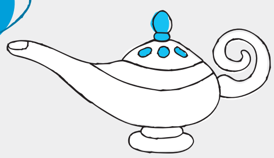

مجموعه،
الگو و
دنباله
فصل ۱

درس اول
مجموعه‌های متناهی و نامتناهی



یادآوری مفاهیم اولیه در مجموعه

- سال قبل، برای اولین بار با مفهوم مجموعه آشنا شدیم! فهمیدیم که در ریاضی، از مجموعه برای بیـان و نمـایش دسـته‌ای از اشـیای مـشخص و متمایز استفاده می‌کنیم. روی دو واژهٔ «مشخص» و «متمایز» زوم کنید! مثلاً عبارتِ «پنج عدد فردِ متوالی»، یک مجموعـه را نـشان نمـی‌دهـد؛ چـون معلوم نیست کدام پنج عدد فرد متوالی مدنظر است؛ در واقع عضوهای مجموعه مشخص نیستند. اگر بگوییم «اعداد طبیعی فرد و یک‌رقمی»، آیا یک مجموعه را نشان داده‌ایم؟ بله، چون حالا همهٔ عضوهای مجموعه مشخص شدند. اگر این مجموعه را A بنـامیم، بـرای نـشان‌دادن آن، عـضوهایش را بین دو آکولاد می‌نویسیم. $A=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$

هر کدام از پنج عدد بالا، یک عضو مجموعه نامیده می‌شود. با نماد «عضوبودن» قبلاً آشنا شده‌ایم: $۱\in A \;,\; ۳\in A \;,\; ۵\in A \;,\; ۷\in A \;,\; ۹\in A$

حالا چه‌طوری نشون بدیم مثلاً ۲، عضو مجموعهٔ A نیست؟! این‌طوری: $۲\notin A$

سال قبل یاد گرفتیم که در مجموعه‌ها عضوهای تکراری را نمی‌نویسیم. مثلاً به جای $\{۲,۲,۱۱,۱۱,۱۱\}$ می‌نویسیم $\{۲,۱۱\}$!

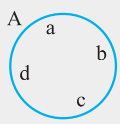
راستی، این را هم یاد گرفتیم که در مجموعه‌ها ترتیب عضوها مهم نیست! مثلاً $\{۱۱,۲\}$ با $\{۲,۱۱\}$ فرقی ندارد.

- حالا یک سؤال! مجموعهٔ عددهای منفی و بزرگ‌تر از ۱ را نشان دهید. خب چنین عددهایی نـداریم کـه! سـال قبـل یـاد گـرفتیم وقتـی مجموعه‌ای عضو ندارد، آن را «تهی» بنامیم و با $\varnothing$ یا $\{\,\}$ نشان دهیم.

به نظر شما! $\{\varnothing\}$ و $\{۰\}$ همون مجموعهٔ تهی‌اند؟

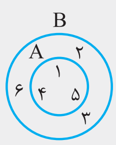
نه‌خیر! هر کدام از این مجموعه‌ها یک عضو دارند؛ عضو مجموعهٔ اول، مجموعهٔ $\varnothing$ و عضو مجموعهٔ دوم، عدد صفر است!

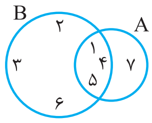
- سال قبل با نمودار «وِن» هم آشنا شدیم. وِن اسم یک ریاضـی‌دان اسـت! مـثلاً گفتـیم مجموعـهٔ $A=\{a,b,c,d\}$ را می‌توانیم به شکل روبه‌رو نشان دهیم:



- کسی یادش هست زیرمجموعه چه بود؟ اگر هر عضو از مجموعه‌ای مانند A، عضو مجموعهٔ دیگری مانـند B نیـز باشـد، می‌گوییم «A زیرمجموعهٔ B است» و آن را به صورت $A\subseteq B$ نشان می‌دهیم.

مثلاً $A=\{۱,۴,۵\}$ زیرمجموعهٔ $B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ است.





اما $A=\{۱,۴,۵,۷\}$ زیرمجموعهٔ همان B نیست! چون $۷\in A$ اما $۷\notin B$.

نکته $\varnothing$ زیرمجموعهٔ تمام مجموعه‌هاست! یعنی برای هر مجموعهٔ دلخواه A، $\varnothing\subseteq A$.

- حالا می‌خواهیم همهٔ زیرمجموعه‌های $A=\{۱,۴,۵\}$ را بنویسیم:

برای نوشتن زیرمجموعه‌ها، از $\varnothing$ (زیرمجموعهٔ صفر عضوی) شروع می‌کنیم، سپس زیرمجموعه‌های یک‌عضوی را می‌نویسیم، بعد دوعضوی‌ها و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا خود A! چون هر مجموعه، زیرمجموعهٔ خودش نیز هست!

یک‌عضوی : $\{۱\}$ $\{۴\}$ $\{۵\}$ صفرعضوی : $\varnothing$

سه‌عضوی : $\{۱,۴,۵\}$ دوعضوی : $\{۱,۴\}$ $\{۱,۵\}$ $\{۴,۵\}$

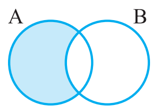
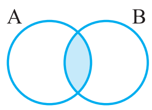
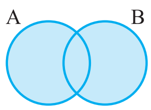
تمام شد! هر یک از مجموعه‌های بالا، یک زیرمجموعهٔ A است.

نکته یک مجموعهٔ nعضوی، ۲^n زیرمجموعه دارد.

- یک چیز دیگر که سال قبل یاد گرفتیم، این بود که اگر دو مجموعهٔ A و B به گونه‌ای باشند که هم $A\subseteq B$ و هم $B\subseteq A$، آن‌گاه دو مجموعهٔ A و B عضوهای یکسان خواهند داشت. در این صورت می‌گوییم این دو مجموعه با هم برابرند و می‌نویسیم $A=B$.

تذکر *نماد $\subset$ با نماد $\subseteq$ یک نمه فرق دارد!* حالت $A\subseteq B$ حالت $A=B$ را هم در بر می‌گیرد اما $A\subset B$ حالت $A=B$ را شامل نمی‌شود.
مثلاً $A\subseteq A$ یک حرف درست است اما $A\subset A$ یک حرف غلط!

یادآوری اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها

$A-B$	$A\cap B$	$A\cup B$
		
تفاضل A و B (A منهای B) شامل عضوهایی از A است که در B نباشند. برای تشکیل $A-B$ باید A را مبنا قرار دهیم و عضوهای مشترک A و B را از A حذف کنیم.	اشتراک دو مجموعهٔ A و B شامل عضوهایی است که هم عضو A باشند و هم عضو B.	اجتماع دو مجموعهٔ A و B شامل عضوهایی است که حداقل در یکی از دو مجموعهٔ A یا B باشد. یعنی یا در A باشد یا در B یا در هر دو.

مثلاً اگر $A=\{۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$ و $B=\{۳,۵,۷,۹,۱۱\}$، آن‌گاه:

$A\cap B=\{۳,۵,۷\}$ $A\cup B=\{۲,۳,۴,۵,۶,۷,۹,۱۱\}$

$B-A=\{\cancel{۳},\cancel{۵},\cancel{۷},۹,۱۱\}=\{۹,۱۱\}$ $A-B=\{۲,\cancel{۳},۴,\cancel{۵},۶,\cancel{۷}\}=\{۲,۴,۶\}$

برای $A-B$، A را نوشتیم و عضوهای $A\cap B$ را از آن خط زدیم. برای $B-A$، B را نوشتیم و عضوهای $A\cap B$ را از آن خط زدیم.

یادآوری مجموعه‌های اعداد مهم!

- این‌ها را قبلاً دیده‌ایم:

$\mathbb{W}=\{۰,۱,۲,۳,\ldots\}=\mathbb{N}\cup\{۰\}$ مجموعهٔ اعداد حسابی — $\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,۴,\ldots\}$ مجموعهٔ اعداد طبیعی

$\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n}\mid m,n\in\mathbb{Z}\,,\,n\neq ۰\}$ مجموعهٔ اعداد گویا — $\mathbb{Z}=\{\ldots,-۲,-۱,۰,۱,۲,\ldots\}=\mathbb{W}\cup\{-n\mid n\in\mathbb{N}\}$ مجموعهٔ اعداد صحیح

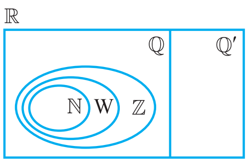
$\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$ مجموعهٔ اعداد حقیقی — $\mathbb{Q}'=\mathbb{Q}^c=\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ مجموعهٔ اعداد گنگ

در مورد شش مجموعهٔ بالا، می‌توانیم بگوییم:

$\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$

$\mathbb{Q}'\subseteq\mathbb{R}$

$\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}'=\varnothing$



توجه سه مجموعهٔ آخر (گویا، گنگ، حقیقی) را نمی‌توانیم با نوشتن عضوهایشان مشخص کنیم؛ زیرا بین هر دو عضو از آن‌ها بی‌شمار عضو دیگر وجود دارد. در واقع:

بین هر دو عدد گویا، بی‌شمار عدد گویای دیگر وجود دارد.

بین هر دو عدد گنگ، بی‌شمار عدد گنگ دیگر وجود دارد.

بین هر دو عدد حقیقی، بی‌شمار عدد حقیقی وجود دارد.

توضیح بیشتر در مورد اعداد گویا و گنگ (مطالعهٔ آزاد)

● اگرچه عددهای غیرحقیقی هم داریم، ولی همهٔ عددهایی که ما می‌شناسیم حقیقی‌اند. هر عدد حقیقی را می‌توان به شکل اعشاری $(\pm a_1 / a_2 a_3 a_4 \dots)$ نوشت. مثل $-۱۳/۲۵۱$، مثل ۲ که به شکل $۲/۰$ نوشته می‌شود، مثل $\frac{۱}{۳}$ که اگر با ماشین‌حساب ۱ را بر ۳ تقسیم کنیم، $۱/۳۳۳۳۰۰۰$ را نشان می‌دهد، مثل عدد π که تقریباً $۳/۱۴$ است.

● کلاً برای تمام اعداد حقیقی در نمایش اعشاری، سه حالت ممکن است اتفاق بیفتد:

(۱) بعد از ممیز، تعدادی متناهی (محدود) رقم وجود داشته باشد. مثل $-۱۳/۲۵۱$، $۱۱۲/۳۶۸۲۴$، ۲ که مساوی $۲/۰$ است و ... . این عددها را می‌توان به شکل کسری با صورت و مخرجِ صحیح نوشت؛ مثلاً:

$$-۱۳/۲۵۱=\frac{-۱۳۲۵۱}{۱۰۰۰} \quad , \quad ۱۱۲/۳۶۸۲۴=\frac{۱۱۲۳۶۸۲۴}{۱۰۰۰۰۰} \quad , \quad ۲=\frac{۲}{۱}$$

پس این اعداد گویا هستند؛ چون هر عدد که بتوان آن را به شکل کسری با صورت و مخرجِ صحیح نوشت، گویاست.

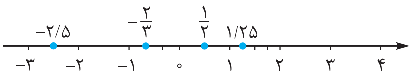
(۲) بعد از ممیز، بی‌شمار رقم وجود داشته باشد اما از یک‌جا به بعد یک یا چند رقم در حال تکرار باشند. مثل $۱/۳۳۳۳\dots$ یا $-۱۲/۵۶۵۶۵۶\dots$ یا $۳/۹۱۸۸۸۸\dots$ یا $۰/۱۲۳۶۷۹۶۷۹۶۷۹\dots$. جالب است بدانید که این عددها هم گویا هستند، چون همهٔ آن‌ها را می‌توان به شکل کسری با صورت و مخرجِ صحیح نوشت. مثلاً $۰/۳۳۳۳\dots$ مساوی $\frac{۱}{۳}$ است!

(۳) بعد از ممیز، بی‌شمار رقم وجود داشته باشد اما بدون هیچ نظمی و کاملاً قاطی پاطی! مثل $\sqrt{۲}=۱/۴۱۴۲۱۳۵۶\dots$، $\sqrt{۳}=۱/۷۳۲۰۵۰۸۰\dots$، $\pi=۳/۱۴۱۵۹۲۶۵\dots$. این عددها را دیگر نمی‌شود به شکل کسری، با صورت و مخرجِ صحیح نوشت.

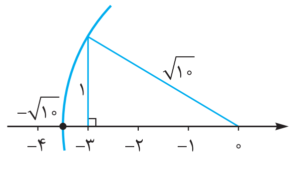
یادآوری محور اعداد حقیقی

اعداد گنگ و گویا را که بریزیم روی هم، مجموعه اعداد حقیقی به دست می‌آید. اگر همهٔ این عددها را به ترتیب از کوچک به بزرگ بریزیم روی یک محور، کل محور پوشانده می‌شود. این‌طوری محور اعداد حقیقی به دست می‌آید. مبدأ این محور، محل عدد صفر است؛ اعداد سمت راستِ مبدأ، مثبت و اعداد سمت چپِ مبدأ، منفی هستند.

چند نمونه ببینید:

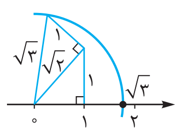


می‌دونید اعداد گنگ رو چه جوری باید روی محور نشون بدیم؟ این را هم سال‌های قبل یاد گرفته‌ایم و دیگر توضیح مبسوط نمی‌دهم! *فقط سه نمونه ملاحظه بفرمایید همراه با زیرنویس فارسی!*



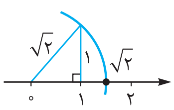
نمایش $-\sqrt{۱۰}$

طول یک ضلع مثلث قائم‌الزاویه ۳ و طول ضلع دیگر آن ۱ است. پس طبق فیثاغورس، وتر آن می‌شود $\sqrt{۱۰}$. به مرکز ۰ و شعاعِ این وتر، در سمت چپ مبدأ، کمان زده‌ایم!



نمایش $\sqrt{۳}$

باز هم فیثاغورس تأیید می‌کند که وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ دوم $\sqrt{۳}$ است. به مرکز ۰ و شعاعِ این وتر، کمان زده‌ایم!

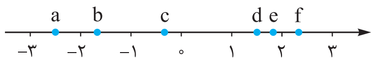


نمایش $\sqrt{۲}$

طبق رابطهٔ فیثاغورس، وتر مثلث قائم‌الزاویه می‌شود $\sqrt{۲}$. به مرکز ۰ و شعاعِ همین وتر، کمان زده‌ایم!

مثال **هر یک از نقطه‌های مشخص‌شده در شکل، کدام‌یک از اعداد زیر را نشان می‌دهد؟**

$$\frac{\pi}{2}\ ,\ 1-\sqrt{2}\ ,\ \frac{7}{3}\ ,\ -2/5\ ,\ \frac{3}{2}\ ,\ -\sqrt{3}$$



حل چه سؤال راحتی! $\pi \simeq 3/14$ پس $\frac{\pi}{2}$ تقریباً $1/5$ و البته کمی بزرگ‌تر از آن است. اتفاقاً $\frac{3}{2}=1/5$ را هم در بین عددها می‌بینیم.

با این حساب، باید بگوییم: $e=\frac{\pi}{2}$ و $d=\frac{3}{2}$. $\sqrt{2}\simeq 1/4$، پس $1-\sqrt{2}\simeq -0/4$؛ بنابراین $c=1-\sqrt{2}$. هم‌چنین $2\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{6}{3}=\frac{7}{3}$، پس $f=\frac{7}{3}$. تکلیف $-2/5$ هم که معلوم است: $a=-2/5$. فقط $-\sqrt{3}$ ماند که تقریباً $-1/7$ است؛ یعنی $b=-\sqrt{3}$.

مثال **هر یک از مجموعه‌های ستون چپ را به معادل آن در ستون راست وصل کنید. یک مجموعه در ستون راست اضافی است!**

$\{-n \mid n\in \mathbb{W}\}$	$\mathbb{W}-\mathbb{N}$
$\{\dots,-3,-2,-1\}$	$\mathbb{Z}-\mathbb{W}$
$\{0\}$	$\mathbb{Z}-(\mathbb{W}-\mathbb{N})$
$\{\pm n \mid n\in \mathbb{N}\}$	

حل خب می‌نویسیم:

$$\mathbb{W}-\mathbb{N}=\{0,\cancel{1},\cancel{2},\cancel{3},\dots\}-\{1,2,3,\dots\}=\{0\}$$

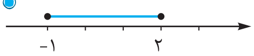
$$\mathbb{Z}-\mathbb{W}=\{\dots,-3,-2,-1,\cancel{0},\cancel{1},\cancel{2},\dots\}-\{0,1,2,\dots\}=\{\dots,-3,-2,-1\}$$

$$\mathbb{Z}-(\mathbb{W}-\mathbb{N})=\mathbb{Z}-\{0\}=\{\dots,-2,-1,\cancel{0},1,2,\dots\}=\{\pm n \mid n\in\mathbb{N}\}$$

و حالا وارد کلاس دهم می‌شویم!

بازه‌ها

● نمایش مجموعهٔ $A=\{x\in\mathbb{R} \mid -1\le x\le 2\}$ را روی محور اعداد ببینید:

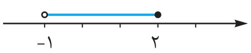


A چگونه مجموعه‌ای است؟ خب شامل تمام اعداد حقیقی بین -1 و 2 یا مساوی با آن‌هاست. نمایش A روی محور چه شکلی شد؟ شکل پاره‌خط شد؛ یعنی یک تکه از محور! در حل مسائل مختلف، به این مدل مجموعه‌ها زیاد برمی‌خوریم. به همین خاطر، برای آن‌ها یک اسم و نماد جدید معرفی می‌کنیم. از این به بعد، مجموعهٔ A را یک بازه می‌نامیم و آن را با $[-1,2]$ نشان می‌دهیم.

نکته کلاً زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ را که شامل تمام اعداد حقیقیِ بین دو عددِ مشخص (یا مساوی آن دو عدد) هستند، «بازه» یا «فاصله» می‌نامیم.

نمایش بازه‌ها روی محور، به شکل قسمتی (تکه‌ای) از محور است!

● در مثال بالا، اگر عضو -1 را از A حذف کنیم، داستان چه‌طوری می‌شود؟ مجموعهٔ $B=\{x\in\mathbb{R} \mid -1< x\le 2\}$ به دست می‌آید. این بار چون -1 عضو مجموعه نیست، در نمایش روی محور، بالای آن توخالی می‌شود:



B هم یک بازه است و آن را با $(-1,2]$ نشان می‌دهیم.

یعنی چون -1 عضو مجموعه نبود، به جای کروشه] از پرانتز) استفاده کردیم.

اگر به جای -1، عضو 2 را از A حذف می‌کردیم، چه‌طوری می‌شد؟

$C=\{x\in\mathbb{R} \mid -1\le x< 2\}$

$C=[-1,2)$

اگر هر دو عضو -1 و 2 را از A حذف می‌کردیم، چه‌طور؟!

$D=\{x\in\mathbb{R} \mid -1< x< 2\}$

$D=(-1,2)$

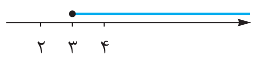
این بار در نمایش روی محور، هر دو دایره توخالی شدند و در نماد جدید هم برای هر دو طرف پرانتز گذاشتیم.

A یک بازهٔ بسته، B و C بازه‌های نیم‌باز و D یک بازهٔ باز نامیده می‌شود!

نکته کلاً اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند به طوری که $a<b$، چهار نوع بازهٔ زیر را داریم:

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش روی محور
باز	(a,b)	$\{x\in\mathbb{R}\,\vert\,a<x<b\}$	a b
بسته	$[a,b]$	$\{x\in\mathbb{R}\,\vert\,a\le x\le b\}$	a b
نیم‌باز (از چپ)	$(a,b]$	$\{x\in\mathbb{R}\,\vert\,a<x\le b\}$	a b
نیم‌باز (از راست)	$[a,b)$	$\{x\in\mathbb{R}\,\vert\,a\le x<b\}$	a b

- حالا نمایش مجموعهٔ $\{x\in\mathbb{R}\,|\,۳\le x\}$ را روی محور ببینید:



خب نمایش این مجموعه هم به شکل تکه‌ای از محور است و یک بازه محسوب می‌شود. اما بین دو عدد محصور نشده و از سمت راست آزاد است! این مجموعه را با $[۳,+\infty)$ نشان می‌دهیم. $+\infty$ را مثبتِ بی‌نهایت بخوانید.

نمایش مجموعهٔ $\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<۳\}$ را هم ببینید:

این هم یک بازه است که از سمت چپ آزاد است! این مجموعه را با $(-\infty,۳)$ نشان می‌دهیم. $-\infty$ را منفیِ بی‌نهایت بخوانید.

توجه $+\infty$ و $-\infty$ عدد نیستند و صرفاً نماد هستند! به همین خاطر، همیشه در طرف آن‌ها پرانتز می‌گذاریم. مثلاً $[۳,+\infty]$ و $[-\infty,۳)$ نداریم! $+\infty$ نمایندهٔ اعداد مثبت و خیلی‌بزرگ است و $-\infty$ نمایندهٔ اعداد منفی و خیلی‌کوچک!

نکته کلاً اگر a یک عدد حقیقی دلخواه باشد، بازه‌های زیر را هم داریم:

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش روی محور
باز	$(a,+\infty)$	$\{x\in\mathbb{R}\,\vert\,a<x\}$	a
نیم‌باز	$[a,+\infty)$	$\{x\in\mathbb{R}\,\vert\,a\le x\}$	a
باز	$(-\infty,a)$	$\{x\in\mathbb{R}\,\vert\,x<a\}$	a
نیم‌باز	$(-\infty,a]$	$\{x\in\mathbb{R}\,\vert\,x\le a\}$	a
باز	$(-\infty,+\infty)$	$\mathbb{R}$	

حالا یه سؤال! چرا مثلاً در مورد بازهٔ $(۲,+\infty)$ می‌نویسیم $x>۲$ و نمی‌نویسیم $۲<x<+\infty$؟ یک بار دیگر تکرار می‌کنم: $+\infty$ و $-\infty$ عدد نیستند؛ با آن‌ها مثل اعداد برخورد نکنید! $x=\pm\infty$ و $x\le+\infty$ و $-\infty<x$ و از این‌جور چیزها نداریم!

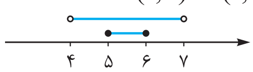
مثال **درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.**

الف) $\sqrt{۳}\in(\frac{۳}{۲},۲)$ ب) $(۱,۴]\subset(۱,۴)$ ج) $[۵,۶]\subset(۴,۷)$ د) $\varnothing\subset(-\infty,۵]$

حل الف درست است. $\sqrt{۳}\simeq۱/۷$، پس می‌توانیم بگوییم $\frac{۳}{۲}<\sqrt{۳}<۲$. یعنی $\sqrt{۳}\in(\frac{۳}{۲},۲)$.

ب درست نیست. $۴\in(۱,۴]$ اما $۴\notin(۱,۴)$. پس نمی‌توانیم بگوییم $(۱,۴]\subset(۱,۴)$. شکل صحیح عبارت، $(۱,۴)\subset(۱,۴]$ است.

ج درست است. بازهٔ $(۴,۷)$ تمام عضوهای بازهٔ $[۵,۶]$ را دارد.

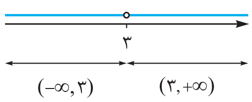


د درست است. $(-\infty,۵]$ یک مجموعه است و $\varnothing$ زیرمجموعهٔ همهٔ مجموعه‌هاست.

مثال **مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{۳\}$ را به شکل اجتماع دو بازه بنویسید.**

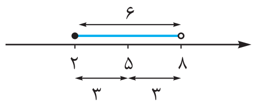
حل نمایش مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{۳\}$ به شکل زیر است که می‌بینیم شامل دو قسمت است: xهایی که $x<۳$ و xهایی که $x>۳$. یعنی:

$$\mathbb{R}-\{۳\}=(-\infty,۳)\cup(۳,+\infty)$$



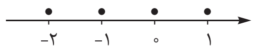
تذکر نماد (a,b) در ریاضی، می‌تواند مختصات یک نقطه را نشان دهد یا یک بازهٔ باز را یا چیزهای دیگری را! این بستگی به مسئله دارد.

نکته در هر یک از بازه‌های (a,b)، $[a,b)$، $(a,b]$ و $[a,b]$، تفاضل نقاط انتهایی بازه را طول بازه می‌نامیم: یعنی $b-a$. مثلاً طول بازهٔ $(۲,۸]$ برابر است با $۸-۲=۶$. میانگین نقاط انتهایی هم نقطهٔ وسط بازه را می‌دهد: یعنی $\frac{a+b}{۲}$. مثلاً وسط بازهٔ $[۲,۸)$، نقطهٔ $x=\frac{۲+۸}{۲}=۵$ است.

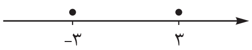


● خب به زیباییِ هرچه تمام‌تر یاد گرفتیم که بازه نوعی مجموعه است اما یک مجموعه ممکن است بازه نباشد. مثلاً مجموعه‌های زیر، بازه نیستند. چون نمایش آن‌ها روی محور، یک‌تکه نیست!

$\{x\in\mathbb{Z}\,|\,-۲\le x\le ۱\}$



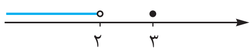
$\{-۳,۳\}$



سؤال آیا مجموعهٔ $\{x\in\mathbb{Q}\,|\,-۲\le x\le ۱\}$ بازه است؟ نع! بین اعداد گویا یک‌عالمه عدد گنگ وجود دارد. به همین خاطر نمایش این مجموعه روی محور اعداد، یک تکه از محور نیست.

نکته در بین مجموعه اعداد معروف $(\mathbb{N},\mathbb{W},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{Q}',\mathbb{R})$ فقط زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ می‌تواند به شکل بازه درآید.

سؤال آیا مجموعهٔ $(-\infty,۲)\cup\{۳\}$ بازه است؟ نع! این مجموعه، اجتماع یک بازه با یک مجموعهٔ تک‌عضوی است.



ریزه‌کاری اگر $a=b$ باشد، حاصل بازه‌های $[a,b]$، (a,b)، $[a,b)$ و $(a,b]$ چه می‌شود؟

اولی می‌شود $\{a\}$ (یا $\{b\}$) و بقیه می‌شوند $\varnothing$.

$$(a,a)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,\underbrace{a<x<a}_{\text{نمی‌شه!}}\}=\varnothing \qquad [a,a]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,\underbrace{a\le x\le a}_{x=a\ \text{یعنی}}\}=\{a\}$$

$$(a,a]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,\underbrace{a<x\le a}_{\text{نمی‌شه!}}\}=\varnothing \qquad [a,a)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,\underbrace{a\le x<a}_{\text{نمی‌شه!}}\}=\varnothing$$

ریزه‌کاری اگر $a>b$ باشد، حاصل بازه‌های $[a,b]$، (a,b)، $[a,b)$ و $(a,b]$ چه می‌شود؟

همه می‌شوند $\varnothing$! مثلاً:

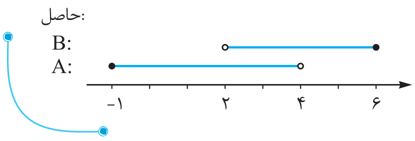
$$[۳,۲]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,\underbrace{۳\le x\le ۲}_{\text{جان؟!}}\}=\varnothing$$

اجتماع، اشتراک و تفاضل بازه‌ها

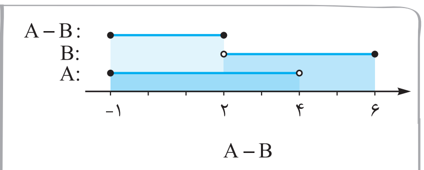
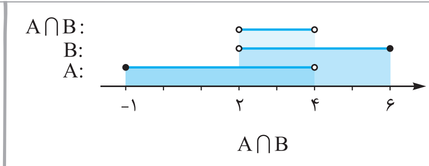
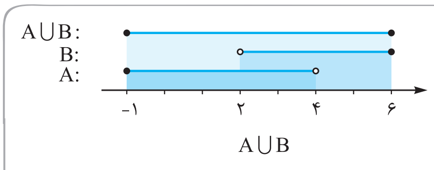
● هر کاری روی مجموعه‌ها بتوان انجام داد، روی بازه‌ها هم می‌توان انجام داد. بعضی وقت‌ها محاسبهٔ اجتماع، اشتراک یا تفاضل، سخت و گیج‌کننده می‌شود. پس برای آن‌که گیج نشویم، بهتر است نمودار بازه‌ها را رسم کنیم.

مثال **اگر $A=[-۱,۴)$ و $B=(۲,۶]$ باشد، $A\cup B$، $A\cap B$ و $A-B$ را بیابید.**

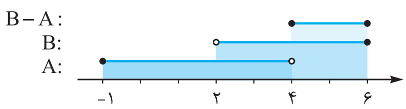
حل روی یک محور، A را در یک سطر و B را در سطر بالای آن رسم می‌کنیم. سطر آخر را هم می‌گذاریم برای عبارتی که می‌خواهیم حسابش کنیم!



حالا با توجه به تعریف اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها، هر یک از این عبارت‌ها را به دست می‌آوریم:

 $A-B$	 $A\cap B$	 $A\cup B$
شامل xهایی است که در A باشد ولی در B نباشد. $A-B=[-۱,۲]$	شامل xهایی است که هم در A باشد هم در B. $A\cap B=(۲,۴)$	شامل xهایی است که یا در A باشد یا در B یا در هر دو $A\cup B=[-۱,۶]$

در مثال قبل، حاصل $B-A$ چیست؟

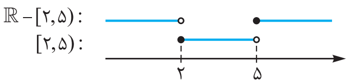


$B-A=[۴,۶]$

تذکر بعضی وقت‌ها که می‌خواهیم اجتماع، اشتراک یا تفاضل دو مجموعه را حساب کنیم، می‌بینیم که خود آن دو مجموعه به شکل اجتماع یا تفاضل دو مجموعه یا بازهٔ دیگرند! این‌جور وقت‌ها هم باید در کمال خونسردی، همان روال قبلی را پیش بگیریم؛ یعنی همه‌چیز را روی یک محور نشان دهیم.

مثال **مجموعهٔ $\mathbb{R}-[۲,۵)$ را به شکل اجتماع دو بازه بنویسید.**

حل نمایش $\mathbb{R}$ کل محور است؛ پس باید از کل محور، بازهٔ $[۲,۵)$ را حذف کنیم. شکل زیر می‌گوید:

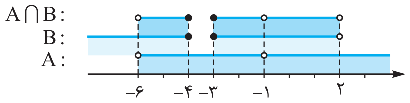


$$\mathbb{R}-[۲,۵)=(-\infty,۲)\cup[۵,+\infty)$$

چه جالب! جای بسته و باز عوض شد.

مثال **اگر $A=(-۶,+\infty)-\{-۱\}$ و $B=(-\infty,-۴]\cup[-۳,۲)$ باشد، $A\cap B$ را بیابید.**

حل همه‌چیز روی یک محور! برای نمایش A، کل بازهٔ $(-۶,+\infty)$ را نشان می‌دهیم، بعد -۱ را سوراخ می‌کنیم! خلاصه این‌که:



$$A\cap B=(-۶,-۴]\cup[-۳,-۱)\cup(-۱,۲)$$

حواسمان به باز و بسته‌ها باشد! اشتراک توخالی و توپر (باز و بسته) می‌شود توخالی (باز).

تست **اشتراک بازه‌هایی به صورت $A=(x,۳x+۱)$ که xها از مجموعهٔ $B=\{۱,۲,۳\}$ هستند یک بازه را تشکیل می‌دهند. مرکز این بازه کدام است؟**

۱) ۳ ۲) ۳/۵ ۳) ۵ ۴) ۵/۵

پاسخ گزینهٔ ۲

اگر $x=۱$ باشد: $A_۱=(۱,۴)$

اگر $x=۲$ باشد: $A_۲=(۲,۷)$

اگر $x=۳$ باشد: $A_۳=(۳,۱۰)$

در این صورت باید اشتراک سه بازهٔ بالا را به دست آوریم: $(۱,۴)\cap(۲,۷)\cap(۳,۱۰)=(۳,۴)$

مرکز این بازه برابر $\frac{۳+۴}{۲}=۳/۵$ است.

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

● سه مجموعهٔ زیر را در نظر بگیرید و بگویید هر کدام چند عضو دارد؟

A: مجموعه اعداد طبیعی کم‌تر از ۱۰۰۰ B: مجموعهٔ درخت‌های جنگل‌های آمازون C: مجموعهٔ اعداد گویای بین صفر و ۱

A چند عضو دارد؟ $A=\{۱,۲,۳,...,۹۹۹\}$ پس ۹۹۹ عضو دارد. تعداد عضوهای A برابر با یک عدد حسابی است!

B چند عضو دارد؟ خب برویم در برزیل و پرو و اکوادور و ... که هر کدام قسمتی از جنگل‌های آمازون را در خود دارند و تعداد درخت‌ها را بشمریم! البته یک بار عده‌ای این کار را کردند که حدود ۱۰ سال طول کشید و فهمیدند جنگل‌های آمازون چیزی در حدود ۳۹۰۰۰۰۰۰۰۰۰ اصله درخت دارند! پس تعداد عضوهای B هم برابر با یک عدد حسابی است. حتی اگر نمی‌رفتیم درخت‌ها را بشمریم، می‌دانستیم که درخت‌ها هر چه‌قدر هم زیاد باشند، بالاخره تمام‌شدنی‌اند و تعداد آن‌ها برابر با یک عدد (حسابی) می‌شود.

C چند عضو دارد؟ می‌دانیم که بین هر دو عدد گویا حداقل یک عدد گویای دیگر وجود دارد. پس هر چه‌قدر هم عدد گویا مثال بزنیم، تمام‌شدنی نیست! یعنی نمی‌توانیم بگوییم تعداد اعداد گویای بین ۰ و ۱ برابر با یک عدد (حسابی) می‌شود.

A و B مجموعه‌های متناهی هستند ولی C مجموعه‌ای نامتناهی است.

نکته مجموعه‌ای را که تعداد اعضای آن یک عدد حسابی باشد، مجموعهٔ متناهی (باپایان) می‌نامیم. در غیر این صورت آن را مجموعهٔ نامتناهی (بی‌پایان) می‌نامیم.

توجه فقط حواسمان باشد! مجموعهٔ B را در مثال بالا دیدید؟ بعضی مجموعه‌ها مثل B هستند که خیلی عضو دارند ولی بالاخره عضوهایشان تمام می‌شود و می‌توانیم بگوییم این تعداد عضو دارند؛ این‌ها متناهی‌اند. مجموعهٔ تمام مورچه‌های روی زمین، مجموعهٔ تمام موهای روی سر یک آدم، مجموعهٔ تمام سلول‌های بدن یک انسان و ... خیلی عضو دارند، ولی متناهی‌اند.

نکته مجموعهٔ نامتناهی مثل C، آن‌هایی هستند که اگر تا قیامت هم عضوهایشان را بشمریم، تمام نمی‌شود! مجموعه‌های $\mathbb{N}$، $\mathbb{W}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{Q}'$ و $\mathbb{R}$ این‌گونه‌اند. بازه‌ها هم مجموعه‌هایی نامتناهی‌اند، مثل $(-۱,۲)$، $[\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲}]$ و ... .

می‌دونید چرا می‌گیم تعداد عضوهای هر مجموعهٔ متناهی، عددی حسابیه و نمی‌گیم عددی طبیعیه؟ چون مجموعهٔ $\varnothing$ هم که صفر عضو دارد، متناهی محسوب می‌شود!

مثال مشخص کنید هر یک از مجموعه‌های زیر متناهی است یا نامتناهی.

الف) $\{x \in \mathbb{Z} \mid ۰ < x < ۱\}$

ب) مجموعهٔ مضرب‌های طبیعی ۱۱

ج) مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های طبیعی $۱۰^۶$

د) مجموعهٔ زیرمجموعه‌های $\mathbb{N}$

حل الف متناهی است. بین صفر و ۱ هیچ عدد صحیحی نداریم، پس این مجموعه $\varnothing$ است. $\varnothing$ متناهی است!

ب نامتناهی است. هر عدد طبیعی که بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد، مضرب آن است. خب این اعداد که تمامی ندارند!

ج متناهی است. هر عدد طبیعی که $۱۰^۶$ بر آن بخش‌پذیر باشد (مثل ۱، ۲، ۵ و ...)، مقسوم‌علیه $۱۰^۶$ است. خب تعداد این عددها محدود است.

د نامتناهی است. مجموعهٔ اعداد طبیعی یعنی $\mathbb{N}$ نامتناهی است. پس مجموعهٔ زیرمجموعه‌های آن هم نامتناهی است.

مثال دو مجموعهٔ نامتناهی مثال بزنید که یکی از آن‌ها زیرمجموعهٔ دیگری باشد.

حل مثلاً این‌ها: $\mathbb{Q}',\mathbb{R}$ $\quad$ $\mathbb{Z},\mathbb{Q}$ $\quad$ $\mathbb{W},\mathbb{Z}$ $\quad$ $\mathbb{N},\mathbb{Z}$

یا این دو مجموعه: $A=[۰,۱)$, $B=[۰,۲]$

مثال دو مجموعهٔ نامتناهی مثال بزنید که یکی از آن‌ها دقیقاً یک عضو بیشتر از دیگری داشته باشد.

حل مثلاً $\mathbb{N}$ و $\mathbb{W}$ هر دو نامتناهی‌اند و $\mathbb{W}$ فقط عضو صفر را اضافه‌تر دارد. یا این دو: $A=(-\infty,۱)$, $B=(-\infty,۱)\cup\{۲\}$

حالا دو مجموعه A و B را در نظر بگیرید و فرض کنید $A\subset B$. با یک تجسم خلاق (!)، به سؤالات زیر جواب دهید:

الف اگر A متناهی باشد، در مورد B چه می‌توان گفت؟ هیچ‌چی! B می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. مثلاً فرض کنیم $A=\{۱,۲\}$ باشد. B می‌تواند $\{۱,۲,۳\}$ باشد که متناهی است یا می‌تواند $\mathbb{N}$ باشد که نامتناهی است.

ب اگر A نامتناهی باشد، در مورد B چه می‌توان گفت؟ B هم نامتناهی است! چون B باید Aی نامتناهی را درون خود داشته باشد.

ج اگر B متناهی باشد، در مورد A چه می‌توان گفت؟ A هم متناهی است! زیرمجموعهٔ یک مجموعهٔ متناهی نمی‌تواند نامتناهی باشد. این خیلی واضحه!

د اگر B نامتناهی باشد، در مورد A چه می‌توان گفت؟ هیچ‌چی! A می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. مثلاً فرض کنیم $B=\mathbb{N}$ باشد. A می‌تواند $\{۱,۲\}$ باشد که متناهی است یا می‌تواند $\{۳,۴,۵,...\}$ باشد که نامتناهی است.

تست کدام گزینه صحیح است؟

۱) اگر A و B نامتناهی باشند، آن‌گاه $A\cap B$ نامتناهی است.

۲) اگر $A\cup B$ نامتناهی باشد، آن‌گاه A و B نامتناهی هستند.

۳) اگر $A\cap B$ متناهی باشد، آن‌گاه A و B متناهی هستند.

۴) اگر $A\cup B$ متناهی باشد، آن‌گاه A و B متناهی هستند.

پاسخ گزینهٔ ۴

۱ غلط است. فرض کنید A مجموعهٔ اعداد زوج و B مجموعهٔ اعداد فرد باشد. در این صورت $A\cap B=\varnothing$ است که متناهی است. برعکس همین مثال ثابت می‌کند که ۳ هم غلط است.

۲ هم غلط است. زیرا اگر فقط یکی از دو مجموعهٔ A و B نامتناهی باشند آن‌گاه $A\cup B$ نامتناهی خواهد بود. بنابراین لزومی ندارد که هردوی آن‌ها نامتناهی باشند. مثلاً اگر $A=\mathbb{N}$ و $B=\varnothing$ باشد. در این صورت $A\cup B=\mathbb{N}$ و نامتناهی است.

۴ ولی صحیح است. اجتماع دو مجموعهٔ متناهی، متناهی است. اگر یکی از دو مجموعهٔ A و B نامتناهی باشند، آن‌گاه $A\cup B$ هم نامتناهی می‌شود.

سؤالات تشریحی

۱- مشخص کنید هر یک از اعداد موردنظر، عضو کدام مجموعه یا مجموعه‌هاست؟

	$\sqrt{13}$	7	$\frac{4}{5}$	0	$-0/3$	$-\sqrt{6}$	-4
$\mathbb{W}-\mathbb{N}$							
$\mathbb{Z}-\mathbb{W}$							
$(\mathbb{R}-\mathbb{Q}')-\mathbb{Z}$							
$(0,+\infty)-\mathbb{Q}$							
$\mathbb{Q}'\cup\mathbb{Z}$							

۲- در جدول زیر، با نمایش مجموعه‌های A و B روی محور اعداد، اجتماع و اشتراک آن‌ها را به دست آورید.

$A=(-\infty,4)-\{0\}$ $B=[0,+\infty)\cup\{-2\}$		$A\cup B=$ $A\cap B=$
$A=(-2,1)\cup[3,6)$ $B=[-1,2)\cup(4,7]$		$A\cup B=$ $A\cap B=$
$A=(-\infty,0]\cup(3,+\infty)$ $B=[-2,+\infty)-\{0,3\}$		$A\cup B=$ $A\cap B=$

۳- اگر $A=[1,+\infty)$ ، $B=(2,5]$ و $C=[-2,3)$ باشد، حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $A-(B\cup C)$ ب) $B-(A\cap C)$ ج) $(C-B)-A$

۴- هر یک از مجموعه‌های زیر را به شکل اجتماع دو بازه بنویسید.

الف) $\mathbb{R}-\{3\}$ ب) $\mathbb{R}-[-2,2)$ ج) $\mathbb{R}-(0,5]$

۵- اگر به ازای تمام nهای طبیعی، $A_n=(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$ باشد، حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $A_1\cup A_2\cup A_3$ ب) $A_1\cap A_2\cap A_3$

ج) $A_1\cup A_2\cup A_3\cup\dots$ د) $A_1\cap A_2\cap A_3\cap\dots$

۶- مشخص کنید هر یک از مجموعه‌های زیر متناهی است یا نامتناهی.

الف) مجموعه اعداد اول زوج ب) مجموعه مقسوم‌علیه‌های (شمارنده‌های) طبیعی ۲۰

ج) مجموعه مضرب‌های مشترک ۱۶ و ۵۸ د) $(-\infty,2]\cap[1,+\infty)$

ه) $\{x\in\mathbb{N}\mid x^3\le 64\}$ و) $(-4,4)-\mathbb{Q}$

ز) $\mathbb{Q}-(\mathbb{Z}-\mathbb{N})$ ح) $\mathbb{Q}'-\mathbb{Q}$

ط) مجموعه سلول‌های بدن یک انسان ی) مجموعه مربع‌های به مساحت ۴ سانتی‌مترمربع

ک) مجموعه جواب‌های حقیقی معادلهٔ $x^2+1=0$ ل) مجموعه کسرهای مثبت با صورت ۱-

۷- الف) دو مجموعهٔ نامتناهی مثال بزنید که اشتراک آن‌ها متناهی و غیرتهی باشد.

ب) دو بازه مثال بزنید که اشتراک آن‌ها متناهی و غیرتهی باشد.

ج) دو مجموعهٔ نامتناهی مانند A و B مثال بزنید که $A-B$ متناهی و غیرتهی باشد.

د) دو مجموعه مانند A و B مثال بزنید که $A-B$ ، $B-A$ و $A\cap B$ هر سه نامتناهی باشند.

۸- اگر مجموعه‌های $A-B$ و $B-A$ هر دو نامتناهی باشند، در مورد متناهی یا نامتناهی‌بودن هر یک از مجموعه‌های زیر، چه می‌توان گفت؟

الف) A ب) B ج) $A\cup B$ د) $A\cap B$

۹- اگر مجموعهٔ A متناهی و مجموعه‌های متمایز B و C نامتناهی باشند، در مورد هر یک از مجموعه‌های زیر از نظر متناهی یا نامتناهی‌بودن چه می‌توان گفت؟

الف) $A\cap(B\cup C)$ ب) $A\cup(B\cap C)$ ج) $A-(B\cup C)$

د) $A\cup(B-C)$ ه) $B-(A\cap C)$ و) $(C\cup A)\cap(C\cup B)$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- حاصل کدام گزینه روی محور، به شکل روبه‌رو نمایش داده می‌شود؟ (کتاب درسی)

۱) $(-۳,۰)\cup(-۲,۵]$ ۲) $(-\infty,۶)\cap(۲,۹)$

۳) $(۳,+\infty)\cup(۶,۱۰]$ ۴) $(-\infty,۱)\cap[۱,+\infty)$

۲- اگر $A=(۵,+\infty)$ و $B=(-\infty,۶)$ باشد، نمایش $A-B$ روی محور اعداد حقیقی چگونه است؟

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

۳- اگر $A=[۱,۴)$ ، $B=\mathbb{R}-\{۲\}$ و $C=(-\infty,۳)$ باشد، حاصل $A\cap B\cap C$ کدام است؟

۱) $(۱,۲)$ ۲) $[۱,۲)\cup(۲,۳)$ ۳) $(۱,۴)-\{۲\}$ ۴) $(۱,۳)$

۴- اگر $A=(-۲,۵]$ و $B=\{-x \mid x\in A\}$ باشد، $A\cap B$ کدام است؟

۱) $[-۲,۲]$ ۲) $[-۵,۲)$ ۳) $(-۲,۵]$ ۴) $(-۲,۲)$

۵- کدام مجموعه متناهی است؟

۱) $\mathbb{Z}\cap\mathbb{W}$ ۲) $\mathbb{Z}-\mathbb{W}$ ۳) $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$ ۴) $\mathbb{W}-\mathbb{N}$

۶- اگر مجموعهٔ A حداقل یک زیرمجموعهٔ نامتناهی داشته باشد، آن‌گاه: (کتاب درسی)

۱) A متناهی است. ۲) A نامتناهی است.

۳) A ممکن است متناهی باشد. ۴) $A=\mathbb{R}$

۷- در کدام حالت، دو مجموعهٔ نامتناهی با شرایط موردنظر وجود ندارد؟ (کتاب درسی)

۱) یکی از آن‌ها زیرمجموعهٔ دیگری باشد. ۲) یکی از آن‌ها دقیقاً یک عضو بیشتر از دیگری داشته باشد.

۳) اشتراک آن‌ها مجموعه‌ای متناهی باشد. ۴) اجتماع آن‌ها مجموعه‌ای متناهی باشد.

۸- کدام مجموعه متناهی است؟

۱) مجموعه اعداد صحیح بیشتر از ۳− ۲) $\{x\in Q' \mid \sqrt{۲}\,x\in Q\}$

۳) مجموعه اعداد حسابی کم‌تر از $\sqrt{۲۰۰}$ ۴) $\{x\in Q \mid ۰<x<۰/۳\}$

۹- اگر $-۲\in[۳m+۱,\frac{m}{۲})$ باشد، مجموعهٔ تمام مقادیر ممکن برای m کدام است؟

۱) $(-\infty,-۱]$ ۲) $(-۴,+\infty)$ ۳) $(-۴,-۱]$ ۴) $[-۴,-۱)$

۱۰- اگر $A=[۴,+\infty)$ ، $B=(-\infty,m+۳)$ و $A\cup B=\mathbb{R}$ باشد، کدام گزینه حتماً درست است؟

۱) $m=۱$ ۲) $m\geq ۱$ ۳) $m\leq ۱$ ۴) m هر عدد حقیقی می‌تواند باشد.

۱۱- کدام‌یک از مجموعه‌های زیر وجود دارد؟

۱) مجموعه‌ای متناهی که اگر صد عضو دیگر به آن اضافه کنیم، نامتناهی شود.

۲) مجموعه‌ای نامتناهی که مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های آن، متناهی باشد.

۳) مجموعه‌ای نامتناهی که تمام زیرمجموعه‌های آن نیز نامتناهی باشند.

۴) مجموعه‌ای متناهی که زیرمجموعهٔ تمام مجموعه‌های نامتناهی باشد.

۱۲- اگر مجموعهٔ $(A-B)\cup(B-A)$ نامتناهی باشد، آن‌گاه چه تعداد از مجموعه‌های $A-B$ ، $B-A$ ، $A\cup B$ و $A\cap B$ حتماً نامتناهی‌اند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۳- اگر برای هر عدد طبیعی n، $A_n=(۱-\frac{۱}{n},۱+\frac{۱}{n})$ باشد، $A_۱\cap A_۲\cap A_۳\cap\dots$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\varnothing$ ۳) $\{۱\}$ ۴) $\{۰\}$

۱۴- اگر $A=\{۱,۲,۳\}$ باشد و بدانیم $B=(x,۴x)$ طوری تعریف شده است که $x\in A$ است، آن‌گاه اشتراک تمام B ها کدام است؟

۱) $(۳,۴)$ ۲) $\{۳\}$ ۳) $(۱,۴)$ ۴) $\{\ \}$

۱۵- کوچک‌ترین بازه‌ای که تمامی عضوهای مجموعهٔ $\{\frac{۱}{n} \mid n\in\mathbb{N}\}$ در آن جای بگیرند کدام است؟

۱) $[۰,۱]$ ۲) $(۰,۱]$ ۳) $[۱,+\infty)$ ۴) $(۰,+\infty)$

پاسخ‌نامهٔ سؤالات تشریحی

۱- داستان از این قرار است:

	-۴	$-\sqrt{۶}$	$-۰/۳$	۰	$\frac{۴}{۵}$	۷	$\sqrt{۱۳}$
$\mathbb{W}-\mathbb{N}$				✓			
$\mathbb{Z}-\mathbb{W}$	✓						
$(\mathbb{R}-\mathbb{Q}')-\mathbb{Z}$			✓		✓		
$(۰,+\infty)-\mathbb{Q}$							✓
$\mathbb{Q}'\cup\mathbb{Z}$	✓	✓		✓		✓	✓

توضیح $\mathbb{W}$ فقط یک عضو بیشتر از $\mathbb{N}$ دارد و آن هم صفر است، پس:

$\mathbb{W}-\mathbb{N}=\{۰\}$

$\mathbb{Z}-\mathbb{W}$ شامل قرینهٔ اعداد طبیعی است:

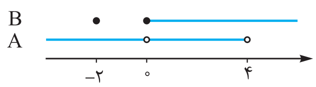
$\mathbb{Z}-\mathbb{W}=\{\dots,-۳,-۲,-۱\}$

$\mathbb{R}-\mathbb{Q}'$ همان $\mathbb{Q}$ (مجموعه اعداد گویا) است، پس:

$(\mathbb{R}-\mathbb{Q}')-\mathbb{Z}=\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$

این مجموعه، شامل اعداد گویایی است که صحیح نیستند؛ مثل کسرهای گویا و اعداد اعشاری. $(۰,+\infty)-\mathbb{Q}$ شامل اعداد حقیقی مثبتی است که گویا نیستند، یعنی اعداد گنگ مثبت؛ مثل اعداد رادیکالی مثبت. تکلیف $\mathbb{Q}'\cup\mathbb{Z}$ هم که معلوم است: شامل اعدادی است که یا گنگ باشند یا صحیح.

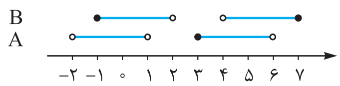
۲- سطر اول جدول:



$A\cup B=\mathbb{R}$

$A\cap B=\{-۲\}\cup(۰,۴)$

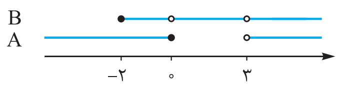
سطر دوم جدول:



$A\cup B=(-۲,۲)\cup[۳,۷]$

$A\cap B=[-۱,۱)\cup(۴,۶)$

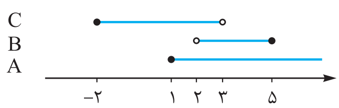
سطر سوم جدول:



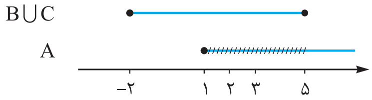
$A\cup B=\mathbb{R}-\{۳\}$

$A\cap B=[-۲,۰)\cup(۳,+\infty)$

۳- سه مجموعه را روی یک محور نشان می‌دهیم:

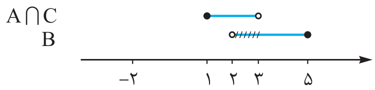


الف) با توجه به شکل، $B\cup C$ را روی محور نمایش می‌دهیم و از A کم می‌کنیم. یعنی قسمت‌های مشترک آن با A را از A حذف می‌کنیم!



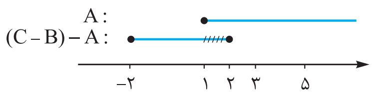
$A-(B\cup C)=(۵,+\infty)$

ب) $A\cap C$ را روی محور نمایش می‌دهیم، سپس قسمت‌های مشترک آن با B را از B حذف می‌کنیم.



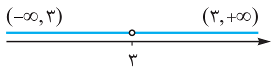
$B-(A\cap C)=[۳,۵]$

ج) قسمت‌های مشترک B و C را از C کم می‌کنیم تا $C-B$ به دست آید. سپس قسمت‌های مشترک مجموعهٔ حاصل با A را از همان مجموعه کم می‌کنیم!



$(C-B)-A=[-۲,۱)$

۴- الف) $\mathbb{R}-\{۳\}=(-\infty,۳)\cup(۳,+\infty)$



ب) $\mathbb{R}-[-۲,۲)=(-\infty,-۲)\cup[۲,+\infty)$

ج) $\mathbb{R}-(۰,۵]=(-\infty,۰]\cup(۵,+\infty)$

۵- اگر به جای n، اعداد طبیعی را قرار دهیم، بازه‌های مختلفی به دست می‌آید. مثلاً:

$A_۱=(-۱,۱)\quad A_۲=(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})\quad A_۳=(-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳})\quad \dots$

الف) هر یک از بازه‌های جدید، زیرمجموعهٔ بازهٔ قبلی است:

$A_۳\subset A_۲\subset A_۱$

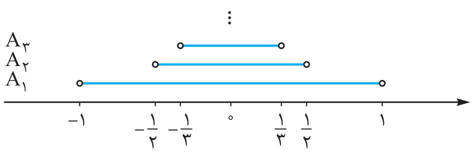
بنابراین اجتماع آن‌ها، بزرگ‌ترین آن‌هاست:

$A_۱\cup A_۲\cup A_۳=(-۱,۱)$

ب) اشتراک سه مجموعهٔ اول، کوچک‌ترین آن‌هاست:

$A_۱\cap A_۲\cap A_۳=(-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳})$

ج) مثل حالت «الف» است:



$A_۱\cup A_۲\cup A_۳\cup\dots=(-۱,۱)$

د) جواب، مجموعهٔ تک‌عضوی $\{۰\}$ است! چون بازه‌ها آن‌قدر کوچک و کوچک‌تر می‌شوند که تنها عضو مشترک آن‌ها عدد صفر (وسط بازه) است. دقت کنید که صحبت از بی‌شمار بازه است!

۶- الف) متناهی است. تنها عدد اول زوج، ۲ است. پس این مجموعه به صورت $\{۲\}$ و تک‌عضوی است.

ب) متناهی است. این مجموعه به صورت $\{۱,۲,۴,۵,۱۰,۲۰\}$ است. کلاً مجموعه مقسوم‌علیه‌های طبیعی هر عدد غیرصفر، متناهی است.

ج) نامتناهی است. کوچک‌ترین مضرب مشترک ۱۶ و ۵۸ مساوی ۴۶۴ است و ما تمام اعدادی را می‌خواهیم که بر ۴۶۴ بخش‌پذیرند: $\{۴۶۴,۹۲۸,۱۳۹۲,\dots\}$

د) نامتناهی است. حاصل این مجموعه به صورت $[۱,۲]$ است که چون بازه است، نامتناهی است!

هـ) متناهی است. $\{x\in\mathbb{N} \mid x^۳\le ۶۴\}=\{۱,۲,۳,۴\}$

و) نامتناهی است. تمام اعداد گنگ بین ۴- و ۴، عضو این مجموعه‌اند. خب بی‌شمار از این عددها داریم.

ز) نامتناهی است. $\mathbb{Z}-\mathbb{N}$ شامل صفر و قرینهٔ اعداد طبیعی است که اگر این‌ها را از $\mathbb{Q}$ حذف کنیم، یک عالمه عدد گویا به همراه عضوهای $\mathbb{N}$ باقی می‌ماند.

ح) نامتناهی است. $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}'$ اشتراکی ندارند و $\mathbb{Q}'-\mathbb{Q}$ همان $\mathbb{Q}'$ است!

ط) متناهی است. تعدادشان زیاد است ولی بالأخره به ته می‌رسند!

ی) متناهی است. فقط مربعی به ضلع ۲ سانتی‌متر این ویژگی را دارد.

ک) متناهی است. از $x^۲+۱=۰$ نتیجه می‌شود $x^۲=-۱$ که غیرممکن است. پس مجموعهٔ موردنظر، $\varnothing$ است و $\varnothing$ متناهی است.

ل) نامتناهی است. مخرج کسر هر عدد حقیقی منفی می‌تواند باشد.

۷- الف) مثل مجموعه اعداد اول و مجموعه اعداد طبیعی و زوج، که اشتراک آن‌ها مجموعهٔ تک‌عضوی $\{۲\}$ است.

ب) تنها راه این است که انتهای یکی ابتدای دیگری باشد تا اشتراک دو بازه، مجموعه‌ای تک‌عضوی شود. مثل $(-۳,۱]$ و $[۱,۴)$ که اشتراک آن‌ها $\{۱\}$ است. اگر اشتراک دو بازه، خودش یک بازه می‌شد، قبول نبود! چون بازه‌ها نامتناهی‌اند.

ج) مثلاً $A=\mathbb{W}$ و $B=\mathbb{N}$! خب $A-B=\{۰\}$.

د) مثلاً A مجموعه مضرب‌های ۶ و B مجموعه مضرب‌های ۸ باشد.

۸- الف) از نامتناهی‌بودن $A-B$، این نتیجهٔ قطعی را می‌توان گرفت که A نامتناهی است.

ب) از نامتناهی‌بودن $B-A$، این نتیجهٔ قطعی را می‌توان گرفت که B نامتناهی است.

ج) چون A و B نامتناهی‌اند، اجتماع آن‌ها یعنی $A\cup B$ هم حتماً نامتناهی است.

د) در مورد $A\cap B$ نمی‌توان نظر قطعی داد. یعنی ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد. مثلاً اگر A مجموعه اعداد اول و B مجموعه اعداد طبیعی زوج باشد، $A-B$ و $B-A$ نامتناهی‌اند اما $A\cap B=\{۲\}$ متناهی می‌شود. ولی اگر A مجموعه مضرب‌های ۴ و B مجموعه مضرب‌های ۶ باشد، $A-B$، $B-A$ و $A\cap B$ هر سه نامتناهی‌اند.

۹- الف) متناهی است. چون A متناهی است، اشتراک آن با هر مجموعه‌ای، متناهی می‌شود. کاری هم به $B\cup C$ نداریم!

ب) ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد. B و C نامتناهی‌اند، اما در مورد $B\cap C$ نمی‌توانیم نظر قطعی بدهیم. یعنی $B\cap C$ ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد. مثلاً اگر $B=\mathbb{N}$ و $C=\mathbb{Z}$ باشد، $B\cap C=\mathbb{N}$ نامتناهی است. اگر B مجموعه اعداد اول و C مجموعه اعداد طبیعی زوج باشد، $B\cap C=\{۲\}$ متناهی است. اگر $B\cap C$ متناهی باشد، اجتماع آن با A هم متناهی خواهد بود و اگر $B\cap C$ نامتناهی باشد، اجتماع آن با A هم نامتناهی خواهد بود.

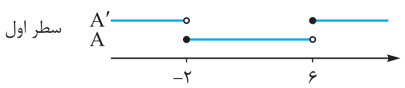
ج) متناهی است. باید عضوهای مشترک $B\cup C$ با A را از A حذف کنیم. چون A متناهی است، حاصل هم متناهی می‌شود. چون به A هیچ عضوی اضافه نمی‌شود و تعدادی عضو هم از آن حذف می‌شود.

د) ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد. از حل سؤال‌های قبل، فهمیده‌ایم که تفاضل دو مجموعهٔ نامتناهی، می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. پس تکلیف $B-C$ معلوم نیست. اجتماع آن با Aی متناهی هم چیزی را عوض نمی‌کند!

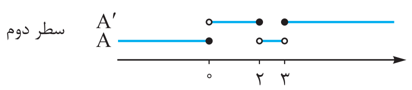
هـ) نامتناهی است. چون A متناهی است، $A\cap C$ هم متناهی است. پس به خاطر نامتناهی‌بودن B، $B-(A\cap C)$ نامتناهی می‌ماند! در واقع، اتفاقی که می‌افتد این است که تعدادی محدود عضو از B حذف می‌شود!

و) نامتناهی است. این مجموعه با $C\cup(A\cap B)$ مساوی است. چون C نامتناهی است، اجتماع آن با هر مجموعه‌ای، نامتناهی خواهد بود.

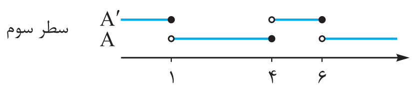
۱۰- در هر قسمت، A را روی محور اعداد حقیقی نشان می‌دهیم. قسمت باقی‌مانده از محور، می‌شود A'!



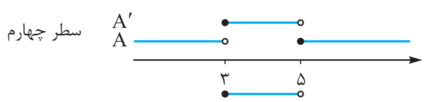
$$A'=(-\infty,-۲)\cup[۶,+\infty)$$



$$A'=(۰,۲]\cup[۳,+\infty)$$



$$A'=(-\infty,۱]\cup(۴,۶]$$



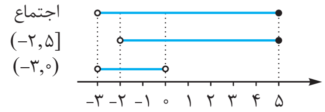
$$A'=[۳,۵)$$

ابتدا بازهٔ $[۳,۵)$ را زیر محور نشان دادیم، سپس آن را از $\mathbb{R}$ کم کردیم تا A به دست آید. دوباره مجموعهٔ حاصل را از $\mathbb{R}$ کم کردیم تا A' به دست آید. A' همان $[۳,۵)$ شد!

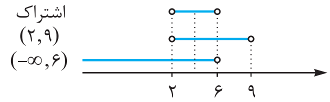
پاسخ‌نامهٔ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- گزینهٔ۲ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

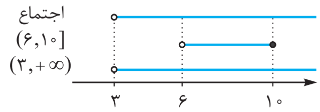
①: $(-3,0)\cup(-2,5]=(-3,5]$



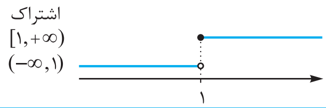
②: $(-\infty,6)\cap(2,9)=(2,6)$



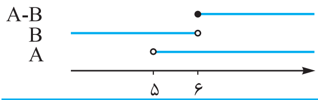
③: $(3,+\infty)\cup(6,10]=(3,+\infty)$



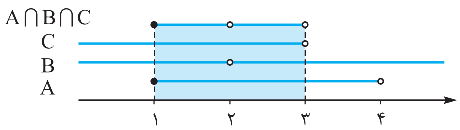
④: $(-\infty,1)\cap[1,+\infty)=\varnothing$



۲- گزینهٔ۱ $A-B$ شامل xهایی از A است که در B نباشد. پس A را مبنای کار قرار می‌دهیم و قسمت‌های مشترک با B را از آن حذف می‌کنیم. زیربازهٔ $(5,6)$ از A با B مشترک است و باید از A برداشته شود. در مورد $x=6$، حواسمان باشد که در A هست و در B نیست. پس در $A-B$ باقی می‌ماند.



۳- گزینهٔ۲ هر کدام از مجموعه‌ها را در یک سطر روی محور اعداد نشان می‌دهیم. با توجه به شکل زیر، معلوم می‌شود که:



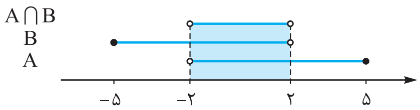
$A\cap B\cap C=[1,2)\cup(2,3)$

۴- گزینهٔ۴ $A=(-2,5]=\{x\in\mathbb{R}\mid -2<x\le 5\}$

B شامل قرینهٔ عضوهای A است:

$-2<x\le 5 \xrightarrow{\times(-1)} 2>-x\ge -5$

بنابراین $B=[-5,2)$. حالا اشتراک A و B می‌شود: $(-2,2)$



۵- گزینهٔ۴ چون $W\subseteq\mathbb{Z}$، $\mathbb{Z}\cap W=W$ که نامتناهی است. $\mathbb{Z}-W$ هم شامل تمام اعداد صحیح منفی است:

$\{\dots,-3,-2,-1\}$

این مجموعه هم نامتناهی است. $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$ شامل تمام اعداد گویای غیرصحیح است که خیلی نامتناهی است! اما $W-\mathbb{N}=\{0\}$ متناهی است!

۶- گزینهٔ۲ چه‌طور ممکن است یک مجموعه، زیرمجموعه‌ای نامتناهی داشته باشد، اما خودش متناهی باشد؟! پس A حتماً نامتناهی است! اما لزوماً $A=\mathbb{R}$ نیست!

۷- گزینهٔ۴ ①: وجود دارد. مثلاً $\mathbb{N}\subseteq W$.
②: وجود دارد. مثل همان $\mathbb{N}$ و W! مجموعهٔ W فقط عضو صفر را نسبت به $\mathbb{N}$ بیشتر دارد.
③: وجود دارد. مثل مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج و مجموعهٔ اعداد اول. تنها عدد اول زوج، ۲ است. پس اشتراک این دو مجموعهٔ نامتناهی، مجموعهٔ متناهی و تک‌عضوی $\{2\}$ است.
④: وجود ندارد. چه‌طور ممکن است دو مجموعهٔ نامتناهی را بریزیم روی هم و مجموعه‌ای متناهی حاصل شود؟!

۸- گزینهٔ۳ ① منظور $\{-2,-1,0,1,2,\dots\}$ است که نامتناهی است. ② تمام مضرب‌های گنگ $\sqrt{2}$ را شامل می‌شود؛ مثل $2\sqrt{2}$، $-3\sqrt{2}$، $\frac{\sqrt{2}}{3}$ و ... زیرا حاصل‌ضرب $\sqrt{2}$ در تمام این اعداد، گویا می‌شود. این مجموعه هم نامتناهی است. ③ متناهی است: $\{0,1,2,3,\dots,14\}$. ④ هم قاعدتاً باید نامتناهی باشد! حواسمان باشد که بین هر دو عدد حقیقی، بی‌شمار عدد گویا وجود دارد.

۹- گزینهٔ۳ $-2\in[3m+1,\frac{m}{2})$، پس:

$$3m+1\le -2<\frac{m}{2}$$

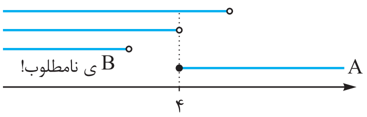
دو نامعادله را جداگانه حل می‌کنیم و از جواب‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$\left.\begin{array}{l} 3m+1\le -2 \Rightarrow 3m\le -3 \xrightarrow{\div 3} m\le -1 \\ -2<\frac{m}{2} \xrightarrow{\times 2} -4<m \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} -4<m\le -1$$

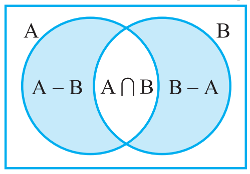
یعنی $m\in(-4,-1]$.

۱۰- گزینهٔ۲ با یک تجسم حرفه‌ای، می‌فهمیم که کافی است تهٔ B از سر A عقب نماند! یعنی برای آن‌که اجتماع A و B مساوی $\mathbb{R}$ (کل محور) بشود، باید $m+3$ مساوی ۴ یا بزرگ‌تر از آن باشد: $m+3\ge 4 \Rightarrow m\ge 1$. در شکل روبه‌رو، یک Bی نامطلوب و سه Bی مطلوب به همراه A رسم شده!



۱۱- گزینهٔ۴ ①: وجود ندارد. فقیر با صد تومان دارا نمی‌گردد، مجموعهٔ متناهی هم با صد عضو نامتناهی نمی‌شود!
②: وجود ندارد. یک مجموعهٔ نامتناهی، بی‌شمار زیرمجموعه دارد.
③: وجود ندارد. واضح است!
④: $\varnothing$ را عرض می‌کنند!

۱۲- گزینهٔ ۲ $(A-B)\cup(B-A)$ در شکل زیر رنگ شده است. سؤال گفته این مجموعه نامتناهی است؛ ولی نگفته هر کدام از مجموعه‌های A و B متناهی‌اند یا نامتناهی؛ پس هیچ‌یک از مجموعه‌های $A-B$، $B-A$ و $A\cap B$ لزوماً نامتناهی نیستند؛ یعنی ممکن است متناهی یا نامتناهی باشند؛ مثلاً اگر A متناهی باشد، $A-B$ متناهی است و اگر B متناهی باشد، $B-A$ متناهی است. در هر یک از این دو حالت، $A\cap B$ هم متناهی است؛ یا مثلاً اگر $A=\mathbb{N}$ و $B=\mathbb{W}$؛ آن‌گاه $A-B=\varnothing$ و $B-A=\{۰\}$ که هر دو متناهی‌اند. یا اگر $A=\mathbb{W}$ و $B=\{-n\,|\,n\in\mathbb{W}\}$، آن‌گاه $A\cap B=\{۰\}$ متناهی است.



اما در مورد $A\cup B$، واضح است که نامتناهی است؛ چون $(A-B)\cup(B-A)$ زیرمجموعهٔ $A\cup B$ است. وقتی این نامتناهی باشد، آن هم نامتناهی است!

۱۳- گزینهٔ ۳ به جای n، اعداد طبیعی ... ,۴ ,۳ ,۲ ,۱ قرار می‌دهیم:

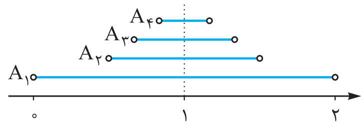
$$A_۱=(۱-۱,۱+۱)=(۰,۲)$$

$$A_۲=(۱-\frac{۱}{۲},۱+\frac{۱}{۲})=(\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲})$$

$$A_۳=(۱-\frac{۱}{۳},۱+\frac{۱}{۳})=(\frac{۲}{۳},\frac{۴}{۳})$$

$$A_۴=(۱-\frac{۱}{۴},۱+\frac{۱}{۴})=(\frac{۳}{۴},\frac{۵}{۴})$$

...



و این داستان ادامه دارد! چیزی که در همهٔ آن‌ها مشترک است، ۱ خالی است! $A_۱\cap A_۲\cap A_۳\cap ...=\{۱\}$

۱۴- گزینهٔ ۱ اگر $x=۱$ باشد، آن‌گاه $B_۱=(۱,۴)$ است.
اگر $x=۲$ باشد، آن‌گاه $B_۲=(۲,۸)$ است.
اگر $x=۳$ باشد، آن‌گاه $B_۳=(۳,۱۲)$ است.
اشتراک سه بازه با هم، بازهٔ $(۳,۴)$ است. $B_۱\cap B_۲\cap B_۳=(۳,۴)$

۱۵- گزینهٔ ۲ عضوهای مجموعهٔ داده‌شده را می‌نویسیم:

$$\{\frac{۱}{n}\,|\,n\in\mathbb{N}\}=\{۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۴},...\}$$

تمامی عضوهای این مجموعه در بازهٔ $(۰,۱]$ قرار می‌گیرند. توجه کنید که عضوها رفته‌رفته کوچک می‌شوند ولی هیچ‌وقت به صفر نمی‌رسند.

۱۶- گزینهٔ ۱ خود $[-۲,۳)$! چرا لقمه را بپیچانیم؟!

۱۷- گزینهٔ ۳ راه اول A' و B' را پیدا می‌کنیم و اجتماع می‌گیریم:

$$A'=\{۱,-۲,۳,-۴,۵\}\xrightarrow{\text{اجتماع}}$$

$$B'=\{\pm۱,\pm۳,\pm۵\}$$

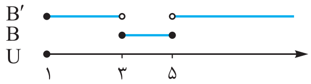
$$A'\cup B'=\{\pm۱,-۲,\pm۳,-۴,\pm۵\}$$

شد ۸ عضو!

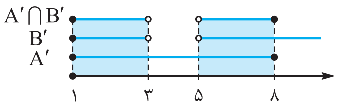
راه دوم طبق قانون دمورگان، $A'\cup B'=(A\cap B)'$؛ پس اشتراک A و B را حساب می‌کنیم و از آن متمم می‌گیریم!
$A\cap B=\{۲,۴\}$ دو عضو دارد و U کلاً ۱۰عضوی است؛ پس متمم $A\cap B$، $۱۰-۲=۸$ عضو خواهد داشت!

۱۸- گزینهٔ ۳ راه اول A' و B' را روی U نشان می‌دهیم و از آن‌ها اشتراک می‌گیریم:

$A'=[۱,۸)$

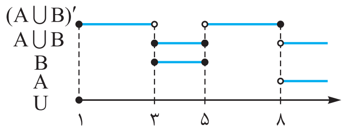


$B'=[۱,۳)\cup(۵,+\infty)$



$A'\cap B'=[۱,۳)\cup(۵,۸]$

راه دوم طبق قانون دمورگان، $A'\cap B'=(A\cup B)'$؛ پس $A\cup B$ را نشان می‌دهیم و از آن متمم می‌گیریم.



$A'\cap B'=(A\cup B)'=[۱,۳)\cup(۵,۸]$

۱۹- گزینهٔ ۴

۱: A' نامتناهی است: $A=\{۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,...\}$
$\Rightarrow A'=\{۱,۴,۶,۸,۹,۱۰,۱۲,...\}$

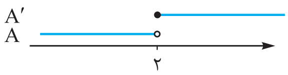
۲: A' می‌شود مجموعهٔ اعداد طبیعی و فرد که نامتناهی است.
$A=E \Rightarrow A'=O$

۳: A' نامتناهی است: $A=\{۳,۶,۹,۱۲,۱۵,۱۸,۲۱,...\}$
$\Rightarrow A'=\{۱,۲,۴,۵,۷,۸,۱۰,۱۱,...\}$

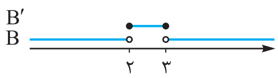
۴: A' متناهی است: $A=\{۱۱,۱۲,۱۳,۱۴,۱۵,۱۶,...\}$
$\Rightarrow A'=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰\}$

۲۰- گزینهٔ ۳

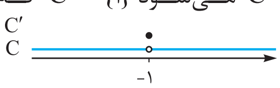
۱: متمم $A=(-\infty,۲)$ می‌شود $A'=[۲,+\infty)$ که نامتناهی است.



۲: متمم $B=(-\infty,۲)\cup(۳,+\infty)$ می‌شود $B'=[۲,۳]$ که نامتناهی است.



۳: متمم $C=(-\infty,۱)\cup(۱,+\infty)$ می‌شود $C'=\{۱\}$ که متناهی است.



۴: متمم $D=\mathbb{R}-[۰,+\infty)$ می‌شود خود $[۰,+\infty)$ که نامتناهی است!