱۰۱ ۳) ۳۲×۱۱۰۱ ۴) ۶۴×۱۱۰۱

۴- در یک دنبالهٔ حسابی جملهٔ هفتم برابر ۶ می‌باشد. مجموع سیزده جملهٔ اول دنباله برابر چه عددی است؟

۱) ۱۵۶ ۲) ۷۸ ۳) ۳۹ ۴) قابل محاسبه نمی‌باشد.

۵- در یک دنبالهٔ حسابی اگر مجموع جملات هفدهم تا سی و پنجم را به ما بدهند، مجموع چند جملهٔ اول دنباله قابل محاسبه خواهد بود؟

۱) ۵۳ ۲) ۵۲ ۳) ۵۱ ۴) ۵۰

۶- در ۳۰ جملهٔ اول یک دنبالهٔ عددی، مجموع جملات ردیف فرد ۱۰۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۳۵ است. جملهٔ سوم این دنباله کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۱ ۳) ۱۷- ۴) ۲۵-

۷- مجموع ۵ جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی برابر با ۱۰ و مجموع ۵ جملهٔ آخر آن ۱۴۵ است. اگر مجموع همهٔ جملات دنباله ۲۱۷ باشد، تعداد جملات کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۴ ۳) ۱۳ ۴) ۱۵

۸- مجموع جملات هفتم، یازدهم و پانزدهم یک دنبالهٔ حسابی ۵۴ می‌باشد. مجموع ۲۱ جملهٔ اول دنباله کدام است؟

۱) ۳۳۶ ۲) ۳۵۷ ۳) ۳۷۸ ۴) ۳۹۹

۹- در یک دنبالهٔ حسابی مجموع بیست جملهٔ اول با مجموع سی و یک جملهٔ اول برابر است. جملهٔ چندم این دنباله برابر صفر است؟

۱) ۵۰ اُم ۲) ۴۹ اُم ۳) ۲۵ اُم ۴) ۲۶ اُم

۱۰- در دو دنبالهٔ حسابی روبه‌رو مجموع جملات مشترک کم‌تر از ۳۰۰ کدام است؟ $\begin{cases} ۳,۷,۱۱,\ldots \\ ۲,۵,۸,\ldots \end{cases}$

۱) ۳۳۷۵ ۲) ۳۵۷۳ ۳) ۳۸۷۵ ۴) ۳۵۷۸