
خرید کتاب های کنکور
با تخفیف ویژه
و
ارسال رایگان
Medabook.com
مدابوک
یک جلسه تماس تلفنی رایگان
با مشاوران رتبه برتر
برای انتخاب بهترین منابع
دبیرستان و کنکور
۰۲۱ ۲۸۴۲۵۲۱۰

☆۱۴۸۵. اگر $۰ < a < ۱$، کدام گزینه همواره درست است؟

۱) $\log_۳ a > ۰$
۲) $\log_a ۵ > \log_a ۲$
۳) $\frac{۱}{\log_a ۷} > \frac{۱}{\log_a ۵}$
۴) $\log_۳ a > ۱$

★۱۴۸۶. کدام گزینه درست است؟

۱) $\log_{\frac{۱}{۲}} \frac{۱}{۱۰۰} > \log_{\frac{۱}{۲}} ۱۰۰$
۲) $\log_{\frac{۱}{۲}} ۳ > \log_۳ ۲$
۳) $\log_۵ ۳ > \log_۳ ۵$
۴) $\log_{\frac{۱}{۲}} ۳ > \log_{\frac{۱}{۲}} ۲$

قسمت سوم: ویژگی‌های لگاریتم و حل معادلات لگاریتمی

(ابتدا درس مربوط به این قسمت را در صفحات ۵۱۸ تا ۵۲۳ مطالعه نمایید.)

◎ *خب رسیدیم به مهم‌ترین قسمت تابع نمایی و لگاریتمی حتماً روی تمامی تست‌های این قسمت وقت بزار.*

قوانین و ویژگی‌های لگاریتم

☆۱۴۸۷. حاصل $\log_۵ (\sqrt{۱۲۵})^۳$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۴/۵
۳) ۵
۴) ۵/۵

☆۱۴۸۸. اگر $A = ۳^a$ باشد، $\log_۳ ۹A^۲$ کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۱)

۱) $۲ + ۲a$
۲) $۳ + ۲a$
۳) $۲ + a^۲$
۴) $۳ + a^۲$

☆۱۴۸۹. اگر $۴^a = ۲\sqrt{۲}$، لگاریتم $(۴a + ۱)$ در پایهٔ ۴ کدام است؟ (سراسری تجربی- ۸۸)

۱) ۱
۲) $\sqrt{۲}$
۳) ۲
۴) $\frac{۳}{۲}$

☆۱۴۹۰. حاصل $\log_{x\sqrt[۳]{x}} \sqrt[۳]{x^۲\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۹}{۸}$
۳) $\frac{۵}{۸}$
۴) $\frac{۸}{۹}$

☆۱۴۹۱. اگر a و b ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - ۱۰x + ۰/۱ = ۰$ باشند، حاصل $\log a + \log b - \log(a+b)$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۸)

۱) -۲
۲) -۱
۳) صفر
۴) ۱

☆۱۴۹۲. اگر $\log\frac{۱}{۲} + \log\frac{۲}{۳} + \cdots + \log\frac{n}{n+۱} = -۲$، مقدار n کدام است؟

۱) ۱۰۰
۲) ۹۹
۳) ۱۰۱
۴) $\frac{۹۹}{۱۰۰}$

☆۱۴۹۳. اگر $x = ۸\log_۴ ۲\sqrt{۲}$ باشد، لگاریتم عدد $۴(x+۳)$ در پایهٔ x کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۷)

۱) $\frac{۴}{۳}$
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) ۲
۴) ۳

۱۴۹۴. اگر $\log_b a = \frac{۳}{۲}$، آن‌گاه $\log_{\sqrt{b}} ab^۲$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

☆۱۴۹۵. اگر $\log ۲ = a$ و $\log ۳ = b$، حاصل $۳\log\sqrt[۳]{۴۵}$ کدام است؟

۱) $۲b - a$
۲) $۲a - b$
۳) $۲b - a + ۱$
۴) $۲a - b + ۱$

☆۱۴۹۶. اگر $\log_{۱۲} ۳ = a$ باشد، حاصل $\log_۳ ۲ \times \log_۴ ۳ \times \cdots \times \log_{۲۷} ۲۶$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶a}$
۲) $\frac{۱-a}{۶a}$
۳) $\frac{۱-a}{۳a}$
۴) $\frac{۱}{۳a}$

☆۱۴۹۷. اگر $\log ۲ = k$ باشد، حاصل $\log(۶ - ۲\sqrt{۵}) + ۲\log(۱ + \sqrt{۵})$ کدام است؟ (سراسری تجربی- ۹۰)

۱) $۲ + ۴k$
۲) $۴k$
۳) $۱ + k$
۴) $۲k$

۱۴۹۸. اگر $A = \sqrt{۱۰^{\log ۴ + ۲\log ۳}}$، مقدار $\log_{\sqrt{۸}} \frac{۳}{A}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) $-\frac{۳}{۲}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $-\frac{۲}{۳}$

۱۴۹۹. حاصل $\sqrt{۱۰^{۲\log ۲ + ۳\log ۳}}$ کدام است؟

۱) $۶\sqrt{۳}$
۲) $۹\sqrt{۳}$
۳) $۱۲\sqrt{۳}$
۴) $۱۵\sqrt{۳}$

☆۱۵۰۰. اگر لگاریتم عدد $۲\sqrt[۳]{۰/۲۵}$ در مبنای ۸ برابر A باشد، آن‌گاه لگاریتم عدد $(۱ - \frac{۱}{A})$ در پایهٔ ۴ کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۰)

۱) -۳
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

☆۱۵۰۱. اگر $\log_2 \sqrt[5]{e^2} = A$، حاصل $\log_{\sqrt{e}} 32$ کدام است؟

۱) $\frac{A}{4}$ ۲) $\frac{A}{2}$ ۳) $\frac{2}{A}$ ۴) $\frac{4}{A}$

۱۵۰۲. اگر $\log 5 = a$ باشد، $\log_8 100$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{2}{3(1-a)}$ ۲) $\frac{2}{3(1+a)}$ ۳) $\frac{3(a+1)}{2}$ ۴) $\frac{3}{2(1-a)}$

☆۱۵۰۳. اگر $2^a = 10$ باشد، حاصل $\log_{\sqrt{2}} 25$ کدام است؟

۱) $4(a-1)$ ۲) $\frac{4}{a-1}$ ۳) $\frac{4(a-1)}{a}$ ۴) $4(a+1)$

☆۱۵۰۴. اگر $\log 5 = 3k$ باشد، $\log \sqrt[3]{1/6}$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۰)

۱) $1-4k$ ۲) $2-5k$ ۳) $1-2k$ ۴) $1-k$

۱۵۰۵. اگر $\log_a x = 8$، $\log_b x = 3$ و $\log_c x = 6$ باشد، مقدار عددی $\log_{abc} x$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{17}$ ۲) $\frac{8}{5}$ ۳) 3 ۴) $\frac{17}{3}$

۱۵۰۶. حاصل $a^{\frac{\log(\log a)}{\log a}}$ کدام است؟

۱) a ۲) $\log a$ ۳) $(\log a)^2$ ۴) $\log(\log a)$

☆۱۵۰۷. حاصل $[\log_3 241]$ کدام است؟ ([ ] علامت جزءصحیح است.)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

★۱۵۰۸. حاصل $[\log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt{5}]$ کدام است؟ ([ ] علامت جزءصحیح است.)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

☆۱۵۰۹. اگر $\log 2 = a$ باشد، مقدار $\log_4 125$ بر حسب a کدام است؟

۱) $\frac{3a-1}{2a}$ ۲) $\frac{3a+1}{2a}$ ۳) $\frac{3(1-a)}{2a}$ ۴) $\frac{3(1+a)}{2a}$

★۱۵۱۰. اگر $4a^2 + 9b^2 = 4ab$ باشد، حاصل $\log \frac{2a+3b}{4}$، برابر است با ....

۱) $\log 2ab$ ۲) $\frac{\log 2a + \log 3b}{2}$ ۳) $\frac{\log 2a + \log 3b}{4}$ ۴) $\frac{\log a + \log b}{2}$

☆۱۵۱۱. اگر $\log_3 12 = a$ باشد، $\log_3 18$ کدام است؟

۱) $\frac{a-3}{2}$ ۲) $\frac{a+3}{2}$ ۳) $\frac{a-1}{2}$ ۴) $\frac{1-a}{2}$

۱۵۱۲. اگر $\log_{12} 27 = a$ باشد، مقدار $\log_6 16$ برابر است با ....

۱) $\frac{4(3-a)}{3+a}$ ۲) $\frac{3(3+a)}{3-a}$ ۳) $\frac{4(3+a)}{3-a}$ ۴) $\frac{2a}{3-a}$

★۱۵۱۳. اگر $\log 2 = 0/301$ باشد، عدد $A = 2^{200}$ چند رقم دارد؟

۱) ۴۶ ۲) ۵۱ ۳) ۵۹ ۴) ۶۱

☆۱۵۱۴. نمودار تابع $f(x) = a + \log_4(x+b)$ محور yها را در نقطه‌ای به عرض $-\frac{1}{2}$ و نیمساز ربع سوم را در نقطه‌ای به طول (-1) قطع می‌کند. $f^{-1}(0)$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 1 ۳) -2 ۴) 2

☆۱۵۱۵. تابع با ضابطهٔ $f(x) = a + \log_2(bx-4)$، از دو نقطهٔ $(2,6)$ و $(12,10)$ می‌گذرد. a کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۶)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

☆۱۵۱۶. تابع با ضابطهٔ $f(x) = a + \log_2(3x+b)^2$، از دو نقطهٔ $(5,11)$ و $(21,15)$ می‌گذرد. a کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۶)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

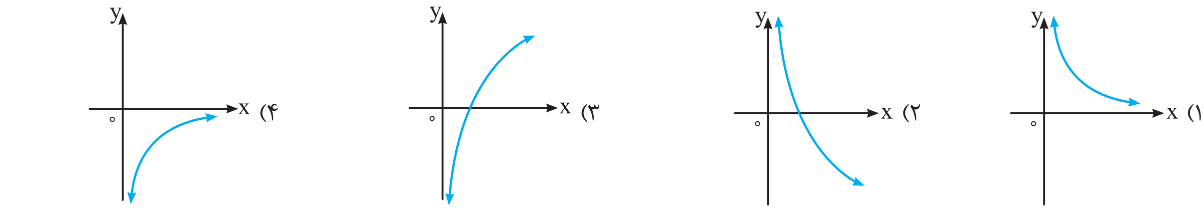
۱۵۱۷. اگر $x \in (1,+\infty)$ و $f(x) = \log_3(x-1) - \log_3(x+1)$ ، ضابطهٔ تابع معکوس f کدام است؟

۱) $f^{-1}(x) = \frac{1-3^x}{1+3^x}$ ۲) $f^{-1}(x) = \frac{3^x+1}{3^x-1}$ ۳) $f^{-1}(x) = \frac{3^x-1}{3^x+1}$ ۴) $f^{-1}(x) = \frac{1+3^x}{1-3^x}$

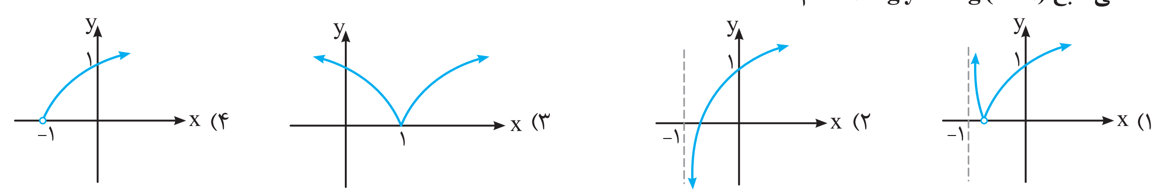
ویژگی‌ها و نمودار توابع لگاریتمی

تستای نمودار توابع لگاریتمی رو قبلاً حل کردی. تو این قسمت تستای نمودار توابع لگاریتمی با ویژگی‌هاش ترکیب شده. یعنی اول به کمک ویژگی‌هاش باید ضابطه رو ساده کنی، بعد نمودار اونو رسم کنی.

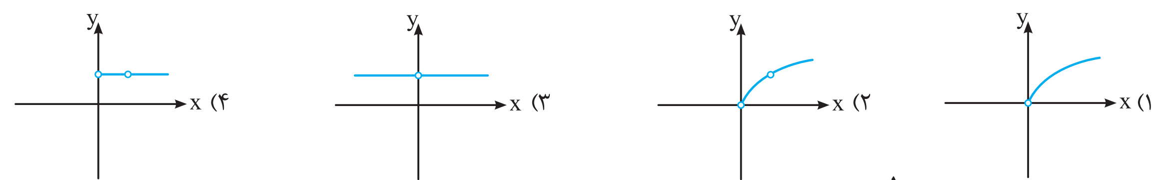
☆۱۵۱۸. نمودار تابع $y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x}$ کدام است؟



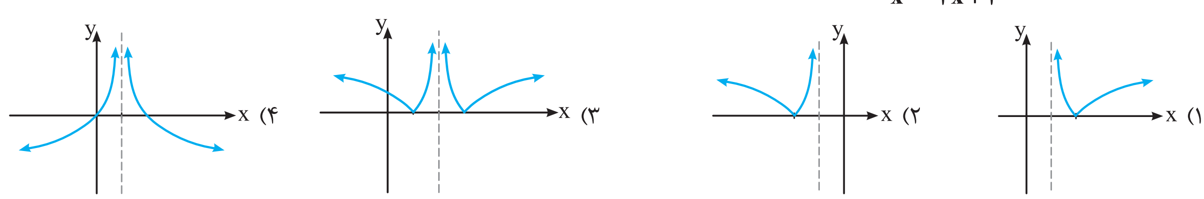
☆۱۵۱۹. منحنی تابع $2\log y = \log(x+1)$ کدام است؟



۱۵۲۰. نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \sqrt{x}^{\frac{1}{\log_4 x}}$ به کدام صورت است؟



★۱۵۲۱. نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = |\log_9 (\frac{1}{x^2 - 4x + 4})|$ به کدام صورت است؟



تساوی در توابع لگاریتمی

تستای تساوی دو تابع رو دیدی و حل کردی. این‌جا سه تست از تساوی توابع لگاریتمی باید حل کنی.

☆۱۵۲۲. نمودارهای دو تابع $f(x) = \log_2 \frac{1}{x}$ و $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ نسبت به هم چگونه‌اند؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۱)

۱) $f(x)$ بالاتر
۲) $g(x)$ بالاتر
۳) منطبق
۴) فقط در یک نقطه متقاطع‌اند.

☆۱۵۲۳. دو تابع f و g در کدام حالت زیر مساوی‌اند؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۹)

۱) $f(x) = 2\log x \ ,\ g(x) = \log x^2$
۲) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{|x|} \ ,\ g(x) = 1$
۳) $f(x) = (\sqrt{x})^2 \ ,\ g(x) = x$
۴) $f(x) = \frac{x}{|x|} \ ,\ g(x) = \frac{|x|}{x}$

۱۵۲۴. دو تابع f و g در کدام حالت زیر برابرند؟

۱) $\begin{cases} f(x) = \log x + \log(x-1) \\ g(x) = \log(x^2 - x) \end{cases}$
۲) $\begin{cases} f(x) = \log(x-1) - \log(x+1) \\ g(x) = \log\frac{x-1}{x+1} \end{cases}$
۳) $\begin{cases} f(x) = \log_2 \sqrt{x} \\ g(x) = \log_4 x \end{cases}$
۴) $\begin{cases} f(x) = \log x^4 \\ g(x) = 4\log x \end{cases}$

معادلات لگاریتمی

با یه نگاه به تعداد تستای کنکور این قسمت، به جرأت می‌شه گفت، معادلات لگاریتمی، مهم‌ترین قسمت لگاریتمه.

☆۱۵۲۵. اگر $\log ۳ + \log \sqrt[۴]{۳} = \log (۸۱)^k$، آن‌گاه لگاریتم $\frac{۵}{k}$ در پایهٔ ۲ کدام است؟ (سراسری تجربی- ۸۶)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

☆۱۵۲۶. اگر لگاریتم a در پایهٔ $\sqrt{۳}$ برابر $\frac{۴}{۳}$ باشد، آن‌گاه لگاریتم $(a^۳ + ۷)$ در پایهٔ ۲ کدام است؟ (سراسری تجربی- ۸۷)

۱) ۲ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{۳}{۲}$

☆۱۵۲۷. اگر $\log\frac{۲}{x} + \log(x+۱) = ۱$ باشد، لگاریتم عدد x در پایهٔ ۸ کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

☆۱۵۲۸. اگر $۲\log(x-۲) = \log(x+۱۰)$ باشد، آن‌گاه $\log_۴(x+۲)$ کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۸۵)

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

☆۱۵۲۹. اگر $۲\log(x+۱) = \log(۲x+۱۰)$، حاصل لگاریتم عدد $x\sqrt{۳}$ در مبنای $\frac{۱}{x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۳ ۳) ۳- ۴) $-\frac{۳}{۲}$

☆۱۵۳۰. از تساوی $\log ۳ = \log(۲x-۱) + \frac{۱}{۲}\log x^۲$، مقدار لگاریتم $\frac{x}{۳}$ در مبنای ۴ کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۸)

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

☆۱۵۳۱. از معادلهٔ لگاریتمی $\log_۳(۲x^۲+۱) - \log_۳(x+۲) = ۱$، مقدار لگاریتم $(۲x-۱)$ در پایهٔ ۸ کدام است؟ (سراسری تجربی- ۹۵)

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

☆۱۵۳۲. از تساوی $\log_۵(۲x-۱) + \log_۵(۳x-۵) = ۱$، مقدار $\log_۲(۶x+۳)$ کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۸۶)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

☆۱۵۳۳. از معادلهٔ لگاریتمی $۲\log x = ۱ + \log(x + \frac{۱۲}{۵})$، مقدار $\log_۵(۲x+۱)$ کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۵)

۱) ۱- ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

☆۱۵۳۴. از معادلهٔ $\log_۳(x^۲-۱) = ۱ + \log_۳(x+۳)$، مقدار لگاریتم $(x-۳)$ در مبنای ۴ کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۸۸)

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱-

☆۱۵۳۵. اگر $\log(x-۲) = ۲\log ۲ - \log(x-۴)$، حاصل $\log_۵(x-۳)$ کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۸۷)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) $\frac{۱}{۲}$

☆۱۵۳۶. از معادلهٔ لگاریتمی $\log(x^۲-x-۶) - \log(x-۳) = \log(۲x-۵)$، مقدار لگاریتم $\sqrt[۳]{x+۱}$ در پایهٔ ۴ کدام است (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۵)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) ۱

☆۱۵۳۷. از معادلهٔ $\log(۲x-۱) + \log(x+۳) = \log ۳۰ - \log ۲$ مقدار $\log_۸ x$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۵۳۸. مجموعه جواب معادلهٔ $\log(x-۴) + \log x - \log(x-۱) = \log ۵ - ۲\log ۲$ کدام است؟

۱) $\{\frac{۱}{۴}, ۵\}$ ۲) $\{۵\}$ ۳) $\{\frac{۹}{۲}\}$ ۴) $\{\frac{۱}{۴}\}$

۱۵۳۹. اگر $x = ۲$ یکی از جواب‌های معادلهٔ $\log_۷(x-\sqrt{۲}) = \log_{a+۲} x - \log_۷(x+\sqrt{۲})$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) جواب دیگری ندارد.

۱۵۴۰. اگر معادلهٔ $\frac{4}{1+\log x}+\frac{1}{5-4\log x}=3$ دو ریشهٔ حقیقی داشته باشد، آن‌گاه ....

۱) یکی از ریشه‌ها، دو برابر ریشهٔ دیگر است.
۲) یکی از ریشه‌ها، دو واحد بیش‌تر از ریشهٔ دیگر است.
۳) یکی از ریشه‌ها، قرینهٔ ریشهٔ دیگر است.
۴) یکی از ریشه‌ها، مربع ریشهٔ دیگر است.

☆۱۵۴۱. از تساوی $\log_x (x^2+4)=1+\log_x 5$، مقدار لگاریتم x در پایهٔ ۲ کدام است؟ (سراسری تجربی- ۹۳)

۱) -1
۲) $\frac{1}{2}$
۳) $\frac{3}{2}$
۴) ۲

☆۱۵۴۲. از تساوی $\log_x (x-6)=2-\log_x (3x+8)$، مقدار لگاریتم x در پایهٔ ۴ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۳)

۱) $\frac{1}{2}$
۲) $\frac{2}{3}$
۳) $\frac{3}{2}$
۴) ۲

۱۵۴۳. اگر $2^{\log x}+x^{\log 2}=\sqrt{2}$ باشد، x کدام است؟

۱) $\sqrt{10}$
۲) $10\sqrt{10}$
۳) $\frac{1}{10\sqrt{10}}$
۴) $\frac{1}{\sqrt{10}}$

۱۵۴۴. جواب(های) معادلهٔ $25^{\log x}-4x^{\log 5}=5$ کدام است؟

۱) $10, \frac{1}{5}$
۲) $-1, 5$
۳) ۵
۴) ۱۰

☆۱۵۴۵. حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $x^{\log_5 x}=625$ کدام است؟

۱) ۱
۲) $\frac{1}{5}$
۳) ۵
۴) ۲۵

★۱۵۴۶. حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $5^{\log_x 2}=\frac{5x}{2}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) $\frac{2}{5}$
۳) $\frac{2}{3}$
۴) ۲

☆۱۵۴۷. در معادلهٔ $(\log_3 x)^2-\log_{\frac{1}{3}} x^2=3$، ریشهٔ بزرگ‌تر معادله چند برابر ریشهٔ کوچک‌تر آن است؟

۱) ۲۷
۲) ۳۶
۳) ۸۱
۴) ۱۰۰

☆۱۵۴۸. اگر $\log_{\sqrt{2}} x+\log_{\sqrt{x}} 2=4$، مقدار $\log_x 0/125$ کدام است؟

۱) -3
۲) -2
۳) -1
۴) ۱

۱۵۴۹. از معادلات $2^x \times 8^y=4$ و $\log x=\log 2+\log y$، مقدار x کدام است؟

۱) $\frac{2}{5}$
۲) $\frac{3}{4}$
۳) $\frac{3}{5}$
۴) $\frac{4}{5}$

★۱۵۵۰. از دو معادلهٔ دو مجهولی $2^{x-7}\times 4^{x+y}=1$ و $\log y=2\log 3+\log x$، مقدار y کدام است؟ (سراسری تجربی- ۹۶)

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

★۱۵۵۱. از دو معادلهٔ دو مجهولی $3^{2x+y}=9\times 3^{x-y}$ و $\log(x+2y)=1+\log y$، مقدار x کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۶)

۱) ۱/۲
۲) ۱/۴
۳) ۱/۵
۴) ۱/۶

۱۵۵۲. با توجه به دستگاه $\begin{cases}(\sqrt{3})^{x-1}=9^{y+1}\\ \log(x+1)-\log y=1\end{cases}$، مقدار $x+y$ کدام است؟

۱) ۳
۲) $\frac{40}{7}$
۳) ۱۰
۴) ۸

☆۱۵۵۳. اگر $4\sqrt{2}=4^x$ و $1+\log\sqrt{x+1}=\log y$ باشند، مقدار y کدام است؟ (سراسری تجربی- ۸۵)

۱) ۷/۵
۲) ۱۲/۵
۳) ۱۵
۴) ۲۵

۱۵۵۴. مجموعه جواب دستگاه $\begin{cases}\log_y x-\log_x y=\frac{8}{3}\\ xy=16\end{cases}$ شامل چند زوج‌مرتب است؟

۱) چهار
۲) دو
۳) یک
۴) هیچ

☆۱۵۵۵. از دو معادلهٔ $\log_3 x + \log_3 y = 2$ و $x^2 + y^2 = 46$، مقدار لگاریتم $(x+y)$ در پایهٔ ۴ کدام است؟ (سراسری تجربی- ۸۹)

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۲/۵

☆۱۵۵۶. از دو معادلهٔ $\log_2 x = 1 + \log_2(y+1)$ و $x^2 - y^2 = 32$، مقدار لگاریتم $(x+y)$ در پایهٔ ۴ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۹)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

☆۱۵۵۷. از دو معادلهٔ $4^x + 2^x = 72$ و $\log(x+1) + \log(2y + x^2) = 2$، مقدار y کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۲)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۵۵۸. از تساوی‌های $4^x - 2^x = 56$ و $\log_x y - \log_y x^2 = 1$، بیش‌ترین مقدار y کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۳ ۳) ۷ ۴) ۲

☆۱۵۵۹. از دو معادلهٔ $\log(y+2) = 1$ و $\log(y-x) + \log(4x+y) = 2$، مقدار x کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۷)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

☆۱۵۶۰. از دو معادلهٔ $\log(y+x-1) + \log(2y+3) = 0$ و $\log(x-4y) = 2\log 2$، مقدار xy کدام است؟

(سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۶، با کمی تغییر)

۱) -2 ۲) -1

۳) ۱ ۴) ۲

☆۱۵۶۱. از دو معادلهٔ $\log(2x+1) + \log(y-2) - \log y = \log 3$ و $\log(2y-3x) + \log 2 = 0$، مقدار xy کدام است؟

(سراسری تجربی- ۹۶، با کمی تغییر)

۱) ۶ ۲) ۸

۳) ۹ ۴) ۱۰

★۱۵۶۲. معادله $\frac{\log 2}{2} = \frac{\log x}{x}$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

کاربردهای لگاریتم

همون‌طور که گفتم این مبحث جدیدیه. واسه همینم تست کنکور ازش نداریم. ولی احتمالاً به زودی از این قسمت هم تو کنکور تست مطرح می‌شه.

۱۵۶۳. اگر نیمه‌عمر یک مادهٔ رادیواکتیو ۴۰ سال باشد، بعد از گذشت ۴۰۰ سال، از یک نمونهٔ ۲۵۶ گرمی چند گرم باقی می‌ماند؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۴ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۲۵ ۴) ۰/۱۲۵

۱۵۶۴. نیمه‌عمر عنصری ۵ روز است. تقریباً پس از چند روز از یک نمونه به جرم یک گرم، ۰/۰۰۱ گرم باقی می‌ماند؟ $(\log 2 \simeq 0/301)$

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۵۰ ۴) ۱۰۰ (برگرفته از کتاب درسی)

۱۵۶۵. زمین‌لرزه‌ای به بزرگی $M = 4/8$ در مقیاس ریشتر، چقدر انرژی در مقیاس ارگ (Erg) آزاد می‌کند؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) 10^{20} ۲) 10^{19} ۳) $10^{18/4}$ ۴) $10^{17/8}$

۱۵۶۶. اگر انرژی آزادشده در یک زمین‌لرزه برابر $10^{19/6}$ در مقیاس ارگ باشد، بزرگی زمین‌لرزه در مقیاس ریشتر کدام است؟

۱) ۴/۶ ۲) ۴/۸ ۳) ۵/۲ ۴) ۵/۴

تست‌های V.I.P

۱۵۶۷. معادله $(27)^x + (12)^x = 2 \times 8^x$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۵۶۸. معادله $81 \times (16)^x + 16 \times (81)^x = 97 \times (36)^x$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۱۵۶۹. معادله $(\sqrt{4-\sqrt{15}})^x + (\sqrt{4+\sqrt{15}})^x = 8$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۱۵۷۰. مجموعه جواب نامعادلهٔ $\sqrt{x}^x > x^{\sqrt{x}}$ بازهٔ (a, b) است. بیش‌ترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۱۵۷۱. در دستگاه $\begin{cases} x^y = y^x \\ y = ax \end{cases}$ با شرط $\begin{cases} x , y \neq ۰ , ۱ \\ ۰ < a \neq ۱ \end{cases}$، حاصل xy کدام است؟

۱) $a^{\frac{a+۱}{a-۱}}$ ۲) $a^{\frac{a-۱}{a+۱}}$ ۳) a ۴) $\frac{۱}{a}$

۱۵۷۲. ریشهٔ معادله $\frac{\sqrt[۴]{۵^{۳x-۴}}}{\sqrt{۵}} = (\frac{۳}{۵})^{x-۱}\sqrt{\frac{۳}{۵}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲} \times \frac{۳\log_۵ ۳ - ۴}{۴\log_۵ ۳ - ۳}$ ۲) $۲ \times \frac{\log_۵ ۳ - ۴}{۴\log_۵ ۳ - ۷}$ ۳) $۲ \times \frac{۴\log_۵ ۳ - ۷}{۳\log_۵ ۳ - ۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲} \times \frac{۴\log_۵ ۳ - ۳}{۳\log_۵ ۳ - ۴}$

۱۵۷۳. برد تابع $f(x) = \log_{۰/۲}(x^۲ - ۴x + ۹)$ کدام است؟

۱) $[۱ , +\infty)$ ۲) $[-۱ , +\infty)$ ۳) $(-\infty , -۱]$ ۴) $(-\infty , ۱]$

۱۵۷۴. اگر $x = \log_a bc$ ، $y = \log_b ac$ و $z = \log_c ab$ باشد، مقدار xyz با کدام گزینه برابر است؟

۱) $۳ + xy + yz + xz$ ۲) $۲ + xy + yz + xz$ ۳) $۳ + x + y + z$ ۴) $۲ + x + y + z$

۱۵۷۵. اگر a ، b و c اندازهٔ سه ضلع مثلث ABC باشند و $\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = ۲\log_{b+c} a . \log_{c-b} a$، در این‌صورت کدام گزینه در مورد مثلث ABC درست است؟

۱) متساوی‌الساقین است. ۲) قائم‌الزاویه ۳) متساوی‌الاضلاع ۴) قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین

۱۵۷۶. معادلهٔ $a^x = \log_a x$ در هر یک از حالت‌های $a > ۱$ یا $۰ < a < ۱$ به ترتیب از راست به چپ چند ریشه دارد؟

۱) صفر ، ۱ ۲) ۱ ، ۱ ۳) صفر ، حداقل یک ریشه ۴) صفر ، حداکثر یک ریشه

۱۵۷۷. اگر $\log_۳ ۲ = a$ ، $\log_۵ ۳ = b$ و $\log_۷ ۵ = c$ ، حاصل $\log_{۱۵} ۱۴$ کدام است؟

۱) $\frac{ab + ۱}{abc + b}$ ۲) $\frac{bc + a}{ab + ۱}$ ۳) $\frac{abc}{bc + ۱}$ ۴) $\frac{abc + ۱}{bc + c}$

۱۵۷۸. حاصل عبارت $۷^{\frac{\log(\log ۸)}{\log ۷}} + ۸^{\frac{\log(\log ۱۲۵)}{\log ۸}}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱۵ ۳) ۵۶ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۵۷۹. اگر $\log_۲ \sin ۵^\circ = a$ باشد، حاصل $\log_۲(۳ - ۴\cos ۱۰^\circ + \cos ۲۰^\circ)$ کدام است؟

۱) $۳ + ۴a$ ۲) $۲a + ۳$ ۳) $۲a^۲ + ۱$ ۴) $۴a^۲ + ۱$

۱۵۸۰. جواب معادلهٔ $\log_۲ x + \log_۳ x + \log_۴ x = ۱$ کدام است؟

۱) $۲^{\log_{۱۸} ۳}$ ۲) $۴^{\log_{۱۲} ۳}$ ۳) $۲^{۱+\log_۴ ۳}$ ۴) $۴^{\log_{۱۰۸} ۳}$

۱۵۸۱. مجموع ریشه‌های معادلهٔ $x^{۱+\log_۲ x} - ۴x^۲ = ۰$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳/۵ ۳) ۴ ۴) ۴/۵

۱۵۸۲. معادلهٔ $۶^{\log x} + ۸^{\log x} = x$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۵۸۳. از دستگاه معادلات $\begin{cases} ۳^x - ۲^{y^۲} = ۷۷ \\ ۳^{\frac{x}{۲}} - ۲^{\frac{y^۲}{۲}} = ۷ \end{cases}$ ، حاصل $\log_y x$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۱۵۸۴. جواب معادلهٔ $\log(\log x) = \sqrt{\frac{(m+n)^{\log(m-n)}}{(m-n)^{\log(m+n)}}}$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) $۱۰^{m^۲ - n^۲}$ ۳) $۱۰^{۱۰}$ ۴) $۱۰^{m^۲ + n^۲}$

۱۴۸۳ (۱)

ابتدا دامنهٔ لگاریتم را می‌یابیم:

$x^2-3x>0 \Rightarrow x(x-3)>0 \Rightarrow x>3$ یا $x<0$ (۱)

چون پایهٔ لگاریتم عددی بین صفر و یک است، پس با حذف لگاریتم، جهت نامعادله عوض می‌شود.

$$\log_{\frac14}(x^2-3x)>-1 \Rightarrow x^2-3x<\left(\frac14\right)^{-1}$$
$$\Rightarrow x^2-3x<4 \Rightarrow x^2-3x-4<0$$
$$\Rightarrow (x-4)(x+1)<0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1<x<4 \quad (۲)$$

با اشتراک‌گیری بین مجموعه جواب‌های (۱) و (۲)، مجموعه جواب $(-1,0)\cup(3,4)$ به‌دست می‌آید. پس:

$$(a,b)\cup(c,d)=(-1,0)\cup(3,4) \Rightarrow a=-1, b=0, c=3, d=4$$
$$\Rightarrow a+b+c+d=6$$

۱۴۸۴ (۲)

در A چون عبارت تحت لگاریتم از مبنا بزرگ‌تر است، پس $A>1$. اما در B چون عبارت تحت لگاریتم از مبنا کوچک‌تر است، پس $B<1$ بنابراین $A>B$

۱۴۸۵ (۳)

نکته: اگر $a>1$ و $x>1$ یا $0<a<1$ و $0<x<1$، آن‌گاه $\log_a x$ مثبت و چنان‌چه $a>1$ و $0<x<1$ یا $0<a<1$ و $x>1$، آن‌گاه $\log_a x$ منفی است.

$0<a<1 \Rightarrow \log_3 a<0 \Rightarrow$ گزینه‌های (۱) و (۴) نادرست هستند.

$0<a<1 \Rightarrow \log_a 5<\log_a 2 \Rightarrow$ گزینهٔ (۲) نادرست است.

$$0<a<1 \Rightarrow \log_7 a>\log_5 a \Rightarrow \frac{1}{\log_a 7}>\frac{1}{\log_a 5}$$

۱۴۸۶ (۱)

بر اساس نکتهٔ تست قبل، حاصل $\log_{\frac12}\frac{1}{100}$ مثبت و حاصل $\log_{\frac12}100$ منفی است و در نتیجه رابطهٔ $\log_{\frac12}\frac{1}{100}>\log_{\frac12}100$ برقرار است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۲): داریم $\log_3 2>0$ و $\log_{\frac12}3<0$، پس رابطهٔ $\log_{\frac12}3>\log_3 2$ نادرست است.

گزینهٔ (۳):

$$\begin{cases}3<5\Rightarrow \log_5 3<\log_5 5=1 \Rightarrow \log_5 3<1\\ 3<5\Rightarrow \log_3 3<\log_3 5 \Rightarrow 1<\log_3 5\end{cases}$$
$$\Rightarrow \log_5 3<1<\log_3 5$$

گزینهٔ (۴): می‌دانیم وقتی مبنای لگاریتم بین صفر و یک باشد و از طرفین نامساوی لگاریتم بگیریم، جهت نامساوی عوض می‌شود، پس:

$$2<3\Rightarrow \log_{\frac12}2>\log_{\frac12}3$$

۱۴۸۷ (۲)

نکته: $\log_{a^m}A^n=\frac nm\log_a A$

$$\log_5(\sqrt{125})^3=\log_5(\sqrt{5^3})^3=\log_5 5^{\frac92}=\frac92=4/5$$

۱۴۸۸ (۱)

$$\log_3 9A^2 \xrightarrow{A=3^a} \log_3 9\times(3^a)^2=\log_3 3^2\times 3^{2a}$$
$$=\log_3 3^{2a+2}=2a+2$$

۱۴۸۹ (۱)

$$4^a=2\sqrt2 \Rightarrow 2^{2a}=2^{\frac32}\Rightarrow 2a=\frac32\Rightarrow a=\frac34$$
$$\log_4(4a+1)\xrightarrow{a=\frac34}\log_4 4=1$$

۱۴۹۰ (۳)

$$\log_{x\sqrt[3]{x}}\sqrt[3]{x^2\sqrt x}=\log_{\sqrt[3]{x^4}}\sqrt[3]{\sqrt{x^5}}=\log_{\sqrt[3]{x^4}}\sqrt[6]{x^5}$$
$$=\log_{x^{\frac43}}x^{\frac56}=\frac{\frac56}{\frac43}=\frac58$$

۱۴۹۱ (۱)

نکته: $\log_a AB=\log_a A+\log_a B$

a و b ریشه‌های معادلهٔ $x^2-10x+0/1=0$ هستند. پس:

$S=a+b=10 \quad , \quad P=ab=0/1$

بنابراین داریم: $\log a+\log b-\log(a+b)=\log ab-\log(a+b)$

$$\log 0/1-\log 10=\log 10^{-1}-\log 10=-1-1=-2$$

۱۴۹۲ (۲)

$$\log\frac12+\log\frac23+\cdots+\log\frac{n}{n+1}=-2$$
$$\Rightarrow \log\frac{1\times2\times3\times\cdots\times n}{2\times3\times4\times\cdots\times(n+1)}=-2\Rightarrow\log\frac1{n+1}=-2$$
$$\Rightarrow\frac1{n+1}=10^{-2}=\frac1{10^2}=\frac1{100}\Rightarrow n+1=100\Rightarrow n=99$$

۱۴۹۳ (۳)

$$x=8\log_4 2\sqrt2\Rightarrow x=8\log_{2^2}2^{\frac32}=8\times\frac34\Rightarrow x=6$$
$$\log_x 4(x+3)\xrightarrow{x=6}\log_6 36=\log_6 6^2=2$$

۱۴۹۴ (۴)

$$\log_{\sqrt b}ab^2=\log_{b^{\frac12}}ab^2=2\log_b ab^2=2(\log_b a+\log_b b^2)$$
$$=2(\log_b a+2)\xrightarrow{\log_b a=\frac32}2\left(\frac32+2\right)=2\left(\frac72\right)=7$$

۱۴۹۵ (۳)

نکته: $\log 5=1-\log 2$

از آن‌جایی که $\log 2=a$، بنابراین $\log 5=1-a$ خواهد بود، در نتیجه:

$$3\log\sqrt[3]{45}=3\times\frac13\log45=\log9+\log5=2\log3+\log5$$
$$=2b+1-a$$

۱۴۹۶ ۱ **۲** ۳ ۴

نکته: $\log_b a \times \log_c b = \log_c a \ ,\ \log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$

$$\log_{12} 3 = a \xrightarrow{\text{معکوس می‌کنیم.}} \log_3 12 = \frac{1}{a} \Rightarrow \log_3 3 \times 2^2 = \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \log_3 3 + 2\log_3 2 = \frac{1}{a} \Rightarrow 1 + 2\log_3 2 = \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow 2\log_3 2 = \frac{1}{a} - 1 = \frac{1-a}{a} \Rightarrow \log_3 2 = \frac{1-a}{2a} \quad (*)$$

$$\log_3 2 \times \log_4 3 \times \cdots \times \log_{27} 26 = \log_{27} 2 = \log_{3^3} 2$$

$$\frac{1}{3}\log_3 2 \overset{(*)}{=\!=} \frac{1}{3} \times \frac{1-a}{2a} = \frac{1-a}{6a}$$

۱۴۹۷ ۱ **۲** ۳ ۴

$$\log(6-2\sqrt{5}) + 2\log(1+\sqrt{5}) = \log(6-2\sqrt{5}) + \log(1+\sqrt{5})^2$$

$$= \log(6-2\sqrt{5}) + \log(6+2\sqrt{5}) = \log(6-2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})$$

$$= \log(36-20) = \log 16 = \log 2^4 = 4\log 2 = 4k$$

۱۴۹۸ ۱ ۲ ۳ **۴**

نکته: $a^{\log_a b} = b$

$$A = \sqrt{10}^{\log 4 + 2\log 3} = \sqrt{10}^{\log 4 + \log 9} = \sqrt{10}^{\log 36} = \sqrt{36} = 6$$

بنابراین: $\log_{\sqrt{8}} \dfrac{3}{A} = \log_{\sqrt{8}} \dfrac{3}{6} = \log_{\sqrt{8}} \dfrac{1}{2} = \log_{2^{\frac{3}{2}}} 2^{-1} = -\dfrac{2}{3}$

۱۴۹۹ **۱** ۲ ۳ ۴

نکته: $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

$$\sqrt{10}^{2\log 2 + 3\log 3} = \sqrt{10}^{\log 2^2 + \log 3^3}$$

$$= \sqrt{10}^{\log 4 + \log 27} = \sqrt{10}^{\log 4 \times 27} = (4 \times 27)^{\log\sqrt{10}}$$

$$= (4 \times 27)^{\log 10^{\frac{1}{2}}} = (4 \times 27)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4 \times 27} = 2 \times 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

۱۵۰۰ ۱ ۲ ۳ **۴**

بنابر فرض داریم:

$$\log_8(2\sqrt[3]{0/25}) = A \Rightarrow \log_8(2 \times \sqrt[3]{\frac{1}{4}}) = A$$

$$\Rightarrow \log_{2^3}(2 \times 2^{-\frac{2}{3}}) = A \Rightarrow \log_{2^3} 2^{\frac{1}{3}} = A \Rightarrow A = \frac{1}{9}$$

$$\log_4(\frac{1}{A} - 1) \overset{A=\frac{1}{9}}{=\!=\!=} \log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \frac{3}{2}$$

۱۵۰۱ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\log_2 \sqrt[5]{e^2} = A \Rightarrow \log_2 e^{\frac{2}{5}} = A \Rightarrow \frac{2}{5}\log_2 e = A$$

$$\Rightarrow \log_2 e = \frac{5A}{2} \Rightarrow \log_e 2 = \frac{2}{5A} \quad (*)$$

$$\log_{\sqrt{e}} 32 = \log_{e^{\frac{1}{2}}} 2^5 = 10\log_e 2 \overset{(*)}{=\!=} 10 \times \frac{2}{5A} = \frac{4}{A}$$

۱۵۰۲ **۱** ۲ ۳ ۴

نکته: (قانون تغییر مبنا) $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$

$$\log 5 = 1 - \log 2 = a \Rightarrow \log 2 = 1 - a$$

$$\log_8 100 = \frac{\log 100}{\log 8} = \frac{2}{3\log 2} = \frac{2}{3(1-a)}$$

۱۵۰۳ **۱** ۲ ۳ ۴

$$\begin{cases} 2^a = 10 \Rightarrow \log_2 10 = a \Rightarrow \log_{10} 2 = \dfrac{1}{a} \Rightarrow \log 5 = 1 - \log 2 = 1 - \dfrac{1}{a} \\ \log_{\sqrt{2}} 25 = \dfrac{\log 25}{\log\sqrt{2}} = \dfrac{\log 5^2}{\log 2^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{2\log 5}{\frac{1}{2}\log 2} = \dfrac{4\log 5}{\log 2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{2}} 25 = \frac{4(1-\frac{1}{a})}{\frac{1}{a}} = 4a(1-\frac{1}{a}) = 4(a-1)$$

۱۵۰۴ **۱** ۲ ۳ ۴

$$\log\sqrt[3]{1/6} = \log(1/6)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log 1/6 = \frac{1}{3}\log\frac{16}{10}$$

$$= \frac{1}{3}(\log 16 - \log 10) = \frac{1}{3}(\log 2^4 - 1) = \frac{1}{3}(4\log 2 - 1)$$

$$\overset{\log 2 = 1 - \log 5}{=\!=\!=\!=} \frac{1}{3}(4(1-\log 5) - 1) = \frac{1}{3}(4(1-3k) - 1)$$

$$= \frac{1}{3}(3 - 12k) = 1 - 4k$$

۱۵۰۵ ۱ **۲** ۳ ۴

$$\log_{abc} x = \frac{1}{\log_x abc} = \frac{1}{\log_x a + \log_x b + \log_x c}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{8} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{24}{15} = \frac{8}{5}$$

۱۵۰۶ ۱ **۲** ۳ ۴

با توجه به فرمول تغییر مبنا، داریم: $\dfrac{\log(\log a)}{\log a} = \log_a(\log a)$

$$\Rightarrow a^{\log_a(\log a)} = (\log a)^{\log_a a} = \log a$$

۱۵۰۷ ۱ **۲** ۳ ۴

ابتدا دو عدد صحیح متوالی مانند x و $x+1$ را به گونه‌ای می‌یابیم که رابطهٔ مقابل برقرار باشد: $3^x < 241 < 3^{x+1}$

با کمی جستجو و آزمون و خطا، معلوم می‌شود که $x = 4$، در واقع داریم:

$$3^4 < 241 < 3^5 \xrightarrow{\log_3 \text{ می‌گیریم}} \log_3 3^4 < \log_3 241 < \log_3 3^5$$

$$\Rightarrow 4 < \log_3 241 < 5 \Rightarrow [\log_3 241] = 4$$

۱۵۰۸ ۱ ۲ **۳** ۴

نکته: $\log_{a^n} A^n = \log_a A$

می‌توان نوشت: $\log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt{5} = \log_{(\sqrt[3]{2})^6} (\sqrt{5})^6 = \log_4 125$

حال x را به گونه‌ای می‌یابیم که $4^x < 125 < 4^{x+1}$ با آزمون و خطا معلوم می‌شود که $x = 3$ پس:

$$4^3 < 125 < 4^4 \xrightarrow{\log_4 \text{ می‌گیریم}} \log_4 4^3 < \log_4 125 < \log_4 4^4$$

$$\Rightarrow 3 < \log_4 125 < 4 \Rightarrow [\log_4 125] = 3$$

۱۵۰۹ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

$$\log_۴ ۱۲۵=\frac{\log ۱۲۵}{\log ۴}=\frac{\log ۵^۳}{\log ۲^۲}=\frac{۳\log ۵}{۲\log ۲}=\frac{۳\log\frac{۱۰}{۲}}{۲\log ۲}=\frac{۳(\log ۱۰-\log ۲)}{۲\log ۲}=\frac{۳(۱-a)}{۲a}$$

۱۵۱۰ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

$$۴a^۲+۹b^۲+۱۲ab=۴ab+۱۲ab \Rightarrow (۲a+۳b)^۲=۱۶ab$$

$$\left(\frac{۲a+۳b}{۴}\right)^۲=ab \Rightarrow ۲\log\frac{۲a+۳b}{۴}=\log ab=\log a+\log b$$

$$\Rightarrow \log\frac{۲a+۳b}{۴}=\frac{\log a+\log b}{۲}$$

۱۵۱۱ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

$$\log_۳ ۱۲=\log_۳ ۳\times ۲^۲=\log_۳ ۳+\log_۳ ۲^۲=۱+۲\log_۳ ۲=a$$

$$\Rightarrow \log_۳ ۲=\frac{a-۱}{۲}$$

$$\log_۳ ۱۸=\log_۳ ۹\times ۲=۲+\log_۳ ۲=۲+\frac{a-۱}{۲}=\frac{a+۳}{۲}$$

۱۵۱۲ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

$$\log_{۱۲} ۲۷=۳\log_{۱۲} ۳=a \Rightarrow \log_{۱۲} ۳=\frac{a}{۳}\Rightarrow \log_۳ ۱۲=\frac{۳}{a}$$

$$\Rightarrow \log_۳ ۳\times ۴=\frac{۳}{a}\Rightarrow ۱+\log_۳ ۴=\frac{۳}{a}$$

$$\Rightarrow ۲\log_۳ ۲=\frac{۳-a}{a}\Rightarrow \log_۳ ۲=\frac{۳-a}{۲a}\Rightarrow \log_۲ ۳=\frac{۲a}{۳-a}$$

$$\log_۶ ۱۶=\frac{۱}{\log_{۱۶} ۶}=\frac{۴}{\log_۲ ۶}=\frac{۴}{۱+\log_۲ ۳}=\frac{۴}{۱+\frac{۲a}{۳-a}}=\frac{۴(۳-a)}{۳+a}$$

۱۵۱۳ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

> **نکته:** اگر n یک عدد حسابی باشد و $۱۰^n < A < ۱۰^{n+۱}$، آن‌گاه عدد A، دارای $n+۱$ رقم است.

$$\log A=\log ۲^{۲۰۰}=۲۰۰\log ۲=۲۰۰\times ۰/۳۰۱\Rightarrow \log A=۶۰/۲$$

$$\Rightarrow A=۱۰^{۶۰/۲}$$

چون $۱۰^{۶۰}<A=۱۰^{۶۰/۲}<۱۰^{۶۱}$، پس عدد $A=۲^{۲۰۰}$، ۶۱ رقم دارد.

۱۵۱۴ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

طبق فرض نمودار تابع $f(x)=a+\log_۴(x+b)$ از نقاط $(۰,-\frac{۱}{۲})$ و $(-۱,-۱)$ می‌گذرد. پس:

$$\begin{cases} f(۰)=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow -\frac{۱}{۲}=a+\log_۴ b & (۱)\\ f(-۱)=-۱\Rightarrow -۱=a+\log_۴(b-۱) & (۲)\end{cases}$$

طرفین تساوی (۲) را از طرفین تساوی (۱) کم می‌کنیم:

$$-\frac{۱}{۲}+۱=(\cancel{a}+\log_۴ b)-\cancel{a}-\log_۴(b-۱)$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}=\log_۴\frac{b}{b-۱}\Rightarrow \frac{b}{b-۱}=۴^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۴}=۲\Rightarrow b=۲b-۲$$

$$\Rightarrow b=۲\Rightarrow -۱=a+\log_۴(\underbrace{\cancel{۲-۱}}_{۱})\Rightarrow -۱=a+۰\Rightarrow a=-۱$$

$$\Rightarrow y=-۱+\log_۴(x+۲)\xrightarrow[y=۰]{f^{-۱}(۰)}۰=-۱+\log_۴(x+۲)$$

$$\Rightarrow \log_۴(x+۲)=۱\Rightarrow x+۲=۴^۱\Rightarrow x=۴-۲=۲$$

۱۵۱۵ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

$$\begin{cases} f(۲)=۶\\ f(۱۲)=۱۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a+\log_۲(۲b-۴)=۶\\ a+\log_۲(۱۲b-۴)=۱۰\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{کم کردن طرفین معادلات}}\log_۲(۱۲b-۴)-\log_۲(۲b-۴)=۴$$

$$\Rightarrow \log_۲\frac{۱۲b-۴}{۲b-۴}=۴\Rightarrow \frac{۱۲b-۴}{۲b-۴}=۱۶\Rightarrow ۱۲b-۴=۳۲b-۶۴$$

$$\Rightarrow ۲۰b=۶۰\Rightarrow b=۳$$

$$a+\log_۲(۲b-۴)=۶\xrightarrow{b=۳}a+\log_۲ ۲=۶\Rightarrow a+۱=۶\Rightarrow a=۵$$

۱۵۱۶ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

$$\begin{cases} f(۵)=۱۱\\ f(۲۱)=۱۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a+\log_۲(۱۵+b)^۲=۱۱\\ a+\log_۲(۶۳+b)^۲=۱۵\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{کم کردن طرفین معادلات}}\log_۲(۶۳+b)^۲-\log_۲(۱۵+b)^۲=۴$$

$$\Rightarrow ۲\log_۲(۶۳+b)-۲\log_۲(۱۵+b)=۴$$

$$\xrightarrow{\div ۲}\log_۲(۶۳+b)-\log_۲(۱۵+b)=۲$$

$$\Rightarrow \log_۲\frac{۶۳+b}{۱۵+b}=۲\Rightarrow \frac{۶۳+b}{۱۵+b}=۴$$

$$\Rightarrow ۶۳+b=۶۰+۴b\Rightarrow ۳b=۳\Rightarrow b=۱$$

$$a+\log_۲(۱۵+b)^۲=۱۱\xrightarrow{b=۱}a+\log_۲ ۱۶^۲=۱۱$$

$$\Rightarrow a+\log_۲ ۲^۸=۱۱\Rightarrow a+۸=۱۱\Rightarrow a=۳$$

۱۵۱۷ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

$$y=\log_۳\left(\frac{x-۱}{x+۱}\right)\Rightarrow \frac{x-۱}{x+۱}=۳^y\Rightarrow x-۱=x.۳^y+۳^y$$

$$\Rightarrow x(۱-۳^y)=۱+۳^y\Rightarrow x=\frac{۱+۳^y}{۱-۳^y}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۱+۳^x}{۱-۳^x}$$

۱۵۱۸ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

داریم:

$$y=\log_{\frac{۱}{۲}}\frac{۱}{x}=\log_{۲^{-۱}}x^{-۱}=\frac{-۱}{-۱}\log_۲ x=\log_۲ x\Rightarrow y=\log_۲ x$$

بنابراین نمودار $y=\log_{\frac{۱}{۲}}\frac{۱}{x}$ بر نمودار $y=\log_۲ x$ منطبق است. با توجه به مبنای لگاریتم در تابع $y=\log_۲ x$، نمودار این تابع افزایشی بوده و همان‌طور که می‌دانیم نمودار آن به‌صورت گزینهٔ (۳) است.

۱۵۱۹ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

برای آن‌که لگاریتم‌ها بامعنی باشند، باید داشته باشیم:

$$y>۰\ ,\ x+۱>۰\Rightarrow x>-۱$$

فقط گزینه‌های (۱) و (۴) در شرط $y>۰$ و $x>-۱$ صدق می‌کنند.

همچنین داریم:

$$۲\log y=\log(x+۱)\Rightarrow \log y^۲=\log(x+۱)\Rightarrow y^۲=x+۱$$

$$\xrightarrow{y>۰}y=\sqrt{x+۱}$$

بنابراین باید نمودار $y=\sqrt{x+۱}$ را با شرط $x>-۱$ و $y>۰$، رسم کنیم که برای این منظور کافی است $y=\sqrt{x}$ را یک واحد در راستای محور xها به سمت چپ منتقل کنیم. در نتیجه نمودار تابع به‌صورت نمودار گزینهٔ (۴) درمی‌آید.

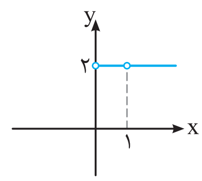
۱۵۲۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

ابتدا با استفاده از روابط $\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$ و $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$، ضابطهٔ تابع را کمی ساده می‌کنیم:

$$y=\sqrt{x}^{\frac{1}{\log_4 x}}=\sqrt{x}^{\log_x 4}=4^{\log_x \sqrt{x}}=4^{\log_x x^{\frac{1}{2}}}$$

$$=4^{\frac{1}{2}}\Rightarrow y=2$$

بدیهی است که باید $x>0$ و $x\neq 1$. پس باید نمودار تابع $y=2$ را با شرط $x>0$ و $x\neq 1$ رسم کنیم:



۱۵۲۱ (۱) (۲) (۳) (۴)

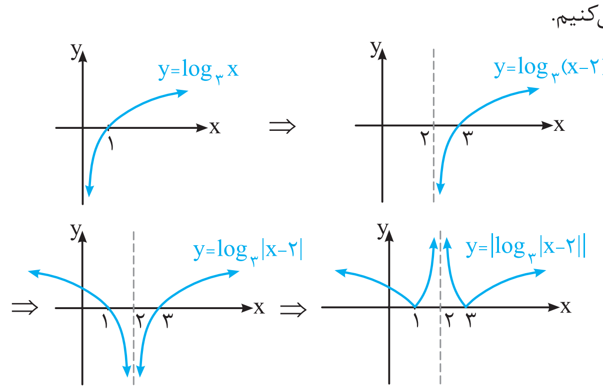
نکته: اگر U تابعی از x و k عددی طبیعی و $0<a$ ، $a\neq 1$ باشد، در حالت کلی داریم: $\log_a U^{2k}=2k\log_a|U|$

$$f(x)=|\log_9(\frac{1}{x^2-4x+4})|=|\log_{3^2}(x-2)^{-2}|=|-\log_3|x-2||$$

$$=|\log_3|x-2||\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{2\}$$

پس $f(x)=|\log_3|x-2||$

برای رسم نمودار تابع f، ابتدا نمودار $y=\log_3 x$ را رسم کرده و سپس آن را دو واحد در راستای محور xها به سمت راست منتقل می‌کنیم، پس از آن قرینهٔ بخش‌هایی از نمودار را که در سمت راست خط $x=2$ قرار دارد، در سمت چپ این خط نیز رسم می‌کنیم. در نهایت بخش‌هایی از نمودار را که زیر محور xها قرار دارد، نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.



۱۵۲۲ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$\begin{cases}f(x)=\log_2\frac{1}{x}=\log_2 x^{-1}=-\log_2 x\\ g(x)=\log_{\frac{1}{2}}x=\log_{2^{-1}}x=-\log_2 x\end{cases}\Rightarrow f(x)=g(x)$$

از طرفی دامنهٔ هر دو تابع برابر بازهٔ $(0,+\infty)$ است.

چون دامنهٔ دو تابع با هم برابر بوده و به ازای هر عدد x از دامنهٔ مشترک آن‌ها، ضابطهٔ آن‌ها نیز یکسان است، پس این دو تابع با هم برابرند، لذا نمودار آن‌ها بر هم منطبق است.

۱۵۲۳ (۱) (۲) (۳) (۴)

بررسی گزینه‌ها: گزینهٔ (۱):

$$\begin{cases}x>0\Rightarrow D_f=(0,+\infty)\\ x^2>0\Rightarrow x\neq 0\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{0\}\end{cases}\Rightarrow D_f\neq D_g\Rightarrow f\neq g$$

گزینهٔ (۲): چون $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$ و $D_g=\mathbb{R}$، پس $D_f\neq D_g$ و در نتیجه این دو تابع برابر نیستند.

گزینهٔ (۳): چون $D_f=[0,+\infty)$ و $D_g=\mathbb{R}$، پس $D_f\neq D_g$ و در نتیجه این دو تابع برابر نیستند.

گزینهٔ (۴): $D_f=D_g=\mathbb{R}-\{0\}$، همچنین داریم:

$$f(x)=g(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

پس این دو تابع با هم برابر هستند.

۱۵۲۴ (۱) (۲) (۳) (۴)

بررسی گزینه‌ها: گزینهٔ (۱):

$$\begin{cases}x>0\\ x-1>0\Rightarrow x>1\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}x>1\Rightarrow D_f=(1,+\infty)$$

$$x^2-x>0\Rightarrow x(x-1)>0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}x>1 \text{ یا } x<0$$

$$\Rightarrow D_g=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$$

چون $D_f\neq D_g$، پس این دو تابع با هم برابر نیستند.

گزینهٔ (۲):

$$\begin{cases}x-1>0\\ ,\\ x+1>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>1\\ ,\\ x>-1\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}x>1\Rightarrow D_f=(1,+\infty)$$

$$\frac{x-1}{x+1}>0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}x>1 \text{ یا } x<-1\Rightarrow D_g=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$$

چون $D_f\neq D_g$، پس $f\neq g$

گزینهٔ (۳): داریم $D_f=D_g=(0,+\infty)$. همچنین برای هر $x\in(0,+\infty)$ می‌توان نوشت:

$$f(x)=\log_2\sqrt{x}=\log_2 x^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_2 x=\log_4 x=g(x)$$

پس این دو تابع با هم برابر هستند.

گزینهٔ (۴):

$$\begin{cases}x^4>0\Rightarrow x\neq 0\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{0\}\\ x>0\Rightarrow D_g=(0,+\infty)\end{cases}\Rightarrow D_f\neq D_g\Rightarrow f\neq g$$

۱۵۲۵ (۱) (۲) (۳) (۴)

نکته: برای حل معادلات لگاریتمی، ابتدا در صورت لزوم، طرفین معادله را به کمک قوانین و ویژگی‌های لگاریتم، آن‌قدر ساده می‌کنیم تا به یکی از روابط $\log_a x=\log_a y$ یا $\log_a x=b$ برسیم. سپس با استفاده از روابط زیر مقادیر مجهول را به‌دست می‌آوریم. مقادیر به‌دست آمده وقتی قابل قبول هستند که در دامنهٔ معادله واقع باشند و در واقع در معادله صدق کنند.

$$\log_a x=\log_a y\Leftrightarrow x=y \ , \ \log_a x=b\Leftrightarrow x=a^b$$

$$\log 3+\log\sqrt[4]{3}=\log(81)^k\Rightarrow\log 3\sqrt[4]{3}=\log(81)^k$$

$$\Rightarrow(81)^k=3\sqrt[4]{3}\Rightarrow(3^4)^k=3\times 3^{\frac{1}{4}}\Rightarrow 3^{4k}=3^{\frac{5}{4}}\Rightarrow 4k=\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow k=\frac{5}{16}\Rightarrow\log_2\frac{5}{k}\overset{k=\frac{5}{16}}{=\!=}\log_2 16=\log_2 2^4=4$$

فصل ۸ توابع نمایی و لگاریتمی

قسمت سوم: ویژگی‌های لگاریتم و حل معادلات لگاریتمی

این قسمت مهم‌ترین قسمت لگاریتمه. تمام فرمولای لگاریتم تو این قسمت اومده. معادلات لگاریتمی و کاربرداش هم تو این قسمت اومده. بیش‌تر تستای کنکورم از این مبحث مطرح میشه. واسه این‌که فرمولای لگاریتم خوب تو ذهنت بشینه، هر فرمولی رو که آوردم، بلافاصله مثالی ازش زدم تا کاربرد فرمول رو تو حل مثالا یاد بگیری.

قوانین و ویژگی‌های لگاریتم

برای حل بسیاری از مسائل واقعی در فیزیک، شیمی، پزشکی، زمین‌شناسی و ... که در آن‌ها لگاریتم به کار گرفته می‌شود، نیازمند استفاده از قوانینی هستیم که بین لگاریتم‌ها برقرار است. بر این اساس در این قسمت به بیان و اثبات قوانین و ویژگی‌های لگاریتم می‌پردازیم.

قانون ۱: برای هر عدد حقیقی a که $a>۰$ و $a\neq ۱$، داریم:

$$\log_a a=۱ \quad , \quad \log_a ۱=۰$$

اثبات: از آن‌جایی که $a^۰=۱$، پس $\log_a ۱=۰$ و چون $a^۱=a$، پس $\log_a a=۱$

مثال: حاصل لگاریتم‌های زیر را به‌دست آورید.

آ) $\log_۵(۲-\sqrt{۳})(۲+\sqrt{۳})$ ب) $\log_۳((۱-\sqrt{۲})^۲+\sqrt{۸})$

پاسخ: آ) $\log_۵(۲-\sqrt{۳})(۲+\sqrt{۳}) \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \log_۵(۴-۳)=\log_۵ ۱=۰$

ب) $\log_۳((۱-\sqrt{۲})^۲+\sqrt{۸})=\log_۳(۱+۲-۲\sqrt{۲}+۲\sqrt{۲})=\log_۳ ۳=۱$

قانون ۲: اگر A و B دو عدد مثبت و $a>۰$ و $a\neq ۱$ باشد، آن‌گاه:

$$\log_a AB=\log_a A+\log_a B$$

اثبات: فرض می‌کنیم $\log_a A=x$ و $\log_a B=y$. پس:

$$\begin{cases}\log_a A=x\Rightarrow A=a^x\\ \log_a B=y\Rightarrow B=a^y\end{cases}\Rightarrow AB=a^{x+y}\Rightarrow \log_a AB=x+y\Rightarrow \log_a AB=\log_a A+\log_a B$$

نتیجه قانون ۲ قابل تعمیم است، یعنی اگر $A_۱$، $A_۲$، ... و A_n، اعدادی مثبت و $a>۰$ ، $a\neq ۱$، آن‌گاه:

$$\log_a A_۱A_۲\cdots A_n=\log_a A_۱+\log_a A_۲+\cdots+\log_a A_n$$

تست: حاصل $\log_{۱۰!}۲+\log_{۱۰!}۳+\cdots+\log_{۱۰!}۱۰$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱۰ ۴) !۱۰

پاسخ: بنابر نتیجهٔ قانون ۲ می‌توان نوشت:

$\log_{۱۰!}۲+\log_{۱۰!}۳+\cdots+\log_{۱۰!}۱۰=\log_{۱۰!}(۲\times ۳\times ۴\times\cdots\times ۱۰)=\log_{۱۰!}۱۰!=۱\Rightarrow$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

قانون ۳: اگر A و B دو عدد مثبت و $a>۰$ ، $a\neq ۱$ باشد، آن‌گاه:

$$\log_a\frac{A}{B}=\log_a A-\log_a B$$

این قانون و قانون‌های دیگر نیز مانند قانون ۲ اثبات می‌شوند. لذا از اثبات آن‌ها می‌گذریم.

نتیجه همواره داریم:

$$\log ۲=۱-\log ۵ \quad , \quad \log ۵=۱-\log ۲$$

مثال: اگر $\log ۷=a$ و $\log ۵=b$ باشد، حاصل $\log\frac{۷}{۲}$ را بر حسب a و b بیابید.

پاسخ: $\log\frac{۷}{۲}=\log ۷-\log ۲=\log ۷-(۱-\log ۵)=\log ۷+\log ۵-۱=a+b-۱$

قانون ۴: اگر A و a مثبت باشند و $a \neq 1$، آن‌گاه برای هر دو عدد **حقیقی** m و n $(m \neq 0)$ داریم:

$$\log_a A^n = n\log_a A \quad , \quad \log_{a^m} A = \frac{1}{m}\log_a A$$

نتیجه اگر A و a دو عدد مثبت باشند و $a \neq 1$، برای هر دو عدد حقیقی m و n $(m \neq 0)$ ، با ترکیب دو رابطهٔ قانون (۴) داریم:

$$\log_{a^m} A^n = \frac{n}{m}\log_a A$$

راستی از این فرمول نتیجه می‌شه که $\log_{a^n} A^n = \log_a A$. یعنی همیشه می‌تونیم هم‌زمان عبارت جلوی لگاریتم و پایه رو به توان عدد مشترکی برسونیم.

مثلاً $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{2} = \log_{27} 4$. فهمیدی چیکار کردم؟ $\sqrt[3]{2}$ و $\sqrt{3}$ رو هم‌زمان به توان ۶ رسوندم.

تست: حاصل عبارت $\log_{5\sqrt{5}} 5\sqrt[3]{25} - \log_{\sqrt{2}} 0/125$ کدام است؟

۱) $\frac{64}{9}$ ۲) $\frac{49}{9}$ ۳) $\frac{45}{7}$ ۴) $\frac{65}{7}$

پاسخ:

$$\log_{5\sqrt{5}} 5\sqrt[3]{25} = \log_{5^{\frac{3}{2}}} 5 \times 5^{\frac{2}{3}} = \log_{5^{\frac{3}{2}}} 5^{\frac{5}{3}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{3}{2}}\log_5 5 = \frac{10}{9}$$

$$\log_{\sqrt{2}} 0/125 = \log_{2^{\frac{1}{2}}} \frac{125}{1000} = \log_{2^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{8} = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^{-3} = \frac{-3}{\frac{1}{2}}\log_2 2 = -6 \times 1 = -6$$

$$\Rightarrow \log_{5\sqrt{5}} 5\sqrt[3]{25} - \log_{\sqrt{2}} 0/125 = \frac{10}{9} - (-6) = \frac{64}{9} \Rightarrow$$ گزینهٔ (۱) صحیح است.

تست: اگر $4a^2 + 9b^2 = 13ab$، حاصل $\log\frac{2a+3b}{5}$ برابر کدام است؟

۱) $\log a + \log b$ ۲) $\frac{1}{2}(\log a + \log b)$ ۳) $\log 2a + \log 3b$ ۴) $\frac{1}{2}(\log 2a + \log 3b)$

پاسخ:

$$\log\frac{2a+3b}{5} = \frac{2}{2}\log\frac{2a+3b}{5} \xlongequal{n\log_a A = \log_a A^n} \frac{1}{2}\log\left(\frac{2a+3b}{5}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{4a^2+9b^2+12ab}{25}\right) \xlongequal{4a^2+9b^2=13ab} \frac{1}{2}\log\left(\frac{13ab+12ab}{25}\right) = \frac{1}{2}\log ab = \frac{1}{2}(\log a + \log b) \Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

به کمک نکتهٔ بعد می‌تونیم تعداد رقمای اعداد خیلی بزرگ رو بشماریم.

نکته فرض کنید n یک عدد حسابی و n_1، n_2 و ... رقم باشند، در این‌صورت:

آ) اگر $\log A = n/n_1n_2\ldots$، آن‌گاه عدد A، $n+1$ رقم دارد.

ب) اگر $\log A = -n/n_1n_2\ldots$، آن‌گاه در عدد A، بعد از ممیز، n رقم صفر قرار دارد.

قسمت (آ) را اثبات می‌کنیم:

$$\log A = n/n_1n_2\ldots \Rightarrow A = 10^{n/n_1n_2\ldots}$$

$$10^n < 10^{n/n_1n_2\ldots} < 10^{n+1} \Rightarrow 10^n < A < 10^{n+1} \Rightarrow$$ عدد A، $n+1$ رقم دارد.

به طور مشابه قسمت (ب) اثبات می‌شود.

تست: اگر $\log 2 = 0/301$ باشد، عدد 2^{80} چند رقم دارد؟

۱) ۸۰ ۲) ۸۱ ۳) ۲۴ ۴) ۲۵

پاسخ: فرض کنیم $A = 2^{80}$، داریم:

$$\log A = \log 2^{80} = 80\log 2 = 80 \times 0/301 = 24/08$$

بنابر نکتهٔ قبل، عدد $A = 2^{80}$، ۲۵ رقمی بوده و گزینهٔ (۴) صحیح است.

قانون ۵ (قانون تغییر مبنا): اگر A، a و b مثبت و $a \neq ۱$ و $b \neq ۱$ باشند، آن‌گاه:

$$\log_a A = \frac{\log_b A}{\log_b a}$$

قانون تغییر مبنا جزء قوانین خیلی مهمه لگاریتمه، وقتی ازش استفاده می‌شه که مبنای لگاریتمی که تو فرض دادن با مبنای لگاریتمی که می‌خوان با هم برابر نباشه.

نتیجه۱: اگر $a,b > ۰$، $a \neq ۱$ و $b \neq ۱$، آن‌گاه داریم:

$$\log_b a = \frac{۱}{\log_a b}$$

این قانون بیان می‌کند که اگر جای مبنا و عبارت جلوی لگاریتم را عوض کنیم، لگاریتم عکس می‌شود. به طور مثال اگر $\log_۲ ۳ = A$، آن‌گاه $\log_۳ ۲ = \frac{۱}{A}$

نتیجه۲: اگر a، b و c مثبت و $b \neq ۱$ و $c \neq ۱$، آن‌گاه:

$$\log_b a \times \log_c b = \log_c a$$

تست: اگر $\log ۲ = a$ و $\log ۳ = b$، حاصل $\log_۶ ۴۵$ کدام است؟

۱) $\frac{۲b - a + ۱}{a + b}$ ۲) $\frac{a - b + ۱}{a + b}$ ۳) $\frac{b - a}{a + b}$ ۴) $\frac{۲b - ۲a}{a + b}$

پاسخ: از قبل می‌دانیم $\log ۵ = ۱ - \log ۲$، حال با استفاده از تغییر مبنا می‌توان نوشت:

$$\log_۶ ۴۵ = \frac{\log_{۱۰} ۴۵}{\log_{۱۰} ۶} = \frac{\log ۴۵}{\log ۶} = \frac{\log ۹ \times ۵}{\log ۲ \times ۳} = \frac{\log ۹ + \log ۵}{\log ۲ + \log ۳} = \frac{\log ۳^۲ + \log ۵}{\log ۲ + \log ۳}$$

$$= \frac{۲\log ۳ + \log ۵}{\log ۲ + \log ۳} = \frac{۲\log ۳ + ۱ - \log ۲}{\log ۲ + \log ۳} = \frac{۲b + ۱ - a}{a + b} \Rightarrow$$ گزینهٔ (۱) صحیح است.

تست: اگر $\log_{a^۲b} a = A$ باشد، حاصل $\log_{b^۲a} b$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{A}$ ۲) $\frac{۱ - ۲A}{۲ - ۳A}$ ۳) $\frac{۱ - ۲A}{۱ - ۳A}$ ۴) $\frac{۱ - A}{۳ - ۲A}$

پاسخ:

$$\log_{a^۲b} a = A \Rightarrow \log_a a^۲b = \frac{۱}{A} \Rightarrow \log_a a^۲ + \log_a b = \frac{۱}{A} \Rightarrow ۲ + \log_a b = \frac{۱}{A} \Rightarrow \log_a b = \frac{۱}{A} - ۲ \Rightarrow \log_a b = \frac{۱ - ۲A}{A} \quad (*)$$

$$\log_{b^۲a} b \xlongequal{\text{تغییر مبنا}} \frac{\log_a b}{\log_a b^۲a} = \frac{\log_a b}{\log_a b^۲ + \log_a a} = \frac{\log_a b}{۲\log_a b + ۱}$$

$$\xlongequal{(*)} \frac{\frac{۱ - ۲A}{A}}{\frac{۲ - ۴A}{A} + ۱} = \frac{\frac{۱ - ۲A}{A}}{\frac{۲ - ۳A}{A}} = \frac{۱ - ۲A}{۲ - ۳A} \Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

قانون ۶: اگر a، b و c مثبت و $c \neq ۱$، آن‌گاه:

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

اگه خواستی این قانون رو اثبات کنی، کافیه از طرفین تساوی، لگاریتم در پایهٔ c بگیری.

نتیجه: اگر A و a مثبت و $a \neq ۱$ باشد، آن‌گاه:

$$a^{\log_a A} = A$$

تست: حاصل عبارت $۷^{۲\log_{۴۹} ۲ + ۳\log_{۴۹} ۳}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) $۶\sqrt{۳}$ ۳) ۵۴ ۴) ۱۰۸

پاسخ: ابتدا به کمک روابط $n\log_a A = \log_a A^n$ و نیز $\log_a AB = \log_a A + \log_a B$، توان عبارت را ساده می‌کنیم:

$$۲\log_{۴۹} ۲ + ۳\log_{۴۹} ۳ = \log_{۴۹} ۲^۲ + \log_{۴۹} ۳^۳ = \log_{۴۹} ۴ + \log_{۴۹} ۲۷ = \log_{۴۹} ۴ \times ۲۷ = \log_{۴۹} ۱۰۸$$

حال می‌توان نوشت:

$$۷^{۲\log_{۴۹} ۲ + ۳\log_{۴۹} ۳} = ۷^{\log_{۴۹} ۱۰۸} \xlongequal{\text{قانون ۶}} ۱۰۸^{\log_{۴۹} ۷} = ۱۰۸^{\log_{۷^۲} ۷} = ۱۰۸^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۱۰۸} = ۶\sqrt{۳} \Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

بیش‌تر تستای لگاریتم از معادلات لگاریتم اومده، دلیلش اینه که واسه حل معادله هم باید قوانین لگاریتمو بلد باشی و هم حل معادله رو.

معادلات لگاریتمی

معادلاتی که فقط شامل عبارت‌های لگاریتمی با ضرایب حقیقی باشند، معادلات لگاریتمی نام دارند. به طور مثال هر یک از معادلات زیر، یک معادلهٔ لگاریتمی هستند:

$$\log_{۵}(x^{۲}-۳x)-\log_{۵}(x-۱)=۳ \ , \ \log_{x}(x-۵)=۲$$

نکته اگر $a>۰$ ، $a\neq ۱$ و x و y مثبت باشند، آن‌گاه بر اساس تعریف لگاریتم و نیز خاصیت یک‌به‌یک بودن تابع لگاریتمی داریم:

$$\log_a x=b \Leftrightarrow x=a^b \qquad \log_a x=\log_a y \Leftrightarrow x=y$$

روش حل معادلات لگاریتمی: برای حل معادلات لگاریتمی، ابتدا در صورت لزوم، طرفین معادله را به کمک قوانین و ویژگی‌های لگاریتم، آن‌قدر ساده می‌کنیم تا به یکی از روابط $\log_a x=\log_a y$ یا $\log_a x=b$ برسیم. سپس به کمک نکتهٔ فوق، مقادیر مجهول را می‌یابیم. مقادیر به‌دست‌آمده وقتی قابل قبول هستند که در دامنهٔ معادله واقع باشند. به عبارت دیگر این مقادیر وقتی جواب معادله هستند که به ازای آن‌ها، هیچ‌یک از عبارت‌های جلوی لگاریتم‌ها و نیز مبناها منفی نباشند و مبناها نیز برابر ۱ نشوند.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

آ) $\log_{۲}(x^{۲}-۷x+۱)=\log_{۲}(۶-۳x)$ ب) $\log_{۹}(x-۴)=۱-\log_{۳}۲$

پ) $\log_{x}(x+۲)=\log_{x}(۴-x)+۱$ ت) $(\log_{۲}x)^{۲}-۹\log_{۸}x=۴$

پاسخ: آ) $\log_{۲}(x^{۲}-۷x+۱)=\log_{۲}(۶-۳x)\Rightarrow x^{۲}-۷x+۱=۶-۳x\Rightarrow x^{۲}-۴x-۵=۰\Rightarrow (x-۵)(x+۱)=۰\Rightarrow x=۵$ یا $x=-۱$

به ازای $x=۵$ ، عبارت‌های جلوی لگاریتم‌ها منفی می‌شوند. چون لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود، پس $x=۵$ قابل قبول نیست. اما $x=-۱$ در معادله صدق می‌کند و لذا تنها جواب معادله است.

ب) $\log_{۹}(x-۴)=۱-\log_{۳}۲\Rightarrow \log_{۹}(x-۴)=\log_{۳}۳-\log_{۳}۲\Rightarrow \log_{۹}(x-۴)=\log_{۳}\frac{۳}{۲}$

می‌دانیم $\log_{a^m}A^n=\frac{n}{m}\log_a A$. به خصوص اگر $n=m$ باشد، داریم $\log_{a^n}A^n=\log_a A$. بنابراین $\log_{۳}\frac{۳}{۲}=\log_{۹}\frac{۹}{۴}$

پس: $\log_{۹}(x-۴)=\log_{۳}\frac{۳}{۲}\Rightarrow \log_{۹}(x-۴)=\log_{۹}\frac{۹}{۴}\Rightarrow x-۴=\frac{۹}{۴}\Rightarrow x=\frac{۲۵}{۴}$

$x=\frac{۲۵}{۴}$ در دامنهٔ معادله قرار دارد و در نتیجه جواب معادله است.

پ) $\log_{x}(x+۲)=\log_{x}(۴-x)+۱\Rightarrow \log_{x}(x+۲)=\log_{x}(۴-x)+\log_{x}x\Rightarrow \log_{x}(x+۲)=\log_{x}(۴-x)x$

$\Rightarrow x+۲=۴x-x^{۲}\Rightarrow x^{۲}-۳x+۲=۰\Rightarrow (x-۱)(x-۲)=۰\Rightarrow x=۱$ یا $x=۲$

به ازای $x=۱$ ، مبنای لگاریتم‌ها برابر یک می‌شود که نادرست است. پس $x=۱$ قابل قبول نیست. اما $x=۲$ در دامنهٔ معادله قرار دارد و در آن صدق می‌کند و لذا تنها جواب معادله است.

ت) $(\log_{۲}x)^{۲}-۹\log_{۸}x=۴\Rightarrow (\log_{۲}x)^{۲}-۹\log_{۲^{۳}}x-۴=۰\Rightarrow (\log_{۲}x)^{۲}-۳\log_{۲}x-۴=۰$

$$\xrightarrow{\log_{۲}x=t} t^{۲}-۳t-۴=۰\Rightarrow (t-۴)(t+۱)=۰\Rightarrow \begin{cases} t=۴ \\ \text{یا} \\ t=-۱\end{cases} \xrightarrow{t=\log_{۲}x} \begin{cases}\log_{۲}x=۴\Rightarrow x=۱۶ \\ \log_{۲}x=-۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

هر دو جواب به‌دست‌آمده در دامنهٔ معادله قرار دارند و لذا هر دوی آن‌ها قابل قبول هستند.

تست: اگر $\log(۴/۵-x)=\log ۴/۵-\log x$ ، آن‌گاه $\log_{\sqrt{۲}}\left(x-\frac{۱۱}{۴}\right)$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: $\log(۴/۵-x)=\log ۴/۵-\log x\Rightarrow \log(۴/۵-x)=\log\frac{۴/۵}{x}$

$\Rightarrow ۴/۵-x=\frac{۴/۵}{x}\Rightarrow \frac{۹}{۲}-x=\frac{۹}{۲x}\xrightarrow{\times ۲x} ۹x-۲x^{۲}=۹\Rightarrow ۲x^{۲}-۹x+۹=۰\Rightarrow (x-۳)(۲x-۳)=۰\Rightarrow x=۳$ یا $x=\frac{۳}{۲}$

اگرچه هر دو جواب به‌دست آمده قابل قبول هستند (چرا؟) اما فقط به ازای $x=۳$ ، عبارت $x-\frac{۱۱}{۴}$ مثبت است. پس:

$\log_{\sqrt{۲}}\left(x-\frac{۱۱}{۴}\right)\overset{x=۳}{=\!=}\log_{\sqrt{۲}}\left(۳-\frac{۱۱}{۴}\right)=\log_{\sqrt{۲}}\frac{۱}{۴}=\log_{۲^{\frac{۱}{۲}}}۲^{-۲}=\frac{-۲}{\frac{۱}{۲}}=-۴\Rightarrow$ گزینهٔ (۱) صحیح است.

تست: از معادلات $\log_y x+\log_x y=۲$ و $۲^{x^۲}\times ۴^{\frac{۱}{۲}y-۷}=\frac{۱}{۴}$، مقدار y کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

پاسخ:

$$۲^{x^۲}\times ۴^{\frac{۱}{۲}y-۷}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow ۲^{x^۲}\times ۲^{y-۱۴}=۲^{-۲}\Rightarrow ۲^{x^۲+y-۱۴}=۲^{-۲}\Rightarrow x^۲+y-۱۲=۰ \quad (۱)$$

$$\log_y x+\log_x y=۲\xrightarrow{\log_y x=t} t+\frac{۱}{t}=۲\Rightarrow t^۲+۱=۲t\Rightarrow (t-۱)^۲=۰\Rightarrow t=۱\Rightarrow \log_y x=۱\Rightarrow x=y \quad (۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow y^۲+y-۱۲=۰\Rightarrow (y-۳)(y+۴)=۰\Rightarrow y=۳ \text{ یا } y=-۴$$

واضح است که $y=-۴$ قابل قبول نیست. زیرا در دامنهٔ معادله قرار ندارد و بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

کاربردهای لگاریتم

مبحث کاربرد لگاریتم از پارسال تو کتاب اومده سالی که مزین به قدوم مبارک شما اولین یازدهمیاس.

لگاریتم علاوه‌بر ساده نمودن محاسبات، کاربردهای وسیعی در زندگی روزمره دارد. امروزه از لگاریتم در حسابداری و در تعیین بهرهٔ مرکب و نیز مسائل مالی استفاده می‌شود. از مهم‌ترین کاربردهای لگاریتم، کاربرد آن در علم زلزله‌شناسی است و به کمک آن می‌توان مقدار انرژی آزادشده توسط زلزله و نیز کانون زلزله را تعیین نمود. کاربرد لگاریتم در شیمی تجزیه برای محاسبهٔ pH محلول‌ها قابل چشم‌پوشی نیست. اصطلاح «دسی‌بل» که برای بیان شدت صوت به کار می‌رود و در بسیاری از مباحث فیزیک و موسیقی و نیز به هنگام استفاده از اعمال ضبط و افکت در استودیوهای موسیقی کاربرد دارد، از یک محاسبهٔ سادهٔ لگاریتمی به‌دست می‌آید. از معروف‌ترین کاربردهای لگاریتم، کاربرد آن در مسائل رشد، مثل مسائل رشد جمعیت انسان‌ها و جانداران و مسائل زوال مثل مسائل نیمه‌عمر عنصرها است. لگاریتم در علوم دیگر مانند اخترشناسی، دریانوردی و ... نیز کاربردهای فراوانی دارد. در ادامه به برخی از این کاربردها می‌پردازیم.

کاربرد لگاریتم در مسائل نیمه‌عمر

به مدت زمانی که طول می‌کشد تا مقدار معینی از یک عنصر به نصف مقدار اولیهٔ خود کاهش یابد، نیمه‌عمر آن عنصر گفته می‌شود. اگر نیمه‌عمر یک عنصر برابر n باشد و به مقدار $m_۰$ واحد جرم از این عنصر داشته باشیم، جرم باقی‌مانده از این عنصر بعد از گذشت زمان t از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{m(t)=m_۰\times\left(\frac{۱}{۲}\right)^{\frac{t}{n}}}$$

تست: نیمه‌عمر یک مادهٔ هسته‌ای ۲۰ سال است. اگر نمونه‌ای از آن دارای ۸۰ گرم باشد، تقریباً پس از چند سال ۸ گرم از آن باقی می‌ماند؟ $(\log ۲\simeq ۰/۳۰۱)$ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۱۰ ۲) ۳۰/۵ ۳) ۴۰/۸ ۴) ۶۶/۴

پاسخ:

$$m(t)=m_۰\times ۲^{-\frac{t}{n}}\Rightarrow m(t)=۸۰\times ۲^{-\frac{t}{۲۰}}\Rightarrow ۸=۸۰\times ۲^{-\frac{t}{۲۰}}\Rightarrow ۲^{-\frac{t}{۲۰}}=\frac{۱}{۱۰}=۱۰^{-۱}$$

$$\Rightarrow \log ۲^{-\frac{t}{۲۰}}=\log ۱۰^{-۱}\Rightarrow -\frac{t}{۲۰}\times\log ۲=-۱\Rightarrow t=\frac{۲۰}{\log ۲}\simeq\frac{۲۰}{۰/۳۰۱}\Rightarrow t\simeq ۶۶/۴$$

یعنی پس از حدود ۶۶/۴ سال، ۸ گرم از مادهٔ هسته‌ای باقی می‌ماند. بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

کاربرد لگاریتم در زلزله‌شناسی

افراد زیادی از کشورهای مختلف، مقیاس‌های متفاوتی برای اندازه‌گیری و مقایسهٔ قدرت زلزله تهیه کرده‌اند. یکی از این افراد «چارلز ریشتر» ـ زلزله‌شناس آمریکایی ـ در سال ۱۹۳۵، یک مقیاس لگاریتمی برای سنجش قدرت زلزله تهیه نمود که هنوز مورد استفاده قرار می‌گیرد و به دلیل اهمیت آن، به نام خود او معروف شده است.

نکته اگر بزرگی زمین‌لرزه برابر M در مقیاس ریشتر باشد، آن‌گاه انرژی آزادشده در مقیاس ارگ (Erg) که آن را با E نمایش می‌دهیم، از رابطهٔ مقابل به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{\log E=۱۱/۸+۱/۵M}$$

تست: در سال ۱۳۶۹، بزرگی زمین‌لرزه‌ای که در رودبار رخ داد، ۷/۲ در مقیاس ریشتر گزارش شد. مقدار انرژی آزادشده در این زمین‌لرزه در مقیاس ارگ چقدر بوده است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $۱۰^{۱۶}$ ۲) $۱۰^{۱۸/۲}$ ۳) $۱۰^{۲۲/۶}$ ۴) $۱۰^{۲۶/۲}$

پاسخ: مقدار انرژی آزادشده در این زلزله را به کمک رابطهٔ مذکور می‌یابیم:

$$\log E=۱۱/۸+۱/۵M\xrightarrow{M=۷/۲}\log E=۱۱/۸+(۱/۵\times ۷/۲)=۱۱/۸+۱۰/۸=۲۲/۶\Rightarrow E=۱۰^{۲۲/۶}\,\text{Erg}\Rightarrow$$ گزینهٔ (۳) صحیح است.

خلاصه فصل هشتم: قسمت سوم: «ویژگی‌های لگاریتم و حل معادله‌های لگاریتمی»

قوانین و ویژگی‌های لگاریتم

۱) $\log_a a = ۱$

۲) $\log_a ۱ = ۰$

۳) $\log_a AB = \log_a A + \log_a B$

۴) $\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$

۵) $\log_{a^m} A^n = \frac{n}{m}\log_a A$

۶) $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ (تغییر مبنا)

۷) $\log_b a \times \log_c b = \log_c a$

۸) $\log_b a = \frac{۱}{\log_a b}$

۹) $a^{\log_a A} = A$

۱۰) $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

نکته از ویژگی (۴) نتیجه می‌شود که: $\boxed{\log ۵ = ۱ - \log ۲}$ یا $\boxed{\log ۲ = ۱ - \log ۵}$

نکته اگر $a > ۰$، $a \neq ۱$ و x و y مثبت باشند، آن‌گاه داریم:

$\boxed{\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b}$ ، $\boxed{\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y}$

روش حل معادلات لگاریتمی

برای حل معادلات لگاریتمی، ابتدا در صورت لزوم، طرفین معادله را به کمک قوانین و ویژگی‌های لگاریتم، آن‌قدر ساده می‌کنیم تا به یکی از روابط $\log_a x = \log_a y$ یا $\log_a x = b$ برسیم. سپس به کمک نکتهٔ فوق، مقادیر مجهول را می‌یابیم. مقادیر به‌دست‌آمده وقتی قابل قبول هستند که در دامنهٔ معادله واقع باشند. به عبارت دیگر این مقادیر وقتی جواب معادله هستند که به ازای آن‌ها، هیچ‌یک از عبارت‌های جلوی لگاریتم‌ها و نیز مبناها منفی نباشند و مبناها نیز برابر ۱ نشوند.

کاربردهای لگاریتم

لگاریتم علاوه‌بر ساده نمودن محاسبات، کاربردهای وسیعی در زندگی روزمره دارد. در زیر به برخی از این کاربردها اشاره می‌شود:

۱) کاربرد لگاریتم در مسائل نیمه‌عمر

به مدت زمانی که طول می‌کشد تا مقدار معینی از یک عنصر به نصف مقدار اولیهٔ خود کاهش یابد، نیمه‌عمر آن عنصر گفته می‌شود.

اگر نیمه‌عمر یک عنصر برابر n باشد و به مقدار $m_۰$ واحد جرم از این عنصر داشته باشیم، جرم باقی‌مانده از این عنصر بعد از گذشت زمان t از رابطهٔ مقابل به‌دست می‌آید:

$$\boxed{m(t) = m_۰ \times \left(\frac{۱}{۲}\right)^{\frac{t}{n}}}$$

۲) کاربرد لگاریتم در زلزله‌شناسی

اگر بزرگی زمین لرزه برابر M در مقیاس ریشتر باشد، آن‌گاه انرژی آزادشده در مقیاس ارگ (Erg) که آن را با E نمایش می‌دهیم، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\boxed{\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M}$$