# فهرست

# درس اول
# ترسیم‌های هندسی

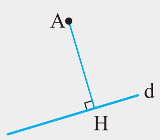
یکی از بخش‌های هندسه، ترسیم شکل‌های هندسی است. این بخش از هندسه، کاربرد زیادی در نقشه‌کشی ساختمان، طراحی صنعتی، معماری و ... دارد. مهم‌ترین ابزارهای لازم برای این کار، خط‌کش، پرگار، گونیا و ... می‌باشند. ساخت بنای با عظمتی مانند اهرام ثلاثه، بدون آگاهی از ترسیمات هندسی، ناممکن به‌نظر می‌رسد. بازدید از بناهای مسیحی و اسلامی نیز بازدیدکننده را به این نتیجه می‌رساند که سازندگان چنین شاهکارهایی الزاماً از علم هندسه و ترسیمات هندسی، آگاهی کامل داشته‌اند.

## ترسیم‌های هندسی

در این بخش از کتاب، ابزارهایی که برای رسم شکل‌های هندسی مورد استفاده قرار می‌گیرند، عبارت‌اند از خط‌کش[1] و پرگار؛ به بیان دیگر از گونیا استفاده نخواهد شد. البته برای رسم زاویه‌هایی با اندازهٔ معلوم (به‌جز زاویه‌های ۹۰، ۶۰ و ۳۰ درجه و نصف‌های آن‌ها) از نقاله نیز استفاده می‌شود.

### یادآوری چند مفهوم و مطلب اساسی

**الف** فاصلهٔ یک نقطه از یک خط، طول عمودی است که از آن نقطه بر آن خط رسم می‌شود و بین آن نقطه و خط محدود است. در شکل مقابل $AH$ بر خط $d$ عمود است، پس طول $AH$ برابر فاصلهٔ $A$ از خط $d$ است. نقطهٔ $H$ را پای عمود می‌نامند.




اگر $AH$ بر خط $d$ عمود باشد، $AH$ را فاصلهٔ نقطهٔ $A$ از خط $d$ می‌نامند.

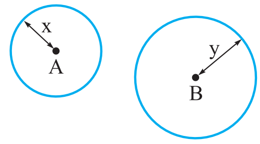
**ب** عمودمنصف یک پاره‌خط، خطی است که از وسط آن پاره‌خط می‌گذرد و بر آن عمود نیز می‌باشد.

**پ** نیمساز یک زاویه، خطی است که از رأس آن زاویه می‌گذرد و زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.

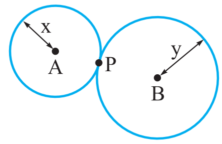
**ت** اگر به دنبال نقطه‌ای باشیم که از نقطهٔ مشخص $A$ به فاصلهٔ معلوم $x$ باشد، آن نقطه روی محیط دایره‌ای به مرکز $A$ و شعاع $x$ واقع است.

**ث** اگر بخواهیم نقطه‌ای پیدا کنیم که از نقطهٔ معلوم $A$ به فاصلهٔ مشخص $x$ و از نقطهٔ معلوم $B$ به فاصلهٔ مشخص $y$ باشد، باید ابتدا دایره‌ای به مرکز $A$ و شعاع $x$ و سپس دایره‌ای به مرکز $B$ و شعاع $y$ رسم کنیم. نقطهٔ برخورد این دو دایره، نقطهٔ موردنظر است. اگر این دو دایره، متقاطع باشند، دو نقطه با مشخصات موردنظر وجود دارد؛ چنان‌چه دو دایره بر یکدیگر مماس باشند، فقط یک نقطهٔ مشترک دارند و تنها یک نقطه با مشخصات مذکور وجود دارد و اگر دو دایره یکدیگر را قطع نکنند، نقطه‌ای وجود ندارد.

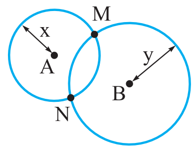
۱- منظوراز خط‌کش، در واقع خط‌کش غیرمدرج است که اصطلاحاً آن را «ستّاره» می‌نامند.




نقطه‌ای وجود ندارد که از A به فاصلهٔ x و از B به فاصلهٔ y باشد.

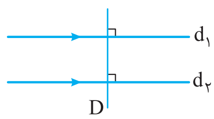



تنها یک نقطه مانند P از A به فاصلهٔ x و از B به فاصلهٔ y است.



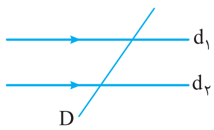

هر دو نقطهٔ M و N از A به فاصلهٔ x و از B به فاصلهٔ y هستند.

ج) اگر دو خط $d_1$ و $d_2$ موازی باشند و خط D بر $d_1$ عمود باشد، آن‌گاه خط D بر $d_2$ نیز عمود است. برعکس، اگر دو خط $d_1$ و $d_2$ بر خط D عمود باشند، آن‌گاه $d_1$ و $d_2$ موازی هستند.




دو خط $d_1$ و $d_2$ موازی‌اند و D بر $d_1$ عمود است، پس D بر $d_2$ نیز عمود می‌باشد.

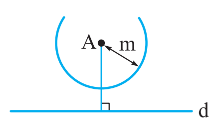
چ) اگر دو خط $d_1$ و $d_2$ موازی باشند و خط D یکی از این دو خط را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند و تعداد هشت زاویه پدید می‌آیند که در تمام موارد به‌جز یک مورد خاص که هر هشت زاویه، قائمه می‌باشند، چهارتای آن‌ها حاده و چهارتای دیگر منفرجه هستند. هر چهار زاویهٔ حاده با هم و هر چهار زاویهٔ منفرجه نیز با هم برابر هستند. این موضوع به «قضیهٔ خطوط موازی و مورب» مشهور است.




دو خط $d_1$ و $d_2$ موازی‌اند و D مورب است. تمام زاویه‌های حاده با هم و تمام زاویه‌های منفرجه نیز با هم برابر هستند.

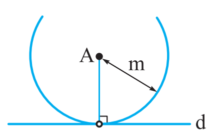
**مثال** **خط d و نقطهٔ A غیر واقع بر آن داده شده‌اند. نقطه‌ای روی خط d پیدا کنید که از نقطهٔ A به فاصلهٔ معلوم m باشد.**

**حل** می‌دانیم مجموعهٔ نقاطی که از نقطهٔ A به فاصلهٔ m باشد، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع m قرار دارند، پس به مرکز A و شعاع m دایره‌ای رسم می‌کنیم؛ نقاط برخورد این دایره با خط d، جواب مسئله است. این دایره با خط d سه حالت دارد.



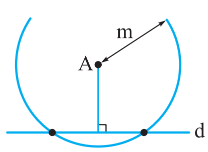

اگر اندازهٔ m، کم‌تر از فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d باشد، نقطه‌ای روی خط d وجود ندارد که از نقطهٔ A به فاصلهٔ m باشد.

(شکل ۳)




اگر اندازهٔ m، برابر فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d باشد، یک نقطه روی خط d وجود دارد که از نقطهٔ A به فاصلهٔ m باشد.

(شکل ۲)




اگر اندازهٔ m، بیشتر از فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d باشد، دو نقطه روی خط d وجود دارد که از نقطهٔ A به فاصلهٔ m است.

(شکل ۱)

اگر این دایره، خط d را در دو نقطه قطع کند، دو نقطه روی d وجود دارد که از A به فاصلهٔ m است (شکل ۱). چنان‌چه دایرهٔ موردنظر با خط d در یک نقطه مشترک باشد، تنها یک نقطه روی d وجود دارد که از A به فاصلهٔ m باشد (شکل ۲). هرگاه دایرهٔ مفروض، خط d را قطع نکند، نقطه‌ای روی خط d وجود ندارد که از نقطهٔ A به فاصلهٔ m باشد (شکل ۳).

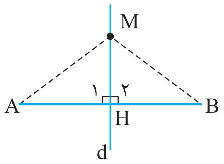
## خواص عمودمنصف و چگونگی رسم آن

**قضیه** هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو انتهای آن پاره‌خط به یک فاصله است.

**پیشنهاد می‌کنیم که اگر صورت قضیه یا مسئله‌ای را می‌خوانید حتماً حتماً حتماً! به مفهوم موجود در سؤال دقت کنید و از خودتان بپرسید که از مسئله، چه برداشتی کرده‌اید و آیا این برداشت، همان چیزی است که مسئله از شما می‌خواهد یا خیر و آیا تمام مفروضات مسئله را متوجه شده‌اید یا خیر. اگر این شیوه را در مورد چند پرسش اولیه اجرا کنید، آن‌گاه، چنین نگرشی در مورد مسائل بعدی، خودبه‌خود در ذهن شما شکل می‌گیرد!**

حالا ببینیم که منظور قضیه چیست؟ در واقع، این قضیه می‌گوید:

اگر نقطهٔ M، نقطه‌ای **دلخواه** روی عمودمنصف پاره‌خط AB باشد، آن‌گاه فاصله‌های این نقطه از دو نقطهٔ A و B با هم برابر هستند؛ به بیان دیگر، در این قضیه، فرض بر این است که «نقطه‌ای روی عمودمنصف یک پاره‌خط به دلخواه انتخاب شده است» ولی حکم این است که باید ثابت کنیم «طول دو پاره‌خطی که این نقطه را به دو نقطهٔ A و B وصل می‌کند، برابر هستند».



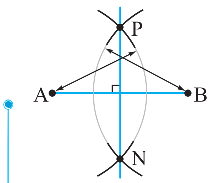

**اثبات** با توجه به شکل مقابل که در آن خط $d$، عمودمنصف $AB$ و $M$، نقطه‌ای دلخواه روی آن است، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ $MAH$ و $MBH$ به حالت برابری دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها، همنهشت هستند، در نتیجه اجزای متناظر این دو مثلث نیز با هم برابرند؛ یعنی $MA = MB$.

**پرسش** در قضیهٔ فوق، اگر جای فرض و حکم را عوض کنیم، عبارت زیر به دست می‌آید:

**«اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط، به یک فاصله باشد، آن نقطه روی عمودمنصف آن پاره‌خط واقع است.»**

آیا گزارهٔ بالا درست است؟ چرا؟ از همنهشتی کدام دو مثلث استفاده می‌کنید؟

**مسئلهٔ اساسی ۱** **پاره‌خط $AB$ داده شده است. با استفاده از خط‌کش و پرگار، عمودمنصف آن را رسم کنید.**

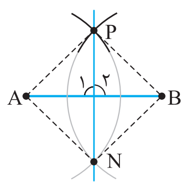



**حل** می‌خواهیم عمودمنصف $AB$ را رسم کنیم؛ یعنی خطی رسم کنیم که از وسط پاره‌خط $AB$ بگذرد و بر آن عمود باشد. برای این منظور به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

Ⓐ دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ دلخواه؛ ولی بیشتر از نصف $AB$، باز می‌کنیم و نوک پرگار را روی $A$ قرار می‌دهیم و کمانی می‌زنیم و بدون تغییر دهانهٔ پرگار، نوک آن را روی $B$ می‌گذاریم و کمان دیگری رسم می‌کنیم.

Ⓑ نقطهٔ برخورد این دو کمان را $P$ و $N$ می‌نامیم.

Ⓒ خطی که از دو نقطهٔ $P$ و $N$ می‌گذرد، عمودمنصف پاره‌خط $AB$ است.




**کمی تأمل!** در مسئلهٔ فوق، گفته شد و شما هم پذیرفتید که خط گذرنده از دو نقطهٔ $P$ و $N$، عمودمنصف پاره‌خط $AB$ است؛ اما آیا نباید از خودمان بپرسیم «چرا؟ و به چه دلیل؟».

برای این‌که دلیلی بیاوریم، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

اگر از نقطه‌های $P$ و $N$ به $A$ و $B$ وصل کنیم، آن‌گاه $AP = BP$ (زیرا شعاع‌های دو دایرهٔ برابر به مرکزهای $A$ و $B$ هستند)، پس نقطهٔ $P$ روی عمودمنصف $AB$ قرار دارد (زیرا $P$ از دو سر $AB$ به یک فاصله است.). به دلیل مشابه $AN = BN$، پس $N$ نیز روی عمودمنصف $AB$ است و در نتیجه خطی که از دو نقطهٔ $P$ و $N$ می‌گذرد، عمودمنصف $AB$ است.

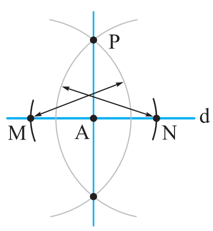
**مسئلهٔ اساسی ۲** **خطی عمود بر خط $d$ رسم کنید که از نقطهٔ مشخصی مانند $A$ واقع بر خط $d$ بگذرد.**

**حل** خط $d$ و نقطهٔ $A$ را واقع بر آن در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطهٔ $A$ بگذرد و بر خط $d$ عمود باشد. برای این منظور به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

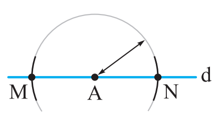
Ⓐ دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ دلخواه باز می‌کنیم و نوک پرگار را روی $A$ قرار می‌دهیم و کمانی می‌زنیم تا خط $d$ را در دو نقطهٔ $M$ و $N$ قطع کند. (شکل ۱)

Ⓑ دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ دلخواه ولی بیشتر از نصفِ طول $MN$ باز کرده و کمان‌هایی با شعاع برابر، به مرکزهای $M$ و $N$ رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ $P$ قطع کنند. (شکل ۲)

Ⓒ خطی که از $A$ و $P$ می‌گذرد، بر خط $d$ عمود است و خط موردنظر می‌باشد.




شکل ۲

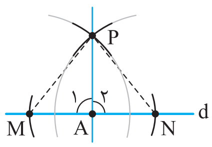



شکل ۱

**کمی تأمل!** در مسئلهٔ فوق ادعا شد که راستای $AP$ بر خط $d$ عمود است؛ اما شاید این سؤال برای شما پیش آید که «چرا و به چه دلیل، خطی که از دو نقطهٔ $P$ و $A$ می‌گذرد بر $d$ عمود است؟». برای اثبات، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

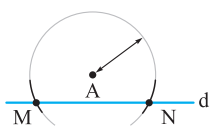
اگر از نقاط $M$ و $N$ به نقطهٔ $P$ وصل کنیم، آن‌گاه $AM = AN$ (زیرا این دو پاره‌خط، شعاع‌های دایره‌ای به مرکز $A$ هستند) و هم‌چنین $MP = NP$

(زیرا شعاع‌های دو دایرهٔ برابر به مرکزهای M و N می‌باشند) و AP در هر دو مثلث APM و APN مشترک است، پس این دو مثلث همنهشت هستند، در نتیجه دو زاویهٔ $\hat{A}_1$ و $\hat{A}_2$ برابرند و چون مجموع این دو زاویه، برابر ۱۸۰ درجه است، پس هر کدام ۹۰ درجه‌اند و در نتیجه AP بر خط d عمود است.

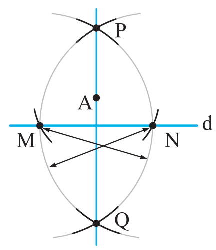



**مسئلهٔ اساسی۳ خط d و نقطهٔ A بیرون آن داده شده‌اند. خطی رسم کنید که از A بگذرد و بر d عمود باشد.**

**حل** به مرکز A، کمانی به شعاع دلخواه ولی بیشتر از فاصلهٔ A از خط d رسم می‌کنیم تا خط d را در دو نقطهٔ M و N قطع کند و سپس مرحله‌های (B) و (C) از مسئلهٔ اساسی ۲ را تکرار کنید. (شکل‌های ۱ و ۲ را نگاه کنید.) خطی که از A و نقاط برخورد این دو کمان می‌گذرد، خط مطلوب می‌باشد.




شکل۱

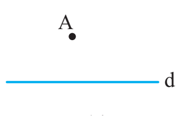



شکل۲

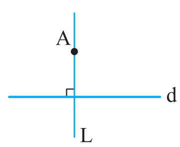
**کمی تأمل!** در مسئلهٔ اساسی ۳، دلیلی ارائه دهید که خط گذرنده از نقاط A و P بر خط d عمود است.

**مسئلهٔ اساسی۴ خط d و نقطهٔ A بیرون آن داده شده‌اند. خطی رسم کنید که از نقطهٔ A بگذرد و با خط d موازی باشد.**

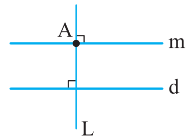
**حل** به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:




شکل (۱)




شکل (۲)




شکل (۳)

Ⓐ با توجه به روشی که در مسئلهٔ اساسی ۳ بیان شد، از نقطهٔ A، خطی عمود بر d رسم می‌کنیم و آن را L می‌نامیم. (شکل ۲)

Ⓑ با استفاده از روشی که در مسئلهٔ اساسی ۲ بیان شد، از نقطهٔ A، خطی عمود بر L رسم می‌کنیم و آن را m می‌نامیم. (شکل ۳)

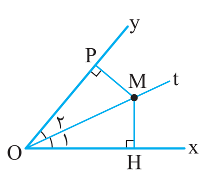
Ⓒ خط m همان خط مطلوب است؛ یعنی با d موازی است، زیرا دو خط d و m هر دو بر خط L عمود هستند.

## ویژگی‌های نیمساز

**قضیه** هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

حالا ببینیم که منظورِ قضیه چیست؟ در واقع، این قضیه می‌گوید:

اگر نقطهٔ M، نقطه‌ای **دلخواه** روی نیمساز زاویهٔ $x\hat{O}y$ باشد، آن‌گاه فاصله‌های این نقطه از دو ضلع Ox و Oy با هم برابر هستند؛ به بیان دیگر اگر از نقطهٔ M دو عمود بر دو ضلع این زاویه رسم شوند، آن‌گاه طول این دو عمود با هم برابرند. در این قضیه، فرض این است که «نقطه‌ای روی نیمساز قرار دارد» ولی حکم این است که باید ثابت کنیم «طول دو عمودی که از این نقطه بر دو ضلع زاویه رسم می‌شوند، برابرند».




**اثبات** با توجه به شکل مقابل که در آن Ot نیمساز زاویهٔ $x\hat{O}y$ است و نقطهٔ M روی آن قرار دارد، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ MOH و MOP به حالت برابری وتر و یک زاویهٔ حاده، همنهشت هستند، در نتیجه اجزای متناظر این دو مثلث نیز با هم برابرند، بنابراین $MH = MP$.

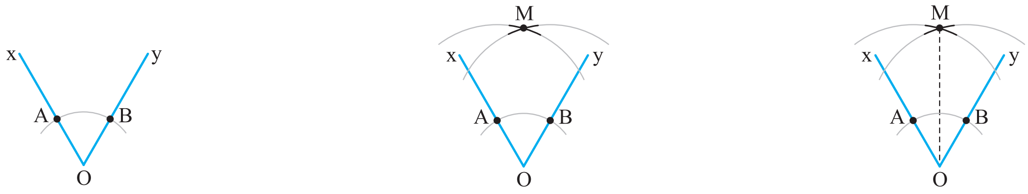
**پرسش** در قضیهٔ فوق، اگر جای فرض و حکم را عوض کنیم، عبارت زیر، به دست خواهد آمد:

**«اگر نقطه‌ای از دو ضلع زاویه‌ای به یک فاصله باشد، آن نقطه روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.»**

آیا گزارهٔ بالا درست است؟ چرا؟ از همنهشتی کدام دو مثلث استفاده کرده‌اید؟

**مسئلهٔ اساسی ۵** **زاویهٔ $x\hat{O}y$ داده شده است. نیمساز این زاویه را تنها با استفاده از خط‌کش و پرگار رسم کنید.**

**حل** به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:



شکل(۱) شکل(۲) شکل(۳)

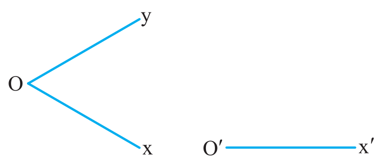
Ⓐ به مرکز O (رأس زاویه)، کمان دلخواهی رسم می‌کنیم تا دو ضلع زاویه را در دو نقطهٔ A و B قطع کند. (شکل ۱)

Ⓑ دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ دلخواه ولی بیشتر از نصف فاصلهٔ AB باز کرده و به مرکزهای A و B دو کمان رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کنند. (شکل ۲)

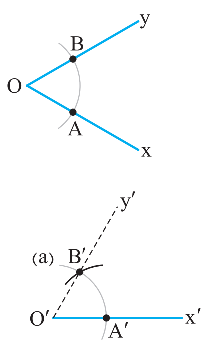
Ⓒ نقطهٔ M را به رأس زاویه، یعنی نقطهٔ O وصل می‌کنیم. راستای این خط، نیمساز زاویهٔ xOy است. (شکل ۳)

**کمی تأمل!** در مسئلهٔ اساسی ۵، ثابت کنید که خط گذرنده از نقاط O و M نیمساز زاویهٔ xOy است.

**مسئلهٔ اساسی ۶** **زاویهٔ $x\hat{O}y$ و نیم‌خط $O'x'$ داده شده‌اند. زاویه‌ای برابر با زاویهٔ $x\hat{O}y$ رسم کنید که رأس آن، نقطهٔ $O'$ و یک ضلع آن منطبق بر نیم‌خط $O'x'$ باشد.**



**حل** به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:



Ⓐ به مرکز O و شعاع دلخواه، کمانی رسم می‌کنیم تا دو ضلع زاویهٔ $x\hat{O}y$ را در دو نقطهٔ A و B قطع کند و بدون آن‌که دهانهٔ پرگار را تغییر دهیم، به مرکز $O'$ نیز کمانی رسم می‌کنیم تا $O'x'$ را در $A'$ قطع کند (در شکل، این کمان با نماد (a) نشان داده شده است.)

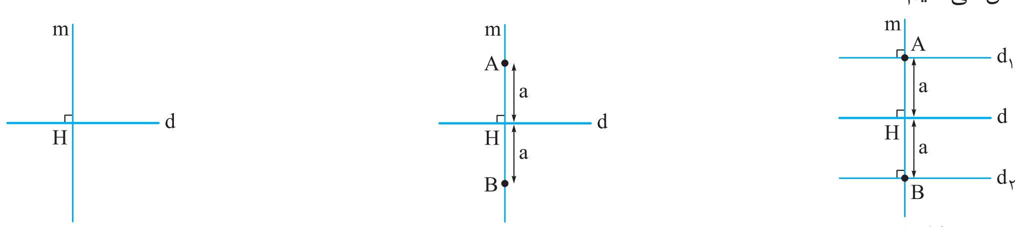
Ⓑ دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ AB باز می‌کنیم و به مرکز $A'$ کمانی به شعاع AB رسم می‌کنیم تا کمان (a) را در نقطه‌ای مانند $B'$ قطع کند.

Ⓒ از $O'$ به $B'$ وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا نیم‌خط $O'y'$ پدید آید. زاویهٔ $x'O'y'$ زاویهٔ موردنظر است.

**کمی تأمل!** در مسئلهٔ فوق، دلیلی برای مساوی‌بودن دو زاویه ارائه دهید.

**مثال** **خط d داده شده است. تمام نقاطی را پیدا کنید که از خط d به فاصلهٔ معلوم a باشند.**

**حل** به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:



شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)

Ⓐ خطی مانند m بر خط مفروض d عمود می‌کنیم و پای عمود را H می‌نامیم. (شکل ۱)

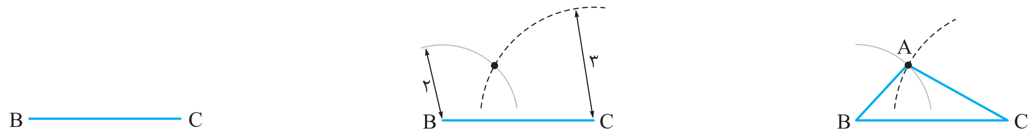
Ⓑ روی خط m و در دو طرف نقطهٔ H دو پاره‌خط AH و BH را به اندازهٔ معلوم a جدا می‌کنیم. (شکل ۲)

Ⓒ از دو نقطهٔ A و B دو خط $d_1$ و $d_2$ را بر m عمود می‌کنیم. (شکل ۳)

هر نقطه روی دو خط $d_1$ و $d_2$ فاصله‌اش از خط d، برابر a است و تمام نقاط واقع بر این دو خط، جواب مسئله هستند.

**مثال** **مثلث ABC را که در آن AB = ۲ ، AC = ۳ و BC = ۴ است، رسم کنید.**

**حل** ابتدا پاره‌خطی به اندازهٔ یکی از اضلاع مثلث؛ مثلاً BC = ۴ رسم می‌کنیم. باید نقطه‌ای مانند A پیدا کنیم که از نقطهٔ B به فاصلهٔ ۲ و از نقطهٔ C به فاصلهٔ ۳ باشد. برای این منظور به مرکز B و شعاع ۲، کمانی می‌زنیم و به مرکز C و شعاع ۳، کمان دیگری رسم می‌کنیم.



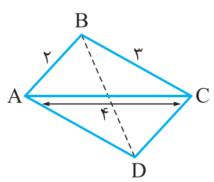

این دو کمان یکدیگر را در نقطهٔ A قطع می‌کنند. مثلث ABC همان مثلث موردنظر است.

**تذکرمهم** هرگاه طول‌های سه ضلع مثلثی معلوم باشند، به شرطی این مثلث قابل رسم است که طول بزرگ‌ترین ضلع آن، کوچک‌تر از مجموع طول‌های دو ضلع دیگر باشد. (در درس دوم و در قسمت نابرابری در مثلث، این موضوع ثابت خواهد شد.)

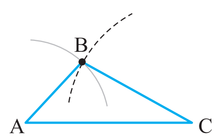
در مثال قبل، طول بزرگ‌ترین ضلع، برابر ۴ و مجموع دو ضلع دیگر برابر ۵ = ۳ + ۲ است و چون ۴ < ۵، پس این مثلث، قابل رسم است، در غیر این صورت دو کمانی که رسم می‌کنیم، یکدیگر را قطع نمی‌کنند یا بر هم مماس هستند و مسئله جواب ندارد.

**مثال** **اگر بدانیم در متوازی‌الاضلاع، قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند، متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول اضلاع آن ۲ و ۳ و طول یکی از قطرهای آن ۴ باشد.**

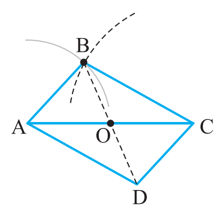
**حل** اگر فرض کنیم متوازی‌الاضلاع ABCD جواب مسئله باشد (شکل ۱)، آن‌گاه طول‌های سه ضلع مثلث ABC معلوم‌اند، پس همانند مثال قبل، قابل رسم می‌باشد. پس از رسم این مثلث (شکل۲) نقطهٔ وسط ضلع AC را O می‌نامیم و از B به O وصل می‌کنیم و به اندازهٔ خودش از طرف نقطهٔ O امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ D به دست آید. چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع موردنظر است (شکل۳).




شکل۱




شکل۲

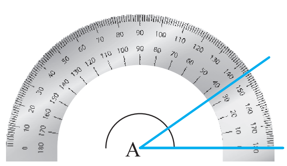



شکل۳

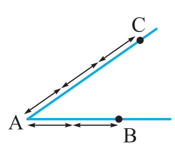
**مثال** **مثلثی رسم کنید که در آن AB = ۲ ، AC = ۳ و $\hat{A} = 35^\circ$ باشد.**

**حل** هرگاه از مثلثی طول دو ضلع و اندازهٔ زاویهٔ بین آن دو ضلع معلوم باشند، ابتدا زاویهٔ معلوم را با استفاده از نقاله رسم می‌کنیم، سپس روی یکی از اضلاع آن زاویه، به اندازهٔ طول یکی از اضلاع مثلث و روی ضلع دیگر زاویه، به اندازهٔ طول ضلع دوم مثلث جدا کرده و سرانجام دو نقطهٔ حاصل را به هم وصل می‌کنیم تا مثلث موردنظر پدید آید.

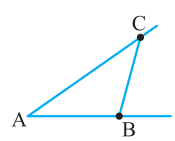
در شکل‌های زیر، ابتدا توسط نقاله، زاویهٔ $\hat{A}$ را برابر ۳۵ درجه رسم می‌کنیم (شکل ۱)، سپس روی یکی از اضلاع این زاویه، پاره‌خط AB را برابر ۲ واحد و روی ضلع دیگر، پاره‌خط AC را برابر ۳ واحد جدا می‌کنیم (شکل ۲) و سرانجام دو نقطهٔ B و C را به یکدیگر وصل می‌کنیم تا مثلث موردنظر به دست آید (شکل ۳).




شکل۱



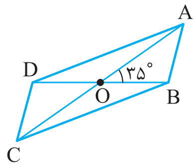

شکل۲



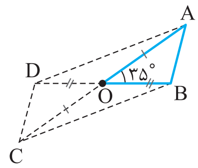

شکل۳

**مثال** **متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۴ و ۶ و زاویهٔ بین دو قطر، $۳۵^\circ$ باشد.**

**حل** اگر فرض کنیم متوازی‌الاضلاع ABCD جواب مسئله باشد (شکل ۱)، آن‌گاه در مثلث OAB زاویهٔ O برابر ۳۵ درجه، طول OA برابر ۳ و طول OB برابر ۲ است، پس این مثلث قابل رسم می‌باشد (مثلثِ مثالِ قبل)، پس از رسم این مثلث، OA و OB را از طرف نقطهٔ O به اندازهٔ خودشان امتداد می‌دهیم تا به ترتیب نقاط C و D به دست آیند (شکل ۲)، چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع موردنظر است.



شکل ۱

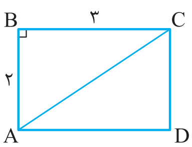


شکل ۲

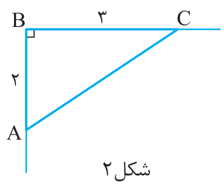
**مثال** **اگر بدانیم در مستطیل، قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند و با هم برابر هستند، مستطیلی رسم کنید که طول اضلاع آن ۲ و ۳ باشند.**

**حل** اگر فرض کنیم مستطیل ABCD جواب مسئله باشد (شکل ۱)، آن‌گاه در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، طول دو ضلع آن معلوم و زاویهٔ بین این دو ضلع قائمه است، پس این مثلث قابل رسم می‌باشد. برای رسم این مثلث، ابتدا دو خط عمود بر هم رسم می‌کنیم و رأس آن را B می‌نامیم. روی یکی از این دو خط، پاره‌خط AB را به اندازهٔ ۲ و روی خط دیگر، BC را برابر ۳ جدا می‌کنیم تا مثلث ABC به دست آید. (شکل ۲).

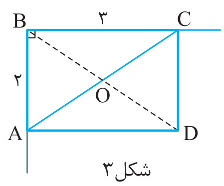
اگر O وسط AC باشد، از B به O وصل می‌کنیم و از طرف O به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ D به دست آید. چهارضلعی ABCD مستطیل موردنظر است (شکل ۳).



شکل ۱



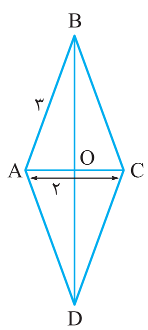
شکل ۲



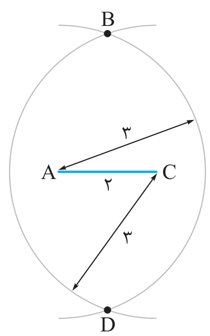
شکل ۳

**مثال** **اگر بدانیم در لوزی، قطرها بر هم عمودند و یکدیگر را نصف می‌کنند، لوزی‌ای رسم کنید که طول ضلع آن ۳ و طول یکی از قطرهای آن ۲ باشد.**

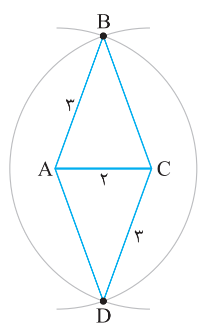
**حل** اگر فرض کنیم لوزی ABCD جواب مسئله باشد (شکل ۱)، آن‌گاه قطر BD عمودمنصف پاره‌خط AC است، پس برای رسم لوزی مفروض، ابتدا پاره‌خط AC را به اندازهٔ ۲ واحد رسم می‌کنیم، سپس به مرکزهای A و C دو کمان به شعاع ۳ واحد رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقاط B و D قطع کنند (شکل ۲).



شکل ۱



شکل ۲



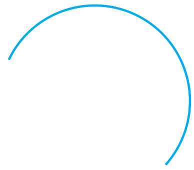
شکل ۳

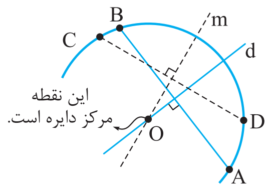
چهارضلعی ABCD همان لوزی موردنظر است (شکل ۳).

**مثال** **اکبر با پرگار، قسمتی از یک دایره را رسم کرده؛ ولی نقطهٔ مرکز دایره، پاک شده است. چگونه می‌تواند مرکز دایره را پیدا کند؟**

**حل** می‌دانیم اگر دو سر یک وتر از دایره را به مرکز دایره وصل کنیم، طول هر یک از دو پاره‌خط، مساوی شعاع دایره است و در نتیجه برابرند؛ یعنی مرکز دایره روی عمودمنصف وتر دایره قرار دارد.

اگر دو نقطهٔ دلخواه مانند A و B را از دایره‌ای که اکبر رسم کرده است اختیار کنیم و عمودمنصف AB را رسم کرده و آن را d بنامیم، آن‌گاه مرکز دایره‌ای که رسم کرده روی خط d قرار دارد. اکنون دو نقطهٔ دلخواه دیگر مانند C و D را طوری انتخاب می‌کنیم که CD موازی AB نباشد. عمودمنصف پاره‌خط CD را رسم می‌کنیم و آن را m می‌نامیم، پس مرکز دایره روی خط m قرار دارد. نقطهٔ برخورد دو خط d و m مرکز دایره است. (شکل ۲).


شکل۱

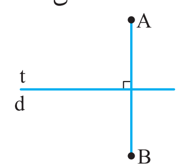


شکل۲

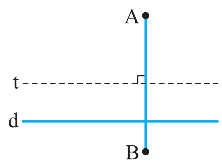
**پرسش** چرا وتر CD نباید موازی وتر AB باشد؟

**مثال** **دو نقطهٔ A و B و خط d در یک صفحه واقع‌اند. نقطه‌ای روی خط d بیابید که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد. (در تعداد جواب‌ها بحث کنید.)**

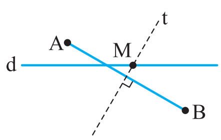
**حل** نقاطی که از A و B به یک فاصله باشند، روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارند. اگر عمودمنصف AB را رسم کنیم و آن را خط t بنامیم، سه حالت ممکن است رخ دهد:



خط d بر عمودمنصف AB منطبق است و مسئله بی‌شمار جواب دارد.
(شکل۳)



خط d با عمودمنصف AB موازی است و مسئله جواب ندارد.
(شکل۲)



خط d عمودمنصف AB را در نقطهٔ M قطع‌کرده و M جواب مسئله است.
(شکل۱)

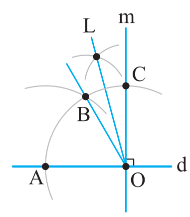
**الف** **خط t با خط d متقاطع است:** در این صورت نقطهٔ تقاطع، جواب مسئله است و مسئله یک جواب دارد. (شکل ۱)

**ب** **خط t با خط d موازی و متمایز از آن است:** در این صورت مسئله جواب ندارد. (شکل ۲)

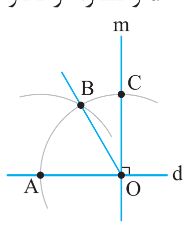
**پ** **خط t بر خط d منطبق است:** در این حالت، هر نقطه از d، جواب مسئله است و مسئله بی‌شمار جواب دارد. (شکل ۳)

**مثال** **با استفاده از خط‌کش و پرگار، زاویه‌ای برابر $105^\circ$ رسم کنید.**

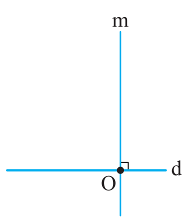
**حل** خط دلخواه d را رسم می‌کنیم و نقطهٔ دلخواه O را روی آن در نظر می‌گیریم. از نقطهٔ O خط m را عمود بر d رسم می‌کنیم (شکل ۱).
به مرکز O و شعاع دلخواه R کمانی رسم می‌کنیم تا دو خط d و m را در A و C قطع کند.



شکل (۳)



شکل (۲)



شکل (۱)

اکنون به مرکز A و همان شعاع R کمانی می‌زنیم تا کمان اول را در B قطع کند. (شکل ۲)

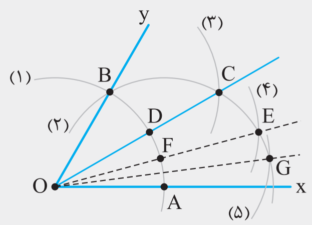
اگر O به B وصل کنیم، چون مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است، پس $\hat{AOB}$ برابر $60^\circ$، بنابراین $\hat{BOC}$ برابر $30^\circ$ است.

اینک نیمساز این زاویه را رسم می‌کنیم تا زاویه‌ای $15^\circ$ حاصل شود. زاویهٔ $\hat{dOL}$، برابر $105^\circ = 15^\circ + 90^\circ$ است.

**تست** **اگر بخواهیم با استفاده از خط‌کش و پرگار روی نیم‌خط Ox زاویه‌ای ۷/۵ درجه رسم کنیم که رأس آن، نقطهٔ O باشد، دست‌کم چند کمان باید رسم کنیم؟**

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

**پاسخ** **گزینهٔ ۳** ابتدا به مرکز O و شعاع دلخواه R قوسی می‌زنیم تا نیم‌خط Ox را در A قطع کند و به مرکز A و شعاع R نیز قوسی می‌زنیم تا قوس اول را در B قطع کند؛ زاویهٔ $A\hat{O}B$ برابر $60^\circ$ است (تا حالا دو کمان). به مرکز B و شعاع R، قوسی می‌زنیم تا قوس دوم را در C قطع کند. زاویهٔ $x\hat{O}C$ برابر با $30^\circ$ است (تا حالا سه قوس).



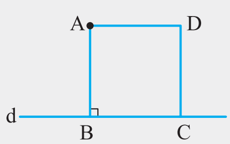

اگر نقطهٔ برخورد OC با کمان (۱) را D بنامیم و به مرکز D و شعاع R، قوس دیگری مانند (۴) رسم کنیم تا قوس (۲) را در E قطع کند. $x\hat{O}E$ برابر $15^\circ$ است (چهار قوس).

اگر نقطهٔ برخورد OE با قوس (۱) را F بنامیم و به مرکز F و شعاع R، قوسی مانند (۵) رسم کنیم تا قوس (۲) را در G قطع کند. زاویهٔ $x\hat{O}G$ برابر ۷/۵ درجه است، در نتیجه حداقل به پنج کمان نیازمندیم.

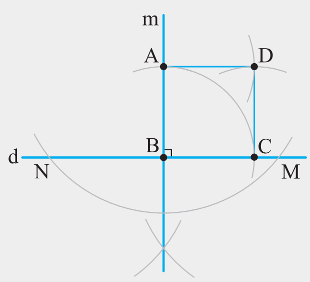
**تست** **خط d و نقطهٔ A بیرون آن داده شده است. اگر بخواهیم با استفاده از خط‌کش و پرگار مربعی رسم کنیم که یک رأس آن نقطهٔ A و یک ضلع آن منطبق بر خط d باشد، دست‌کم به چند کمان نیاز داریم؟**

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۹

**پاسخ** **گزینهٔ ۲** می‌خواهیم مربعی رسم کنیم که یک رأس آن A و یک ضلع آن منطبق بر d باشد. اگر مربع ABCD جواب مسئله باشد، چون AB بر d عمود است، ابتدا از A، عمودی بر d رسم می‌کنیم و آن را m می‌نامیم. برای این منظور به سه کمان نیازمندیم (شکل ۲). اگر B نقطهٔ برخورد m و d باشد، آن‌گاه به مرکز B و شعاع AB کمانی رسم می‌کنیم تا خط d را در C قطع کند (تا این‌جا چهار کمان). به مرکزهای A و C و شعاع AB دو کمان دیگر رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در D قطع کنند (شش کمان). ABCD مربع موردنظر است، پس دست‌کم باید ۶ کمان رسم کنیم.



شکل (۱)

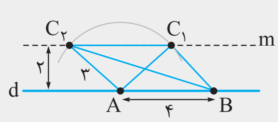


شکل (۲)

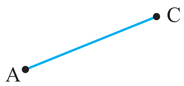
**تست** **خط d و نقطهٔ A روی آن داده شده است. می‌خواهیم مثلثی مانند ABC رسم کنیم که در آن، ضلع $AB = 4$ روی خط d، $AC = 3$ و ارتفاع نظیر رأس C، برابر ۲ باشد. چند مثلث غیرهمنهشت می‌توان رسم نمود؟**

۱) هیچ ۲) فقط یکی ۳) فقط دوتا ۴) بی‌شمار

**پاسخ** **گزینهٔ ۳** روی خط d، پاره‌خط AB را به اندازهٔ ۴ واحد جدا می‌کنیم. به مرکز A و شعاع $AC = 3$ کمانی رسم می‌کنیم، رأس C روی این کمان است. خطی مانند m به موازات d و به فاصلهٔ ۲ از آن رسم می‌کنیم، رأس C نیز روی خط m است، پس نقطهٔ برخورد این خط با کمان رسم‌شده، رأس C خواهد بود. ملاحظه می‌شود که دو نقطهٔ برخورد دارند ($C_1$ و $C_2$). دو مثلث $ABC_1$ و $ABC_2$ جواب‌های مسئله هستند (این دو مثلث همنهشت نیستند).



## مسائل تشریحی درس ۱




۱- پاره‌خط AC داده شده است. مربعی رسم کنید که این پاره‌خط، یکی از قطرهای آن باشد.

۲- مستطیلی رسم کنید که طول قطر آن ۴ و طول یکی از اضلاع آن ۳ باشد.

۳- مثلث ABC و نیم‌خط $A'x$ داده شده‌اند مثلثی همنهشت با مثلث ABC رسم کنید که یک رأس آن $A'$ و رأس دیگر آن روی $A'x$ باشد.

۴- خط d و نقطهٔ A بیرون این خط داده شده است. اگر فقط یک خط‌کش مدرج در دسترس باشد، خطی موازی با d رسم کنید که نقطهٔ A از آن دو خط به یک فاصله باشد.

۵- خط d و نقطهٔ A بیرون آن داده شده است. چگونگی رسم قرینهٔ نقطهٔ A را نسبت به خط d تنها با استفاده از پرگار و خط‌کش بیان کنید.

۶- نیم‌خط Ox داده شده است. با استفاده از پرگار و خط‌کش، زاویه‌ای برابر ۶۰ درجه رسم کنید که رأس آن نقطهٔ O و یک ضلع آن بر Ox منطبق باشد.

۷- با استفاده از خط‌کش و پرگار، زاویه‌ای با اندازهٔ ۷۵ درجه رسم کنید.

۸- زاویهٔ $x\hat{O}y$ داده شده است. نقطه‌ای روی نیم‌خط Oy چنان بیابید که از Ox به فاصلهٔ ۳ باشد.

۹- خط d و نقطهٔ A بیرون آن داده شده‌اند. مربعی به طول ضلع ۴ چنان رسم کنید که یک رأس آن نقطهٔ A و یک ضلع آن موازی خط d باشد.

۱۰- از مثلث ABC، اندازه‌های $BC = a$ ، $AB + AC = c + b$ و $\hat{A} = \alpha$ معلوم‌اند ($c + b > a$). چگونگی رسم این مثلث را بیان کنید و دربارهٔ تعداد جواب‌ها بحث کنید.

## پرسش‌های چندگزینه‌ای درس ۱

۱- زاویهٔ $x\hat{O}y$ داده شده است. اگر بخواهیم توسط خط‌کش و پرگار، زاویه‌ای برابر $\frac{1}{4}$ این زاویه روی نیم‌خط Ox بنا کنیم، دست‌کم چند کمان باید رسم کنیم؟

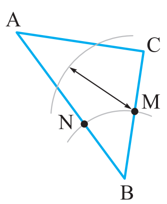
۱) سه ۲) چهار ۳) پنج ۴) شش

۲- پاره‌خط MN داده شده است. اگر بخواهیم با استفاده از خط‌کش و پرگار، مربعی رسم کنیم که یک قطر آن پاره‌خط MN باشد، دست‌کم چند کمان باید رسم شود؟

۱) سه ۲) چهار ۳) پنج ۴) دو

۳- پاره‌خط AB داده شده است. اگر بخواهیم با استفاده از خط‌کش و پرگار روی آن پاره‌خطی به طول $\frac{1}{8}AB$ تشکیل دهیم، حداقل چند کمان باید رسم شود؟

۱) سه ۲) چهار ۳) شش ۴) هشت



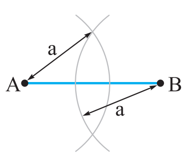

۴- اگر نمودار مقابل، شکلی باشد که محمد تا این‌جا رسم کرده است. هدف محمد رسم کدام گزینهٔ زیر است؟

۱) می‌خواهد خطی عمود بر AC رسم کند.

۲) می‌خواهد خطی رسم کند که از وسط AC بگذرد.

۳) می‌خواهد زاویه‌ای مساوی با زاویهٔ B رسم کند.

۴) می‌خواهد نیمساز زاویهٔ B را رسم کند.




۵- با توجه به شکل مقابل، کدام جزء هندسی را می‌خواهیم رسم کنیم؟ $(a > \frac{AB}{2})$

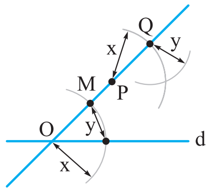
۱) نیمساز یک زاویه ۲) خطی موازی با پاره‌خط AB

۳) رسم زاویه‌ای مساوی با یک زاویهٔ معلوم ۴) عمودمنصف پاره‌خط AB

۶- پاره‌خط AB مفروض است. به مرکزهای A و B دو کمان با شعاعی برابر AB رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کنند. مثلث ABM چه نوع مثلثی است؟

۱) قائم‌الزاویه ۲) مثلثی با زاویهٔ $120^\circ$ ۳) فقط متساوی‌الساقین ۴) متساوی‌الاضلاع

**۷- بهرام با استفاده از خط‌کش و پرگار، شکل زیر را تا این مرحله رسم کرده است. کدام گزینه هدف بهرام را توصیف می‌کند؟**



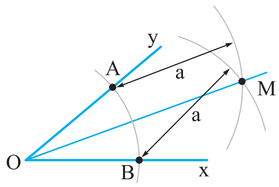

۱) می‌خواهد از نقطهٔ Q خطی عمود بر d رسم کند.

۲) می‌خواهد از نقطهٔ P خطی عمود بر d رسم کند.

۳) می‌خواهد از نقطهٔ P خطی موازی با d رسم کند.

۴) می‌خواهد از نقطهٔ M خطی موازی با d رسم کند.

**۸- در شکل زیر، زاویهٔ $x\hat{O}y$ داده شده است. با توجه به شکل، اولین گام در رسم نیمساز زاویهٔ $x\hat{O}y$ مطابق کدام گزینه است؟**



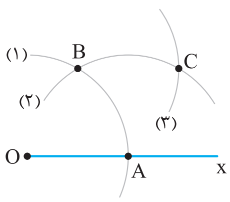

۱) رسم خط OM

۲) رسم پاره‌خط AB

۳) رسم دو کمان با شعاع برابر به مرکزهای A و B تا در M برخورد کنند.

۴) رسم کمانی با شعاع دلخواه به مرکز نقطهٔ O تا دو ضلع زاویه را در A و B قطع کند.

**۹- نیم‌خط Ox را در نظر بگیرید. به مرکز O و شعاع R کمان (۱) را رسم می‌کنیم تا Ox را در A قطع کند. سپس به مرکز A و شعاع R کمان (۲) را رسم می‌کنیم تا کمان (۱) را در نقطهٔ B قطع کند. سرانجام به مرکز B و شعاع R کمان (۳) را رسم می‌کنیم تا کمان (۲) را در نقطهٔ C قطع کند. اندازهٔ زاویهٔ $A\hat{O}C$ چند درجه است؟**



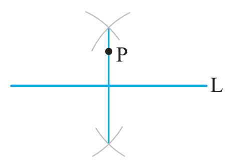

۱) ۳۰

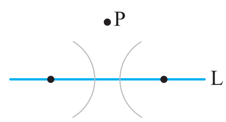
۲) ۲۲/۵

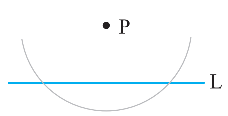
۳) ۴۵

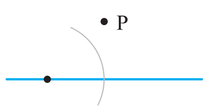
۴) بسته به اندازهٔ R هر مقداری حاده می‌تواند باشد.

**۱۰- سعید می‌خواهد از نقطهٔ P بیرون خط L، خطی بر L عمود کند. کدام گزینه، اولین گام برای رسم است؟**

۱) 


۲) 


۳) 

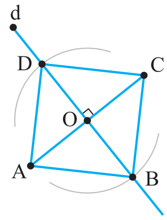

۴) 


**۱۱- فردی تصمیم دارد در حیاط ویلایش ظرفی آب‌خوری برای پرندگانش قرار دهد، طوری که فاصلهٔ ظرف آب از حصار جلوی ویلا، برابر ۲ متر و فاصله‌اش از لامپی که در فاصلهٔ ۵ متری حصار قرار دارد نیز ۴ متر باشد. چند نقطه برای ظرف آب‌خوری وجود دارد؟**

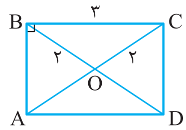
۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار

## پاسخ مسائل تشریحی فصل اول

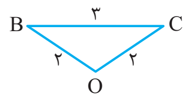
۱- ابتدا عمودمنصف پاره‌خط AC را رسم می‌کنیم و آن را d و نقطهٔ برخورد d با AC را O می‌نامیم. اکنون کمانی به مرکز O و شعاع $OA=OC$ رسم می‌کنیم تا خط d را در دو نقطهٔ B و D قطع کند. چهارضلعی ABCD مربع موردنظراست.



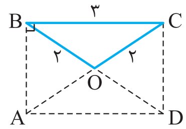

۲- چون قطرهای مستطیل با هم برابر و یکدیگر را نصف می‌کنند، با توجه به شکل (۱)، طول هر سه ضلع مثلث OBC، معلوم‌اند (طول‌های اضلاع این مثلث ۲، ۲ و ۳ هستند)، پس این مثلث قابل رسم است. پس از رسم این مثلث، (شکل ۲) دو پاره‌خط OB و OC را از طرف O به اندازهٔ خودشان امتداد می‌دهیم تا نقاط D و A پدید آیند. چهارضلعی ABCD همان مستطیل موردنظر است (شکل ۳).



شکل ۱



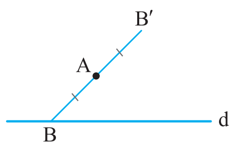
شکل ۲



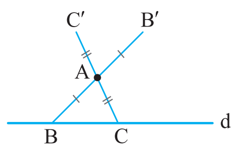
شکل ۳

۳- با روشی که در مسئلهٔ اساسی ۵ بیان شد، زاویه‌ای برابر با زاویهٔ A رسم می‌کنیم که رأس آن $A'$ و یک ضلع آن بر $A'x$ منطبق باشد. روی $A'x$ پاره‌خط $A'B'$ را برابر AB و روی ضلع دیگر زاویهٔ $A'$، پاره‌خط $A'C'$ را برابر AC رسم می‌کنیم. مثلث $A'B'C'$ جواب مسئله است.

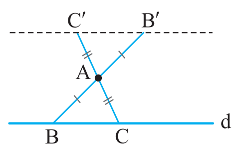
۴- نقطهٔ دلخواه B را روی خط d در نظر می‌گیریم و در امتداد AB و از طرف نقطهٔ A پاره‌خط $AB'$ را برابر با AB جدا می‌کنیم (شکل ۱). اکنون نقطهٔ دلخواه دیگری مانند C (به‌جز B) روی خط d اختیار می‌کنیم و در امتداد AC و از طرف نقطهٔ A پاره‌خط $AC'$ را برابر با AC جدا می‌کنیم (شکل ۲). خطی که از دو نقطهٔ $B'$ و $C'$ می‌گذرد جواب مسئله است (شکل ۳)؛ زیرا در چهارضلعی $BCB'C'$ قطرها یکدیگر را نصف کرده‌اند، پس این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است و در نتیجه $B'C' \parallel BC$ و A از این دو خط به یک فاصله است.



شکل ۱

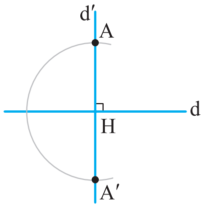


شکل ۲

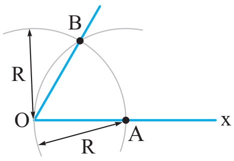


شکل ۳

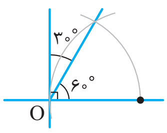
۵- با روشی که در مسئلهٔ اساسی ۳ بیان شد، از نقطهٔ A عمودی بر خط d رسم می‌کنیم. این خط را $d'$ و نقطهٔ برخورد آن را با خط d، نقطهٔ H می‌نامیم. اکنون به مرکز H و شعاع AH کمانی رسم می‌کنیم تا $d'$ را در نقطهٔ دیگری مانند $A'$ قطع کند. $A'$ جواب مسئله است.




۶- به مرکز O و شعاع دلخواه R، کمانی رسم می‌کنیم تا Ox را در نقطهٔ A قطع کند. اکنون به مرکز A و همان شعاع R، کمان دیگری رسم می‌کنیم تا کمان اولی را در نقطهٔ B قطع کند. زاویهٔ AOB جواب مسئله است، زیرا مثلث AOB، مثلثی متساوی‌الاضلاع است.

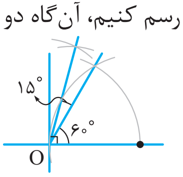



۷- ابتدا با خط‌کش و پرگار دو خط عمود بر هم رسم می‌کنیم و مانند مسئلهٔ فوق (مسئلهٔ ۶)، روی یکی از اضلاع این زاویه، زاویهٔ ۶۰ درجه بنا می‌کنیم. زاویهٔ باقی‌مانده، برابر ۳۰ درجه است. (شکل ۱)



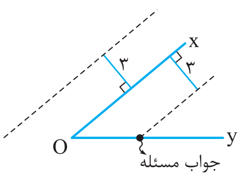
شکل (۱)

اگر با روش مسئلهٔ اساسی ۴، نیمساز این زاویه را رسم کنیم، آن‌گاه دو زاویه با اندازهٔ ۱۵ درجه پدید می‌آیند. یکی از این دو زاویه که مجاور زاویهٔ ۶۰ درجه است با این زاویه، تشکیل زاویهٔ ۷۵ درجه می‌دهد. (شکل ۲)

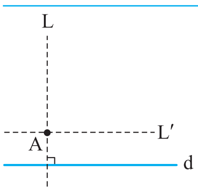


شکل (۲)

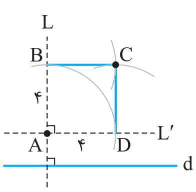
۸- خطی موازی با Ox و به فاصلهٔ ۳ از آن رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این خط با نیم‌خط Oy جواب مسئله است. توجه کنید که در صورت مسئله نقطهٔ موردنظر روی Oy است و نه در امتداد آن.




۹- با استفاده از خط‌کش و پرگار از A خط L را عمود بر d و از نقطهٔ A، خط $L'$ را موازی با d رسم می‌کنیم. روی خط L و $L'$ به ترتیب پاره‌خط‌های AB و AD را با طول ۴ اختیار می‌کنیم، سپس به مرکزهای B و D و شعاع ۴، قوسی می‌زنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ C قطع کنند (شکل ۲). چهارضلعی ABCD مربع موردنظر است.



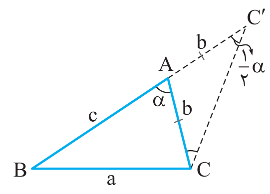
شکل (۱)



شکل (۲)

۱۰- اگر مسئله را حل‌شده فرض کنیم و مثلث $ABC$ جواب مسئله باشد، اگر در امتداد $AB$ و از طرف رأس $A$ پاره‌خط $AC'$ را به اندازهٔ $AC$ امتداد دهیم، آن‌گاه مثلث $ACC'$ در رأس $A$ متساوی‌الساقین است.

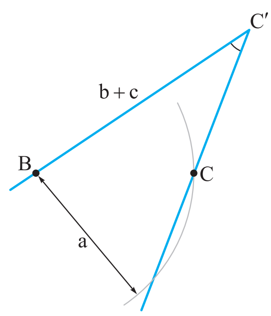
زاویهٔ $\hat{A}=\alpha$ زاویهٔ خارجی مثلث $ACC'$ است، پس $\hat{C}'=\frac{1}{2}\alpha$ و ضمناً $BC'=b+c$. (شکل ۱)



شکل ۱

اکنون در مثلث $BCC'$، ضلع‌های $BC'=b+c$ و $BC=a$ و زاویهٔ $\hat{C}'=\frac{1}{2}\alpha$ معلوم‌اند.

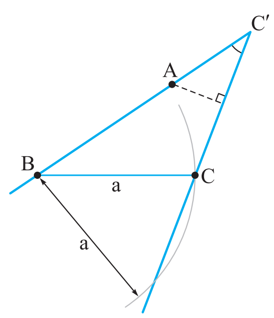
برای رسم این مثلث، ابتدا زاویه‌ای به رأس $C'$ و اندازهٔ $\frac{1}{2}\alpha$ رسم می‌کنیم. روی یکی از اضلاع این زاویه، پاره‌خط $BC'$ را برابر مقدار معلوم $b+c$ جدا می‌کنیم. اینک به مرکز $B$ و شعاع $a$ کمانی رسم می‌کنیم؛ نقطهٔ برخورد این کمان با ضلع دیگر زاویه، نقطهٔ $C$ است (شکل ۲).



شکل ۲

عمودمنصف $CC'$ را رسم می‌کنیم تا $BC'$ را در $A$ قطع کند. مثلث $ABC$ جواب مسئله است (شکل ۳).

اگر کمانی که به مرکز $B$ و شعاع $a$ رسم می‌شود، ضلع دیگرِ زاویهٔ $C'$ را در دو، یک یا هیچ نقطه قطع کند، آن‌گاه مسئله، دو، یک و یا هیچ جواب دارد.

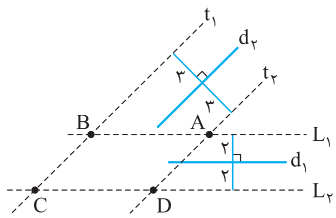


شکل ۳

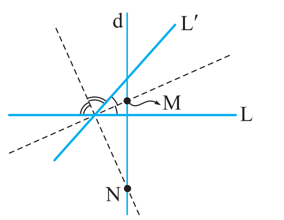
۱۱- نقطه‌ای که از سه نقطهٔ غیرواقع بر یک راستا، به یک فاصله باشد، نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های مثلثی است که با آن سه نقطه تشکیل می‌شود، پس کافی است دو عمودمنصف اضلاع مثلث $ABC$ را رسم کنیم تا یکدیگر را در $O$ قطع کنند؛ $O$ جواب یکتای مسئله است.

۱۲- نقطه‌ای که از سه خط غیرهمرس که دوبه‌دو متقاطع‌اند، به یک فاصله باشد، نقطهٔ همرسی سه نیمساز زاویه‌های مثلثی است که با آن سه خط تشکیل می‌شود، پس این نقطه، نقطهٔ همرسی سه نیمساز درونی و یا نقطهٔ همرسی دو نیمساز بیرونی و نیمساز درونی رأس سوم مثلثی است که با این سه خط تشکیل می‌شود و در نتیجه مسئله دارای چهار جواب است.

۱۳- می‌دانیم تمام نقاطی که به فاصلهٔ ۲ از خط $d_1$ باشند، دو خط موازی با $d_1$ هستند که آن‌ها را خط‌های $L_1$ و $L_2$ می‌نامیم. همچنین خط‌هایی که از خط $d_2$ به فاصلهٔ ۳ باشند، دو خط موازی با $d_2$ هستند که آن‌ها را $t_1$ و $t_2$ می‌نامیم. نقطه‌های برخورد این چهار خط، جواب‌های مسئله هستند.

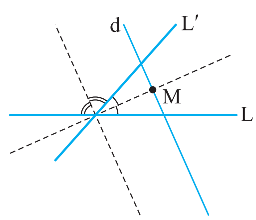


۱۴- نقاطی که از دو خط متقاطع $L$ و $L'$ به یک فاصله هستند دو نیمساز زاویه‌هایی هستند که با این دو خط تشکیل می‌شوند. اگر خط $d$ این دو نیمساز را در دو نقطهٔ متمایز قطع کند، مسئله دارای دو جواب است (شکل ۱). چنان‌چه خط $d$ با یکی از این دو نیمساز، موازی باشد ولی بر آن منطبق نباشد، مسئله یک جواب دارد (شکل ۲) و اگر خط $d$ بر یکی از دو نیمساز منطبق باشد، مسئله بی‌شمار جواب دارد (شکل ۳). اگر خط $d$ از نقطهٔ برخورد $L$ و $L'$ بگذرد ولی بر هیچ‌یک از دو نیمساز زاویه‌های بین این دو خط، منطبق نباشد، آن‌گاه مسئله یک جواب دارد که همان نقطهٔ برخورد دو خط $L$ و $L'$ است. (شکل ۴)



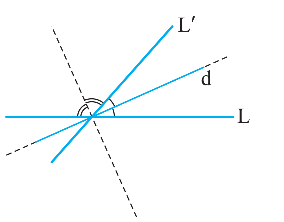
خط $d$ هردو نیمساز را قطع می‌کند.

شکل (۱)



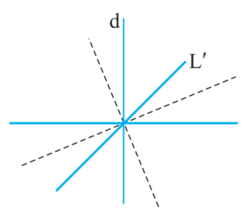
خط $d$ موازی یکی از نیمسازهاست، ولی بر آن منطبق نیست.

شکل (۲)



خط $d$ بریکی از نیمسازها منطبق است.

شکل (۳)



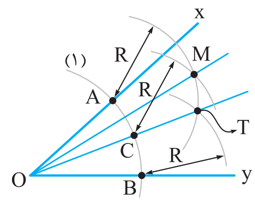
خط $d$ از نقطهٔ برخورد $L$ و $L'$ می‌گذرد.

شکل (۴)

۱۵- مجموعهٔ نقاطی که از دو خط متقاطع $d$ و $d'$ به یک فاصله هستند بر روی نیمسازهای زوایای حاصل از این دو خط قرار دارند. نقطهٔ برخورد دایره با هر یک از این نیمسازها جواب مسئله است.

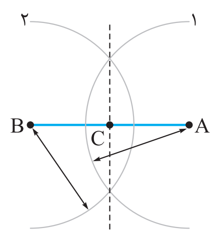
## پاسخ پرسش‌های چندگزینه‌ای فصل اول

۱- گزینهٔ۲ ابتدا کمانی به مرکز O و شعاع دلخواه رسم می‌کنیم (کمان ۱) تا اضلاع زاویه را در A و B قطع کند. اینک دو کمان به مرکزهای A و B و شعاع دلخواه R که بیشتر از نصف AB باشد، رسم می‌کنیم و O را به نقطهٔ برخورد این دو کمان (یعنی نقطهٔ T) وصل می‌کنیم تا زاویه نصف شود. نقطهٔ برخورد کمان (۱) با OT را C می‌نامیم. اکنون به مرکز C و شعاع R کمان دیگری رسم می‌کنیم تا کمان به مرکز A را در M قطع کند. زاویهٔ MOx زاویهٔ مطلوب است. ملاحظه می‌شود که دست کم به رسم چهار کمان نیاز داریم.



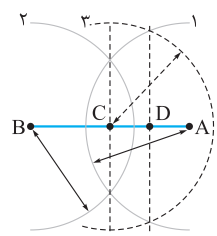

۲- گزینهٔ۱ ابتدا عمودمنصف پاره‌خط MN را رسم می‌کنیم و آن را d و نقطهٔ برخورد d را با MN، O می‌نامیم، تا این‌جا به دو کمان نیاز داریم. اکنون کمانی به مرکز O و شعاع $OM = ON$ رسم می‌کنیم تا خط d را در دو نقطهٔP و Q قطع کند. برای این منظور نیز به یک کمان نیاز داریم. چهارضلعی MPNQ مربع مورد نظراست، پس دست کم به سه کمان نیاز داریم.

۳- گزینهٔ۲ ابتدا به مرکزهای A و B و شعاع بیشتر از نصف AB دو کمان (۱) و (۲) را رسم می‌کنیم و نقاط برخورد دو کمان را به هم وصل می‌کنیم تا AB را در C قطع کند. C وسط AB است (شکل ۱) واضح است که AC نصف AB است.



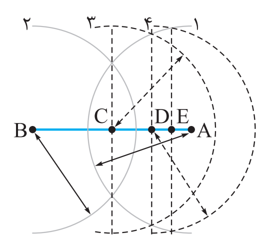
شکل ۱

اکنون به مرکز C و همان شعاع قبلی، کمان (۳) را رسم می‌کنیم تا کمان (۱) را در دو نقطه قطع کند و خطی را که از این دو نقطه می‌گذرد رسم می‌کنیم تا AC را در D قطع کند. D وسط AC است (شکل ۲) و ضمناً AD یک‌چهارم AB است.



شکل ۲

سرانجام به مرکز D و همان شعاع قبلی، کمان (۴) را رسم می‌کنیم تا کمان (۱) را در دو نقطه قطع کند و خطی از این دو نقطه رسم می‌کنیم تا AD را در E قطع کند. E وسط AD است (شکل ۳) و ضمناً AE یک‌هشتم AB است. پس در مجموع دست کم به چهار کمان نیاز داریم.



شکل ۳

۴- گزینهٔ۴ با توجه به چگونگی رسم نیمساز یک زاویه، در واقع محمد می‌خواهد نیمساز زاویهٔ B را رسم کند.

۵- گزینهٔ۴ با توجه به چگونگی رسم عمودمنصف یک پاره‌خط، می‌خواهیم عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنیم.

۶- گزینهٔ۴ چون $MA = MB = AB$ است، پس این مثلث، متساوی‌الاضلاع می‌باشد.

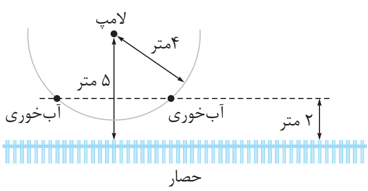
۷- گزینهٔ۳ در واقع می‌خواهد زاویه‌ای مساوی با زاویهٔ O به رأس P رسم کند که یک ضلع آن منطبق بر راستای QP باشد و در این صورت، خطی که از P و نقطهٔ برخورد دو کمانی که در بالای شکل قرار دارند، می‌گذرد با خط d موازی است، در نتیجه بهرام می‌خواهد از نقطهٔ P خطی موازی با d رسم کند.

۸- گزینهٔ۴ اولین گام در رسم نیمساز یک زاویه، رسم کمانی با شعاع دلخواه به مرکزِ رأس آن زاویه است.

۹- گزینهٔ۱ چون شعاع کمان‌ها با یکدیگر برابر هستند، پس مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است و زاویهٔ AOB برابر ۶۰ درجه است. با توجه به چگونگی رسم نیمساز یک زاویه، مشخص می‌شود که OC نیمساز زاویهٔ AOB است و در نتیجه $\hat{AOC} = ۳۰^\circ$.

۱۰- گزینهٔ۳ با توجه به چگونگی رسم خطی عمود بر خط L که از نقطهٔ P بگذرد، ابتدا باید کمانی به مرکز P و شعاعی دلخواه ولی بیشتر از فاصلهٔ P از L، رسم کنیم.

۱۱- گزینهٔ۳ خطی به موازات حصار و به فاصلهٔ ۲ متر از آن و در داخل ویلا رسم می‌کنیم.




به مرکز نقطه‌ای که لامپ در آن قرار دارد و شعاع ۴ متر نیز دایره‌ای رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد آن خط و این دایره، جای ظرف آب‌خوری را مشخص می‌کند. با توجه به شکل، مشاهده می‌شود که دو نقطه برای ظرف آب‌خوری یافت می‌شود.

۱۲- گزینهٔ۳ در گزینه‌های (۱) و (۳) جای فرض و حکم عوض شده است و عکس گزارهٔ شرطی حاصل شده است. عکس این گزاره نادرست است، چون شاید آن حیوان دست‌آموز، مثلاً سگ باشد. گزینهٔ (۲) همان گزارهٔ داده شده است نه عکس آن.

۱۳- گزینهٔ۴ در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، دو ضلع، موازی و دو ضلع دیگر برابر هستند ولی دو ضلع دیگر ناموازی می‌باشند و این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع نیست.