

خرید کتاب های کنکور

با تخفیف ویژه

و

ارسال رایگان

Medabook.com

+



مدابوک



یک جله تماس تلفنی رایگان

با مشاوران رتبه برتر

برای انتخاب بهترین منابع

دبیرستان و کنکور

۰۲۱ ۲۸۴۲۵۲۱۰



# فهرست

## فصل ۱ : تابع

|    |    |   |
|----|----|---|
| ۱۶ | ۷  | درس (۱) مفهوم تابع                          |
| ۳۰ | ۲۲ | درس (۲) تبدیل نمودار توابع                  |
| ۴۰ | ۳۵ | درس (۳) تابع درجه سوم و توابع صعودی و نزولی |
| ۵۱ | ۴۴ | درس (۴) تابع یک به یک و وارون               |
| ۶۱ | ۵۵ | درس (۵) اعمال جبری و ترکیب توابع            |
| ۷۲ | ۶۸ | درس (۶) بخش پذیری و تقسیم                   |

## فصل ۲ : مثلثات

|     |     |                                  |
|-----|-----|----------------------------------|
| ۸۶  | ۸۰  | درس (۱) زاویه و نسبت های مثلثاتی |
| ۹۴  | ۸۹  | درس (۲) دایره مثلثاتی            |
| ۱۰۴ | ۹۷  | درس (۳) اتحاد های مثلثاتی        |
| ۱۱۳ | ۱۱۱ | درس (۴) توابع مثلثاتی            |
| ۱۲۲ | ۱۱۵ | درس (۵) تناوب و تابع تنازانت     |
| ۱۳۳ | ۱۲۷ | درس (۶) معادلات مثلثاتی          |

## فصل ۳ : حد و پیوستگی

|     |     |  |
|-----|-----|--|
| ۱۴۷ | ۱۴۱ | درس (۱) همسایگی و مفهوم حد                         |
| ۱۵۷ | ۱۵۲ | درس (۲) محاسبه حد توابع کسری (حالت $\frac{0}{0}$ ) |
| ۱۶۷ | ۱۶۲ | درس (۳) پیوستگی                                    |
| ۱۸۰ | ۱۷۲ | درس (۴) حد بی نهایت                                |
| ۱۸۹ | ۱۸۴ | درس (۵) حد در بی نهایت                             |

## فصل ۴ : مشتق

|     |     |                                   |
|-----|-----|-----------------------------------|
| ۲۰۲ | ۱۹۸ | درس (۱) آشنایی با مفهوم مشتق      |
| ۲۱۶ | ۲۰۵ | درس (۲) مشتق پذیری و پیوستگی ۱    |
| ۲۳۵ | ۲۲۵ | درس (۳) مشتق پذیری و پیوستگی ۲    |
| ۲۴۶ | ۲۴۴ | درس (۴) آهنگ متوسط و آهنگ لحظه ای |

## فصل ۵ : کاربرد مشتق

|     |     |   |
|-----|-----|---|
| ۲۵۷ | ۲۵۲ | درس (۱) اکستریم های یک تابع و توابع صعودی و نزولی ۱ |
| ۲۷۱ | ۲۶۱ | درس (۲) اکستریم های یک تابع و توابع صعودی و نزولی ۲ |
| ۲۸۹ | ۲۷۷ | درس (۳) جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن       |
| ۳۰۴ | ۲۹۵ | درس (۴) رسم نمودار توابع                            |

| فصل  | درس نامه | سؤال |
|--|----------|------|
| <b>فصل ۶ : الگو و دنباله</b>                 |          |      |
| درس (۱) الگو و دنباله                        | ۳۱۴      | ۳۱۹  |
| درس (۲) دنباله حسابی                         | ۳۲۲      | ۳۲۶  |
| درس (۳) دنباله هندسی                         | ۳۳۰      | ۳۳۶  |
| <b>فصل ۷ : توان‌های گویا و عبارتهای جبری</b> |          |      |
| درس (۱) ریشه‌گیری و توان‌های گویا            | ۳۴۱      | ۳۵۰  |
| درس (۲) عبارتهای جبری، اتحادها و تجزیه       | ۳۵۳      | ۳۵۷  |
| درس (۳) گویا کردن مخرج کسرها                 | ۳۶۰      | ۳۶۱  |
| <b>فصل ۸ : معادله و تابع درجه دوم</b>        |          |      |
| درس (۱) معادله درجه دو                       | ۳۶۴      | ۳۷۲  |
| درس (۲) تابع درجه دوم                        | ۳۷۶      | ۳۸۲  |
| <b>فصل ۹ : معادله و نامعادله</b>             |          |      |
| درس (۱) معادلات گویا                         | ۳۸۷      | ۳۸۹  |
| درس (۲) تعیین علامت و نامعادله گویا          | ۳۹۱      | ۳۹۶  |
| درس (۳) معادلات گنگ (رادیکالی)               | ۳۹۷      | ۴۰۱  |
| <b>فصل ۱۰ : قدرمطلق و جزء صحیح</b>           |          |      |
| درس (۱) قدرمطلق                              | ۴۰۴      | ۴۱۱  |
| درس (۲) جزء صحیح                             | ۴۱۵      | ۴۲۰  |
| <b>فصل ۱۱ : توابع نمایی و لگاریتمی</b>       |          |      |
| درس (۱) تابع نمایی                           | ۴۲۴      | ۴۲۸  |
| درس (۲) تابع لگاریتمی                        | ۴۳۱      | ۴۳۸  |
| <b>فصل ۱۲ : هندسه تحلیلی</b>                 |          |      |
| درس (۱) معادله خط                            | ۴۴۷      | ۴۵۶  |
| <b>پاسخنامه کلیدی</b>                        |          | ۴۶۱  |



۳۶۴- اگر  $f(x) = x^2 + 2x, x \geq 1$ ، آن گاه ریشه‌های معادله  $f \circ f^{-1}(x) = x^2 - 2$  چگونه‌اند؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳
- ۳۶۵- اگر  $f(x) = (\sqrt{x})^x$  و  $g(x) = \log_3 x$ ، آن گاه ضابطه  $(f \circ g)^{-1}$  کدام است؟
- (۱)  $x^2, x \geq 0$  (۲)  $2x, x \in \mathbb{R}$  (۳)  $\frac{x}{2}, x > 0$  (۴)  $x^2, x > 0$

## درس ۱

# بخش پذیری و تقسیم

یکی از سؤال‌های معروف امتحان‌های ریاضی دوران کودکی این بود:

«عدد ۳۴ را بر عدد ۶ تقسیم کنید و خارج قسمت و باقی‌مانده را بیابید، سپس درستی تقسیم را با کمک امتحان تقسیم بررسی کنید.»

برای شروع بد نیست که این سؤال را با هم حل کنیم. این تقسیم به صورت روبه‌رو انجام می‌شود: حالا باید درستی تقسیم را بررسی کنیم. رابطه امتحان تقسیم به صورت زیر است:

باقی‌مانده + خارج قسمت  $\times$  مقسوم‌علیه = مقسوم

$$34 = 6 \times 5 + 4 \quad \checkmark$$

یه کم که بزرگ‌تر شدیم تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای را یاد گرفتیم. از اون‌جا که می‌دونم یاد تونه! یک نمونه هم از این تقسیم انباشته داریم.

فرض کنید می‌خواهیم چندجمله‌ای  $1 - 2x^4 + 3x^3$  را بر  $2x^2 - 2$  تقسیم کنیم. روش کار به ترتیب زیر است:

۱ ابتدا  $1 - 2x^4 + 3x^3$  (مقسوم) را استاندارد می‌کنیم:

۲ جمله با بزرگ‌ترین درجه مقسوم را بر جمله با بزرگ‌ترین درجه مقسوم‌علیه تقسیم می‌کنیم و در خارج قسمت می‌نویسیم:

۳ عبارت به دست آمده در خارج قسمت را در مقسوم‌علیه ضرب و از مقسوم کم می‌کنیم:

۴ حال با تکرار مراحل ۲ و ۳ تقسیم را ادامه می‌دهیم، تا جایی که درجه چندجمله‌ای باقی‌مانده از درجه مقسوم‌علیه کم‌تر باشد.

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 3x^3 - 1 \\ -(2x^4 - 4x^2) \\ \hline 3x^3 + 4x^2 - 1 \\ -(3x^3 - 6x) \\ \hline 4x^2 + 6x - 1 \\ -(4x^2 - 8) \\ \hline 6x + 7 \end{array}$$

باقی‌مانده  $6x + 7$

$$\begin{array}{r} 2300-1 \\ -(20-4) \\ \hline 340 \\ -(30-6) \\ \hline 46-1 \\ -(40-8) \\ \hline 67 \end{array} \Rightarrow 6x+7 = \text{باقی‌مانده}$$

به طور قطع این تقسیم هم رابطه امتحان تقسیم دارد. این رابطه هم همانند رابطه قبل است، یعنی: باقی‌مانده + خارج قسمت  $\times$  مقسوم‌علیه = مقسوم: رابطه فقط چون این جا با چندجمله‌ای‌ها سروکار داریم رابطه را بر حسب  $x$  بیان می‌کنیم:  $P(x) = D(x) \times Q(x) + R(x)$  رابطه

به عنوان مثال در تقسیم مثال قبل داریم:  $2x^4 + 3x^3 - 1 = (x^2 - 2)(2x^2 + 3x + 4) + 6x + 7$

اگر درجه مقسوم  $n$  و درجه مقسوم‌علیه  $m$  باشد ( $n \geq m$ )، درجه خارج قسمت  $n - m$  و درجه باقی‌مانده حداکثر  $m - 1$  می‌باشد.

**تست** در تقسیم  $3 - ax^2 + x^n$  بر  $x^2 - 1$ ، خارج قسمت  $2 + x^2$  و باقی‌مانده  $x^2 + b$  شده است.  $n + a - b$  کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۴ (۴) ۲

**پاسخ گزینه ۲** اولاً مقسوم از درجه  $n$ ، مقسوم‌علیه از درجه ۳ و خارج قسمت از درجه ۲ است، پس طبق نکته قبل داریم:  $n - 3 = 2 \Rightarrow n = 5$



پس مقسوم به صورت  $x^5 + ax^3 - 3$  است. حالا رابطه تقسیم را می نویسیم:

$$P(x) = D(x)Q(x) + R(x) \Rightarrow x^5 + ax^3 - 3 = (x^2 - 1)(x^2 + 2) + x^2 + b$$

$$\Rightarrow x^5 + ax^3 - 3 = x^5 + 2x^3 - x^2 - 2 + x^2 + b \Rightarrow x^5 + ax^3 - 3 = x^5 + 2x^3 - 2 + b$$

$$a = 2$$

$$\left. \begin{aligned} -3 = -2 + b \Rightarrow b = -1 \\ \Rightarrow n + a - b = 5 + 2 - (-1) = 8 \end{aligned} \right\}$$

حالا با متحد قراردادن جمله‌ها، مجهول‌ها را می یابیم:

## محاسبه باقی مانده تقسیم

### محاسبه باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر چندجمله‌ای درجه اول $ax + b$

وقتی  $P(x)$  را بر  $ax + b$  تقسیم می کنیم، باقی مانده حداکثر می تواند از درجه صفر (یا همان عدد ثابت) باشد، پس رابطه تقسیم به صورت زیر نوشته می شود (R یعنی یک عدد ثابت):

$$P(x) = (ax + b)Q(x) + R$$

حالا برای محاسبه R، باید  $Q(x)$  را طوری از رابطه حذف کرد که فودش هم متوجه نشه! برای این کار ضریب  $Q(x)$  را صفر می کنیم:

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$$P\left(-\frac{b}{a}\right) = 0 \times Q(x) + R \Rightarrow P\left(-\frac{b}{a}\right) = R$$

پس اگر در رابطه تقسیم،  $x = -\frac{b}{a}$  را قرار دهیم، R محاسبه می شود:

$$R = P\left(-\frac{b}{a}\right)$$

باقی مانده تقسیم  $P(x)$  بر  $ax + b$  برابر است با:

### تست باقی مانده تقسیم $P(x) = 2x^4 + x^3 - 6$ بر $x + 2$ کدام است؟

۲۲ (۴)

۱۰ (۳)

۳۴ (۲)

۱۸ (۱)

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

مقسوم علیه یک چندجمله‌ای از درجه اول است. ریشه این عبارت برابر است با:

$$R = P(-2) = 2(-2)^4 + (-2)^3 - 6 = 2(16) - 8 - 6 = 18$$

پس برای محاسبه باقی مانده کافی است،  $P(-2)$  را محاسبه کنیم:

### پاسخ گزینه ۱

**نکته** چندجمله‌ای  $P(x)$  را بر چندجمله‌ای  $D(x)$  بخش پذیر گویند، هرگاه باقی مانده تقسیم  $P(x)$  بر  $D(x)$  صفر شود و برعکس.

**تست** باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای  $P(x) = x^4 - ax^3 + x^2 + b$  بر  $x + 1$  برابر ۹ است. اگر این چندجمله‌ای بر  $x - 2$  بخش پذیر باشد،

$a - b$  کدام است؟

-۷ (۴)

۷ (۳)

۱ (۲)

-۱ (۱)

$$P(-1) = 9 \Rightarrow 1 + a + 1 + b = 9 \Rightarrow a + b = 7 \quad (*)$$

باقی مانده تقسیم  $P(x)$  بر  $(x + 1)$  برابر ۹ است، در نتیجه: (\*)

$$P(2) = 0 \Rightarrow 16 - 8a + 4 + b = 0 \Rightarrow 8a - b = 20 \quad (**)$$

از طرفی  $P(x)$  بر  $(x - 2)$  بخش پذیر است، پس:

با حل دستگاه معادلات (\*) و (\*\*) داریم:

$$\begin{cases} a + b = 7 \\ 8a - b = 20 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} 9a = 27 \Rightarrow a = 3 \xrightarrow{(*)} 3 + b = 7 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow a - b = 3 - 4 = -1$$

### باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر چندجمله‌ای از درجه بیشتر از یک

در این جا نیز همانند بالا (طبق رابطه تقسیم) مقسوم علیه را برابر صفر قرار می دهیم و بزرگ ترین جمله مقسوم علیه را بر حسب جملات با درجه کم تر مرتب می کنیم و در نهایت رابطه حاصل را در مقسوم جای گذاری می کنیم و این کار را تا جایی ادامه می دهیم که درجه عبارت حاصل، کم تر از درجه مقسوم علیه باشد. در این حالت عبارت حاصل همان باقی مانده تقسیم است. عمر آگه متوجه شده باشین! 😊 بریم با مثال توضیح بدم:

فرض کنید می خواهیم باقی مانده تقسیم  $P(x) = x^5 - 2x^4 + x - 1$  بر  $x^2 - 1$  را محاسبه کنیم. برای این کار از یکی از دو روش زیر استفاده می کنیم:

① مقسوم علیه از درجه دوم است. پس باقی مانده حداکثر از درجه یک است. بنابراین می توانیم باقی مانده را به صورت  $ax + b$  در نظر بگیریم.

$$P(x) = Q(x)D(x) + R(x) \Rightarrow x^5 - 2x^4 + x - 1 = Q(x)(x^2 - 1) + ax + b$$

حالا رابطه تقسیم را می نویسیم:

برای محاسبه a و b، باید یک کاری کنیم  $Q(x)$  حذف شود. پس  $x = 1$  و  $x = -1$  را قرار می دهیم:

$$\begin{cases} x = 1 : 1 - 2 + 1 - 1 = 0 + a + b \Rightarrow a + b = -1 \\ x = -1 : -1 - 2 - 1 - 1 = 0 - a + b \Rightarrow -a + b = -5 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} 2b = -6 \Rightarrow b = -3 \xrightarrow{a+b=-1} a = 2$$

پس باقی مانده تقسیم، برابر  $2x - 3$  است.



۲ رابطه تقسیم با فرض این که  $R(x)$  باقی مانده است، به صورت مقابل است:  $x^5 - 2x^4 + x - 1 = Q(x)(x^2 - 1) + R(x)$   
 برای حذف  $Q(x)$  و محاسبه  $R(x)$ ، باید ضریب  $Q(x)$  را برابر صفر قرار دهیم:  
 حالا مقسوم را بر حسب  $x^2$  مرتب می‌کنیم و سپس به جای  $x^2$  مقدار ۱ قرار می‌دهیم:  

$$\Rightarrow x^5 - 2x^4 + x - 1 \xrightarrow{\text{بر حسب } x^2 \text{ می‌نویسیم}} = (x^2)^2 x - 2(x^2)^2 + x - 1$$
  

$$\xrightarrow{\text{جای } x^2 \text{ ها، ۱ می‌گذاریم}} = 1^2(x) - 2(1)^2 + x - 1 = x - 2 + x - 1 = 2x - 3$$

**تست** به چند جمله‌ای  $P(x) = x^6 - 3x^5 + ax$  چند واحد اضافه کنیم تا بر عبارت  $x^2 - 4$  بخش پذیر باشد؟

۶۴ (۱)      -۶۴ (۲)      ۴۸ (۳)      -۴۸ (۴)

**پاسخ گزینه ۲** فرض کنیم به  $P(x)$ ، مقدار  $b$  واحد اضافه کنیم؛ در این حالت عبارت  $x^6 - 3x^5 + ax + b$  بر  $x^2 - 4$  بخش پذیر است. حالا برای حل دو تا روش داریم:

**راه اول** از آن جا که  $P(x)$  بر  $x^2 - 4$  بخش پذیر است، پس باقی مانده تقسیم آن‌ها صفر است، پس طبق رابطه تقسیم داریم:

$$x^6 - 3x^5 + ax + b = (x^2 - 4)Q(x) + 0$$

با قراردادن  $x = 2$  و  $x = -2$ ، از شر  $Q(x)$  خلاص میشیم! پس:

$$\left. \begin{aligned} \xrightarrow{x=2} 64 - 96 + 2a + b = 0 &\Rightarrow 2a + b = 32 \\ \xrightarrow{x=-2} 64 + 96 - 2a + b = 0 &\Rightarrow 2a - b = 16 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{جمع}} 4a = 192 \Rightarrow a = 48 \xrightarrow{2a+b=32} b = -64$$

**راه دوم** مقسوم علیه را برابر صفر قرار داده و آن را بر حسب بزرگترین جمله آن می‌نویسیم:

حالا چند جمله‌ای  $x^6 - 3x^5 + ax + b$  را بر حسب  $x^2$  مرتب می‌کنیم و سپس به جای  $x^2$  مقدار ۴ قرار می‌دهیم:

$$(x^2)^3 - 3(x^2)^2 x + ax + b = 4^3 - 3(4)^2 x + ax + b = 64 - 48x + ax + b \Rightarrow (a - 48)x + b + 64$$

باقی مانده:  $(a - 48)x + b + 64 = 0$  چون باید باقی مانده برابر صفر باشد، پس:

$$\begin{cases} a - 48 = 0 \Rightarrow a = 48 \\ b + 64 = 0 \Rightarrow b = -64 \end{cases} \xrightarrow{\text{متحد قراردادن}}$$

**تست** اگر باقی مانده تقسیم  $x^3 + ax + 1 - 28x^2 + 3x^6 + x^1$  بر  $x^2 + ax$  برابر ۱ باشد،  $a$  کدام است؟

±۷ (۴)      ±۴ (۳)      ±۲ (۲)      ±۱ (۱)

**پاسخ گزینه ۲** مقسوم علیه را برابر صفر قرار داده و آن را بر حسب بزرگترین جمله آن می‌نویسیم:

حالا مقسوم را بر حسب  $x^2$  مرتب می‌کنیم و سپس به جای  $x^2$  ها  $-ax$  قرار می‌دهیم و این کار را تا جایی انجام می‌دهیم که تمام  $x$  ها کم تر از ۳ (درجه مقسوم علیه) شود

$$\begin{aligned} (x^3)^2 x + 3(x^3)^2 - 28x^2 + 1 &= (-ax)^2 x + 3(-ax)^2 - 28x^2 + 1 = -a^2 x^5 + 3a^2 x^2 - 28x^2 + 1 \\ &= -a^2 (x^3)^2 x + 3a^2 x^2 - 28x^2 + 1 = -a^2 (-ax)x + 3a^2 x^2 - 28x^2 + 1 = a^2 x^2 + 3a^2 x^2 - 28x^2 + 1 \\ &= (a^2 + 3a^2 - 28)x^2 + 1 \end{aligned}$$

باقی مانده  $(a^2 + 3a^2 - 28)x^2 + 1$  چون باقی مانده برابر ۱ است؛ بنابراین باید ضریب  $x^2$  برابر صفر باشد (تذکره!):

$$a^2 + 3a^2 - 28 = 0 \Rightarrow (a^2 + 7)(a^2 - 4) = 0 \Rightarrow a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a = \pm 2$$

**محاسبه باقی مانده بدون داشتن مقسوم**

در بعضی از سؤالات مقسوم را نمی‌دهند و از شما باقی مانده را می‌خواهند. در این جا فقط باید از رابطه تقسیم کمک بگیرید تا با خیال راحت جواب را محاسبه کنید. فقط حتماً باید به درجه مقسوم علیه برای تعیین درجه باقی مانده توجه کنید.

**تست** اگر باقی مانده تقسیم  $P(x)$  بر  $x + 1$  و  $x - 3$  به ترتیب برابر ۲ و ۶ باشد، باقی مانده تقسیم  $P(x)$  بر  $x^2 - 2x - 3$  کدام است؟

$x + 3$  (۴)       $3x - 1$  (۳)       $-x + 2$  (۲)       $x - 1$  (۱)

**پاسخ گزینه ۲** باقی مانده تقسیم  $P(x)$  بر  $x + 1$  برابر ۲ است، پس:

$P(-1) = 2$   
 $P(3) = 6$   
 از طرفی باقی مانده تقسیم  $P(x)$  بر  $x - 3$  برابر ۶ است، پس:



برای محاسبه باقی مانده تقسیم  $P(x)$  بر  $x^2 - 2x - 3$ ، رابطه تقسیم را می نویسیم. فقط توجه کنید که چون مقسوم علیه از درجه ۲ است، باقی مانده حداکثر از درجه یک است؛ پس آن را به صورت  $ax + b$  می نویسیم:

$$P(x) = (x^2 - 2x - 3)Q(x) + ax + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(-1) = 2 \Rightarrow 2 = 0 - a + b \Rightarrow -a + b = 2 \\ P(3) = 6 \Rightarrow 6 = 0 + 3a + b \Rightarrow 3a + b = 6 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 4a = 4 \Rightarrow a = 1 \xrightarrow{-a+b=2} b = 3$$

بنابراین با جای گذاری مقادیر  $a$  و  $b$  در  $ax + b$  باقی مانده برابر  $x + 3$  است.

**تست** اگر باقی مانده تقسیم  $P(x)$  بر  $(x+1)(x-1)$  برابر  $2x-1$  باشد، باقی مانده تقسیم عبارت  $P(x^2) - 2x$  بر  $(x+1)(x-1)$  کدام است؟

۲ (۴)                                  -۲ (۳)                                  ۱ (۲)                                  -۱ (۱)

**پاسخ گزینه ۱** باقی مانده تقسیم  $P(x)$  بر  $(x+1)(x-1)$  برابر  $2x-1$  است، پس طبق رابطه تقسیم:  $P(x) = (x-1)(x+1)Q(x) + 2x - 1$  حالا اگر به جای  $x$ ،  $x^2$  قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$P(x^2) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)Q(x^2) + 2x^2 - 1 \Rightarrow P(x^2) = (x-1)(x^2 + x + 1)(x+1)(x^2 - x + 1)Q(x^2) + 2x^2 - 1$$

$$\Rightarrow P(x^2) = (x-1)(x+1) \underbrace{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)Q(x^2)}_{Q'(x)} + 2x^2 - 1 \Rightarrow P(x^2) = (x-1)(x+1)Q'(x) + 2x^2 - 1$$

حالا از طرفین تساوی  $2x$  واحد کم می کنیم تا  $P(x^2) - 2x$  تشکیل شود:

$P(x^2) - 2x = (x-1)(x+1)Q'(x) + 2x^2 - 2x - 1$  چون مقسوم علیه از درجه ۲ است، باید باقی مانده حداکثر از درجه ۱ باشد، پس  $2x^2 - 2x - 1$  را بر مقسوم علیه  $(x^2 - 1)$  تقسیم می کنیم تا درجه آن کمتر از ۲ شود. باقی مانده این تقسیم همان باقی مانده ای است که دنبال آن هستیم:

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 2x - 1 \quad | \quad x^2 - 1 \\ \underline{-(x^2 - 1)} \phantom{- 1} \\ -2x - 1 \phantom{- 1} \\ \underline{-(-2x + 2)} \phantom{- 1} \\ \phantom{-} -3 \phantom{- 1} \end{array} \Rightarrow \text{باقی مانده} = -1$$

### محاسبه مقادیر خارج قسمت یک تقسیم

برای یافتن مقادیر خارج قسمت یک تقسیم اول باید باقی مانده را محاسبه کرده، سپس با نوشتن رابطه تقسیم مقدار خواسته شده را بیابید:

**تست** خارج قسمت تقسیم  $2 - x^2 + 3x^5 - x^7$  بر  $x - 1$  را  $Q(x)$  می نامیم. اگر  $Q(x)$  را بر  $x - 2$  تقسیم کنیم، باقی مانده کدام است؟

۲۸ (۱)                                  ۲۹ (۲)                                  ۳۱ (۳)                                  ۳۰ (۴)

**پاسخ گزینه ۳** ابتدا باقی مانده تقسیم  $2 - x^2 + 3x^5 - x^7$  بر  $x - 1$  را محاسبه می کنیم:

$$2 - x^2 + 3x^5 - x^7 = (x-1)Q(x) - 1$$

رابطه تقسیم را می نویسیم:

برای محاسبه باقی مانده تقسیم  $Q(x)$  بر  $x - 2$  کافی است  $Q(2)$  را محاسبه کنیم. پس با قراردادن  $x = 2$  در رابطه بالا داریم:

$$x = 2: 128 - 96 - 4 + 2 = (1)Q(2) - 1 \Rightarrow Q(2) - 1 = 30 \Rightarrow Q(2) = 31$$
 باقی مانده

### یادآوری و تعمیم دو اتحاد

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

اتحادهای زیر را به خاطر دارید:

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) \quad , \quad x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

در این بخش می خواهیم این اتحادها را تعمیم دهیم؛ یعنی آن ها را برای توان های بالاتر از ۳ بنویسیم. به جدول زیر توجه کنید:  $(k \in \mathbb{Z})$

| تقسیم                     | توضیح  | رابطه  |
|---------------------------|--|--|
| $x^n - y^n$<br>بر $x - y$ | $x - y = 0 \Rightarrow x = y$<br>$\Rightarrow P(y) = y^n - y^n = 0$<br>پس $x^n - y^n$ همواره $x - y$ بخش پذیر است. | $n \in \mathbb{R} : x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$ |



| تقسیم                     | توضیح  | رابطه   |
|---------------------------|--|---|
| $x^n - y^n$<br>بر $x + y$ | $x + y = 0 \Rightarrow x = -y$<br>$\Rightarrow P(-y) = (-y)^n - y^n$<br>اگر $n$ زوج باشد، حاصل مقدار بالا که همان<br>باقی‌مانده است صفر می‌شود، پس $x^n - y^n$ بر<br>$x + y$ بخش‌پذیر است. | $n \in 2k: x^n - y^n$<br>زوج<br>$= (x + y) \times (x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + xy^{n-2} - y^{n-1})$   |
| $x^n + y^n$<br>بر $x - y$ | $x - y = 0 \Rightarrow x = y$<br>$\Rightarrow P(y) = y^n + y^n$<br>$P(y)$ تحت هیچ شرایطی برای $n$ صفر نمی‌شود.<br>پس $x^n + y^n$ هیچ‌گاه بر $x - y$ بخش‌پذیر نیست.                         | _____   |
| $x^n + y^n$<br>بر $x + y$ | $x + y = 0 \Rightarrow x = -y$<br>$\Rightarrow P(-y) = (-y)^n + y^n$<br>اگر $n$ فرد باشد، حاصل مقدار بالا صفر می‌شود و در<br>نتیجه $x^n + y^n$ بر $x + y$ بخش‌پذیر است.                    | $n \in 2k+1: x^n + y^n$<br>فرد<br>$= (x + y) \times (x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots - xy^{n-2} + y^{n-1})$ |

حسابان و ریاضی جامع

**تست** حاصل  $\frac{x^9 + x^8 + x^7 + \dots + x + 1}{x + 1}$  به ازای  $x = \sqrt{3}$  کدام است؟

۱۲۲ (۴)      ۲۴۴ (۳)      ۱۲۱ (۲)      ۲۴۲ (۱)

**پاسخ گزینه ۲** **راه اول** صورت و مخرج را در  $x - 1$  ضرب می‌کنیم:

$$\text{عبارت} = \frac{(x-1)(x^9 + x^8 + x^7 + \dots + x + 1)}{(x-1)(x+1)} \xrightarrow{\text{اتحاد (۱)}} \text{عبارت} = \frac{x^{10} - 1}{x^2 - 1} = \frac{(\sqrt{3})^{10} - 1}{(\sqrt{3})^2 - 1}$$

$$= \frac{3^5 - 1}{3 - 1} = \frac{243 - 1}{2} = \frac{242}{2} = 121$$

**راه دوم** صورت کسر، مجموع  $10$  جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول  $a_1 = 1$  و قدرنسبت  $q = x$  است، پس:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_{10} = \frac{1(x^{10} - 1)}{x - 1}$$

پس کل کسر به صورت روبه‌رو درمی‌آید:

$$\frac{1 + x + x^2 + \dots + x^9}{x + 1} = \frac{x^{10} - 1}{x - 1} = \frac{x^{10} - 1}{x^2 - 1}$$

با جای‌گذاری  $x = \sqrt{3}$ ، داریم:

$$\frac{(\sqrt{3})^{10} - 1}{(\sqrt{3})^2 - 1} = \frac{3^5 - 1}{3 - 1} = \frac{242}{2} = 121$$

### پرسش‌های چهارگزینه‌ای

- بخش‌پذیری و تقسیم**
- ۳۶۶- در تقسیم عبارت  $x^3 + (x+2)^2(x-2) - 4x$ ، خارج‌قسمت کدام است؟
- ۲x - 4 (۴)      ۲x - 2 (۳)      x - 2 (۲)      x<sup>2</sup> - 2x (۱)
- ۳۶۷- باقی‌مانده تقسیم عبارت  $x^3 + 2ax + 1 - ax^2$  بر  $x + 1$  برابر ۴ است.  $a$  کدام است؟
- ۴ (۴)      ۱ (۳)      -۱ (۲)      -۴ (۱)
- ۳۶۸- اگر چندجمله‌ای  $P(x) = x^3 - mx^2 - x - 4$  بر  $x + 2$  بخش‌پذیر باشد،  $m$  کدام است؟
- ۰/۵ (۴)      ۰/۵ (۳)      -۲/۵ (۲)      ۲/۵ (۱)
- (ریاضی ۸۰)





۳۶۹- اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای  $2x^6 + mx + 2$  بر  $x + 1$  برابر ۲ باشد، باقی‌مانده تقسیم آن بر  $(x - 1)$  کدام است؟ (۴۰)

- (۱) -۴ (۲) -۶ (۳) ۴ (۴) ۶

۳۷۰- به ازای یک مقدار  $a$ ، چندجمله‌ای  $P(x) = 2x^6 + ax^3 + 2x^2 - 3x$  بر  $2x - 1$  بخش پذیر است. در این حالت، باقی‌مانده  $P(x)$  بر  $x + 2$ ، کدام است؟ (ریاضی قارچ ۹۹)

- (۱) -۱۰ (۲) -۸ (۳) ۴ (۴) ۶

۳۷۱- دو عبارت  $9 + 4x^2 + x^5$  و  $ax^3 - x - 1$  در تقسیم بر  $x + 2$  هم باقی‌مانده هستند.  $a$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) -۲ (۴) ۲

۳۷۲- اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای  $P(x) = x^3 + ax^2 + x - b$  بر  $x - 1$  برابر ۳ و  $P(x)$  بر  $x + 2$  بخش پذیر باشد،  $a + b$  کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۳ (۳) -۱ (۴) ۱

۳۷۳- فرض کنید باقیمانده تقسیم چندجمله‌ای  $p(x)$  بر  $x - 4$  و  $x + 2$ ، به ترتیب ۳ و ۱ باشند. باقی‌مانده تقسیم  $p(x) + 4p(-x)$  بر  $x - 2$ ، کدام است؟ (تبری قارچ ۹۹)

- (۱) ۷ (۲) ۱ (۳) صفر (۴) -۱

۳۷۴- اگر باقی‌مانده تقسیم  $P(x) = 2x^{2n+1} + ax^2 + bx^2 - 1$  بر  $x + 1$  برابر ۵ باشد، باقی‌مانده تقسیم  $T(x) = ax^3 - 2bx^2 + x - 1$  بر  $x - 2$  کدام است؟

- (۱) -۶۳ (۲) ۶۵ (۳) -۳۱ (۴) ۳۳

۳۷۵- اگر تابع  $f(x) = x^3 + ax^2 - 5x - 6$  بر  $x - 2$  بخش پذیر باشد، مجموع ریشه‌های تابع  $f$  کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) -۳

۳۷۶- به ازای مقداری از  $a$ ، چندجمله‌ای  $f(x) = x^6 + ax^3 - 8x$  بر  $x + 2$  بخش پذیر است. کوچک‌ترین ریشه معادله  $f(x) = 0$  کدام است؟ (ریاضی ۹۴)

- (۱)  $1 - \sqrt{3}$  (۲)  $1 - \sqrt{5}$  (۳)  $-1 - \sqrt{3}$  (۴)  $-1 - \sqrt{5}$

۳۷۷- در تقسیم  $3 + bx^3 + 4x^2 + x^3 + ax - 1$ ، خارج قسمت  $x + 2$  و باقی‌مانده  $3x + 5$  شده است.  $a + b$  کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴) ۱۰

۳۷۸- اگر باقی‌مانده تقسیم عبارت  $x^5 - 4x^3 - 3x^2 + x^7 + x^9 - x - 1$  بر  $R(x)$  باشد،  $R(-1)$  کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۱ (۴) -۱

۳۷۹- عبارت  $1 + 2bx + fax^2 + x^6 - 4x^2$  بخش پذیر است.  $a + b$  کدام است؟ (ریاضی ۱۸۶)

- (۱)  $-\frac{15}{8}$  (۲)  $-\frac{17}{16}$  (۳)  $\frac{17}{16}$  (۴)  $\frac{15}{8}$

۳۸۰- در صورتی که باقی‌مانده تقسیم  $ax^6 + bx^3 + 1$  بر  $x^2 + 1$  برابر ۱ باشد، باقی‌مانده تقسیم  $x^3 + ax + 2b$  بر  $x + 2$  کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۴

۳۸۱- اگر عبارات  $k + 5x^3 - 2x^{2n} + 2x^{2n+1}$  به ازای هر عدد طبیعی  $n$  بر دو جمله‌ای  $x + 2$  بخش پذیر باشد؛ آن‌گاه باقی‌مانده تقسیم آن بر  $x^2 - 1$  کدام است؟ (ریاضی ۱۸۹)

- (۱)  $-3x - 6$  (۲)  $-2x + 1$  (۳)  $2x + 4$  (۴)  $2x - 4$

۳۸۲- اگر باقی‌مانده تقسیم  $f(x) = x^3 + ax^2 - bx$  بر  $x^2 + 1$  برابر ۵ باشد،  $a - b$  کدام است؟

- (۱) -۶ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) -۴

۳۸۳- کدام عبارت زیر را از عبارت  $x^3 - 5x^2 + 2x + 1$  کم کنیم تا حاصل بر  $x^2 + 1$  بخش پذیر باشد؟

- (۱)  $x + 1$  (۲)  $x + 3$  (۳)  $x + 6$  (۴)  $x + 8$

۳۸۴- باقی‌مانده تقسیم عبارت  $1 - x^2 + x^4 - (x + 1)^2(x - 1)^2$  بر  $x^2 - 1$  کدام است؟

- (۱)  $x + 1$  (۲) ۱ (۳) -۱ (۴)  $-x - 1$

۳۸۵- باقی‌مانده تقسیم عبارت  $1 + f(x) = x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 3x$  بر  $x^2 + 3x$  کدام است؟

- (۱)  $2x + 1$  (۲) ۱ (۳) ۳ (۴)  $x + 1$

۳۸۶- باقی‌مانده تقسیم  $x^2 + (x^2 + 4)(x^2 + 3)(x^2 + 2)(x^2 + 1) - 1$  بر  $x^6 + 4x^2 - 1$  کدام است؟

- (۱) ۳۵ (۲)  $x^2 + 5$  (۳)  $9x^2 + 36$  (۴)  $x^6 + 13x^2 + 35$

۳۸۷- باقی‌مانده تقسیم عبارت  $3 + (x^2 - 4x + 3)(x^2 + 6x + 8)(x^2 + x + 1)$  بر  $x^2 + x + 1$  کدام است؟

- (۱) ۳ (۲)  $-x + 1$  (۳)  $x + 3$  (۴) ۴۲

۳۸۸- اگر  $R(x)$  باقی‌مانده تقسیم عبارت  $x + 2x^2 + 3x^{12} - 4x^{21}$  بر  $x^3 - x$  باشد،  $R(2)$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶



- ۳۸۹- اگر عبارت  $x^4 + ax^2 - bx + 4$  بر  $(x-1)^2$  بخش پذیر باشد،  $b$  کدام است؟  
 ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) (ریاضی خارج ۹۴)
- ۳۹۰- باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای درجه سوم  $f$  بر دوجمله‌ای‌های  $x-1$ ،  $x+1$  و  $x-2$  برابر ۲۴ است. اگر این چندجمله‌ای بر  $x+2$  بخش پذیر باشد، ضریب جمله با بیشترین درجه کدام است؟  
 -۲ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) -۳ (۴)
- ۳۹۱- اگر باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای  $f(x)$  بر  $x^2 - 4$  برابر  $x-1$  و بر  $x-2$  برابر  $A$  و بر  $x+2$  برابر  $B$  باشد؛ آن گاه  $A - B$  کدام است؟  
 ۸ (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) -۸ (۴)
- ۳۹۲- اگر باقی مانده تقسیم  $P(x)$  بر  $x-1$  و  $x+2$  به ترتیب برابر  $-2$  و  $4$  باشد، باقی مانده تقسیم  $P(x)$  بر  $x^2 + x - 2$  کدام است؟  
 -۲ (۱)  $2x - 4$  (۲)  $6x - 8$  (۳)  $-2x$  (۴)
- ۳۹۳- باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای  $P(x)$  بر  $x-2$  و  $x+3$  به ترتیب  $1$  و  $-4$  است. باقی مانده تقسیم  $P(x)$  بر  $x^2 + x - 6$  کدام است؟  
 $x-1$  (۱)  $x+1$  (۲)  $-x+2$  (۳)  $2x-1$  (۴) (ریاضی خارج ۹۷)
- ۳۹۴- باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای  $P(x)$  بر  $x-1$  و  $2x+1$  به ترتیب  $8$  و  $5$  است. باقی مانده تقسیم  $P(x)$  بر  $2x^2 - x - 1$  کدام است؟ (ریاضی ۹۹)  
 $-x+4$  (۱)  $x+2$  (۲)  $2x+6$  (۳)  $2x-3$  (۴)
- ۳۹۵- باقی مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x-1$  و  $x+b$  به ترتیب  $3$  و  $7$  می‌باشد. اگر باقی مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $(x+b)(x-1)$  به شکل  $(-x+a)$  باشد،  $a-b$  کدام است؟  
 ۳ (۱) ۱ (۲) ۷ (۳) ۵ (۴)
- ۳۹۶- اگر باقی مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $(x-3)(x+3)$  برابر  $5x^2 + 3x + 1$  باشد و باقی مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x^2 - 3x$  برابر  $ax + b$  باشد؛ آن گاه  $2a + b$  کدام است؟  
 ۲۰ (۱) ۳۷ (۲) -۲۳ (۳) ۱۹ (۴)
- ۳۹۷- اگر باقی مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x^2 - 4$  برابر  $2x + 12$  باشد، آن گاه باقی مانده تقسیم  $f(x) - 1$  بر  $x + 3$  کدام است؟  
 -۶ (۱) ۶ (۲) ۱۱ (۳) -۱۱ (۴)
- ۳۹۸- اگر باقی مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x^2 - 4$  برابر  $3x + 1$  باشد، باقی مانده تقسیم  $f(x^2 - x - 2)$  بر  $x + 1$  کدام است؟  
 ۱ (۱) ۷ (۲) -۵ (۳) -۱۱ (۴)
- ۳۹۹- اگر باقی مانده تقسیم عبارت  $p(x)$  بر  $x^2 + 3x + 2$ ،  $x^2 + 1$  و  $2x + 1$  باشد، باقی مانده تقسیم عبارت  $p(x-1) - p(x-2)$  بر  $x$  کدام است؟  
 ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) (کانون فرهنگی آموزش - ۹۸)
- ۴۰۰- اگر  $f(x)$  یک چندجمله‌ای باشد و عبارت  $x + f(x)$  بر  $(x-1)$  و  $(x-2)$  بخش پذیر باشد، باقی مانده تقسیم  $xf(x)$  بر  $x^2 - 3x + 2$  کدام است؟  
 $2x + 3$  (۱)  $-3x + 2$  (۲)  $2x - 3$  (۳)  $3x - 2$  (۴)
- ۴۰۱- باقی مانده تقسیم  $p(x) = x^5 - 3x^4 + ax - 1$  بر  $x-1$  برابر  $2$  و خارج قسمت آن  $q(x)$  است.  $q(-1)$  کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش - ۹۸)  
 -۷ (۱) -۶ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)
- ۴۰۲- مقدار خارج قسمت تقسیم  $5x^5 - 14x^3 + 3$  بر  $x-2$  به ازای  $x = -2$  کدام است؟ (ق. ۴۰)  
 -۲ (۱) ۱۲ (۲) ۲۴ (۳) ۰ (۴) صفر
- ۴۰۳- مجموع ضرایب خارج قسمت تقسیم  $f(x) = x^8 + 3x^5 - 2x^2 + 1$  بر  $x+1$  کدام است؟  
 ۱ (۱) ۰ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) صفر
- ۴۰۴- اگر خارج قسمت تقسیم  $6 + x^7 + x^{10} - 3x^{14} = f(x)$  بر  $x+1$ ،  $g(x)$  باشد، باقی مانده تقسیم  $g(x)$  بر  $x-1$  کدام است؟  
 ۱ (۱) ۲ (۲) ۷ (۳) ۱ (۴) صفر
- ۴۰۵- عبارت  $x^{24} + 1$  بر کدام عبارت همواره بخش پذیر است؟  
 $x^{12} + 1$  (۱)  $x^8 + 1$  (۲)  $x^6 + 1$  (۳)  $x^4 + 1$  (۴)
- ۴۰۶- عبارت  $a^{28} + b^{42}$  بر کدام یک از عبارت‌های زیر بخش پذیر است؟  
 $a^7 + b^7$  (۱)  $a^7 + b^6$  (۲)  $a^7 + b^6$  (۳)  $a^7 + b^6$  (۴)
- ۴۰۷- اگر  $A = \frac{(x^6 - 1)(x + 2)}{x^2 + x - 2}$ ، آن گاه ساده شده  $A$  کدام است؟  
 $x^3 - x + 1$  (۱)  $x^3 + x + 1$  (۲)  $x^3 + x^2 + x + 1$  (۳)  $x^3 - x^2 + x - 1$  (۴)
- ۴۰۸- حاصل عبارت  $\frac{(1-t+t^2-t^3+t^4)(1+t)}{1-t^5}$  به ازای  $t = \sqrt[5]{2}$  کدام است؟  
 -۱ (۱) ۱ (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳)  $-\frac{1}{3}$  (۴)