

خرید کتاب های کنکور

با تخفیف ویژه

و

ارسال رایگان

Medabook.com

+



یک جله تماس تلفنی رایگان

با مشاوران رتبه برتر

برای انتخاب بهترین منابع

دبیرستان و کنکور

۰۲۱ ۲۸۴۲۵۲۱۰





### مقدمه: یادآوری مفاهیم اولیه مثلثات

**تعریف درجه:** اندازه یک زاویه که ضلع انتهایی آن دقیقاً یک دور کامل بچرخد،  $360^\circ$  درجه است. پس اگر محیط دایره را به  $360$  قسمت مساوی تقسیم کنیم، اندازه زاویه مرکزی روبه‌روی هر قسمت، یک درجه است.

**تعریف رادیان:** اندازه یک زاویه که ضلع انتهایی آن دقیقاً یک دور کامل بچرخد،  $2\pi$  رادیان است. پس در هر دایره دلخواه، اندازه زاویه مرکزی که طول کمان روبه‌رو به آن با طول شعاع برابر باشد، یک رادیان است.

**تذکره:** اگر  $\alpha$  بر حسب درجه باشد، آن را با  $^\circ$  و اگر  $\alpha$  بر حسب رادیان باشد، آن را به صورت  $\alpha$  نمایش می‌دهند.

**تبدیل درجه به رادیان و برعکس:** اگر  $\theta$  یک زاویه در دایره مثلثاتی باشد که اندازه آن بر حسب درجه، برابر  $D$  و اندازه آن بر حسب رادیان، برابر  $R$  باشد، آن‌گاه داریم:

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

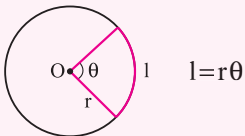
**مثال:** اندازه زاویه‌های  $\alpha = \frac{\pi}{15}$  و  $\beta = 1$  بر حسب رادیان می‌باشد، آن‌ها را به درجه تبدیل کنید.

**پاسخ:** با استفاده از رابطه  $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$ ، داریم:

$$\frac{D}{180} = \frac{\pi}{15} \Rightarrow D = \frac{180}{15} = 12 \Rightarrow \alpha = 12^\circ ; \frac{D}{180} = \frac{1}{\pi} \Rightarrow D = \frac{180}{\pi} \approx \frac{180}{3.14} \approx 57^\circ \Rightarrow \beta \approx 57^\circ$$

**نتیجه:** اندازه ۱ رادیان، تقریباً برابر با  $57^\circ$  است.

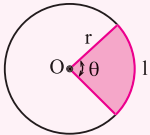
**طول کمان:** در یک دایره به شعاع  $r$  اگر اندازه زاویه مرکزی بر حسب رادیان برابر  $\theta$  باشد، طول کمان روبه‌روی آن از رابطه مقابل به دست می‌آید:



بنابراین اگر  $r=1$  باشد، اندازه  $l$  با اندازه  $\theta$  بر حسب رادیان برابر است.

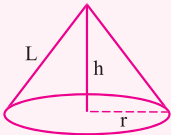
**تعریف قطاع:** به قسمتی از دایره که بین دو شعاع قرار دارد، قطاع گفته می‌شود.

**نکته:** مساحت قطاعی از یک دایره به شعاع  $r$  و زاویه مرکزی  $\theta$  رادیان، از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$S = \frac{r^2}{2} \theta$$

**نکته:** مساحت جانبی مخروط به شعاع  $r$  و ارتفاع  $h$  و مولد  $L$  برابر است با:



$$A = \pi r L = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

### نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه

در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  مانند شکل روبه‌رو، نسبت‌های مثلثاتی زاویه حاده  $\theta$ ، به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sin \theta = \frac{\text{اندازه ضلع مقابل}}{\text{اندازه وتر}} = \frac{b}{a}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{اندازه ضلع مجاور}}{\text{اندازه وتر}} = \frac{c}{a}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{اندازه ضلع مقابل}}{\text{اندازه ضلع مجاور}} = \frac{b}{c}$$

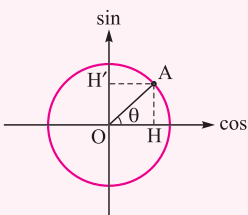
$$\cot \theta = \frac{\text{اندازه ضلع مجاور}}{\text{اندازه ضلع مقابل}} = \frac{c}{b}$$

**دایره مثلثاتی:** اگر در صفحه مختصات، به مرکز مبدأ مختصات، دایره‌ای به شعاع ۱ واحد بزنیم، آن را یک دایره مثلثاتی گویند. هر شعاع این دایره با جهت مثبت محور  $x$  زاویه‌ای مانند  $\theta$  می‌سازد که مختصات محل برخورد این شعاع با دایره،  $(\cos \theta, \sin \theta)$  می‌باشد.

در دایره مثلثاتی، محوری که بر محور  $x$  منطبق است، محور کسینوس و محوری که بر محور  $y$  منطبق است، محور سینوس نامیده می‌شود.

اگر  $\theta$  اندازه یک کمان باشد، در این صورت اندازه نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس، برابر با اندازه جبری

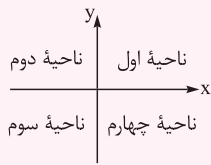
پاره‌خط‌های زیر است:



$$\sin \theta = OH' \quad , \quad \cos \theta = OH$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مهم:

$\theta$ بر حسب رادیان	$0^\circ$	$\frac{\pi}{6}(30^\circ)$	$\frac{\pi}{4}(45^\circ)$	$\frac{\pi}{3}(60^\circ)$	$\frac{\pi}{2}(90^\circ)$	$\pi(180^\circ)$	$\frac{3\pi}{2}(270^\circ)$	$2\pi(360^\circ)$
$\sin \theta$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	۰	-۱	۰
$\cos \theta$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	-۱	۰	۱
$\tan \theta$	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	ت.ن	۰	ت.ن	۰
$\cot \theta$	ت.ن	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰	ت.ن	۰	ت.ن



در جدول بالا، علامت «ت.ن» به معنی آن است که نسبت مثلثاتی در آن زاویه تعریف نمی‌شود.  
**علامت نسبت‌های مثلثاتی:** در ناحیه اول دایره مثلثاتی، همه نسبت‌های مثلثاتی مثبت‌اند. در ناحیه دوم فقط علامت سینوس مثبت است. در ناحیه سوم فقط تانژانت و کتانژانت مثبت هستند و در ناحیه چهارم فقط علامت کسینوس مثبت است.

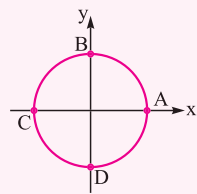
**نسبت‌های مثلثاتی قرینه کمان:** با توجه به دایره مثلثاتی، نسبت‌های مثلثاتی  $(-\theta)$  به صورت زیر می‌باشد:

❶  $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ 
❷  $\cos(-\theta) = \cos \theta$ 
❸  $\tan(-\theta) = -\tan \theta$ 
❹  $\cot(-\theta) = -\cot \theta$

**نسبت‌های مثلثاتی  $k\pi \pm \theta$ :** برای محاسبه این نسبت‌ها، ابتدا مشخص می‌کنیم که انتهای کمان در کدام ناحیه است (فرض می‌کنیم  $\theta$  زاویه حاده است). و علامت آن را مشخص می‌کنیم. حال اگر  $k$  زوج باشد، همان نسبت مثلثاتی را با کمان  $\theta$  می‌نویسیم (عبارت  $\frac{k\pi}{2} \pm \theta$  را حذف می‌کنیم)، اما اگر  $k$  فرد باشد، نسبت‌های مثلثاتی به صورت زیر تغییر می‌کنند:

❶  $\sin \rightarrow \cos$ 
❷  $\cos \rightarrow \sin$ 
❸  $\tan \rightarrow \cot$ 
❹  $\cot \rightarrow \tan$

**تذکر:** برای تعیین ناحیه کمان‌های بزرگ، با توجه به این‌که مضارب زوج  $\pi$ ، روی نقطه  $A$  و مضارب فرد  $\pi$ ، روی نقطه  $C$  هستند، محدوده را تعیین می‌کنیم. برای مثال، کمان  $(\frac{105\pi}{4} + \alpha)$  چون  $\frac{105\pi}{4} = 52\frac{1}{2}\pi$  است، پس کمان در ناحیه دوم می‌باشد. به مثال‌های زیر توجه کنید:



$\sin(12\pi + \alpha) = \sin \alpha$  (روی نقطه  $A$  است و کمان در ناحیه اول قرار می‌گیرد.)  
 $\cos(27\pi - \alpha) = \cos(\frac{54}{4}\pi - \alpha) = -\cos \alpha$  (روی نقطه  $C$  است و کمان در ناحیه دوم قرار می‌گیرد.)  
 $\cos(\frac{51\pi}{4} + \alpha) = \sin \alpha$  (روی نقطه  $D$  است و کمان در ناحیه چهارم قرار می‌گیرد.)  
 $\tan(\frac{13\pi}{4} - \alpha) = \cot \alpha$  (روی نقطه  $B$  است و کمان در ناحیه اول قرار می‌گیرد.)

**تست:** حاصل عبارت  $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$ ، با فرض  $\tan 15^\circ = 0.28$ ، کدام است؟

$\frac{16}{9}$  (۴)
 $\frac{9}{16}$  (۳)
 $-\frac{9}{16}$  (۲)
 $-\frac{16}{9}$  (۱)

**پاسخ:** تمام زاویه‌ها را بر حسب  $15^\circ$  می‌نویسیم:

$$\frac{\cos(\frac{3\pi}{4} + 15^\circ) - \sin(\frac{3\pi}{4} - 15^\circ)}{\sin(3\pi - 15^\circ) - \sin(\frac{\pi}{4} + 15^\circ)} = \frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ} \cdot \frac{\tan 15^\circ + 1}{\tan 15^\circ - 1} = \frac{0.28 + 1}{0.28 - 1} = \frac{1.28}{-0.72} = -\frac{128}{72} = -\frac{16}{9}$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

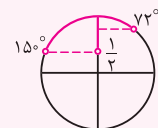
**تست:** اگر  $15^\circ < x < 72^\circ$  و  $\sin x = \frac{1-2m}{m}$  باشد، محدوده  $m$  کدام است؟

$0 < m < \frac{2}{5}$  (۴)
 $\frac{2}{5} \leq m < 1$  (۳)
 $0 < m \leq \frac{1}{3}$  (۲)
 $\frac{1}{3} \leq m < \frac{2}{5}$  (۱)

**پاسخ:** کافی است محدوده زاویه  $x$  را بر روی دایره مثلثاتی مشخص کنیم و سپس محدوده  $\sin x$  را بیابیم:

$$\frac{1}{3} < \sin x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1-2m}{m} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{m} - 2 \leq 1 \Rightarrow \frac{5}{3} < \frac{1}{m} \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq m < \frac{2}{5}$$

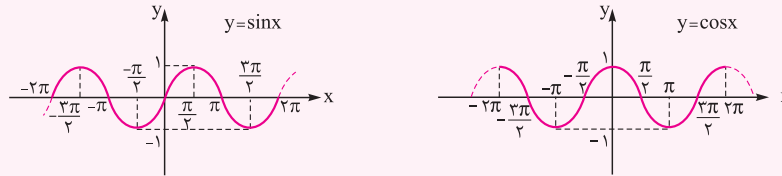
بنابراین گزینه (۱) صحیح است.



نمودار توابع  $y = \sin X$  و  $y = \cos X$

نمودار توابع  $y = \sin x$  و  $y = \cos x$

توابع  $y = \sin x$  و  $y = \cos x$  توابعی با دامنه  $\mathbb{R}$  و برد  $[-1, 1]$  هستند که نمودارشان به صورت زیر می باشد.



همان طور که مشخص است نمودار توابع  $y = \sin x$  و  $y = \cos x$  در بازه‌های  $[0, 2\pi]$  و  $[-2\pi, 0]$  و ... دقیقاً تکرار می شوند. به نمودار تابع  $y = \sin x$  موج سینوسی و به نمودار تابع  $y = \cos x$  موج کسینوسی نیز می گویند.

روابط اولیه مثلثات

روابط اولیه زیر، بین نسبت‌های مثلثاتی برقرار است:

۱  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

۲  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

۳  $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

۴  $\tan \alpha \cot \alpha = 1$

۵  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

۶  $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

تست اگر  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{3}{5}$  باشد، حاصل  $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$  کدام است؟

$\frac{3}{5}$  (۴)

$\frac{2}{5}$  (۳)

$\frac{2}{3}$  (۲)

$\frac{1}{5}$  (۱)

پاسخ رابطه  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  را یکبار به توان ۲ و یکبار به توان ۳ می‌رسانیم:

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \xrightarrow{\text{به توان } 2} \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{2}{5}$

$\Rightarrow \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \xrightarrow{\text{به توان } 3} \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 1$

$\Rightarrow \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

پس گزینه (۳) صحیح است.

روابط سینوس‌ها و کسینوس‌های مجموع و تفاضل دو کمان

۱  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

۲  $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$

۳  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

۴  $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

تست حاصل  $\sin 11^\circ (\tan 2^\circ + \tan 35^\circ)$  کدام است؟

۱ (۴)

$\frac{1}{2}$  (۳)

$\sin 55^\circ$  (۲)

$\cos 15^\circ$  (۱)

پاسخ

$\sin 11^\circ \left( \frac{\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ} + \frac{\sin 35^\circ}{\cos 35^\circ} \right) = \sin 11^\circ \left( \frac{\sin 2^\circ \cos 35^\circ + \cos 2^\circ \sin 35^\circ}{\cos 2^\circ \cos 35^\circ} \right) = \sin 11^\circ \left( \frac{\sin(2^\circ + 35^\circ)}{\cos 2^\circ \cos 35^\circ} \right)$

$= \sin 11^\circ \left( \frac{\sin 55^\circ}{\cos 2^\circ \cos 35^\circ} \right) \xrightarrow{\sin 55^\circ = \cos 35^\circ} \sin 11^\circ \left( \frac{\cancel{\sin 55^\circ}}{\cos 2^\circ \cos 35^\circ} \right) = \frac{\sin 11^\circ}{\cos 2^\circ} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + 2^\circ)}{\cos 2^\circ} = \frac{\cos 2^\circ}{\cos 2^\circ} = 1$

پس گزینه (۴) صحیح است.

**تست** کسینوس زاویه  $۱۵^\circ$  کدام است؟

$$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2} \quad (۱)$$

$$\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad (۳)$$

**پاسخ** از کمان‌های  $۴۵^\circ$  و  $۳۰^\circ$  استفاده می‌کنیم:

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

پس گزینه (۲) صحیح است.

**دو اتحاد مهم**

$$1 \quad \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$2 \quad \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

**تست** حاصل عبارت  $A = \frac{\sin \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12}}{\sin \frac{\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12}}$  کدام است؟

$$1 \quad (۴)$$

$$- \sqrt{3} \quad (۳)$$

$$2\sqrt{3} \quad (۲)$$

$$\sqrt{3} - 2 \quad (۱)$$

**پاسخ** با استفاده از دو اتحاد بالا، داریم:

$$\frac{\sin \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12}}{\sin \frac{\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{-\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

پس گزینه (۳) صحیح است.

**نسبت‌های مثلثاتی دوبرابر کمان**

$$1 \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$2 \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

از اتحادهای بالا، می‌توان نتایج زیر را گرفت:

$$1 \quad 1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$2 \quad 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$3 \quad \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

$$4 \quad \cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$$

$$5 \quad \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$6 \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

**تست** اگر  $\cos 4x = a$ ، حاصل  $\sin x \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \sin(\pi + x) \sin\left(\frac{3\pi}{4} + x\right)$  چه قدر است؟

$$\frac{a-1}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{1-a}{8} \quad (۳)$$

$$\frac{1-a}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{a-1}{8} \quad (۱)$$

**پاسخ** با استفاده از رابطه  $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ ، داریم:

$$\cos 4x = 1 - 2 \sin^2 2x = a \Rightarrow \sin^2 2x = \frac{1-a}{2}$$

$$\sin x \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \sin(\pi + x) \sin\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) = (\sin x)(\cos x)(-\sin x)(-\cos x) = \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right) \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)$$

$$= \frac{1}{4} \sin^2 2x = \frac{1}{4} \left(\frac{1-a}{2}\right) = \frac{1-a}{8}$$

پس گزینه (۳) صحیح است.

**تست** حاصل عبارت  $A = \frac{1}{\sin 1^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 1^\circ}$  کدام است؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

**پاسخ** از عبارت مخرج مشترک می‌گیریم:

$$A = \frac{\cos 1^\circ - \sqrt{3} \sin 1^\circ}{\sin 1^\circ \cos 1^\circ} = \frac{2(\frac{1}{2} \cos 1^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 1^\circ)}{\sin 1^\circ \cos 1^\circ} = \frac{2(\cos 6^\circ \cos 1^\circ - \sin 6^\circ \sin 1^\circ)}{\sin 1^\circ \cos 1^\circ}$$

$$= \frac{2 \cos(6^\circ + 1^\circ)}{\sin 1^\circ \cos 1^\circ} = \frac{2 \cos 7^\circ}{\frac{1}{2} \sin 2^\circ} = \frac{\cos 7^\circ}{\sin 2^\circ} = 4$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

### نسبت‌های مثلثاتی سه برابر کمان

**۱**  $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$

**۲**  $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$

**تست** ساده‌شده عبارت  $\cos 4x + \tan x \sin 4x$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $2 \cos^2 x - 1$       ۲ (۲)  $4 \sin^2 x + 1$       ۳ (۳)  $4 \sin^2 x + 1$       ۴ (۴)  $4 \cos^2 x - 3$

**پاسخ**  $\tan x$  را به صورت کسری می‌نویسیم و مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\cos 4x + \frac{\sin x}{\cos x} (\sin 4x) = \frac{\cos 4x \cos x + \sin 4x \sin x}{\cos x} = \frac{\cos(4x - x)}{\cos x}$$

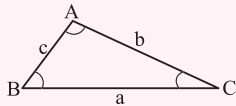
$$= \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{4 \cos^3 x - 3 \cos x}{\cos x} = 4 \cos^2 x - 3$$

پس گزینه (۴) صحیح است.

### حل مثلث

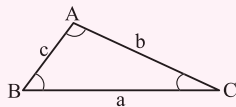
منظور از حل مثلث، پیدا کردن تمام ضلع‌ها و زاویه‌های یک مثلث است.

**مساحت مثلث:** اگر دو ضلع یک مثلث و زاویه بین آن‌ها را داشته باشیم، آن‌گاه مساحت مثلث (S) از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$S = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C} = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A} = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B}$$

**قضیه سینوس‌ها:** از تساوی مربوط به مساحت مثلث، قضیه سینوس‌ها را به صورت زیر خواهیم داشت:



$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

**تست** در شکل مقابل، اگر طول کمان MN برابر  $\frac{2\pi}{3}$  باشد، مساحت قسمت رنگی کدام است؟

- ۱ (۱)  $\frac{4\pi - 12}{3}$       ۲ (۲)  $\frac{3\pi - 8}{3}$       ۳ (۳)  $\frac{4\pi - 8}{3}$       ۴ (۴)  $\frac{3\pi - 6}{3}$

**پاسخ** ابتدا زاویه  $\alpha$  را برحسب رادیان به دست می‌آوریم:

$$\alpha = \frac{\widehat{MN}}{r} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\frac{4}{6}} = \frac{\pi}{6}$$

حال، مساحت مثلث و قطاع را به دست می‌آوریم:

مساحت مثلث:  $S_1 = \frac{1}{2} (4)(4) \sin(\frac{\pi}{6}) = 4$       و      مساحت قطاع:  $S_2 = \frac{1}{2} (4)^2 (\frac{\pi}{6}) = \frac{4\pi}{3}$

مساحت قسمت رنگی:  $S = S_2 - S_1 = \frac{4\pi}{3} - 4 = \frac{4\pi - 12}{3}$

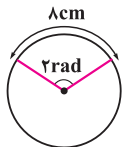
بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

## پرسش‌های چهارگزینه‌ای

### یادآوری مفاهیم اولیه مثلثات

۱- اندازه دو زاویه از مثلثی  $\hat{A} = \frac{11\pi}{3}$  و  $\hat{B} = 34^\circ$  است. اندازه زاویه سوم این مثلث چند رادیان است؟

- (۱)  $\frac{2\pi}{9}$  (۲)  $\frac{4\pi}{9}$  (۳)  $\frac{2\pi}{3}$  (۴)  $\frac{5\pi}{9}$



۲- مساحت دایره مقابل، چندبرابر محیط آن است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴) ۴

۳- دوچرخه‌سواری دور یک پیست دوچرخه‌سواری که به صورت دایره به قطر ۱۰ کیلومتر است، شروع به حرکت می‌کند. اگر این دوچرخه‌سوار روی محیط

دایره ۲ کیلومتر حرکت کند، نسبت به مرکز دایره چه زاویه‌ای بر حسب درجه طی می‌کند؟

- (۱)  $0/4$  (۲)  $\frac{18}{\pi}$  (۳)  $\frac{36}{\pi}$  (۴)  $\frac{72}{\pi}$

۴- حاصل  $\cos(\frac{3\pi}{14}) + \cos(\frac{5\pi}{14}) + \cos(\frac{7\pi}{14}) + \cos(\frac{9\pi}{14}) + \cos(\frac{11\pi}{14})$  کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴) ۱

۵- حاصل عبارت  $2\cos(-\frac{125\pi}{4}) + 3\tan(\frac{125\pi}{4}) + 4\cot(-\frac{125\pi}{4})$  کدام است؟

- (۱)  $-\sqrt{2}-1$  (۲)  $-\sqrt{2}+1$  (۳)  $\sqrt{2}-1$  (۴)  $\sqrt{2}+1$

۶- اگر  $\tan\theta = 0/2$  باشد، مقدار  $\frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)}$  کدام است؟

- (۱) -۲ (۲)  $1/2$  (۳) ۲ (۴) ۳

۷- مقدار عددی عبارت  $A = \sin^2(\frac{\pi}{10}) + \sin^2(\frac{2\pi}{5})$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $2\cos\frac{3\pi}{5}$  (۴)  $2\sin\frac{3\pi}{10}$

۸- حاصل عبارت  $A = \cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cos^2 3^\circ + \dots + \cos^2 89^\circ$  کدام است؟

- (۱) ۴۴ (۲) ۴۵ (۳) ۴۴/۵ (۴) ۴۵/۵

۹- حاصل  $A = \log \tan 1^\circ + \log \tan 2^\circ + \dots + \log \tan 89^\circ$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) صفر (۳) ۴۵ (۴)  $45 \tan 1^\circ$

۱۰- اگر  $|x| < \frac{\pi}{18}$  باشد، مقادیر  $m = 2\cos 6x + 1$  در کدام بازه است؟

- (۱)  $[1, 2]$  (۲)  $[1, 2]$  (۳)  $[2, 3]$  (۴)  $(2, 3]$

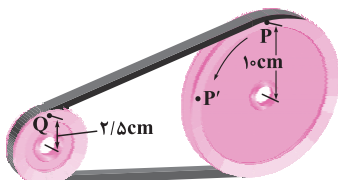
۱۱- مساحت قطاعی به شعاع ۱۰ واحد و زاویه مرکزی ۲ رادیان را با S و محیط همین قطاع را با P نمایش می‌دهیم. حاصل عبارت S-P کدام است؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۴۰ (۳) ۳۰ (۴) ۲۰

۱۲- در شکل زیر یک تسمه، دو قرقره به شعاع‌های ۱۰ cm و ۲/۵ cm را به هم وصل کرده است. اگر قرقره بزرگ‌تر  $\frac{\pi}{4}$  رادیان بچرخد (یعنی نقطه P در

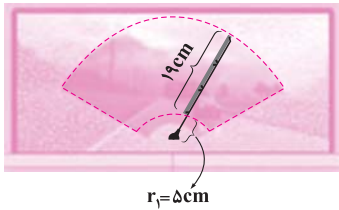
موقعیت P' قرار گیرد)، آن‌گاه قرقره کوچک‌تر چند رادیان می‌چرخد؟

- (۱)  $\pi$  (۲)  $2\pi$  (۳)  $\frac{\pi}{2}$  (۴)  $\frac{3\pi}{2}$



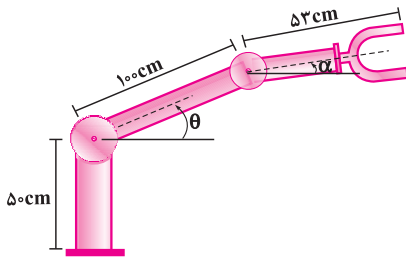


۱۳- طول برف پاک‌کن عقب اتومبیلی ۲۴ سانتی‌متر و طول تیغه آن ۱۹ سانتی‌متر است. اگر برف پاک‌کن کمانی به اندازه  $120^\circ$  را طی کند، چه مساحتی از شیشه را پاک می‌کند؟ ( $\pi = 3$ )



- (۱) ۴۷۹
- (۲) ۳۳۶
- (۳) ۵۵۱
- (۴) ۴۲۷

۱۴- در شکل زیر، اگر روبات برای گرفتن یک شیء در ارتفاع  $23/5$  cm از سطح زمین، مفصل دوم خود را در حالت  $\alpha = -30^\circ$  قرار دهد، زاویه  $\theta$  در این وضعیت چند درجه است؟



- (۱) صفر
- (۲)  $45^\circ$
- (۳)  $60^\circ$
- (۴)  $60^\circ$

۱۵- مساحت کل مخروطی به شعاع ۲ cm و طول مولد ۵ cm، چند سانتی‌متر مربع است؟

- (۱)  $10\pi$
- (۲)  $12\pi$
- (۳)  $14\pi$
- (۴)  $16\pi$

(تقریبی خارج ۹۶)

۱۶- اگر  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$  و انتهای کمان  $\alpha$  در ربع چهارم باشد، مقدار  $\cos(\frac{\pi}{4} + \alpha) - \cos(\frac{\pi}{4} - \alpha)$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{2}{3}$
- (۲)  $-\frac{1}{3}$
- (۳)  $\frac{1}{3}$
- (۴)  $\frac{2}{3}$

۱۷- اگر  $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$  باشد، حاصل  $\sin^3 x + \cos^3 x$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{13}{27}$
- (۲)  $\frac{13}{81}$
- (۳)  $\frac{17}{27}$
- (۴)  $\frac{17}{81}$

(تقریبی داخل ۹۷)

۱۸- اگر  $\frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{\sin(x + \frac{\pi}{4})} = 2$  باشد،  $\tan x$  کدام است؟

- (۱) -۳
- (۲)  $\frac{1}{3}$
- (۳)  $\frac{2}{3}$
- (۴) ۳

۱۹- اگر  $\alpha + \beta = 135^\circ$  و  $\tan(\alpha - \beta) = \frac{3}{4}$  باشد، مقدار کسر  $\frac{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{4}$
- (۲)  $-\frac{3}{4}$
- (۳)  $\frac{4}{3}$
- (۴)  $-\frac{4}{3}$

۲۰- مقدار عبارت  $\frac{\cos 20^\circ + \sqrt{3} \sin 20^\circ}{\cos 40^\circ}$ ، کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{2}$
- (۲)  $\sqrt{3}$
- (۳) ۲
- (۴) ۳

۲۱- اگر  $2a + b = \frac{\pi}{4}$  باشد، حاصل  $\tan a + \tan b$  کدام است؟

- (۱)  $\sin b$
- (۲)  $\cos a$
- (۳)  $\frac{1}{\sin a}$
- (۴)  $\frac{1}{\cos b}$

(ریاضی داخل ۹۶)

۲۲- حاصل  $\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ}$  کدام است؟

- (۱) ۲
- (۲)  $\sqrt{6}$
- (۳)  $2\sqrt{2}$
- (۴)  $2\sqrt{3}$

۲۳- اگر  $a + b = \frac{\pi}{4}$  باشد، حاصل  $A = \lambda \cos a \cos b \cos(\frac{\pi}{4} - a) \cos(\frac{\pi}{4} - b)$  کدام است؟

- (۱)  $\sin 4a$
- (۲)  $\cos 4a$
- (۳)  $\sin^2 2a$
- (۴)  $\cos^2 2a$

۲۴- حاصل  $\sin \frac{\pi}{8}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$  (۲)  $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{4}$  (۳)  $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$  (۴)  $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}$

۲۵- ساده شده عبارت  $(\tan 7^\circ + \tan 1^\circ) \cos 5^\circ$  کدام است؟

(۱)  $\sin 2^\circ$  (۲)  $\cos 2^\circ$  (۳)  $2 \sin 2^\circ$  (۴)  $2 \cos 2^\circ$

۲۶- اگر  $\sin x - \cos x = -\frac{1}{4}$  باشد، حاصل  $\cos 4x$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{8}$  (۲)  $-\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $-\frac{1}{8}$

(ریاضی خارج ۹۱)

۲۷- ساده شده عبارت  $A = \frac{(1 + \tan^2 \theta)(1 + \cot^2 \theta)}{1 - \sin^2 \theta - \cos^2 \theta}$  کدام است؟

(۱)  $8 \cos^{-2} 2\theta$  (۲)  $8 \sin^{-2} 2\theta$  (۳)  $16 \cos^{-2} 2\theta$  (۴)  $16 \sin^{-2} 2\theta$

۲۸- ساده شده عبارت  $A = \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{16 \sin 6^\circ}$  (۲)  $\frac{1}{8 \sin 6^\circ}$  (۳)  $\frac{1}{\sin 6^\circ}$  (۴)  $\frac{16}{\sin 6^\circ}$

۲۹- اگر  $\tan x = \cot 3x$  باشد، مقدار  $\cos 4x$  کدام است؟ ( $x \neq \frac{k\pi}{6}$ )

(۱) ۱ (۲) صفر (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴) -۱

۳۰- در یک متوازی الاضلاع، اندازه دو قطر ۱۲ و ۸ و زاویه بین دو قطر  $135^\circ$  است. مساحت این متوازی الاضلاع چند برابر  $\sqrt{2}$  است؟

(۱) ۱۸ (۲) ۲۴ (۳) ۳۲ (۴) ۳۶

(ریاضی خارج ۹۳)

۳۱- در مثلث ABC با معلوم بودن ضلع  $BC = 3 + \sqrt{3}$ ،  $\hat{B} = 6^\circ$  و  $\hat{C} = 45^\circ$ ، اندازه ضلع AC کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳)  $2\sqrt{3}$  (۴)  $3\sqrt{2}$

(ریاضی داخل ۹۱)

۳۲- با کدام ضابطه  $f(x)$ ، همواره تساوی  $f(x) = |f(x)|$  برقرار است؟

(۱)  $\sin \pi x$  (۲)  $\cos \pi x$  (۳)  $\sin 2\pi x$  (۴)  $\cos 2\pi x$

۳۳- ساده شده عبارت  $A = \frac{\sqrt{1 + \sin 2^\circ} - \sqrt{1 - \cos 7^\circ}}{\sin 1^\circ - \cos 1^\circ}$  کدام است؟

(۱)  $1 - \tan 35^\circ$  (۲)  $1 - \cot 35^\circ$  (۳)  $-1 + \tan 35^\circ$  (۴)  $-1 + \cot 35^\circ$

۳۴- حاصل عبارت  $\frac{\sin \Delta a - \sin 3a}{\cos \Delta a - \cos 3a}$  به ازای  $a = 7/5^\circ$ ، کدام است؟

(۱)  $\sqrt{3}$  (۲)  $-\sqrt{3}$  (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (۴)  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

۳۵- حاصل  $[\sin 4]$  کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴)  $-\frac{1}{2}$

۳۶- اگر  $\log(\sin \frac{x}{4}) = a$  باشد، حاصل  $\log(3 - 4 \cos x + \cos 2x)$  کدام است؟

(۱)  $3 \log 2 - 4a$  (۲)  $4a + 3 \log 2$  (۳)  $2 \log 3 - 4a$  (۴)  $4a + 2 \log 3$

(ریاضی خارج ۹۶)

۳۷- حاصل عبارت  $\frac{1}{\cos 2^\circ} - 4 \cos 4^\circ$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{2}$  (۲) ۱ (۳)  $\sqrt{3}$  (۴) ۲

(ریاضی خارج ۸۷)

۳۸- حاصل  $\frac{\sqrt{1 + \sin 5^\circ}}{\sin 5^\circ + \sin 1^\circ}$ ، برابر کدام است؟

(۱)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۲)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۳)  $\sqrt{2}$  (۴)  $\sqrt{3}$

## درس اول: تناوب و تناوبیت

### تابع تناوب

اگر نمودار یک تابع طوری باشد که همواره قسمتی از نمودار به طور مرتب و منظم تکرار شود، به آن تابع، تناوب و به کوچکترین فاصله‌ای که تابع در آن تکرار می‌شود، دوره تناوب تابع گویند.

**تعریف ریاضی تابع تناوب:** تابع  $f$  را تناوب می‌نامیم، هرگاه عدد حقیقی مثبت مانند  $T$  موجود باشد که برای هر  $x \in D_f$  داشته باشیم:

$$x + T \in D_f, \quad f(x + T) = f(x)$$

کوچکترین عدد  $T$  با این خاصیت را دوره تناوب تابع  $f$  می‌نامند.

توابع تناوب برای مدل‌سازی پدیده‌هایی که تکرار می‌شوند به کار می‌روند. برای مدل‌سازی چنین پدیده‌هایی کافی است داده‌های یک دوره تناوب آن را داشت و آن‌گاه می‌توان آن پدیده را برای دوره‌های بعدی پیش‌بینی کرد.

### نکات مهم برای پیدا کردن دوره تناوب

۱) اگر  $T$  دوره تناوب  $f(x)$  باشد، آن‌گاه دوره تناوب  $f(ax)$  برابر با  $\frac{T}{|a|}$  است. در حالت کلی‌تر، دوره تناوب  $mf(ax+b)+n$  نیز برابر  $\frac{T}{|a|}$  می‌باشد، یعنی مقادیر  $m, n, b$  تأثیری روی دوره تناوب ندارند. ( $m \neq 0$  و  $a \neq 0$ )

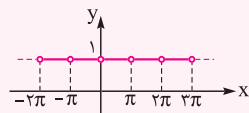
۲) دوره تناوب توابع زیر را به خاطر بسپارید: ( $n \in \mathbb{N}$ )

$$\begin{cases} y = \sin^{2n-1} ax \\ y = \cos^{2n-1} ax \end{cases} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|a|}$$

$$\begin{cases} y = \sin^{2n} ax \\ y = \cos^{2n} ax \end{cases}, \begin{cases} y = |\sin ax| \\ y = |\cos ax| \end{cases}, \begin{cases} y = \tan^n ax \\ y = \cot^n ax \end{cases} \Rightarrow T = \frac{\pi}{|a|}$$

۳) توابع ثابت به شکل کلی  $f(x) = k$  متناوب‌اند، ولی دوره تناوب ندارند.

۴) در توابع ثابت که به طور منظم و متوالی در نقاطی از  $\mathbb{R}$  تعریف نشده باشند، فاصله دو نقطه انفصال، دوره تناوب تابع می‌باشد. برای مثال در تابع  $y = \frac{\sin x}{\sin x}$ ، دامنه تابع به صورت  $\mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$  می‌باشد، پس با توجه به نمودار، دوره تناوب تابع برابر  $T = \pi$  می‌شود.



**مثال** دوره تناوب هر یک از توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

۱)  $y = 1 - 2\sin(3x + 2)$

۲)  $y = \frac{2}{3 + \tan \pi x}$

۳)  $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

۴)  $y = \frac{1}{4} \cos 2x + \sin^2 x$

۵)  $y = \tan 2x + \cot 2x$

**پاسخ** ۱) از اعدادی که در تابع وجود دارد فقط ضرب  $x$  در دوره تناوب اهمیت دارد، پس  $T = \frac{2\pi}{3}$  می‌شود.

۲) دوره تناوب  $\tan \pi x$  برابر  $\frac{\pi}{|\pi|} = 1$  است. پس دوره تناوب تابع  $y = \frac{2}{3 + \tan \pi x}$  نیز برابر ۱ می‌باشد.

۳) تابع را به صورت ساده‌تر نوشته و دوره تناوب آن را معلوم می‌کنیم:

$$y = \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2\left(\frac{1}{4} \sin 2x\right)^2$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \Rightarrow T = \frac{\pi}{|\frac{1}{2}|} = \frac{\pi}{2}$$

۴) ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$y = \frac{1}{4} \cos 2x + \sin^2 x = \frac{1}{4} (1 - 2\sin^2 x) + \sin^2 x = \frac{1}{4}$$

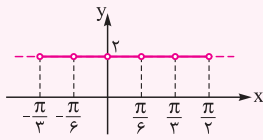
تابع ثابت  $y = \frac{1}{4}$  متناوب است، اما چون کوچکترین بازه‌ای که نمودار تابع، گردش می‌کند معلوم نیست، اصطلاحاً می‌گوییم دوره تناوب ندارد.

۵) تابع را به صورت ساده‌تر نوشته و دوره تناوب آن را معلوم می‌کنیم:

$$y = \tan 2x + \cot 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\sin^2 2x + \cos^2 2x}{\sin 2x \cos 2x} = \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 4x} = \frac{2}{\sin 4x} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|4|} \Rightarrow T = \frac{\pi}{2}$$

**تست** در مورد دوره تناوب تابع  $f(x) = \tan x \cot x + \tan^2 x \cot^2 x$ ، کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) تابع متناوب با دوره تناوب  $T = \frac{\pi}{3}$  است.  
 (۲) تابع متناوب با دوره تناوب  $T = \frac{\pi}{6}$  است.  
 (۳) تابع متناوب است، اما دوره تناوب ندارد.  
 (۴) تابع متناوب نیست.



**پاسخ** این تابع با دامنه  $D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{6} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$  برابر مقدار ثابت  $f(x) = 1 + 1 = 2$  می‌باشد. با توجه به نمودار، این تابع متناوب است و دوره تناوب تابع، فاصله دو نقطه انفصال، یعنی  $T = \frac{\pi}{6}$  است. بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

**نکته** توابع  $y = a \sin bx + c$  و  $y = a \cos bx + c$  دارای مقدار ماکزیمم  $|a| + c$  و مقدار مینیمم  $-|a| + c$  می‌باشند.

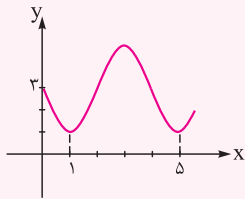
برای مثال مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع  $y = -8 \cos\left(\frac{x}{3}\right) - 2$  برابر است با:

$$\text{Max} = |-8| - 2 = 6 ; \text{min} = -|-8| - 2 = -10$$

**نکته** در تابع  $y = a \sin bx + c$  اگر  $a$  و  $b$  هم‌علامت باشند آن‌گاه با شروع از مبدأ، نمودار به صورت  $\cup$  می‌شود (یعنی نمودار در ابتدا صعودی است). اما اگر  $a$  و  $b$  غیر هم‌علامت باشند، آن‌گاه با شروع از مبدأ نمودار به صورت  $\cap$  در می‌آید (یعنی نمودار در ابتدا نزولی است).

**نکته** در تابع  $y = a \cos bx + c$  اگر  $a$  مثبت باشد آن‌گاه با شروع از مبدأ، نمودار به صورت  $\cup$  می‌شود (یعنی نمودار در ابتدا نزولی است). اما اگر  $a$  منفی باشد، آن‌گاه با شروع از مبدأ نمودار به صورت  $\cap$  در می‌آید (یعنی نمودار در ابتدا صعودی است). حتماً توجه دارید که چون  $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$  پس علامت  $b$  تأثیری روی نمودار ندارد.

**تست** شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع  $y = a + \sin(b\pi x)$  است. مقدار  $y$  در نقطه  $x = \frac{25}{3}$  کدام است؟



- (۱) ۲  
 (۲) ۲/۵  
 (۳) ۳  
 (۴) ۳/۵

**پاسخ** از روی نمودار مشخص است که  $f(0) = 3$  و دوره تناوب تابع برابر  $5 - 1 = 4$  می‌باشد. بنابراین:

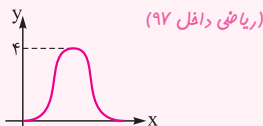
$$f(0) = 3 \Rightarrow a + \sin(0) = 3 \Rightarrow a = 3$$

$$T = \frac{2\pi}{|b\pi|} \Rightarrow \frac{2}{|b|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

چون نمودار با شروع از مبدأ به صورت  $\cup$  می‌باشد (یعنی در ابتدا نمودار نزولی است) پس با توجه به نکات قبل علامت  $b$  منفی است. بنابراین  $b = -\frac{1}{2}$  و داریم:

$$y = 3 + \sin\left(\frac{-\pi x}{2}\right) \Rightarrow y\left(\frac{25}{3}\right) = 3 - \sin\left(\frac{25\pi}{6}\right) = 3 - \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 3 - \sin\frac{\pi}{6} = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.



**تست** شکل مقابل نمودار تابع  $y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$  در بازه  $(0, 4)$  است.  $b$  کدام است؟

- (۱) -۲  
 (۲) -۱  
 (۳) ۱  
 (۴) ۲

$$f(0) = 0 \Rightarrow a + b \cos(0) = 0 \Rightarrow a + b = 0$$

**پاسخ** چون نمودار از مبدأ مختصات گذشته، پس  $f(0) = 0$  است:

در تابع  $y = b \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) + a$ ، اگر  $b > 0$  باشد، نمودار تابع با شروع از مبدأ به صورت  $\cup$  و اگر  $b < 0$  باشد نمودار به صورت  $\cap$  در می‌آید. پس با توجه به شکل صورت سؤال،  $b < 0$  است.

$$|b| + a = 4 \xrightarrow{b < 0} -b + a = 4$$

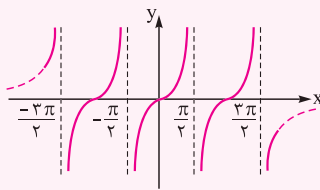
از طرفی می‌دانیم مقدار ماکزیمم تابع  $y = b \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) + a$  برابر  $|b| + a$  است. پس داریم:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = 4 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = -2$$

با حل دستگاه، مقادیر  $a$  و  $b$  را تعیین می‌کنیم:

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.





نمودار تابع تانژانت روی محورهای مختصات به صورت مقابل می‌باشد:

**ویژگی‌های تابع  $y = \tan x$**

$D_y = \mathbb{R} - \{k\pi + \frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\}$  ;  $R_y = \mathbb{R}$

۱- دامنه و برد آن به صورت مقابل است:

۲- تابع غیریکنوا است.

۳- دوره تناوب آن برابر  $\pi$  می‌باشد و در هر یک از بازه‌های  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ,  $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$  و ... اکیداً صعودی است.

۴- نمودار تابع نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.

## پرسش‌های چهارگزینه‌ای

### تابع تناوب و دوره تناوب

۳۹- دوره تناوب تابع  $f(x) = \sin^2 2x \cdot \cos^2 2x$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\pi}{2}$
- (۲)  $\frac{\pi}{8}$
- (۳)  $\frac{\pi}{4}$
- (۴)  $\pi$

۴۰- دوره تناوب کدام تابع عدد بزرگ‌تری است؟

- (۱)  $y = \frac{1}{\sin^2 \pi x + 3}$
- (۲)  $y = \frac{1}{2 \cos \pi x + 1}$
- (۳)  $y = 3 \tan^2 \pi x - 1$
- (۴)  $y = \cos^4 \pi x + 1$

(ریاضی دافل ۸۸)

۴۱- دوره تناوب تابع  $f(x) = \tan^3 x - \cot^3 x$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\pi}{6}$
- (۲)  $\frac{\pi}{3}$
- (۳)  $\frac{\pi}{2}$
- (۴)  $\pi$

۴۲- اگر دوره تناوب  $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$  برابر  $T_1$  و دوره تناوب  $g(x) = \cos^3 x \cos x + \sin^3 x \sin x$  برابر  $T_2$  باشد، حاصل  $\frac{T_1}{T_2}$  کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳)  $\frac{1}{2}$
- (۴)  $\frac{3}{2}$

۴۳- دوره تناوب تابع  $f(x) = \tan^2 x + \cot^2 x$  را  $T_1$  و دوره تناوب  $g(x) = \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x}$  را  $T_2$  می‌نامیم. حاصل  $\frac{T_2}{T_1}$  کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲)  $\frac{1}{3}$
- (۳)  $\frac{2}{3}$
- (۴)  $\frac{3}{2}$

۴۴- دوره تناوب تابع  $f(x) = \cos^2 x + \sin^4 x$  کدام است؟

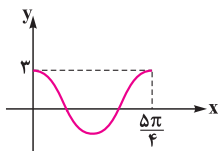
- (۱)  $2\pi$
- (۲)  $\pi$
- (۳)  $\frac{\pi}{2}$
- (۴)  $\frac{\pi}{4}$

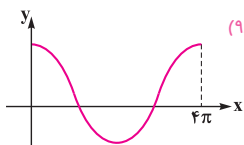
۴۵- دوره تناوب تابع  $f(x) = (\tan x + \cot x)^2 - \tan^2 x - \cot^2 x$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\pi}{2}$
- (۲)  $\frac{\pi}{4}$
- (۳)  $\pi$
- (۴) دوره تناوب ندارد.

۴۶- اگر قسمتی از نمودار تابع  $y = b \cos ax$  به صورت روبه‌رو باشد، حاصل  $\frac{b}{a}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{5}{8}$
- (۲)  $\frac{3}{5}$
- (۳)  $\frac{15}{8}$
- (۴)  $\frac{21}{8}$

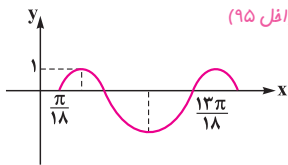




(ریاضی داخل ۹۶)

۴۷- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع  $y = \frac{1}{4} + 2\cos mx$  است. مقدار تابع در نقطه  $x = \frac{16\pi}{3}$  کدام است؟

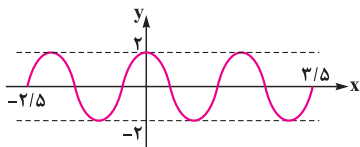
- (۱)  $-\frac{1}{2}$   
 (۲)  $\frac{1}{2}$   
 (۳) ۱  
 (۴) صفر



(ریاضی داخل ۹۵)

۴۸- شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابعی با ضابطه  $y = a - 2\cos(bx + \frac{\pi}{9})$  است. کدام است  $a + b$ ؟

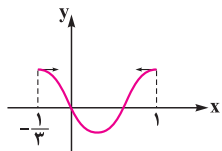
- (۱)  $\frac{1}{2}$   
 (۲) ۱  
 (۳)  $\frac{3}{2}$   
 (۴) ۲



(ریاضی داخل ۹۲)

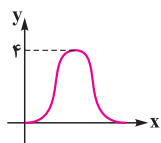
۴۹- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع  $y = a\sin(\pi(\frac{1}{4} + bx))$  می‌باشد. حاصل  $ab$  کدام است؟

- (۱) ۲  
 (۲) ۲/۵  
 (۳) ۳  
 (۴) ۳/۵



۵۰- شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع با ضابطه  $y = \cos(ax + \frac{1}{4})\pi$  می‌باشد. کدام است  $a$ ؟

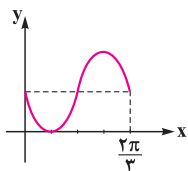
- (۱)  $-\frac{2}{3}$   
 (۲) ۲  
 (۳)  $\frac{3}{2}$   
 (۴)  $-\frac{3}{2}$



(ریاضی داخل ۹۷)

۵۱- شکل مقابل، نمودار تابع  $y = a + b\cos(\frac{\pi}{4}x)$  در بازه  $(0, 4)$  است.  $b$  کدام است؟

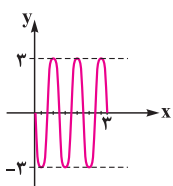
- (۱) -۲  
 (۲) -۱  
 (۳) ۱  
 (۴) ۲



(ریاضی خارج ۹۶)

۵۲- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع  $y = 1 - \sin mx$  است. مقدار تابع در نقطه  $x = \frac{7\pi}{6}$  کدام است؟

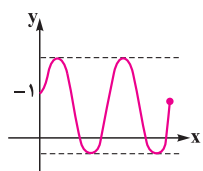
- (۱) صفر  
 (۲)  $\frac{1}{2}$   
 (۳) ۱  
 (۴) ۲



(ریاضی خارج ۹۲)

۵۳- شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع  $y = a\sin(b\pi x)$  است. مقدار  $ab$  کدام است؟

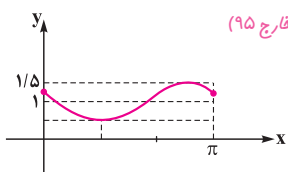
- (۱) -۶  
 (۲) -۳  
 (۳) ۴/۵  
 (۴) ۶



(ریاضی خارج ۹۷)

۵۴- شکل مقابل نمودار تابع  $y = 1 + a\sin(\pi bx)$  در بازه  $(0, \frac{4}{3})$  است.  $a + b$  کدام است؟

- (۱) ۳  
 (۲) ۴  
 (۳) ۵  
 (۴) ۶



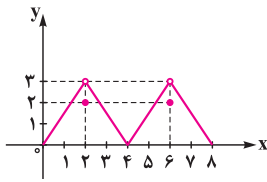
(ریاضی خارج ۹۵)

۵۵- شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه  $y = 1 + a\sin(bx - \frac{\pi}{6})$  است.  $a + b$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$   
 (۲) ۱  
 (۳)  $\frac{3}{2}$   
 (۴) ۲

۵۶- اگر دوره تناوب تابع  $y = f(2x + 1)$  برابر ۴ باشد، دوره تناوب  $y = 2f(-\frac{x}{4}) + 1$  کدام است؟

- (۱) ۱۶  
 (۲) ۸  
 (۳) ۴  
 (۴) ۲



۵۷- قسمتی از نمودار تابع متناوب  $y=f(x)$  به صورت مقابل رسم شده است. حاصل  $f(22)+f(-9)$  کدام است؟

- (۱) ۴
- (۲) ۳
- (۳)  $\frac{7}{2}$
- (۴)  $\frac{9}{2}$

۵۸- اگر تابع  $f$  یک تابع متناوب با دوره تناوب ۲ باشد و به ازای هر  $-2 \leq x < 0$  داشته باشیم  $f(x) = \sqrt{x+2}$ ، آن گاه مقدار  $f(-9/96)$  کدام است؟

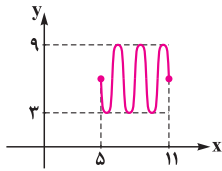
- (۱)  $0/2$
- (۲)  $0/2$
- (۳)  $0/25$
- (۴)  $0/5$

۵۹- اگر  $f(x - \frac{1}{3}) = f(x + \frac{2}{3}) = f(x)$  کدام تابع زیر می تواند باشد؟

- (۱)  $y = |\sin \frac{\pi x}{3}|$
- (۲)  $y = 1 - \cos \frac{\pi x}{3}$
- (۳)  $y = \frac{x}{2} - [\frac{x}{2}]$
- (۴)  $y = \frac{x}{3} - [\frac{x}{3}]$

۶۰- اگر داده های مربوط به دمای یک شهر هر ۱۲ ماه یک بار به صورتی تکرار شوند که بیشترین و کمترین دما در داده ها به ترتیب ۱۴ و ۶ درجه سانتی گراد باشند، کدام تابع کسینوسی برای این داده ها مناسب است؟

- (۱)  $y = 4 \cos(\frac{\pi x}{6}) + 10$
- (۲)  $y = 4 \cos(\frac{\pi x}{3}) + 10$
- (۳)  $y = 10 \cos(\frac{\pi x}{6}) + 4$
- (۴)  $y = 10 \cos(\frac{\pi x}{3}) + 4$



۶۱- اگر نمودار تابع  $f(x)$  به صورت روبه رو باشد، ضابطه  $f(x)$  کدام است؟

- (۱)  $f(x) = 2 \sin(\pi x) + 6$
- (۲)  $f(x) = 3 \sin(\pi x) + 6$
- (۳)  $f(x) = 2 \sin(2\pi x) + 6$
- (۴)  $f(x) = 3 \sin(2\pi x) + 6$

۶۲- دوره تناوب  $f(x) = \cos(2 \tan x) + 2 \sin^2(\tan x)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\pi}{2}$
- (۲)  $\pi$
- (۳)  $2\pi$
- (۴) هر مقدار مثبت می تواند باشد.

۶۳- دوره تناوب تابع  $f(x) = (-1)^{|x|} \sin \pi x$  کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳)  $\frac{1}{2}$
- (۴) متناوب نیست.

۶۴- دوره تناوب  $f(x) = \frac{\cos^2 x + 2 \sin^2 x}{|2x| + |-2x|}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$
- (۲)  $\frac{1}{2}$
- (۳) ۱
- (۴) دوره تناوب ندارد.

۶۵- دوره تناوب  $f(x) = |\sin 2x| + |\cos 2x|$  کدام است؟

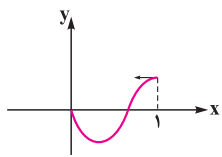
- (۱)  $\pi$
- (۲)  $\frac{3\pi}{4}$
- (۳)  $\frac{\pi}{2}$
- (۴)  $\frac{\pi}{4}$

۶۶- دوره تناوب  $f(x) = \sin x \cdot \sin^3 x$  کدام است؟

- (۱)  $2\pi$
- (۲)  $\pi$
- (۳)  $\frac{2\pi}{3}$
- (۴)  $\frac{\pi}{2}$

۶۷- شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه  $y = \cos(\pi(ax + \frac{1}{4}))$  می باشد.  $a$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$
- (۲)  $\frac{3}{2}$
- (۳)  $\frac{2}{3}$
- (۴)  $\frac{7}{4}$



۶۸- نمودار تابع به معادله  $y = -4 \cos(\frac{\pi}{4} - 3\pi x)$  روی بازه  $[-1, 1]$ ، در چند نقطه بیشترین مقدار را دارد؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴

۶۹- دوره تناوب تابع  $f(x) = \cos(\cos \pi x)$  کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳)  $\frac{1}{2}$
- (۴) تابع متناوب نیست.

ویژگی های تابع  $y = \tan x$

۷۰- کدام گزاره در مورد تابع  $f(x) = \tan x$  نادرست است؟

(کتاب درسی)

- (۱) در دامنه اش صعودی است.
- (۲) می توان بازه ای یافت که در آن غیرصعودی باشد.
- (۳) در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.
- (۴) می توان بازه ای یافت که در آن غیرنزولی باشد.



۷۱- با فرض  $\alpha < \pi < \frac{3\pi}{4}$  و  $\tan \alpha = \frac{2}{m-1}$ ، حدود تغییرات  $m$  کدام است؟

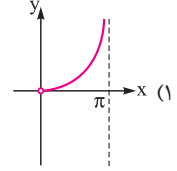
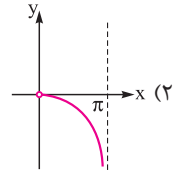
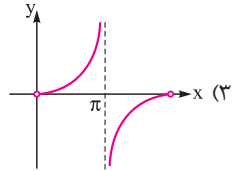
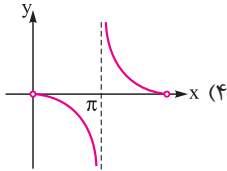
(۴)  $-2 < m < -1$

(۳)  $-1 < m < 1$

(۲)  $m < 1$

(۱)  $m < -1$

۷۲- نمودار تابع  $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$  در بازه  $(0, \pi)$  چگونه است؟



۷۳- نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}}$  به ترتیب در بازه‌های  $(0, \frac{\pi}{4})$  و  $(\frac{\pi}{4}, \pi)$  چگونه است؟

(۴) نزولی - نزولی

(۳) نزولی - صعودی

(۲) صعودی - نزولی

(۱) صعودی - صعودی

۷۴- حاصل  $[\tan \frac{\pi}{8}] + [\tan \frac{3\pi}{8}] + [\tan \frac{5\pi}{8}]$  کدام است؟

(۴) ۲

(۳) صفر

(۲) -۱

(۱) ۱

درس دوم: معادلات مثلثاتی

رابطه تانژانت مجموع و تفاضل دو کمان

۱  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$

۲  $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$

در رابطه  $\tan(\alpha + \beta)$  اگر فرض کنیم  $\beta = \alpha$ ، آن‌گاه خواهیم داشت:

$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

نتیجه با استفاده از رابطه تانژانت مجموع یعنی  $\tan(\alpha + \beta)$ ، روابط زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

۱  $\tan(\frac{\pi}{4} + x) = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$

۲  $\tan(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$

تست حاصل عبارت  $\tan 75^\circ$  کدام است؟

(۴)  $4 - \sqrt{3}$

(۳)  $2 + \sqrt{3}$

(۲)  $3 - \sqrt{3}$

(۱)  $1 + \sqrt{3}$

پاسخ از کمان‌های  $30^\circ$  و  $45^\circ$  استفاده می‌کنیم:

$$\tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \times \frac{3 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6} = 2 + \sqrt{3}$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

تست اگر  $\tan(a+b) = \frac{2}{5}$  و  $\tan(a-b) = \frac{3}{7}$ ، مقدار عددی  $\tan 2a$  کدام است؟

(۴) ۲

(۳) ۱

(۲) -۱

(۱) -۲

پاسخ با توجه به تساوی  $2a = (a+b) + (a-b)$  داریم:

$$\tan 2a = \tan((a+b) + (a-b)) = \frac{\tan(a+b) + \tan(a-b)}{1 - \tan(a+b)\tan(a-b)} = \frac{\frac{2}{5} + \frac{3}{7}}{1 - (\frac{2}{5})(\frac{3}{7})} = \frac{\frac{29}{35}}{1 - \frac{6}{35}} = \frac{29}{35} \times \frac{35}{29} = 1$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

## پاسخ نامه تشریحی

۱ ۲ ابتدا طبق رابطه  $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$ ، زاویه B را به رادیان تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{34}{180} = \frac{R}{\pi} \xrightarrow{\hat{R}=\hat{B}} \hat{B} = \frac{17\pi}{90}$$

از طرفی می‌دانیم مجموع زوایای داخلی یک مثلث،  $180^\circ$ ، معادل  $\pi$  رادیان است. پس داریم:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi \Rightarrow \frac{11\pi}{30} + \frac{17\pi}{90} + \hat{C} = \pi \Rightarrow \hat{C} = \pi - \frac{11\pi}{30} - \frac{17\pi}{90} = \frac{90\pi - 33\pi - 17\pi}{90} = \frac{40\pi}{90} = \frac{4\pi}{9}$$

۲ ۲ با توجه به رابطه  $l = r\theta$ ، داریم:

$$l = 8, \theta = 2 \Rightarrow \theta = \frac{l}{r} \Rightarrow 2 = \frac{8}{r} \Rightarrow r = 4$$

مساحت دایره:  $S = \pi r^2 = 16\pi$

محیط دایره:  $P = 2\pi r = 8\pi \Rightarrow \frac{S}{P} = \frac{16\pi}{8\pi} = 2$

۳ ۴ با توجه به سؤال،  $r = 5$  و  $l = 2$  می‌باشد. پس داریم:

$$l = r\theta \Rightarrow 2 = 5\theta \Rightarrow \theta = \frac{2}{5}$$

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{D}{180} = \frac{\frac{2}{5}}{\pi} \Rightarrow D = \frac{72^\circ}{\pi}$$

۴ ۴ می‌دانیم  $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ ، بنابراین داریم:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{14}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi - \frac{5\pi}{14}\right) + \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{14}\right) = \cos\frac{3\pi}{14} + \cos\frac{5\pi}{14} + 0 - \cos\frac{5\pi}{14} - \cos\frac{3\pi}{14} = 0$$

۱ ۵ ابتدا کسر  $\frac{125\pi}{4}$  را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم و سپس عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{125}{4} = 31 + \frac{1}{4} \Rightarrow 2\cos\left(-31\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 3\tan\left(31\pi + \frac{\pi}{4}\right) + 4\cot\left(-31\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -2\cos\frac{\pi}{4} + 3\tan\frac{\pi}{4} - 4\cot\frac{\pi}{4} = -2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 3 - 4 = -\sqrt{2} - 1$$

۴ ۶

$$\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta + \sin\theta} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{2\sin\theta} = \frac{\sin\theta}{2\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{2\sin\theta} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cot\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\tan\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

۱ ۷ اگر  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$  باشد، آن‌گاه  $\sin\beta = \cos\alpha$ ، پس:

$$\frac{\pi}{10} + \frac{3\pi}{5} = \frac{5\pi}{10} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \Rightarrow A = \sin^2\frac{\pi}{10} + \cos^2\frac{\pi}{10} = 1$$

۳ ۸ اگر  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$  باشد، آن‌گاه  $\cos\alpha = \sin\beta$ ، پس:

$$1^\circ + 89^\circ = 90^\circ \Rightarrow \cos^2 89^\circ = \sin^2 1^\circ \quad \text{و} \quad 2^\circ + 88^\circ = 90^\circ \Rightarrow \cos^2 88^\circ = \sin^2 2^\circ \quad \text{و} \dots$$

$$\Rightarrow A = (\cos^2 1^\circ + \cos^2 89^\circ) + (\cos^2 2^\circ + \cos^2 88^\circ) + \dots + (\cos^2 44^\circ + \cos^2 46^\circ) + \cos^2 45^\circ =$$

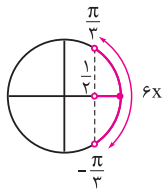
$$(\cos^2 1^\circ + \sin^2 1^\circ) + (\cos^2 2^\circ + \sin^2 2^\circ) + \dots + (\cos^2 44^\circ + \sin^2 44^\circ) + \cos^2 45^\circ$$

$$\Rightarrow A = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{44} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 44 + \frac{1}{2} = 44\frac{1}{2}$$

۲ ۹ با توجه به رابطه  $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$ ، داریم:

$$\log \tan 1^\circ + \log \tan 2^\circ + \dots + \log \tan 89^\circ = \log(\tan 1^\circ \tan 2^\circ \dots \tan 89^\circ)$$

$$= \log\left(\underbrace{\tan 1^\circ}_{\cot 1^\circ} \underbrace{\tan 89^\circ}_{\cot 1^\circ}\right) \left(\underbrace{\tan 2^\circ}_{\cot 2^\circ} \underbrace{\tan 88^\circ}_{\cot 2^\circ}\right) \dots \left(\tan 45^\circ\right) = \log(1 \times 1 \times \dots \times 1) = \log 1 = 0$$

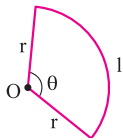


$$|x| < \frac{\pi}{18} \Rightarrow -\frac{\pi}{18} < x < \frac{\pi}{18} \Rightarrow -\frac{\pi}{3} < 6x < \frac{\pi}{3}$$

کافی است کمان  $6x$  را بر روی دایره مثلثاتی علامت بزنی و سپس بر اساس محدوده کمان  $6x$ ، مقادیر  $\cos 6x$  را بیابیم:

$$\frac{1}{3} < \cos 6x \leq 1 \Rightarrow 2 < 2\cos 6x + 1 \leq 3 \quad \text{و} \quad m = 2\cos 6x + 1 \Rightarrow 2 < m \leq 3$$

۱ ۱۱ ابتدا مساحت قطاع را می‌یابیم:



$$S = \frac{r^2}{2} \theta \Rightarrow S = \frac{(10)^2}{2} \times 2 = 100$$

می‌دانیم که محیط قطاع دورتادور قطاع می‌باشد که شامل دو شعاع  $(2r)$  و کمان آن  $(l)$  است. پس داریم:

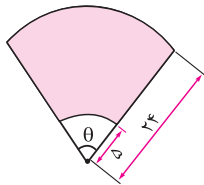
$$P = 2r + l \xrightarrow{l=r\theta} P = 2(10) + 10(2) = 40 \Rightarrow S - P = 60$$

۲ ۱۲ چون هر دو قرقره با یک تسمه به هم متصل هستند، پس میزان حرکت نقطه  $P$  و  $Q$  بر قرقره‌ها  $(l)$  یا طول کمان طی شده برابر می‌باشد و بر طبق

فرمول  $l = r\theta$  داریم:

$$l_1 = l_2 \Rightarrow r_1\theta_1 = r_2\theta_2 \Rightarrow 10 \times \frac{\pi}{3} = 2/5 \times \theta_2 \Rightarrow \theta_2 = 2\pi \text{ rad}$$

۳ ۱۳ با توجه به رابطه  $\frac{D}{R} = \frac{18^\circ}{\pi}$ ، زاویه‌ای که برف پاک‌کن طی می‌کند را به رادیان تبدیل می‌کنیم:



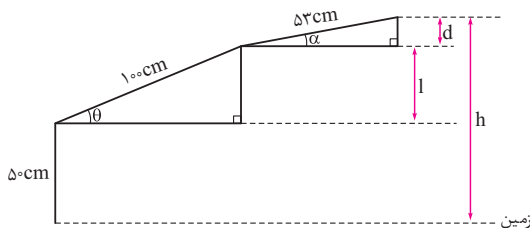
$$\frac{l_2}{R} = \frac{18^\circ}{\pi} \Rightarrow R = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

حال طبق فرمول مساحت قطاع دایره  $S = \frac{r^2}{2} \theta$ ، مساحت دو قطاع با زاویه مرکزی یکسان  $(\theta = \frac{2\pi}{3})$  و شعاع‌های  $r_1 = 5 \text{ cm}$  و  $r_2 = 24 \text{ cm}$

را یافته و از هم کم می‌کنیم تا مساحت شیشه پاک‌شده توسط برف پاک‌کن به دست آید:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{r_2^2}{2} \theta - \frac{r_1^2}{2} \theta = \frac{\theta}{2} (r_2^2 - r_1^2) = \frac{\pi}{3} (24^2 - 5^2) = \frac{\pi \times 3}{2} = 551 \text{ cm}^2$$

۱ ۱۴ کافی است وضعیت ربات را به صورت زیر ترسیم کنیم. اکنون ارتفاع نوک گیره از سطح زمین  $(h)$  به صورت زیر به دست می‌آید:



$$\begin{cases} \sin \theta = \frac{1}{100} \Rightarrow l = 100 \sin \theta \\ \sin \alpha = \frac{d}{53} \Rightarrow d = 53 \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow h = 50 + l + d = 50 + 100 \sin \theta + 53 \sin \alpha$$

بر اساس فرض مسئله،  $h = 23/5 \text{ cm}$  و  $\alpha = -3^\circ$  می‌باشند. پس داریم:

$$23/5 = 50 + 100 \sin \theta + 53 \sin(-3^\circ) \Rightarrow 100 \sin \theta = 23/5 - 50 - 53(-\frac{1}{3}) = 0 \Rightarrow \sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

۳ ۱۵ مساحت کل مخروط از مساحت قاعده  $(A_1 = \pi r^2)$  و مساحت جانبی  $(A_2 = \pi rL)$  تشکیل شده است. پس داریم:

$$S = A_1 + A_2 = \pi r^2 + \pi rL = \pi(2)^2 + \pi(2 \times 5) = 14\pi \text{ cm}^2$$

$$\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) - \cos(\frac{\pi}{4} + \alpha) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha - \cos \frac{\pi}{4} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha = 2 \sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha$$

چون انتهای کمان  $\alpha$  در ربع چهارم می‌باشد، پس  $\sin \alpha < 0$  است، بنابراین:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow 2 \sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{-\sqrt{2}}{3} = \frac{-4}{3} = \frac{-2}{3}$$

۱ ۱۷ طرفین تساوی  $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$  را به توان ۲ می‌رسانیم. داریم:

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = \frac{1}{9} \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{\frac{1}{9} - 1}{2} = -\frac{4}{9}$$

حال با توجه به اتحاد  $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ ، داریم:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)^3 - 3 \sin x \cos x (\sin x + \cos x) = (\frac{1}{3})^3 - 3(-\frac{4}{9})(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} + \frac{4}{9} = \frac{13}{27}$$

۱۸ با استفاده از اتحاد  $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$  داریم:

$$\frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{\sin(x + \frac{\pi}{4})} = 2 \Rightarrow \frac{\sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4}}{\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4}} = 2 \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x - \cos x)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)} = 2$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} \sin x - \cos x = 2 \sin x + 2 \cos x \Rightarrow -\sin x = 2 \cos x \Rightarrow -\frac{\sin x}{\cos x} = 2 \Rightarrow \tan x = -2$$

۱۹ ابتدا در صورت و مخرج از اتحاد مزدوج استفاده کرده و سپس روابط سینوس و کسینوس مجموع و تفاضل دو کمان را می‌نویسیم:

$$A = \frac{(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)}{(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)} = \frac{\cos(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)} = \cot(\alpha - \beta) \cot(\alpha + \beta)$$

$$\alpha + \beta = 135^\circ \Rightarrow \cot(\alpha + \beta) = -1 \quad \text{و} \quad \tan(\alpha - \beta) = \frac{2}{3} \Rightarrow \cot(\alpha - \beta) = \frac{3}{2} \Rightarrow A = \left(\frac{3}{2}\right)(-1) = -\frac{3}{2}$$

۲۰ عدد ۲ را از صورت کسر فاکتور گرفته و به جای  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ،  $\sin$  و  $\cos$  کمان‌های مناسب را قرار می‌دهیم:

$$\frac{2\left(\frac{1}{3} \cos 2^\circ + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin 2^\circ\right)}{\cos 4^\circ} = \frac{2(\cos 6^\circ \cos 2^\circ + \sin 6^\circ \sin 2^\circ)}{\cos 4^\circ} = \frac{2 \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta)}{\cos 4^\circ} = \frac{2 \cos(6^\circ - 2^\circ)}{\cos 4^\circ} = 2$$

۲۱

$$\tan a + \tan b = \frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b} = \frac{\sin(a + b)}{\cos a \cos b}$$

با توجه به این‌که  $a + b = \frac{\pi}{4}$  می‌باشد، پس  $a + b = \frac{\pi}{4} - a$  است. بنابراین:

$$\sin(a + b) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = \cos a \Rightarrow \tan a + \tan b = \frac{\cos a}{\cos a \cos b} = \frac{1}{\cos b}$$

۲۲ با توجه به روابط  $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$  و  $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$  داریم:

$$\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{-\sqrt{2} \sin(15^\circ - 45^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ} = \frac{-\sqrt{2} \sin(-30^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{2} \sin 30^\circ}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ} = 2\sqrt{2}$$

۲۳ با توجه به روابط  $\cos\left(\frac{\pi}{4} - b\right) = \sin b$  و  $\cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = \sin a$  داریم:

$$A = 8 \cos a \cos b \sin a \sin b = 8 \sin a \cos a \sin b \cos b = \frac{2 \sin x \cos x = \sin 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x} \times \frac{1}{2} \sin 2a \times \frac{1}{2} \sin 2b = 2 \sin 2a \sin 2b$$

اگر  $a + b = \frac{\pi}{4}$  باشد، آن‌گاه در عبارت A به جای b عبارت  $a$  را قرار می‌دهیم:

$$A = 2 \sin 2a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2a\right) = 2 \sin 2a \cos 2a = \frac{2 \sin x \cos x = \sin 2x}{\sin 4a}$$

۲۴ اگر در اتحاد  $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$  به جای x زاویه  $\frac{\pi}{8}$  قرار دهیم، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$1 - \cos \frac{\pi}{4} = 2 \sin^2 \frac{\pi}{8} \Rightarrow \sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \xrightarrow{\text{در ربع اول قرار دارد}} \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

۲۵ با توجه به این‌که  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  و با گرفتن مخرج مشترک،  $\tan 7^\circ + \tan 1^\circ$  را به ضرب تبدیل می‌کنیم:

$$\cos 5^\circ \left( \frac{\sin 7^\circ}{\cos 7^\circ} + \frac{\sin 1^\circ}{\cos 1^\circ} \right) = \cos 5^\circ \left( \frac{\sin 7^\circ \cos 1^\circ + \cos 7^\circ \sin 1^\circ}{\cos 7^\circ \cos 1^\circ} \right) = \frac{\cos 5^\circ \sin 8^\circ}{\cos 7^\circ \cos 1^\circ}$$

$$= \frac{\sin 4^\circ \cos 1^\circ}{\sin 2^\circ \cos 1^\circ} = \frac{2 \sin 2^\circ \cos 2^\circ}{\sin 2^\circ} = 2 \cos 2^\circ$$

می‌توانستیم از فرمول  $\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$  هم استفاده کنی.

۲۶ ۴ طرفین عبارت  $\sin x - \cos x = \frac{-1}{4}$  را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = \frac{1}{4} \Rightarrow 2 \sin x \cos x = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin 2x = \frac{3}{4}$$

$$\cos 4x = \cos(2(2x)) = 1 - 2 \sin^2 2x = 1 - 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{8} = -\frac{1}{8}$$

۲۷ ۴ با توجه به روابط  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$  و  $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$  و همچنین  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  داریم:

$$A = \frac{\frac{1}{\cos^2 \theta} \times \frac{1}{\sin^2 \theta}}{\cos^2 \theta - \cos^4 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta)} = \frac{1}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta} = \frac{\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x}{\left(\frac{1}{2} \sin 2\theta\right)^2} = 16 \sin^{-4} 2\theta$$

۲۸ ۱ بر اساس اتحاد  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ ، کافی است طرفین عبارت  $A = \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ$  را در  $\sin 12^\circ$  ضرب کنیم:

$$\sin 12^\circ \times A = \sin 12^\circ \times \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ$$

$$A \sin 12^\circ = \frac{1}{2} \sin 24^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ = \frac{1}{4} \sin 48^\circ \cos 48^\circ = \frac{1}{8} \sin 96^\circ = \frac{1}{8} \sin(90^\circ + 6^\circ) = \frac{1}{8} \cos 6^\circ$$

$$\Rightarrow A \sin 12^\circ = \frac{1}{8} \cos 6^\circ \Rightarrow A = \frac{\frac{1}{8} \cos 6^\circ}{\sin 12^\circ} = \frac{\frac{1}{8} \cos 6^\circ}{2 \sin 6^\circ \cos 6^\circ} = \frac{1}{16 \sin 6^\circ}$$

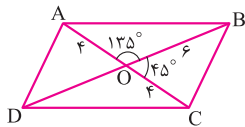
۲۹ ۲ می‌دانیم  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  و  $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ . بنابراین مطابق فرض سؤال، داریم:

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos 3x}{\sin 3x} \Rightarrow \sin x \sin 3x = \cos x \cos 3x \Rightarrow \cos 3x \cos x - \sin 3x \sin x = 0$$

حال طبق رابطه  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ ، داریم:

۳۰ ۲ **روش اول:** می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند. چون  $\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ$  پس طبق فرمول

مساحت دو مثلث AOB و BOC برابرند. در نتیجه برای تعیین مساحت متوازی‌الاضلاع کافی است چهار برابر مساحت مثلث BOC را  $S = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$  به دست آوریم:



$$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} OB \cdot OC \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$$

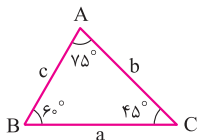
بنابراین مساحت متوازی‌الاضلاع برابر  $24\sqrt{2}$  است.

**روش دوم:** در یک چهارضلعی به طول قطرهای  $d_1$  و  $d_2$  و زاویه بین  $\alpha$ ، مساحت برابر  $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha$  می‌باشد، پس:

$$S = \frac{1}{2} \times 8 \times 12 \times \sin(135^\circ) = 24\sqrt{2}$$

پس مساحت متوازی‌الاضلاع  $24\sqrt{2}$  برابر است.

۳۱ ۴ می‌دانیم مجموع زاویه‌های یک مثلث برابر  $180^\circ$  است، پس با توجه به  $\hat{B} = 6^\circ$  و  $\hat{C} = 45^\circ$ ، نتیجه می‌گیریم  $\hat{A} = 75^\circ$  است. بنابراین با توجه به



$$\frac{a}{\sin 75^\circ} = \frac{b}{\sin 6^\circ} \Rightarrow \frac{3 + \sqrt{3}}{\sin 75^\circ} = \frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow b = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(3 + \sqrt{3})}{\sin 75^\circ}$$

رابطه سینوس‌ها، داریم:

برای محاسبه  $\sin 75^\circ$ ، از بسط  $\sin(a + b)$  استفاده می‌کنیم:

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow b = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(3 + \sqrt{3})}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = \frac{2\sqrt{2}(3 + \sqrt{3})}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{2(3\sqrt{2} + \sqrt{6})}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \text{ گویا } \frac{2(3\sqrt{2} + \sqrt{6})(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{6 - 2} = \frac{2(9\sqrt{2} - 3\sqrt{6} + 3\sqrt{6} - 3\sqrt{2})}{4} = 3\sqrt{2}$$

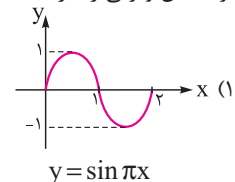
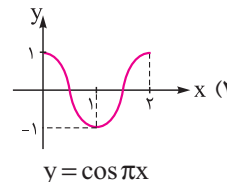
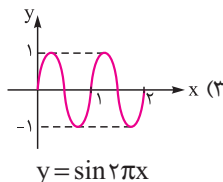
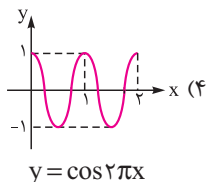
$$0 \leq x < 1 \Rightarrow f(x) = |f(x)| \Rightarrow f(x) \geq 0$$

۱ ۳۲

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow -f(x) = |f(x)| \Rightarrow f(x) \leq 0$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow f(x) = |f(x)| \Rightarrow f(x) \geq 0$$

همین روند روی  $\mathbb{R}$  ادامه پیدا می‌کند، یعنی  $f(x)$  یک واحد در میان، مثبت و منفی می‌شود. حال به کمک رسم نمودار توابع گزینه‌ها، بررسی می‌کنیم کدام گزینه این ویژگی را دارد:



بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

۲ ۳۳ با استفاده از روابط  $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$  داریم:

$$1 + \cos 2x = 2\cos^2 x, \quad 1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$$

حال عبارت A را ساده می‌کنیم:

$$A = \frac{\sqrt{1 + \sin 2^\circ} - \sqrt{1 - \cos 7^\circ}}{\sin 1^\circ - \cos 1^\circ} \xrightarrow{\sin 2^\circ = \cos 7^\circ} \frac{\sqrt{1 + \cos 7^\circ} - \sqrt{1 - \cos 7^\circ}}{\sin 1^\circ - \cos 1^\circ} = \frac{\sqrt{2\cos^2 35^\circ} - \sqrt{2\sin^2 35^\circ}}{\sin 1^\circ - \cos 1^\circ}$$

$$= \frac{\sqrt{2}|\cos 35^\circ| - \sqrt{2}|\sin 35^\circ|}{\sin 1^\circ - \cos 1^\circ} = \frac{\sqrt{2}(\cos 35^\circ - \sin 35^\circ)}{\sin 1^\circ - \cos 1^\circ}$$

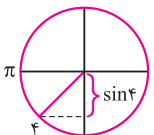
سپس با استفاده از رابطه  $\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha - \frac{\pi}{4})$  را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{2}(\cos 35^\circ - \sin 35^\circ)}{\sqrt{2} \sin(1^\circ - 45^\circ)} = \frac{\cos 35^\circ - \sin 35^\circ}{\sin(-35^\circ)} = \frac{\sin(-35^\circ) = -\sin 35^\circ}{-\sin 35^\circ} = \frac{\cos 35^\circ - \sin 35^\circ}{-\sin 35^\circ} = \frac{\cos 35^\circ}{-\sin 35^\circ} - \frac{\sin 35^\circ}{-\sin 35^\circ} = -\cot 35^\circ + 1$$

۲ ۳۴ ابتدا به جای  $\delta a$  عبارت  $a + 4a$  و به جای  $\gamma a$  عبارت  $4a - a$  قرار می‌دهیم و سپس از بسط مجموع و تفاضل زوایا برای سینوس و کسینوس استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\sin \delta a - \sin \gamma a}{\cos \delta a - \cos \gamma a} = \frac{\sin(4a + a) - \sin(4a - a)}{\cos(4a + a) - \cos(4a - a)} = \frac{\sin 4a \cos a + \sin a \cos 4a - (\sin 4a \cos a - \sin a \cos 4a)}{\cos 4a \cos a - \sin 4a \sin a - (\cos 4a \cos a + \sin 4a \sin a)}$$

$$= \frac{\cancel{\sin a} \cos 4a}{-\cancel{\sin 4a} \sin a} = -\cot 4a \stackrel{a=7/5^\circ}{=} -\cot(3^\circ) = -\sqrt{3}$$



۳ ۳۵ روش اول: منظور از عدد ۴ همان ۴ رادیان است که می‌توان گفت تقریباً برابر  $4 \times 57^\circ = 228^\circ$  است. پس انتهای کمان

۴ رادیان در ربع سوم دایره مثلثاتی قرار می‌گیرد:

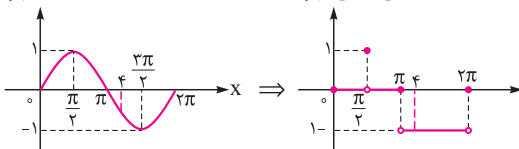
$$-1 < \sin 4 < 0 \Rightarrow [\sin 4] = -1$$

$$y_1 = \sin x$$

$$y_2 = [\sin x]$$

روش دوم: نمودار تابع  $y_1 = \sin x$  و  $y_2 = [\sin x]$  را در بازه  $[0, 2\pi]$  رسم کرده و مقدار

$y_2 = [\sin x]$  را به ازای  $x = 4$  می‌یابیم:



پس حاصل  $[\sin 4]$  برابر  $-1$  می‌باشد.

۲ ۳۶ با استفاده از قوانین مثلثات، عبارت  $\cos 2x - 4\cos x + 3 = 2\cos^2 x - 4\cos x + 3 = 2(\cos x - 1)^2 = 2(-2\sin^2 \frac{x}{2})^2 = 8\sin^4 \frac{x}{2}$  می‌نویسیم:

$$\cos 2x - 4\cos x + 3 = 2\cos^2 x - 4\cos x + 3 = 2(\cos x - 1)^2 = 2(-2\sin^2 \frac{x}{2})^2 = 8\sin^4 \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \log(3 - 4\cos x + \cos 2x) = \log(8\sin^4 \frac{x}{2}) = \log 8 + \log(\sin^4 \frac{x}{2}) = 3\log 2 + 4\log(\sin \frac{x}{2}) = 3\log 2 + 4a$$

۴ ۲۷

$$4 \cos 4^\circ - \frac{1}{\cos 2^\circ} = \frac{4 \cos 4^\circ \cos 2^\circ - 1}{\cos 2^\circ} = \frac{2(2 \cos 4^\circ \cos 2^\circ - \frac{1}{2})}{\cos 2^\circ} = \frac{2(2 \cos 4^\circ \cos 2^\circ - \cos 6^\circ)}{\cos 2^\circ}$$

$$= \frac{2(2 \cos 4^\circ \cos 2^\circ - \cos(4^\circ + 2^\circ))}{\cos 2^\circ}$$

حال با استفاده از بسط مجموع و تفاضل زوایا برای کسینوس، عبارت را ساده تر می کنیم:

$$\frac{2(2 \cos 4^\circ \cos 2^\circ - (\cos 4^\circ \cos 2^\circ - \sin 4^\circ \sin 2^\circ))}{\cos 2^\circ} = \frac{2(\cos 4^\circ \cos 2^\circ + \sin 4^\circ \sin 2^\circ)}{\cos 2^\circ} = \frac{2 \cos(4^\circ - 2^\circ)}{\cos 2^\circ} = \frac{2 \cos 2^\circ}{\cos 2^\circ} = 2$$

۳ ۲۸

$$\frac{\sqrt{1 + \sin 5^\circ}}{\sin 5^\circ + \sin 1^\circ} = \frac{\sqrt{1 + \cos(\frac{\pi}{2} - 5^\circ)}}{\sin(3^\circ + 2^\circ) + \sin(3^\circ - 2^\circ)} = \frac{\sqrt{1 + \cos 4^\circ}}{\sin(3^\circ + 2^\circ) + \sin(3^\circ - 2^\circ)}$$

حال بر اساس اتحاد  $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$  و همچنین اتحادهای بسط مجموع و تفاضل زوایا برای سینوس، عبارت را ساده تر می کنیم:

$$\text{حاصل} = \frac{\sqrt{2 \cos^2 2^\circ}}{\sin 3^\circ \cos 2^\circ + \sin 2^\circ \cos 3^\circ + \sin 3^\circ \cos 2^\circ - \sin 2^\circ \cos 3^\circ} = \frac{\sqrt{2} \overbrace{|\cos 2^\circ|}^{\text{مثبت}}}{2 \sin 3^\circ \cos 2^\circ} = \frac{\sqrt{2} \cos 2^\circ}{2 \times \frac{1}{2} \times \cos 2^\circ} = \sqrt{2}$$

۳ ۲۹ تابع را به صورت ساده تر می نویسیم:

$$f(x) = \sin^2 2x \cos^2 2x = (\sin 2x \cdot \cos 2x)^2 = (\frac{1}{2} \sin 4x)^2 = \frac{1}{4} \sin^2 4x$$

با توجه به این که دوره تناوب  $f(x) = m \sin^{2n}(ax + b)$  برابر  $\frac{\pi}{|a|}$  می باشد، پس دوره تناوب این تابع برابر  $T = \frac{\pi}{4}$  است.

۲ ۴۰ می دانیم دوره تناوب تابع  $y = \cos^{2n-1} ax$  برابر  $T = \frac{2\pi}{|a|}$  و دوره تناوب توابع  $y = \sin^{2n} ax$ ،  $y = \cos^{2n} ax$ ،  $y = \tan^{2n} ax$  برابر  $T = \frac{\pi}{|a|}$  است.

بنابراین دوره تناوب هر یک از گزینه ها را به دست می آوریم:

$$1) T = \frac{\pi}{\pi} = 1 \quad 2) T = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \quad 3) T = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2} \quad 4) T = \frac{\pi}{\pi} = 1$$

بنابراین دوره تناوب تابع گزینه (۲) از همه بزرگ تر است.

۱ ۴۱ با استفاده از اتحاد مثلثاتی  $\cot x - \tan x = 2 \cot 2x$ ، تابع به صورت  $f(x) = -2 \cot 2x$  درمی آید. حال با توجه به این که دوره تناوب

$y = k \cot^n(ax)$  برابر  $\frac{\pi}{|a|}$  می باشد، پس دوره تناوب  $f(x) = -2 \cot 2x$  برابر  $\frac{\pi}{2}$  است.

۳ ۴۲ ابتدا هر یک از توابع را به صورت ساده تر می نویسیم. با توجه به اتحاد  $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ ، داریم:

$$f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$= 1 - 3(\frac{1}{2} \sin 2x)^2 \Rightarrow f(x) = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x \Rightarrow T_f = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

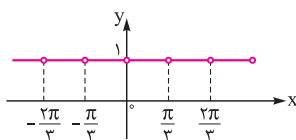
از طرفی می دانیم  $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ ، بنابراین:

$$g(x) = \cos^3 x \cos x + \sin^3 x \sin x = \cos(3x-x) = \cos 2x \Rightarrow T_g = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{2} = \pi \Rightarrow \frac{T_f}{T_g} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{1}{2}$$

۳ ۴۳ ابتدا تابع  $f(x)$  را ساده می کنیم:

$$f(x) = \tan 2x + \cot 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\sin^2 2x + \cos^2 2x}{\sin 2x \cos 2x} = \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 4x} = \frac{2}{\sin 4x} \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

آن، فاصله دو نقطه انفصال برابر دوره تناوب است، یعنی  $T_2 = \frac{\pi}{3}$  و در نتیجه  $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{2}$  است. پس طبق نمودار



آن، فاصله دو نقطه انفصال برابر دوره تناوب است، یعنی  $T_2 = \frac{\pi}{3}$  و در نتیجه  $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{2}$

۳ ۴۴ تابع را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم، سپس دوره تناوب آن را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 - \sin^2 x + \sin^2 x = 1 - \sin^2 x(1 - \sin^2 x) = 1 - \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2$$

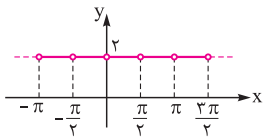
$$\Rightarrow f(x) = 1 - \frac{1}{4} \sin^2 2x \Rightarrow T = \frac{\pi}{|\frac{1}{2}|} = \frac{\pi}{2}$$

۱ ۴۵ ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = (\tan x + \cot x)^2 - \tan^2 x - \cot^2 x = (\tan^2 x + \cot^2 x + 2) - \tan^2 x - \cot^2 x = 2$$

پس تابع به صورت ثابت  $f(x) = 2$  حاصل می‌شود. از طرفی مخرج کسره‌های  $\tan x$  و  $\cot x$  نباید صفر شود، بنابراین:

$$\sin x \neq 0, \cos x \neq 0 \Rightarrow D_{f(x)} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$



با توجه به نمودار تابع  $f(x)$ ، دوره تناوب آن برابر  $T = \frac{\pi}{2}$  می‌شود.

۳ ۴۶ دوره تناوب  $y = b \cos ax$  برابر  $T = \frac{2\pi}{|a|}$  می‌باشد. با توجه به نمودار داده‌شده، دوره تناوب  $y = b \cos ax$  برابر  $\frac{\Delta\pi}{\lambda}$  است، بنابراین:

$$\frac{2\pi}{|a|} = \frac{\Delta\pi}{\lambda} \Rightarrow |a| = \frac{\lambda}{\Delta} \Rightarrow a = \pm \frac{\lambda}{\Delta}$$

تابع از نقطه  $(0, 3)$  می‌گذرد، بنابراین داریم:

$$f(0) = 3 \Rightarrow 3 = b \cos 0 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{3}{\pm \frac{\lambda}{\Delta}} = \pm \frac{15}{\lambda}$$

که در گزینه‌ها فقط عدد  $\frac{15}{\lambda}$  می‌باشد.

۱ ۴۷ با توجه به شکل، دوره تناوب تابع برابر  $4\pi$  است. پس داریم:

$$y = \frac{1}{2} + 2 \cos mx \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|m|} = 4\pi \Rightarrow |m| = \frac{1}{2} \Rightarrow m = \pm \frac{1}{2}$$

می‌دانیم  $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ . پس تابع به صورت  $y = \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{1}{2}x$  درمی‌آید. در نتیجه:

$$x = \frac{16\pi}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{8\pi}{3} = \frac{1}{2} + 2 \cos \left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - 2 \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - 2 \left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

۲ ۴۸

### یادآوری

توابع  $y = a \sin bx + c$  و  $y = a \cos bx + c$  دارای مقدار ماکزیمم  $|a| + c$  و مقدار مینیمم  $-|a| + c$  می‌باشند.

چون  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$ ، پس تابع به صورت  $y = a + 2 \sin bx$  در می‌آید. از طرفی می‌دانیم ماکزیمم  $y = a + 2 \sin bx$  برابر  $a + 2$  می‌شود که با توجه به نمودار  $a + 2 = 1$  و در نتیجه  $a = -1$  است.

فاصله یک دوره تناوب تابع برابر  $\frac{13\pi}{18} - \frac{\pi}{18} = \frac{12\pi}{18}$  می‌باشد، پس داریم:

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{12\pi}{18} \Rightarrow |b| = 3 \Rightarrow b = \pm 3$$

در تابع  $y = -1 + 2 \sin bx$  اگر  $b > 0$  باشد، نمودار آن با شروع از مبدأ به صورت  $\curvearrowright$  و اگر  $b < 0$  باشد به صورت  $\curvearrowleft$  می‌شود. بنابراین طبق شکل داده‌شده  $b > 0$  است، پس  $b = 3$  و در نتیجه  $a + b = 2$  می‌شود.

۱ ۴۹ تابع را به صورت ساده‌تری می‌نویسیم:

$$y = a \sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi bx\right) = a \cos(\pi bx)$$

با توجه به نمودار، منحنی از نقطه  $(0, 2)$  می‌گذرد، پس:

$$y(0) = 2 \Rightarrow a \cos(0) = 2 \Rightarrow a = 2$$

نمودار تابع در بازه  $[-2/5, 3/5]$  که طولی برابر ۶ دارد، ۳ بار تکرار شده است، پس اگر دوره تناوب  $y = 2 \cos(\pi bx)$  را برابر  $T$  فرض کنیم، داریم:



$$3T = 6 \Rightarrow T = 2 \Rightarrow \frac{2\pi}{|\pi b|} = 2 \Rightarrow b = \pm 1 \Rightarrow ab = \pm 2$$



هر دو قابل قبول هستند که بر اساس گزینه‌ها  $ab=2$  می‌باشد. بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

۳ ۵۰ ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:



$$y = \cos(ax + \frac{1}{\sqrt{3}})\pi \Rightarrow y = \cos(\pi ax + \frac{\pi}{\sqrt{3}}) = -\sin \pi ax$$

نمودار  $y = -\sin \pi ax$ ، اگر  $a$  مثبت باشد به صورت  و اگر  $a$  منفی باشد، به صورت  درمی‌آید، پس با توجه به شکل داده‌شده،  $a$  مثبت است. از طرفی فاصله مشخص شده روی نمودار، یک دوره تناوب تابع است، بنابراین  $T = \frac{4}{\sqrt{3}}$  می‌شود و در نتیجه داریم:

$$y = -\sin \pi ax \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|\pi a|} = \frac{2}{|a|} \Rightarrow \frac{2}{|a|} = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow |a| = \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{a > 0} a = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱ ۵۱ چون نمودار از مبدأ مختصات گذشته، پس  $f(0) = 0$  است:

$$f(0) = 0 \Rightarrow a + b \cos(0) = 0 \Rightarrow a + b = 0$$

در تابع  $y = b \cos(\frac{\pi x}{\sqrt{3}}) + a$ ، اگر  $b > 0$  باشد، نمودار تابع با شروع از مبدأ به صورت  و اگر  $b < 0$  باشد نمودار به صورت  در می‌آید. پس با توجه به شکل صورت سؤال،  $b < 0$  است. از طرفی می‌دانیم مقدار ماکزیمم تابع  $y = b \cos(\frac{\pi x}{\sqrt{3}}) + a$  برابر  $|b| + a$  است. پس داریم:



$$|b| + a = 4 \xrightarrow{b < 0} -b + a = 4$$

با حل دستگاه مقادیر  $a$  و  $b$  را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = 4 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = -2$$


۴ ۵۲ با توجه به نمودار داده‌شده، دوره تناوب برابر  $\frac{2\pi}{3}$  است. پس داریم:

$$y = 1 - \sin mx \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|m|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |m| = 3$$

می‌دانیم نمودار تابع  $y = 1 - \sin 3x$  با شروع از مبدأ، به صورت  و نمودار تابع  $y = 1 - \sin(-3x)$  به صورت  می‌باشد، پس با توجه به شکل صورت سؤال،  $m = 3$  است. بنابراین:

$$y = 1 - \sin 3x \Rightarrow y(\frac{\sqrt{\pi}}{6}) = 1 - \sin \frac{\sqrt{\pi}}{3} = 1 - (-1) = 2$$



۱ ۵۳ با توجه به تابع  $y = a \sin(b\pi x)$  درمی‌یابیم که اگر  $a$  و  $b$  هم‌علامت باشند، نمودار به صورت  خواهد بود یعنی با شروع از مبدأ، ابتدا ماکزیمم و سپس مینیمم وجود دارد. پس بر اساس نمودار مطرح‌شده در تست، مشخص است که  $a$  و  $b$  غیرهم‌علامت هستند، بنابراین  $ab < 0$  است. از طرفی دیگر، ماکزیمم و مینیمم تابع  $y = a \sin(b\pi x)$  به ترتیب برابر  $|a|$  و  $-|a|$  می‌باشند که با توجه به نمودار،  $|a| = 3$  می‌شود. و در آخر، تابع در بازه  $[0, 3]$  سه‌بار تکرار شده است، پس اگر دوره تناوب  $y = a \sin(b\pi x)$  را  $T$  فرض کنیم، آن‌گاه:

$$3T = 3 \Rightarrow T = 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{\pi b} = 1 \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow |ab| = |a||b| = 6 \xrightarrow{a, b < 0} ab = -6$$

۳ ۵۴ قسمتی از نمودار تابع در بازه  $(0, \frac{4}{3})$  دو بار تکرار شده است، پس دوره تناوب آن برابر  $\frac{2}{3}$  می‌شود. بنابراین داریم:

$$T = \frac{2\pi}{\pi b} = \frac{2}{3} \Rightarrow |b| = 3$$

هم‌چنین مینیمم تابع برابر  $-1$  است پس  $1 - |a| = -1$  و در نتیجه  $|a| = 2$  می‌شود. از طرفی با توجه به نمودار،  $a$  و  $b$  هم‌علامت هستند بنابراین  $a + b = \pm 5$  می‌باشد.

۳ ۵۵ با توجه به شکل  $f(0) > 1$  است، بنابراین:


$$f(0) = 1 + a \sin(-\frac{\pi}{6}) > 1 \Rightarrow 1 - \frac{a}{2} > 1 \Rightarrow \frac{-a}{2} > 0 \Rightarrow a < 0$$

با توجه به شکل ماکزیمم تابع برابر  $1/5$  است، پس داریم:

$$1 + |a| = 1/5 \xrightarrow{a < 0} 1 - a = 1/5 \Rightarrow a = -1/5$$

$$\frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2$$

هم‌چنین از روی شکل نتیجه می‌گیریم که دوره تناوب تابع برابر  $\pi$  است. پس:

چون نمودار با شروع از مبدأ به صورت  است، پس باید  $a$  و  $b$  غیرهم‌علامت باشند، در نتیجه  $b = 2$  قابل قبول است. بنابراین  $a + b = \frac{-1}{5} + 2 = \frac{9}{5}$  می‌باشد.

۵۶ ۱ اگر دوره تناوب تابع  $f(2x+1)$  برابر ۴ باشد، آن گاه دوره تناوب تابع  $f(x)$  برابر ۸ می‌شود؛ بنابراین دوره تناوب تابع  $y=2f(-\frac{x}{2})+1$  برابر است

$$\text{با: } T = \frac{8}{|\frac{1}{2}|} = 16$$

۵۷ ۳ بر طبق نمودار، دوره تناوب  $f(x)$  برابر  $T=4$  می‌باشد و می‌دانیم  $f(x+nT)=f(x)$ ، یعنی برای محاسبه مقدار تابع در یک نقطه

می‌توان ۴ یا مضارب آن را به آن نقطه اضافه یا کم کرد. پس:

$$\begin{cases} f(22) = f(5 \times 4 + 2) = f(2) = 2 \\ f(-9) = f(-3 \times 4 + 3) = f(3) = \frac{3}{2} \Rightarrow f(22) + f(-9) = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

۵۸ ۱ چون دوره تناوب تابع برابر ۲ است، پس به عدد  $9/96$  می‌توان مضارب صحیح ۲ را اضافه یا کم کرد. (مضرب انتخابی باید طوری باشد که عدد

حاصل بین  $-2$  و صفر قرار بگیرد)، بنابراین:

$$f(-9/96) = f(-9/96 + (4 \times 2)) = f(-1/96) = \sqrt{-1/96 + 2} = \sqrt{0.04} = 0.2$$

۵۹ ۳ از رابطه  $f(x-\frac{1}{3}) = f(x+\frac{2}{3})$  نتیجه می‌گیریم تابع  $f$  متناوب است. برای این که دوره تناوب را تعیین کنیم، داریم:

$$f(x-\frac{1}{3}) = f(x+\frac{2}{3}) \Rightarrow f(t) = f(\frac{1}{3} + t + \frac{2}{3}) \Rightarrow f(t) = f(t+1) \Rightarrow f(x) = f(x+1)$$

می‌دانیم اگر  $f$  تابع تناوب با دوره تناوب  $T$  باشد، آن گاه برای هر عدد طبیعی  $n$  رابطه  $f(x \pm nT) = f(x)$  برقرار است. پس از تساوی  $f(x+2) = f(x)$

نتیجه می‌گیریم عدد ۲ دوره تناوب یا مضرب صحیحی از دوره تناوب است. حال دوره تناوب هر یک از گزینه‌ها را تعیین می‌کنیم. (با توجه به مطالب درسنامه

دوره تناوب  $y=ax-[ax]$  برابر  $T=\frac{1}{|a|}$  است.)

$$1) T = \frac{\pi}{|\frac{\pi}{3}|} = 3 \quad 2) T = \frac{2\pi}{|\frac{\pi}{4}|} = 8 \quad 3) T = \frac{1}{|\frac{1}{2}|} = 2 \quad 4) T = \frac{1}{|\frac{1}{3}|} = 3$$

۶۰ ۱ از فرضیات سؤال نتیجه می‌گیریم  $T=12$  (دوره تناوب)،  $Max=14$  و  $min=6$  می‌باشد. با توجه به گزینه‌ها، اگر تابع را به صورت

$y = a \cos(bx) + c$  در نظر بگیریم، آن گاه داریم:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 12 \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{6} ; \begin{cases} Max = |a| + c \Rightarrow 14 = |a| + c \\ min = -|a| + c \Rightarrow 6 = -|a| + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| = 4 \\ c = 10 \end{cases}$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

۶۱ ۲ با توجه به نمودار، تابع در بازه  $[5, 11]$ ، سه بار تکرار شده است. پس اگر دوره تناوب را  $T$  فرض کنیم، داریم:

$$3T = (11 - 5) \Rightarrow 3T = 6 \Rightarrow T = 2$$

بر اساس گزینه‌ها ضابطه تابع به صورت  $y = a \sin(bx) + c$  می‌باشد. برای تعیین  $a$ ،  $b$  و  $c$  داریم:

$$\begin{cases} |a| + c = 9 \\ -|a| + c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 6 \\ |a| = 3 \end{cases} , T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 2 \Rightarrow |b| = \pi$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

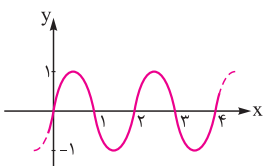
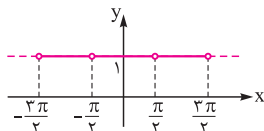
۶۲ ۲ با استفاده از رابطه  $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ ، تابع را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x) = \cos(2 \tan x) + 2 \sin^2(\tan x) = (1 - 2 \sin^2(\tan x)) + 2 \sin^2(\tan x) = 1$$

از طرفی می‌دانیم تابع  $y = \tan x$  در نقاط به طول  $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) تعریف نمی‌شود، پس داریم:

$$f(x) = 1 ; D_f = \mathbb{R} - \{k\pi + \frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\}$$

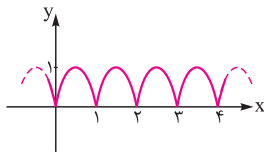
با توجه به نمودار تابع، دوره تناوب  $f$  برابر  $\pi$  می‌باشد. (فاصله دو حفره)



۶۳ ۱ ابتدا نمودار  $y = \sin \pi x$  را رسم می‌کنیم:

از طرفی می‌دانیم عبارت  $(-1)^{[x]}$  در بازه‌های متوالی به طول یک واحد برابر ۱ و -۱ می‌شود:

$$(-1)^{[x]} = \begin{cases} \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \leq x < 1 \\ -1 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x < 3 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

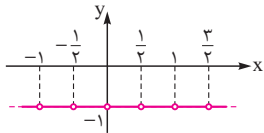


بنابراین نمودار تابع  $f(x)$  به صورت روبه‌رو حاصل می‌شود که دوره تناوب آن برابر ۱ است:

با اتحاد مثلثاتی  $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$  عبارت را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x) = \frac{\cos 2x + 2\sin^2 x}{[2x] + [-2x]} = \frac{(1 - 2\sin^2 x) + 2\sin^2 x}{[2x] + [-2x]} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{[2x] + [-2x]}$$

می‌دانیم  $[2x] + [-2x] = \begin{cases} 0 & 2x \in \mathbb{Z} \\ -1 & 2x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$  پس تابع  $f(x) = \frac{1}{[2x] + [-2x]}$  به ازای اعداد  $x = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \dots$  تعریف نمی‌شود و به



ازای بقیه اعداد برابر ۱ - می‌شود. حال نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = -1; \quad D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{k}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

با توجه به نمودار، دوره تناوب برابر  $\frac{1}{2}$  است. (فاصله دو حفره برابر  $\frac{1}{2}$  می‌باشد).

درستی یا نادرستی رابطه  $f(x+T) = f(x)$  را به ازای کوچک‌ترین گزینه بررسی می‌کنیم، اگر برقرار بود دوره تناوب است و چنانچه برقرار نبود

به ترتیب به سراغ گزینه‌های بزرگ‌تر می‌رویم:

$$T = \frac{\pi}{4} \Rightarrow f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \left| \sin\left(2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) \right| + \left| \cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) \right| = \left| \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) \right| + \left| \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) \right| \\ = \left| \cos 2x \right| + \left| \sin 2x \right| = f(x) \Rightarrow \text{دوره تناوب است. } T = \frac{\pi}{4}$$

درستی یا نادرستی رابطه  $f(x+T) = f(x)$  را به ازای کوچک‌ترین گزینه بررسی می‌کنیم، اگر برقرار بود دوره تناوب است و چنانچه برقرار نبود

به ترتیب به سراغ گزینه‌های بزرگ‌تر می‌رویم:

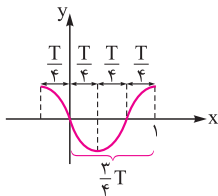
$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(3x + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos x \cos 3x \neq f(x)$$

$$f\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \sin\left(3x + \frac{9\pi}{4}\right) \neq f(x)$$

$$f(x + \pi) = \sin(x + \pi) \sin(3x + 3\pi) = (-\sin x)(-\sin 3x) = f(x)$$

پس  $T = \pi$  دوره تناوب است.

می‌دانیم  $y = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi ax\right) = -\sin(\pi ax)$  حال اگر دوره تناوب تابع  $y = -\sin(\pi ax)$  را برابر  $T$  فرض کنیم، آن‌گاه بر طبق نمودار، داریم:



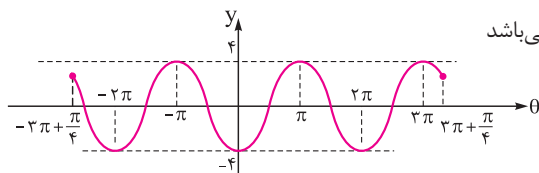
$$\frac{3}{4}T = 1 \Rightarrow T = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{|\pi a|} = \frac{4}{3} \Rightarrow |a| = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \pm \frac{3}{2}$$

با توجه به نمودار  $y = -\sin(\pi ax)$  درمی‌یابیم که  $a > 0$  است، پس  $a = \frac{3}{2}$  صحیح است.

۳ ۶۸

$$-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow -3\pi \leq -3\pi x \leq 3\pi \Rightarrow -3\pi + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} - 3\pi x \leq 3\pi + \frac{\pi}{4}$$

اگر  $\theta = \frac{\pi}{4} - 3\pi x$  را فرض کنیم، با رسم  $y = -4 \cos \theta$  که  $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq 3\pi + \frac{\pi}{4}$  می‌باشد



می‌توانیم نقاطی که بیشترین مقدار را دارند به دست آوریم:

پس نمودار تابع در سه نقطه به طول‌های  $\{-\pi, \pi, 3\pi\}$  دارای بیشترین مقدار می‌باشد.

هریک از گزینه‌ها را با تعریف  $f(x+T)=f(x)$  بررسی می‌کنیم. برای این کار از عدد کوچک‌تر شروع می‌کنیم:

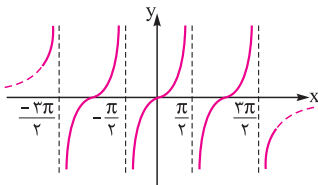
$$T = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x+T) = f\left(x + \frac{1}{2}\right) = \cos\left(\cos\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos(-\sin \pi x) = \cos(\sin \pi x) \neq f(x)$$

$$T = 1 \Rightarrow f(x+T) = f(x+1) = \cos(\cos(\pi x + \pi)) = \cos(-\cos \pi x) = \cos(\cos \pi x) = f(x)$$

بنابراین  $f(x)$  با دوره تناوب  $T=1$ ، متناوب است.

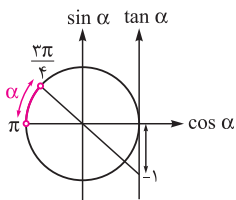
دقت کنید اگر گزینه دوم را نیز امتحان کنید خواهیم داشت:  $f(x+2)=f(x)$ ، اما با توجه به تعریف تابع متناوب، دوره تناوب، کوچک‌ترین فاصله‌ای است که تابع در آن تکرار می‌شود. بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

نمودار تابع  $f(x) = \tan x$  به صورت مقابل است:



از روی نمودار ملاحظه می‌شود که تابع در دامنه‌اش صعودی نیست بنابراین گزینه (۱) نادرست است.

ابتدا محدوده زاویه  $\alpha$  را روی دایره مثلثاتی مشخص می‌کنیم و سپس محدوده  $\tan \alpha$  را به دست می‌آوریم:

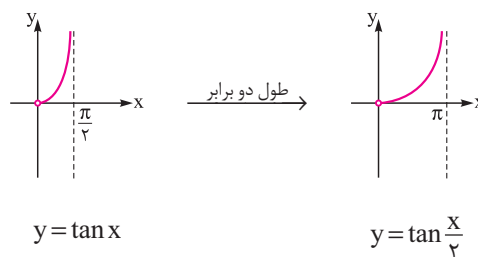


$$\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi \Rightarrow -1 < \tan \alpha < 0 \Rightarrow -1 < \frac{2}{m-1} < 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{m-1} < 0 \Rightarrow m-1 < 0 \Rightarrow m < 1 \\ \frac{2}{m-1} > -1 \Rightarrow \frac{1+m}{m-1} > 0 \Rightarrow m > 1 \text{ یا } m < -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} m < -1$$

**روش اول:** ابتدا با توجه به روابط  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$  و  $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ ، تابع را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$y = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2}$$

حال به کمک نمودار تابع  $y = \tan x$ ، نمودار  $y = \tan \frac{x}{2}$  را رسم می‌کنیم:



**روش دوم (عددگذاری):** با توجه به ضابطه تابع  $y(\frac{\pi}{2}) = 1$  است که فقط گزینه (۱) این شرط را دارد. (در بازه داده‌شده غیر از  $x = \pi$  مجانب قائم دیگری ندارد.)

**روش اول:** تابع را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x) = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}} = \sqrt{\frac{2 \sin^2 x}{2 \cos^2 x}} = \sqrt{\tan^2 x} = |\tan x|$$

حال با توجه به نمودار  $y = \tan x$ ، نمودار  $y = |\tan x|$  را رسم می‌کنیم:

