

خرید کتاب های کنکور

با تخفیف ویژه

و

ارسال رایگان

Medabook.com

+



مدابوک



یک جله تماس تلفنی رایگان

با مشاوران رتبه برتر

برای انتخاب بهترین منابع

دبیرستان و کنکور

۰۲۱ ۲۸۴۲۵۲۱۰



(فصل ۳)

## توابع نمایی و لگاریتمی

۲۲۹	درس ۱: تابع نمایی
۲۳۹	درس ۲: تابع لگاریتمی و لگاریتم
۲۴۶	درس ۳: ویژگی‌های لگاریتم و حل معادلات لگاریتمی
۲۵۵	آزمون فصل
۲۵۷	پاسخ‌نامه تشریحی

(فصل ۴)

## مثلثات

۲۸۲	درس ۱: رادیان
۲۸۹	درس ۲: نسبت‌های مثلثاتی برخی از زوایا
۳۰۳	درس ۳: توابع مثلثاتی
۳۱۲	درس ۴: روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا
۳۲۵	آزمون فصل
۳۲۷	پاسخ‌نامه تشریحی

(فصل ۵)

## حد و پیوستگی

۳۶۰	درس ۱: مفهوم حد و فرایندهای حدی
۳۶۵	درس ۲: حدهای یک‌طرفه (حد چپ و حد راست)
۳۷۳	درس ۳: قضایای حد
۳۸۱	درس ۴: محاسبه حد توابع کسری (حالت $\frac{0}{0}$ )
۳۹۰	درس ۵: پیوستگی
۴۰۲	آزمون فصل
۴۰۴	پاسخ‌نامه تشریحی

(فصل ۱)

## جبر و معادله

۷	درس ۱: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی
۱۷	درس ۲: معادلات درجه دوم
۳۸	درس ۳: معادلات گویا و گنگ
۴۸	درس ۴: قدرمطلق و ویژگی‌های آن
۶۱	درس ۵: آشنایی با هندسه تحلیلی
۷۶	آزمون فصل
۷۸	پاسخ‌نامه تشریحی

(فصل ۲)

## تابع

۱۳۸	درس ۱: آشنایی بیشتر با تابع
۱۴۵	درس ۲: انواع تابع
۱۶۱	درس ۳: وارون تابع
۱۷۳	درس ۴: اعمال روی توابع
۱۸۷	آزمون فصل
۱۸۹	پاسخ‌نامه تشریحی

# معادلات درجه دوم

خوبه!

## معادله درجه دوم و ریشه‌های آن

در کتاب ریاضی سال دهم روش‌های حل معادله درجه دوم به طور کامل بررسی شد. این روش‌ها را در این جا با هم مرور می‌کنیم.

**روش فاکتورگیری:** این معادلات به فرم  $ax^2 + bx = 0$  هستند که با فاکتورگیری در  $x$  می‌توانیم ریشه‌ها را بیابیم.

مثال:

$$2x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(2x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

**روش تجزیه:** فرض کنید معادله  $x^2 + ax + b = 0$  به راحتی قابل تجزیه باشد، در این حالت باید دو تا عدد پیدا کنیم که مجموع آن‌ها  $a$  و حاصل ضرب آن‌ها  $b$  است و این دو عدد را در عبارت تجزیه شده قرار دهیم.

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases}$$

مثال: حاصل ضرب مجموع

**روش کلی حل معادله درجه دوم:** فرمول کلی حل معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  به صورت  $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$  است که در آن  $\Delta = b^2 - 4ac$  است.

جبر و معادله

**مثال** معادلات درجه دوم زیر را حل کنید.

الف)  $3x^2 - 4x - 3 = 0$

ب)  $2x^2 + 4x + 3 = 0$

**پاسخ** الف) دلتای معادله برابر است با:

پس جواب‌های معادله برابر است با:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(3)(-3) = 16 + 36 = 52$$

$$3x^2 - 4x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{52}}{2(3)} = \frac{4 \pm 2\sqrt{13}}{6} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4 + 2\sqrt{13}}{6} = \frac{2 + \sqrt{13}}{3} \\ x_2 = \frac{4 - 2\sqrt{13}}{6} = \frac{2 - \sqrt{13}}{3} \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4(2)(3) = -8 < 0$$

ب) چون دلتای معادله منفی شده، در تساوی  $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ ، زیر رادیکال منفی می‌شود. رادیکال هر بی زور میزنه! نمی‌تونه فروبی بده! پس در این حالت معادله جواب حقیقی ندارد.

در حل معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  سه حالت زیر را داریم:

شرط	ویژگی	ریشه‌ها
$\Delta > 0$	معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد.	$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	معادله یک ریشه مضاعف دارد.	$x = \frac{-b}{2a}$
$\Delta < 0$	معادله ریشه حقیقی ندارد.	—

**تست** اگر  $x = -2$  یک جواب معادله  $4x^2 + kx - k = 7$  باشد، جواب دیگر معادله کدام است؟

۱/ ۷۵ (۴)

۲/ ۲۵ (۳)

۳/ ۷۵ (۲)

۴/ ۲۵ (۱)

**پاسخ** گزینه ۳:  $x = -2$  یک ریشه معادله است پس در آن صدق می‌کند:  $4(-2)^2 + k(-2) - k = 7 \Rightarrow 3k = 9 \Rightarrow k = 3$

$\Rightarrow$  معادله:  $4x^2 + 3x - 3 = 7 \Rightarrow 4x^2 + 3x - 10 = 0$



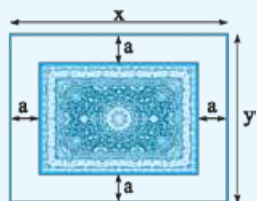
برای یافتن ریشه دیگر معادله از روش کلی حل معادله درجه دوم استفاده می‌کنیم:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(4)(-1)}}{2(4)} = \frac{-3 \pm \sqrt{169}}{8} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-3 + 13}{8} = \frac{10}{8} = 1/25 \\ x_2 = \frac{-3 - 13}{8} = -2 \end{cases}$$

گاهی وقت‌ها در حل یک مسئله به یک معادله درجه دوم می‌رسیم که باید با حل آن به جواب مسئله برسیم.

**تست** فاصله هر طرف قالی از کنار دیوار یک اتاق مستطیل شکل، ثابت و یکسان است. اگر مساحت اتاق ۲۴ محیط اتاق ۲۰ و محیط قالی ۱۲ باشد، فاصله هر طرف قالی از کنار دیوار اتاق چه قدر است؟

$$2(4) \quad 1/5(3) \quad 1(2) \quad 0/5(1)$$



با توجه به اندازه‌های روی شکل طول قالی  $(x - 2a)$  و عرض آن  $(y - 2a)$  است. مساحت اتاق برابر ۲۴ است، پس:

$$xy = 24 \quad (*)$$

محیط اتاق هم برابر ۲۰ است:

$$2(x + y) = 20 \Rightarrow x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x$$

با جای‌گذاری تساوی  $y = 10 - x$  در  $(*)$  طول و عرض اتاق را می‌یابیم:

$$x(10 - x) = 24 \Rightarrow 10x - x^2 = 24 \Rightarrow x^2 - 10x + 24 = 0 \Rightarrow (x - 6)(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 6, 4$$

چون طول اتاق از عرض آن بیشتر است، پس طول اتاق برابر ۶ و عرض آن برابر ۴ است. حالا با توجه به این که محیط قالی برابر ۱۲ است، فاصله هر طرف قالی از کنار دیوار اتاق یعنی  $a$  را می‌یابیم:

$$2((x - 2a) + (y - 2a)) = 12 \xrightarrow{x=6, y=4} 2(6 - 2a + 4 - 2a) = 12 \Rightarrow 10 - 4a = 6 \Rightarrow 4a = 4 \Rightarrow a = 1$$

### روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله درجه دوم

در حالتی که معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  دو ریشه دارد، ریشه‌ها عبارتند از:

پس روابط بین ریشه‌ها که سه حالت اساسی دارد، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

**(الف)** مجموع ریشه‌ها که با حرف  $S$  نمایش داده می‌شود، برابر است با:

$$\alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a} \Rightarrow S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

**(ب)** حاصل ضرب ریشه‌ها که با حرف  $P$  نمایش داده می‌شود، برابر است با:

$$\alpha \cdot \beta = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac} \alpha \cdot \beta = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

**(پ)** قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها که با حرف  $M$  نمایش داده می‌شود برابر است با:

$$M = |\alpha - \beta| = \left| \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \left| \frac{2\sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \right| \Rightarrow M = |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

**تست** در معادله  $(k+1)x^2 + kx = 2k - 1$ ، حاصل ضرب ریشه‌ها نصف حاصل جمع آن‌ها است.  $k$  کدام است؟

$$2/3(4) \quad 1/3(3) \quad -2/3(2) \quad -1/3(1)$$

$$\frac{(k+1)x^2}{a} + \frac{kx}{b} - \frac{2k-1}{c} = 0$$

**پاسخ** گزینه ۱: ابتدا معادله را مرتب می‌کنیم:

بنابراین:

$$\text{حاصل جمع ریشه‌ها} = -\frac{b}{a} = -\frac{k}{k+1} \quad \text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} = \frac{-2k+1}{k+1}$$

حاصل ضرب ریشه‌ها نصف حاصل جمع آن‌ها است بنابراین:

$$\frac{-2k+1}{k+1} = \frac{1}{2} \left(-\frac{k}{k+1}\right) \xrightarrow{k+1 \neq 0} -2k+1 = \frac{1}{2}(-k) \Rightarrow -4k+2 = -k \Rightarrow 3k = 2 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

در سایر مواردی که رابطه بین ریشه‌ها را می‌خواهند، باید رابطه را به ترکیبی از  $S, P$  یا  $M$  تبدیل کنیم. در این موارد به حالت‌های زیر توجه کنید:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{S}{P}$$

① در حالت‌های کسری معمولاً مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\alpha^r + \beta^r = (\alpha + \beta)^r - r\alpha\beta = S^r - rP$$

② در حالت‌هایی که  $\alpha$  و  $\beta$  توان‌های یکسان دارند، معمولاً از اتحادها استفاده می‌کنیم:

$$\alpha^r + \beta^r = (\alpha + \beta)^r - r\alpha\beta(\alpha + \beta) = S^r - rPS$$

$$\alpha^r - \beta^r = (\alpha - \beta)(\alpha^r + \beta^r + \alpha\beta) = \underbrace{(\alpha - \beta)}_M (S^r - rP + P) = M(S^r - P)$$

همچنین با فرض  $\alpha > \beta$  داریم:

$$\alpha^r - \beta^r = -M(S^r - P)$$

دقت کنید اگر  $\alpha < \beta$  باشد آن‌گاه:

③ در حالت‌هایی که  $\alpha$  و  $\beta$  رادیکال دارند، معمولاً از توان‌رسانی استفاده می‌کنیم تا رادیکال‌ها حذف شوند:

$$A = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \Rightarrow A^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = S + 2\sqrt{P} \Rightarrow A = \sqrt{S + 2\sqrt{P}}$$

**مثال** اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $2x^2 - 4x + 1 = 0$  باشند، حاصل مقادیر زیر را محاسبه کنید.

ت)  $|\alpha^2 - \beta^2|$

پ)  $|\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}|$

ب)  $\alpha^3 + \beta^3$

الف)  $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$

**پاسخ** در معادله  $2x^2 - 4x + 1 = 0$  داریم:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-4}{2} = 2$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$$

$$M = |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{16 - 4(2)}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{S^2 - 2P}{P} = \frac{2^2 - 2(\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}} = 6$$

الف)

$$\alpha^r + \beta^r = (\alpha + \beta)^r - r\alpha\beta(\alpha + \beta) = S^r - rPS = 2^3 - 3(\frac{1}{2})(2) = 5$$

ب)

پ) عبارت را برابر  $A$  قرار داده و طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$A = |\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}| \Rightarrow A^2 = \alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta} = S - 2\sqrt{P} = 2 - 2\sqrt{\frac{1}{2}} = 2 - 2\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$|\alpha^2 - \beta^2| = |\alpha - \beta| |\alpha + \beta| = M \times S = \sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$$

ت)

در حالتی که توان‌های  $\alpha$  و  $\beta$  یکسان نیست، باید با کمک معادله توان‌های آن‌ها را یکسان کنیم و سپس رابطه را به ترکیبی از  $S, P$  و  $M$  تبدیل کنیم:

**تست** اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $2x^2 - 6x + 3 = 0$  باشند، حاصل  $\alpha^2(2\beta - 1)$  کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۹ (۲)

۴ (۱)

**پاسخ گزینه ۳:** توان‌های  $\alpha$  و  $\beta$  یکسان نیست، بنابراین ابتدا باید توان‌ها را یکی کنیم. ریشه معادله است پس در معادله صدق می‌کند:

$$\text{معادله } 2\alpha^2 - 6\alpha + 3 = 0 \Rightarrow 2\alpha^2 = 6\alpha - 3 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{6\alpha - 3}{2}$$

$$\text{پس در عبارت } \alpha^2(2\beta - 1) \text{ داریم: } \alpha^2(2\beta - 1) = \frac{6\alpha - 3}{2}(2\beta - 1) = \frac{12\alpha\beta - 6\beta - 6\alpha + 3}{2} = \frac{12\alpha\beta - 6(\beta + \alpha) + 3}{2} = \frac{12P - 6S + 3}{2} \quad (*)$$

حالا مقادیر  $S$  و  $P$  را از معادله  $2x^2 - 6x + 3 = 0$  می‌یابیم:

$$2x^2 - 6x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = -\frac{b}{a} = -\frac{-6}{2} = 3 \\ P = \frac{c}{a} = \frac{3}{2} \end{cases} \xrightarrow{(*)} \text{عبارت} = \frac{12(\frac{3}{2}) - 6(3) + 3}{2} = \frac{3}{2}$$



می‌توانید به صورت زیر هم عمل کنید:

$$\beta: 2\beta^2 - 6\beta + 3 = 0 \Rightarrow 6\beta - 3 = 2\beta^2 \xrightarrow{\div 3} 2\beta - 1 = \frac{2\beta^2}{3} \quad (**)$$

حالا حاصل عبارت  $\alpha^2(2\beta - 1)$  را می‌یابیم:

$$\xrightarrow{(**)} \text{عبارت} = \alpha^2 \left( \frac{2\beta^2}{3} \right) = \frac{2\alpha^2 \beta^2}{3} = \frac{2P^2}{3} \stackrel{P=\frac{3}{2}}{=} \frac{2\left(\frac{3}{2}\right)^2}{3} = \frac{2\left(\frac{9}{4}\right)}{3} = \frac{3}{2}$$

حالا بعضی وقت‌ها هست که توان‌ها یکسانند ولی ضرایب نابرابرند. در این حالت مطابق تست زیر عمل کنید:

**تست** اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $x^2 + 2x - 2 = 0$  باشند که  $x_1 > x_2$ ، حاصل  $3x_1^2 + x_2^2$  کدام است؟

(۱)  $8 + 4\sqrt{3}$  (۲)  $8 - 4\sqrt{3}$  (۳)  $16 + 4\sqrt{3}$  (۴)  $16 - 4\sqrt{3}$

**پاسخ گزینه ۱:** وقتی ریشه‌ها توان یکسان دارند اما ضرایبشان با هم فرق دارد باید این طوری بریم جلو!

$$3x_1^2 + x_2^2 = \left(\frac{\text{جمع ضرایب}}{2}\right)(x_1^2 + x_2^2) + \left(\frac{\text{تفاضل ضرایب}}{2}\right)(x_1^2 - x_2^2) \Rightarrow 3x_1^2 + x_2^2 = \left(\frac{3+1}{2}\right)(x_1^2 + x_2^2) + \left(\frac{3-1}{2}\right)(x_1^2 - x_2^2)$$

$$\Rightarrow 3x_1^2 + x_2^2 = 2(x_1^2 + x_2^2) + (x_1^2 - x_2^2) = 2(x_1^2 + x_2^2) + (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$$

$$x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \quad \text{در نتیجه: } x_1 > x_2 \text{ است پس } x_1 - x_2 > 0$$

$$\text{عبارت} = 2(S^2 - 2P) + \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} S \quad \text{پس: } x_1^2 + x_2^2 \text{ که } S^2 - 2P \text{ و } x_1 + x_2 \text{ هم که } S \text{ است، پس:}$$

$a, P, \Delta$  باید از معادله محاسبه شود:

$$x^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = -2, P = -2 \\ a = 1, \Delta = 12 \end{cases} \Rightarrow \text{عبارت} = 2((-2)^2 - 2(-2)) + \frac{\sqrt{12}}{1}(-2) = 2(4+4) + 2\sqrt{3}(-2) = 16 - 4\sqrt{3}$$

در معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  درجه دوم

۱ اگر  $a + b + c = 0$ ، آن‌گاه یک جواب معادله ۱ و جواب دیگر  $\frac{c}{a}$  است.

۲ اگر  $a + c = b$ ، آن‌گاه یک جواب معادله -۱ و جواب دیگر  $-\frac{c}{a}$  است.

**تست** اگر  $\alpha = 1$  یک ریشه معادله  $3x^2 - ax - 5 = 0$  باشد، ریشه دیگر کدام است؟

(۱)  $-\frac{2}{3}$  (۲)  $\frac{2}{3}$  (۳)  $\frac{5}{3}$  (۴)  $-\frac{5}{3}$

**پاسخ گزینه ۱:** چون یک جواب معادله  $\alpha = 1$  است، جواب دیگر  $\frac{c}{a}$  است. پس:

**روش دوم:**  $\alpha = 1$  یک جواب معادله است. از طرفی:  $P = \alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow (1)\beta = \frac{-5}{3} \Rightarrow \beta = -\frac{5}{3}$  حاصل ضرب ریشه‌ها

**تست** اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $\sqrt{2}x^2 + (\sqrt{2}-1)x = 1$  باشند، حاصل  $\frac{x_1^2}{x_1^2+1} + \frac{x_2^2}{x_2^2+1}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{2}{3}$  (۲)  $\frac{5}{6}$  (۳)  $\frac{7}{6}$  (۴)  $\frac{4}{3}$

**پاسخ گزینه ۱:** اول معادله را مرتب می‌کنیم:

با توجه به معادله،  $a + c = b$  است، پس یک ریشه معادله برابر -۱ و ریشه دیگر برابر  $-\frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  است. در نتیجه:

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \frac{x_1^2}{x_1^2+1} + \frac{x_2^2}{x_2^2+1} = \frac{1}{1+1} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

بعضی وقت‌ها رابطه داده شده فقط بر حسب یکی از ریشه‌ها است. در این حالت باید با کمک جمع ریشه‌ها یا ضرب ریشه‌ها، رابطه داده شده را بر حسب دو ریشه بنویسیم و سپس آن را بر حسب  $S, P, M$  نوشته و حاصل را محاسبه کنیم.



**تست** اگر  $\alpha$  ریشه معادله  $2x^2 + x = 2$  باشد، حاصل  $\alpha^3 - \frac{1}{\alpha^3}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{15}{8}$  (۲)  $-\frac{15}{8}$  (۳)  $\frac{13}{8}$  (۴)  $-\frac{13}{8}$

**پاسخ گزینه ۱** رابطه خواسته شده فقط بر حسب یکی از ریشه‌هاست پس نمی‌توانیم آن را بر حسب  $S$  و  $P$  بنویسیم. در این حالت از جمع یا ضرب ریشه‌ها کمک می‌گیریم:

$$\text{معادله: } 2x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \beta = -\frac{1}{2} - \alpha \\ P = \alpha\beta = -1 \Rightarrow \beta = -\frac{1}{\alpha} \end{cases}$$

اگر ضرب دقت کنید متوجه میشوید که رابطه ضرب ریشه‌ها یک هم‌رایی با  $\alpha^3 - \frac{1}{\alpha^3}$  رابطه دارد نگاه کن!

$$\beta = -\frac{1}{\alpha} \xrightarrow{\text{طرفین به توان } 3} \beta^3 = -\frac{1}{\alpha^3} \Rightarrow \frac{1}{\alpha^3} = -\beta^3$$

حالا این رابطه را در  $\alpha^3 - \frac{1}{\alpha^3}$  جای گذاری می‌کنیم و حاصل را می‌یابیم:

$$\alpha^3 - \frac{1}{\alpha^3} = \alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3(-1)\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} - \frac{3}{2} = \frac{-1-12}{8} = -\frac{13}{8}$$

در برخی سؤالات هم دیده شده که مقدار رابطه بین ریشه‌ها را می‌دهند و در عوض از ما می‌خواهند یکی از ضرایب معادله درجه دوم را که مجهول است محاسبه کنیم. این مسائل در دو تیپ قابل بررسی هستند.

**تست** به ازای کدام مجموعه مقادیر  $m$  مجموع معکوس مربعات ریشه‌های  $x^2 + (3m+1)x + m+1 = 0$  برابر ۳ است؟

- (۱) ۱ (۲)  $-\frac{2}{3}$  (۳)  $\frac{2}{3}$  و ۱ (۴)  $\emptyset$

**پاسخ گزینه ۲** مجموع معکوس مربعات ریشه‌ها برابر ۳ است؛ یعنی:

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = 3 \Rightarrow \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2} = 3 \Rightarrow \frac{S^2 - 2P}{P^2} = 3 \quad (*)$$

$$S = -(3m+1), P = m+1$$

با توجه به معادله  $x^2 + (3m+1)x + m+1 = 0$  داریم:

$$\text{در نتیجه: } \frac{(-3m-1)^2 - 2(m+1)}{(m+1)^2} = 3 \Rightarrow \frac{9m^2 + 6m + 1 - 2m - 2}{m^2 + 2m + 1} = 3 \Rightarrow \frac{9m^2 + 4m - 1}{m^2 + 2m + 1} = 3 \Rightarrow 9m^2 + 4m - 1 = 3m^2 + 6m + 3$$

$$\Rightarrow 6m^2 - 2m - 4 = 0 \xrightarrow{\div 2} 3m^2 - m - 2 = 0 \xrightarrow{\text{جمع ضرایب}} \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{c}{a} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

اما به ازای  $m = -\frac{2}{3}$  معادله به صورت  $x^2 - x + \frac{1}{3} = 0$  تبدیل می‌شود و با توجه به این که دلتای این معادله منفی است، بنابراین معادله ریشه حقیقی نخواهد داشت. در نتیجه تنها  $m = 1$  قابل قبول است.

**تست** به ازای کدام مقدار  $m$  یکی از ریشه‌های معادله  $2x^2 - 5x + m = 0$  از دو برابر ریشه دیگر  $\gamma$  واحد بیشتر است؟

- (۱) -۴ (۲) -۶ (۳) -۸ (۴) -۱۲

**پاسخ گزینه ۳** یکی از ریشه‌ها  $(\alpha)$  از دو برابر دیگری  $(\beta)$ ،  $\gamma$  واحد بیشتر است، پس:

$$\alpha = 2\beta + \gamma \quad (*)$$

این رابطه بر حسب  $S$  و  $P$  قابل نوشتن نیست. در این جور مواقع به معادله رجوع می‌کنیم. با توجه به معادله، مقدار مجموع ریشه‌ها را داریم:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{5}{2} \xrightarrow{(*)} 2\beta + \gamma + \beta = \frac{5}{2} \Rightarrow 3\beta = -\frac{9}{2} \Rightarrow \beta = -\frac{3}{2} \xrightarrow{(*)} \alpha = 2\left(-\frac{3}{2}\right) + \gamma = 4$$

حالا با توجه به معادله برای محاسبه مقدار  $m$  از حاصل ضرب ریشه‌ها استفاده می‌کنیم:

$$P = \alpha\beta = \frac{m}{2} \Rightarrow (4)\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{m}{2} \Rightarrow m = -12$$



**تعیین علامت ریشه‌های معادله درجه دوم**

در حالتی که  $\Delta > 0$ ، معادله درجه دوم دو ریشه دارد. می‌توانیم بدون محاسبه ریشه‌ها در مورد علامت آن‌ها بحث کنیم:

$$\Delta > 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{دو ریشه مثبت: } \frac{-b}{a} > 0 \\ \text{دو ریشه منفی: } \frac{-b}{a} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{دو ریشه با علامت‌های یکسان دارد: } \frac{c}{a} > 0 \\ \text{دو ریشه با علامت‌های مخالف دارد: } \frac{c}{a} < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{ریشه منفی} > \text{ریشه مثبت: } \frac{-b}{a} > 0 \\ \text{ریشه منفی} < \text{ریشه مثبت: } \frac{-b}{a} < 0 \end{cases}$$

در حالتی که  $\Delta = 0$  است، معادله یک ریشه مضاعف به صورت  $x = -\frac{b}{2a}$  دارد.

**مثال** در مورد علامت جواب‌های معادله  $2x^2 + 4x - \sqrt{2} = 0$  نظر دهید.

**پاسخ** اول باید  $\Delta$  محاسبه شود:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 + 4(\sqrt{2})(2) > 0$$

پس معادله دو ریشه دارد. از طرفی:

$$\frac{c}{a} = \frac{-\sqrt{2}}{2} < 0$$

پس معادله دو ریشه با علامت‌های مخالف دارد. همچنین:

$$-\frac{b}{a} = -\frac{4}{2} < 0$$

در نتیجه ریشه مثبت از قدرمطلق ریشه منفی کوچک‌تر است.

وقتی  $\frac{c}{a} < 0$  (یا  $ac < 0$ ) به طور قطع  $\Delta > 0$  است.

**تعیین نوع ریشه‌های معادله درجه دوم**

برای تعیین نوع ریشه‌ها می‌توانید از جدول زیر کمک بگیرید:

نوع ریشه(ها)	شرایط $\Delta$ ، $\frac{c}{a}$ و $-\frac{b}{a}$
یک ریشه مضاعف مثبت	$\Delta = 0$ و $-\frac{b}{a} > 0$
یک ریشه مضاعف منفی	$\Delta = 0$ و $-\frac{b}{a} < 0$
دو ریشه قرینه هم $(\alpha$ و $-\alpha)$	$b = 0$ و $\Delta > 0$ (یا $ac < 0$ )
دو ریشه معکوس هم $(\frac{1}{\alpha}$ و $\alpha)$	$a = c$ و $\Delta > 0$ (چون ضرب ریشه‌ها یک است)

**تست** به ازای کدام مقدار  $m$  معادله  $2x^2 - x + m - 1 = 0$  دو ریشه حقیقی معکوس هم دارد؟

(۴) هیچ مقدار  $m$

(۳) -۲

(۲) -۱

(۱) ۳

$$a = c \Rightarrow m - 1 = 2 \Rightarrow m = 3$$

**پاسخ** گزینه ۱: طبق جدول باید دو شرط  $\Delta > 0$  و  $a = c$  برقرار باشد:

با قراردادن  $m = 3$  در معادله، معادله به صورت  $2x^2 - x + 2 = 0$  خواهد شد. چون دلتای معادله منفی است، پس  $m = 3$  قابل قبول نیست. در نتیجه هیچ مقداری برای  $m$  وجود ندارد.

**معادلات درجه سوم با یک عامل  $(x - a)$**

تا این‌جا در مورد حل معادلات درجه دوم مفصل حرف زدیم. حالا می‌خواهیم یک کوهپولو! در مورد حل معادلات درجه سوم هم بحث کنیم. قبل از شروع بحث اول به نکته زیر توجه کنید:

اگر  $x = a$  یک ریشه معادله  $f(x) = 0$  باشد، آن‌گاه  $f(x)$  یک عامل  $(x - a)$  دارد و  $f(x)$  بر  $(x - a)$  بخش پذیر است.



به عنوان مثال  $x = 1$  یک ریشه معادله  $x^3 - 3x + 2 = 0$  است. پس  $x^3 - 3x + 2$  یک عامل  $(x - 1)$  دارد. پس با تقسیم  $x^3 - 3x + 2$  بر  $x - 1$  آن را تجزیه می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x + 2 \quad | \quad x - 1 \\ -(x^3 - x^2) \\ \hline x^2 - 3x + 2 \\ -(x^2 - x) \\ \hline -2x + 2 \\ -(-2x + 2) \\ \hline 0 \end{array} \Rightarrow x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x^2 + x - 2)$$

حالا اگر قرار باشد سایر ریشه‌های معادله را هم بیابیم باید ریشه‌های معادله  $x^2 + x - 2 = 0$  را محاسبه کنیم:

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 1, x = -2$$

بنابراین معادله  $x^3 - 3x + 2 = 0$  دارای دو ریشه 1 و -2 است.

**تست** اگر  $x = 2$  یکی از جواب‌های معادله  $x^3 + ax + 2 = 0$  باشد، کوچک‌ترین ریشه معادله کدام است؟

(1)  $-2 - \sqrt{2}$       (2)  $\sqrt{2} - 1$       (3)  $-1 - \sqrt{2}$       (4)  $2 - \sqrt{2}$

**پاسخ** گزینه 3 چون 2 یکی از ریشه‌های معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$(2)^3 + a(2) + 2 = 0 \Rightarrow a = -5 \Rightarrow \text{معادله: } x^3 - 5x + 2 = 0$$

چون  $x = 2$  یک جواب معادله است، پس عبارت  $P(x) = x^3 - 5x + 2$  یک عامل  $x - 2$  دارد. پس با تقسیم  $P(x)$  بر  $x - 2$  خواهیم داشت:

$$\begin{array}{r} x^3 - 5x + 2 \quad | \quad x - 2 \\ -(x^3 - 2x^2) \\ \hline 2x^2 - 5x + 2 \\ -(2x^2 - 4x) \\ \hline -x + 2 \\ -(-x + 2) \\ \hline 0 \end{array} \Rightarrow x^3 - 5x + 2 = (x - 2)(x^2 + 2x - 1) \xrightarrow{P(x)=0} (x - 2)(x^2 + 2x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \\ x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} \end{cases}$$

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -1 + \sqrt{2} \\ x_3 = -1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

پس جواب‌های دیگر معادله برابرند با:

بنابراین  $x_3 = -1 - \sqrt{2}$  کوچک‌ترین ریشه معادله است.

در معادله درجه سوم  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

1 اگر  $a + b + c + d = 0$ ، آن‌گاه یک ریشه 1 است. پس عبارت درجه سوم یک عامل  $x - 1$  دارد.

2 اگر  $a + c = b + d$ ، آن‌گاه یک ریشه -1 است. پس عبارت درجه سوم یک عامل  $x + 1$  دارد.

3 معمولاً یکی از ریشه‌های معادله 1 یا -1 یا 2 یا -2 است، که با امتحان صدق کردن آن‌ها در معادله می‌توانید آن را بیابید.

4 اگر معادله سه ریشه حقیقی داشته باشد آن‌گاه مجموع ریشه‌ها برابر  $-\frac{b}{a}$  و حاصل ضرب ریشه‌ها برابر  $-\frac{d}{a}$  است.

**تست** معادله  $x^3 - 2x^2 - 5x - 2 = 0$  چند ریشه دارد؟

(1) صفر      (2) 2      (3) 3      (4) 4

$$x^3 - 2x^2 - 5x - 2 = 0 \xrightarrow{a+c=b+d} \text{یک ریشه معادله -1 است.}$$

برای محاسبه سایر ریشه‌ها عبارت  $x^3 - 2x^2 - 5x - 2$  را بر  $x + 1$  تقسیم می‌کنیم که پس از تقسیم داریم:

$$x^3 - 2x^2 - 5x - 2 = (x + 1)(x^2 - 3x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

بنابراین معادله سه ریشه حقیقی دارد.

**نوشتن معادله درجه دوم با داشتن مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها**

فرض کنید ریشه‌های یک معادله درجه دوم  $\alpha$  و  $\beta$  باشد، در این صورت معادله به صورت زیر خواهد بود.

$$\text{معادله: } (x - \alpha)(x - \beta) = 0 \Rightarrow x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha\beta = 0 \Rightarrow x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

از آن‌جا که  $\alpha + \beta = S$  و  $\alpha\beta = P$  پس این معادله به صورت مقابل قابل نوشتن است: معادله:  $x^2 - Sx + P = 0$



معادله درجه دومی که مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های آن به ترتیب برابر S و P است به صورت  $x^2 - Sx + P = 0$  می‌باشد.



**تست** اگر ریشه‌های معادله  $x^2 + ax + b = 0$  برابر  $\frac{3+\sqrt{7}}{2}$  و  $\frac{3-\sqrt{7}}{2}$  باشد،  $a + b$  کدام است؟

- (۱)  $-1/5$       (۲)  $1/5$       (۳)  $-2/5$       (۴)  $2/5$

**پاسخ گزینه ۳** طبق نکته بالا معادله‌ای که ریشه‌های آن  $\frac{3+\sqrt{7}}{2}$  و  $\frac{3-\sqrt{7}}{2}$  است برابر است با:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{3-\sqrt{7}}{2} \\ \beta = \frac{3+\sqrt{7}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{6}{2} = 3 \\ P = \alpha\beta = \frac{9-7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{معادله: } x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow a + b = -3 + \frac{1}{2} = -2/5$$

**تست** محیط مستطیلی ۲۲ متر و مساحت آن ۲۴ متر مربع است. طول مستطیل چه قدر از عرض آن بیشتر است؟

- (۱) ۲      (۲) ۳      (۳) ۴      (۴) ۵

**پاسخ گزینه ۳** اگر طول مستطیل را  $x_1$  و عرض آن را  $x_2$  در نظر بگیریم، آن‌گاه:

$$2(x_1 + x_2) = 22 \Rightarrow x_1 + x_2 = 11$$

$$x_1 x_2 = 24 \Rightarrow \text{مساحت مستطیل}$$

برای محاسبه  $x_1$  و  $x_2$  با توجه به تساوی‌های بالا می‌توانیم یک معادله درجه دوم با ریشه‌های  $x_1$  و  $x_2$  در نظر بگیریم. در این صورت:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 11 \\ P = x_1 x_2 = 24 \end{cases} \xrightarrow{x^2 - Sx + P = 0} \text{معادله: } x^2 - 11x + 24 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-8) = 0 \Rightarrow x = 3, 8$$

پس طول مستطیل برابر ۸ و عرض آن برابر ۳ است پس طول مستطیل ۵ واحد بیشتر از عرض آن است.

## تشکیل معادله درجه دوم جدید

گاهی وقتا به معادله میدن بعد میگن به معادله‌ای بنویسید که با ریشه‌های معادله اولیه رابطه خاصی داشته باشه. برای این کار با یک مثال صفر تا صدشو بررسی می‌کنیم.

فرض کنید  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 6x + 3 = 0$  باشند و بخواهیم معادله‌ای بنویسیم که ریشه‌های آن به صورت  $\frac{2}{\alpha}$  و  $\frac{2}{\beta}$  باشند.

یک روش این است که مجموع ( $S'$ ) و حاصل ضرب ( $P'$ ) ریشه‌های معادله جدید را بیابیم و سپس با توجه به رابطه  $x^2 - Sx + P = 0$  معادله را بنویسیم:

$$S' = \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} = \frac{2\beta + 2\alpha}{\alpha\beta} = \frac{2(\beta + \alpha)}{\alpha\beta} \quad (*)$$

$$P' = \left(\frac{2}{\alpha}\right)\left(\frac{2}{\beta}\right) = \frac{4}{\alpha\beta}$$

$\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 6x + 3 = 0$  هستند، پس:

$$x^2 - 6x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 6 \\ \alpha\beta = 3 \end{cases} \xrightarrow{(*)} \begin{cases} S' = \frac{2(6)}{3} = 4 \\ P' = \frac{4}{3} \end{cases}$$

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله جدید را داریم. پس معادله جدید برابر است با:

$$x^2 - 4x + \frac{4}{3} = 0 \xrightarrow{(\times 3)} 3x^2 - 12x + 4 = 0$$

یک روش هم این است که ریشه معادله اولیه را  $x$  و ریشه معادله جدید را  $X$  در نظر بگیریم. با توجه به رابطه بین ریشه‌ها داریم:

$$X = \frac{2}{x} \Rightarrow x = \frac{2}{X}$$

با جای گذاری این تساوی در معادله داده شده یعنی  $x^2 - 6x + 3 = 0$ ، معادله جدید را پیدا می‌کنیم:

$$\left(\frac{2}{X}\right)^2 - 6\left(\frac{2}{X}\right) + 3 = 0 \Rightarrow \frac{4}{X^2} - \frac{12}{X} + 3 = 0 \xrightarrow{(\times X^2)} 4 - 12X + 3X^2 = 0 \Rightarrow 3X^2 - 12X + 4 = 0$$
 معادله جدید:

**تست** اگر ریشه‌های معادله  $x^2 + ax + b = 0$ ، از مکعب ریشه‌های معادله  $x^2 - 5x + 2 = 0$  یک واحد بیشتر باشد،  $a + b$  کدام است؟

- (۱) ۵      (۲) ۶      (۳) ۷      (۴) ۸



$$S = \alpha + \beta = \Delta, P = \alpha\beta = \Upsilon$$

پاسخ گزینه ۳: ریشه‌های معادله  $x^2 - \Delta x + \Upsilon = 0$  را  $\alpha$  و  $\beta$  در نظر می‌گیریم، پس:

چون ریشه‌های معادله جدید از مکعب ریشه‌های معادله  $x^2 - \Delta x + \Upsilon = 0$  یک واحد بیشتر است، پس این ریشه‌ها را به صورت  $\alpha^r + 1$  و  $\beta^r + 1$  در نظر می‌گیریم. مجموع و حاصل ضرب این ریشه‌ها برابر است با:

$$\begin{cases} S' = (\alpha^r + 1) + (\beta^r + 1) = \alpha^r + \beta^r + 2 = S^r - 2PS + 2 = \Delta^r - 2(\Upsilon)(\Delta) + 2 = 97 \\ P' = (\alpha^r + 1)(\beta^r + 1) = \underbrace{\alpha^r \beta^r}_{\Upsilon^r} + \underbrace{\alpha^r + \beta^r}_{S^r} + 1 = P^r + S^r - 2PS + 1 = \Upsilon^r + \Delta^r - 2(\Upsilon)(\Delta) + 1 = 104 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{معادله: } x^2 - \frac{97}{a}x + \frac{104}{b} = 0 \Rightarrow a + b = 7$$

### حل معادله با تغییر متغیر

معادلاتی هم هستند که با کمک تغییر متغیر مناسب، به یک معادله درجه دوم تبدیل می‌شوند. برای حل این نوع معادلات، اول از یک تغییر متغیر مناسب استفاده می‌کنیم و معادله درجه دوم حاصل را حل می‌کنیم، بعد متغیر اولیه را برمی‌گردانیم و جواب‌های معادله اصلی را پیدا می‌کنیم.

تست معادله  $(x^2 - 1) - (x^2 - 1) - 12 = 0$  چند جواب حقیقی دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱) صفر

پاسخ گزینه ۳: با تغییر متغیر  $x^2 - 1 = t$  معادله را به یک معادله درجه دوم تبدیل می‌کنیم:

$$\text{معادله: } t^2 - t - 12 = 0 \Rightarrow (t - 4)(t + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 4 \xrightarrow{x^2 - 1 = t} x^2 - 1 = 4 \\ t = -3 \xrightarrow{x^2 - 1 = t} x^2 - 1 = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5} \\ x^2 - 1 = -3 \Rightarrow x^2 = -2 \text{ (جواب ندارد.)} \end{cases}$$

مثال تعداد و علامت جواب‌های معادله  $x^4 - 6x^2 - 2 = 0$  را (بدون یافتن جواب‌ها) بیابید.

$$\text{معادله جدید: } t^2 - 6t - 2 = 0$$

پاسخ از تغییر متغیر  $x^2 = t$  استفاده می‌کنیم:

در معادله جدید،  $\Delta > 0$  و  $\frac{c}{a} < 0$  است، پس معادله دو ریشه با علامت‌های مخالف دارد. یعنی برای مثال دو ریشه  $t_1 > 0$  و  $t_2 < 0$ .

$$\begin{cases} x^2 = t_1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{t_1} \\ x^2 = t_2 \text{ (} t_2 \text{ منفی است و } x^2 \text{ هیچ‌وقت منفی نمی‌شود) جواب ندارد.} \end{cases}$$

در نتیجه:

پس معادله دو جواب قرینه هم دارد.

تست به ازای کدام مقادیر  $m$  معادله  $mx^4 - (2m - 1)x^2 + m + 1 = 0$  چهار ریشه حقیقی دارد؟

$(-\infty, -1)$  (۴)

$(1, +\infty)$  (۳)

$(-\infty, -\frac{1}{4})$  (۲)

$(-\frac{1}{4}, 0)$  (۱)

$$\text{معادله: } mt^2 - (2m - 1)t + m + 1 = 0 \quad (*)$$

پاسخ گزینه ۳: با فرض  $x^2 = t$  داریم:

برای این‌که معادله اصلی چهار ریشه حقیقی داشته باشد، باید معادله (\*) دو ریشه مثبت داشته باشد. (فرض کنید ریشه‌ها  $t_1, t_2 > 0$  باشند در این صورت ریشه‌های معادله اصلی  $x = \pm\sqrt{t_1}$  و  $x = \pm\sqrt{t_2}$  هستند.) برای این‌که معادله (\*) دو ریشه مثبت داشته باشد باید:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow (-(2m - 1))^2 - 4(m)(m + 1) > 0 \Rightarrow 4m^2 - 4m + 1 - 4m^2 - 4m > 0 \Rightarrow 4m < 1 \Rightarrow m < \frac{1}{4} \quad (1) \\ \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{m + 1}{m} > 0 \Rightarrow m > 0 \text{ یا } m < -1 \quad (2) \\ -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow -\frac{-(2m - 1)}{m} > 0 \Rightarrow \frac{2m - 1}{m} > 0 \Rightarrow m < 0 \text{ یا } m > \frac{1}{2} \quad (3) \end{cases}$$

$m$  حدود  $= (-\infty, -1)$

از اشتراک سه جواب (۱)، (۲) و (۳) داریم:

## روش هندسی حل معادلات

اگر  $y = f(x)$  و  $y = g(x)$  دو تابع باشند، طول نقاط تلاقی نمودار این دو منحنی، جواب‌های معادله  $f(x) = g(x)$  خواهند بود و برعکس. یعنی هر جواب این معادله، طول یکی از نقاط تلاقی این دو نمودار است. بنابراین به طور کلی برای حل یک معادله به روش هندسی، باید معادله را به دو تابع در طرفین تساوی طوری تبدیل کنیم که رسم نمودار هر تابع ممکن باشد. سپس دو نمودار را در یک دستگاه رسم می‌کنیم و نقاط تلاقی (جواب‌های معادله) را می‌یابیم.

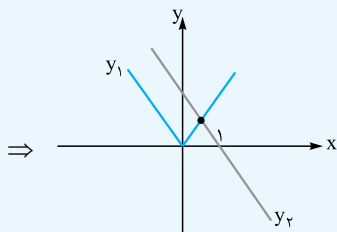
**تست** معادله  $x + |x| = 1$  چند جواب حقیقی دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

**پاسخ گزینه ۱** از روش رسم استفاده می‌کنیم. فقط چون رسم نمودار تابع  $y = x + |x|$  (تابع سمت چپ تساوی) در حال حاضر آسان نیست، معادله را به صورت مقابل می‌نویسیم:

$$x + |x| = 1 \Rightarrow \begin{cases} x \\ y_1 \end{cases} = \begin{cases} 1-x \\ y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = 1-x \\ y_1 = |x| \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c|c} x & 1 \\ \hline y & 1 \end{array}$$



هر یک از نمودارهای  $y_1$  و  $y_2$  را رسم می‌کنیم:

دو نمودار یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند پس معادله یک جواب دارد.

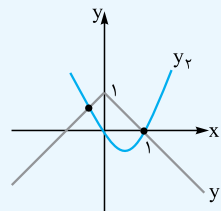
**تست** معادله  $x - |x| = x^2 - x$  چند جواب حقیقی دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

$$\begin{cases} 1-|x| \\ y_1 \end{cases} = \begin{cases} x^2-x \\ y_2 \end{cases}$$

برای رسم  $y_1$ ، نمودار  $y = |x|$  را نسبت به محور  $x$ ها قرینه و سپس یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم. برای رسم  $y_2$  هم، از مقداری استفاده می‌کنیم:

$$y_2 = x^2 - x \Rightarrow \begin{array}{c|c} x & -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2} \\ \hline y & -\frac{1}{4} \end{array}$$



دو نمودار، یکدیگر را در دو نقطه قطع کرده‌اند، پس معادله دو جواب دارد.

## پرسش‌های چهارگزینه‌ای

رابطه بین ریشه‌ها

۷۷- به ازای کدام مجموعه مقادیر  $m$ ، معادله درجه دوم  $(2m-1)x^2 + 6x + m - 2 = 0$ ، دارای دو ریشه حقیقی است؟

- (۱)  $-2 < m < 2/5$  (۲)  $-2 < m < 3/5$  (۳)  $-1 < m < 3/5$  (۴)  $-1 < m < 2/5$

۷۸- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 4x - 2 = 0$  باشند، حاصل  $\alpha + \beta + \alpha\beta$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۴ (۳) ۴ (۴) صفر

۷۹- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  جواب‌های معادله  $3x^2 - 2x = 6$  باشند، حاصل  $\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{1}{2}$  (۲)  $-\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{1}{3}$

۸۰- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 6x + 3 = 0$  باشند، آن‌گاه حاصل  $|\alpha - \beta|$  چند برابر  $\sqrt{6}$  است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۱ (۴) ۳

۸۱- معادله درجه دوم  $3x^2 + (2m-1)x + 2 - m = 0$  دارای دو ریشه حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار  $m$  کدام است؟

(تهرانی ۹۹)

- (۱)  $\frac{7}{2}$  (۲) ۳ (۳) -۱ (۴)  $-\frac{5}{2}$





۸۲- مجموع مربعات ریشه‌های معادله  $2x^2 + 3x - 6 = 0$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{33}{4}$  (۲)  $\frac{33}{2}$  (۳)  $\frac{11}{4}$  (۴)  $\frac{11}{2}$

۸۳- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $2x^2 - 5x - 3 = 0$  باشند، حاصل  $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{13}{2}$  (۲)  $-\frac{11}{2}$  (۳)  $-\frac{37}{6}$  (۴)  $-\frac{35}{6}$

۸۴- مجموع مکعبات ریشه‌های معادله  $x^2 - 3x - 2 = 0$  کدام است؟

- (۱) ۴۲ (۲) ۴۵ (۳) ۴۷ (۴) ۴۹

۸۵- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $4x^2 - 12x + 1 = 0$  باشند، مقدار  $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$  چه قدر است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۸۶- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - \sqrt{2}x + \sqrt{2} = x$  باشند، حاصل  $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{2}{3}$  (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴)  $\frac{3}{4}$

۸۷- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 5x + 3 = 0$  باشند، آن‌گاه ریشه سوم  $\alpha^3 + \beta^3$  کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۸۸- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 6x + 2 = 0$  باشند، حاصل  $(\alpha + \frac{1}{\alpha})^2 + (\beta + \frac{1}{\beta})^2$  کدام است؟

- (۱) ۳۸ (۲) ۴۲ (۳) ۴۴ (۴) ۳۶

۸۹- در معادله درجه دوم  $x^2 - 2x - 4 = 0$ ، اگر ریشه‌ها  $\alpha$  و  $\beta$  باشند، حاصل  $(\alpha^2 - 4)^2 + 4\beta^2$  چه قدر است؟

- (۱) ۴۸ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴) ۲۴

۹۰- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $2x^2 - 4x + 1 = 0$  باشند، حاصل  $\frac{(\alpha + \frac{1}{\alpha})^2}{\beta^2 - 2\beta}$  کدام است؟

- (۱) ۳۲ (۲) -۳۲ (۳) ۱۶ (۴) -۱۶

۹۱- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 + 2x - 4 = 0$  باشند، حاصل  $\frac{\alpha}{(\alpha + 2)^2} + \frac{\beta}{(\beta + 2)^2}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $-\frac{1}{2}$  (۳) ۲ (۴) -۲

۹۲- در معادله درجه دوم  $x^2 - (\frac{1}{a^2} + a^2)x + \frac{1}{a^2} = 0$ ، حاصل  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$  کدام است؟ ( $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله هستند).

- (۱)  $a^4 + \frac{1}{a^4}$  (۲)  $a^2 + \frac{1}{a^2}$  (۳)  $a^4 + \frac{1}{a^4}$  (۴)  $a^6 + \frac{1}{a^6}$

۹۳- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 6x + 2 = 0$  باشند ( $\alpha < \beta$ ) حاصل  $\frac{\alpha^2 - 4}{\alpha^2}$  کدام است؟

- (۱)  $-24\sqrt{2}$  (۲)  $24\sqrt{2}$  (۳)  $-12\sqrt{7}$  (۴)  $12\sqrt{7}$

۹۴- در معادله  $x^2 - 8x + m = 0$  یک ریشه از نصف ریشه دیگر  $\Delta$  واحد بیشتر است.  $m$  کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵

۹۵- در معادله  $3x^2 - 17x + m = 0$  یک ریشه از سه برابر ریشه دیگر، سه واحد بیشتر است.  $m$  کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

۹۶- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 3mx + 4 = 0$  باشند، به ازای کدام مقدار  $m$  رابطه  $\alpha\beta^2 + 4 = 0$  برقرار است؟

- (۱)  $-\frac{5}{3}$  (۲)  $-\frac{4}{3}$  (۳)  $-\frac{1}{3}$  (۴)  $-\frac{2}{3}$

۹۷- اگر یکی از ریشه‌های معادله  $ax^2 - 2ax + k = 0$  از مجذور ریشه دیگر ۴ واحد کم‌تر باشد، بزرگ‌ترین ریشه معادله کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۹۸- به ازای کدام مقدار  $m$  بین ریشه‌های معادله  $x(x - m) = m^2 + 1$  رابطه  $\| \alpha \| - \| \beta \| = 4$  برقرار است؟

- (۱) ۳ (۲) -۴ (۳) ۸ (۴) -۶

(ریاضی خارج ۱۵)

(ریاضی خارج ۹۱)

(ریاضی ۸۷)



۹۹- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 + mx - 3 = 0$  باشند، به ازای کدام مقدار  $m$  رابطه  $\alpha + \beta = 4$  بین ریشه‌ها برقرار است؟

- (۱)  $3 \pm \sqrt{10}$  (۲)  $\frac{6 \pm \sqrt{10}}{2}$  (۳)  $-3 \pm \sqrt{10}$  (۴)  $\frac{-6 \pm \sqrt{10}}{2}$

(تهرنی قارج ۹۰)

۱۰۰- به ازای کدام مقدار  $m$  ریشه‌های حقیقی معادله  $mx^2 + 3x + m^2 = 2$  معکوس یکدیگرند؟

- (۱)  $-2$  (۲)  $-1$  (۳)  $1$  (۴)  $2$

۱۰۱- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  دو ریشهٔ قرینهٔ هم معادله  $(m-3)x^2 + (m^2-1)x - m = 0$  باشند، حاصل  $2\alpha^2 + \beta^2$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{5}{2}$  (۲)  $\frac{5}{4}$  (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴)  $\frac{3}{4}$

۱۰۲- به ازای کدام مقدار  $m$ ، یکی از ریشه‌های معادله  $x^2 - 6x + 5 + m = 0$ ، مجذور دیگری است؟

- (۱)  $32$  (۲)  $2$  (۳)  $-32$  (۴)  $-3$

(کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۱۰۳- اگر ریشه‌های معادله  $x^2 - 290x + m^2 = 0$  مجذور دو عدد طبیعی فرد متوالی باشد،  $\sqrt{m+1}$  کدام است؟

- (۱)  $10$  (۲)  $11$  (۳)  $12$  (۴)  $13$

(ریاضی ۸۴)

۱۰۴- به ازای کدام مقدار  $m$ ، عدد  $\frac{1}{8}$  واسطهٔ حسابی بین دو ریشهٔ معادله  $(m^2 - 4)x^2 - 3x + m = 0$  است؟

- (۱)  $3$  (۲)  $-3$  (۳)  $4$  (۴)  $-4$

(ریاضی قارج ۸۴)

۱۰۵- به ازای کدام مقدار  $m$ ، عدد  $\sqrt{2}$  واسطهٔ هندسی بین ریشه‌های حقیقی معادله  $mx^2 - 5x + m^2 - 3 = 0$  است؟

- (۱)  $1$  (۲)  $-1$  (۳)  $3$  (۴)  $-3$

(تهرنی ۹۳)

۱۰۶- به ازای کدام مقدار  $m$ ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله  $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$ ، برابر ۶ می‌باشد؟

- (۱)  $-\frac{9}{5}$  (۲)  $1$  (۳)  $-\frac{9}{5}$  و  $1$  (۴)  $-\frac{9}{5}$  و  $-1$

۱۰۷- به ازای چه حدودی از  $m$ ، ریشهٔ مثبت معادله  $x^2 + m(x+2) = 2$  از قدرمطلق ریشهٔ منفی کوچک‌تر است؟

- (۱)  $(-1, 0)$  (۲)  $\mathbb{R}$  (۳)  $\emptyset$  (۴)  $(0, 1)$

۱۰۸- مجموع دو عدد،  $\frac{5}{6}$  و حاصل ضرب آن‌ها  $\frac{1}{6}$  است. عدد بزرگ‌تر کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{1}{6}$  (۴)  $\frac{1}{4}$

(برگرفته از کتاب درسی)

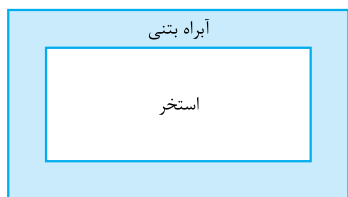
۱۰۹- محیط یک مستطیل ۲۰ و مساحت آن ۲۴ است. طول مستطیل چه قدر از عرض آن بیشتر است؟

- (۱)  $1$  (۲)  $2$  (۳)  $3$  (۴)  $4$

۱۱۰- یک استخر مستطیل شکل به ابعاد ۳ و ۱۰ متر دارای یک آبراه بتونی در اطرافش است. اگر این آبراه بتونی در همه‌جا دارای پهنای یکسان و مساحت ۳۰ متر مربع باشد، پهنای آبراه بتونی چه قدر است؟

- (۱)  $1$  (۲)  $2$  (۳)  $3$  (۴)  $4$

(برگرفته از کتاب درسی)



معادلات درجه سوم با يك عامل (x-a)

۱۱۱- در معادله  $(x+2)(x^2 - x + m) = 0$  حاصل ضرب سه ریشه ۶ است.  $m$  کدام است؟

- (۱)  $1$  (۲)  $-2$  (۳)  $-3$  (۴)  $4$

(ریاضی قارج ۸۷)

۱۱۲- اگر یکی از ریشه‌های معادله  $(ax^2 - x - 5) = 2$  برابر ۲ باشد، مجموع دو ریشهٔ دیگر آن کدام است؟

- (۱)  $-2$  (۲)  $-\frac{3}{2}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{3}{2}$

۱۱۳- اگر مجموع مجذور ریشه‌های حقیقی معادله  $(x^2 + (x^2 - x)(x+1 - m)) = 0$  برابر ۴ باشد،  $m$  کدام است؟

- (۱)  $-2$  (۲)  $1$  (۳)  $3$  (۴)  $6$

(ریاضی ۸۳)

۱۱۴- مجموع معکوس مربع سه ریشهٔ معادله  $(x+2)(x^2 + ax + 2) = 0$  برابر  $-\frac{a}{4}$  است.  $a$  کدام است؟

- (۱)  $2$  (۲)  $-3$  (۳)  $4$  (۴)  $-6$

۱۱۵- ریشه‌های حقیقی معادله  $x^3 - 2x + 1 = 0$  چگونه است؟

- (۱) ریشهٔ مضاعف مثبت - یک ریشهٔ منفی  
(۲) ریشهٔ مضاعف منفی - یک ریشهٔ مثبت  
(۳) یک ریشهٔ مثبت - دو ریشهٔ منفی  
(۴) دو ریشهٔ مثبت - یک ریشهٔ منفی



۱۱۶- اگر  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$  ریشه‌های معادله  $x^3 - 5x + 4 = 0$  باشند، حاصل  $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{25}{9}$  (۲)  $\frac{16}{9}$  (۳)  $\frac{25}{16}$  (۴)  $\frac{9}{16}$

(تهرنی قارج ۹۴)

۱۱۷- به ازای کدام مقادیر  $a$ ، معادله  $x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x = 4$  دارای سه ریشه حقیقی متمایز مثبت است؟

- (۱)  $a < -4$  (۲)  $a > -4$  (۳)  $a < 4$  (۴)  $a > 4$

### تشکیل معادله درجه دوم جدید

۱۱۸- ریشه‌های معادله درجه دوم  $x^2 + ax + b = 0$ ، یک واحد از ریشه‌های معادله  $3x^2 + 7x + 1 = 0$  بیشتر است.  $b$  کدام است؟

- (۱)  $-2$  (۲)  $-1$  (۳)  $\frac{2}{3}$  (۴)  $\frac{4}{3}$

(تهرنی ۸۷)

۱۱۹- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $2x^2 - 3x - 4 = 0$  باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله، به صورت  $\{1 + \frac{1}{\alpha}, 1 + \frac{1}{\beta}\}$  است؟

- (۱)  $4x^2 - 5x + 1 = 0$  (۲)  $4x^2 - 3x + 1 = 0$  (۳)  $4x^2 - 5x - 1 = 0$  (۴)  $4x^2 - 3x - 1 = 0$

(ریاضی ۹۲)

۱۲۰- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $2x^2 - 3x + 1 = 0$  باشند، به ازای کدام مقدار  $k$  مجموعه جواب‌های معادله  $8x^2 + kx - 1 = 0$  به صورت  $\{\alpha^2\beta, \alpha\beta^2\}$  است؟

- (۱)  $5$  (۲)  $6$  (۳)  $7$  (۴)  $9$

(ریاضی قارج ۹۰)

۱۲۱- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x(\Delta x + 3) = 2$  باشند، به ازای کدام مقدار  $k$  مجموعه جواب معادله  $4x^2 - kx + 2\Delta = 0$  به صورت  $\{\frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2}\}$  است؟

- (۱)  $27$  (۲)  $28$  (۳)  $29$  (۴)  $31$

(ریاضی ۹۰)

۱۲۲- اگر ریشه‌های معادله  $2x^2 + ax + b = 0$  جذر ریشه‌های معادله  $4x^2 - 73x + 144 = 0$  باشد،  $a + b$  کدام است؟

- (۱)  $23$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $1$  (۴)  $\frac{23}{2}$

(کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۱۲۳- اگر ریشه‌های معادله  $4x^2 - 12x + m = 0$  از  $k$  برابر مکعب ریشه‌های معادله  $x^2 - 2x - 1 = 0$ ،  $x^2 - 2x - 1 = 0$ ،  $2$  واحد کم‌تر باشد،  $m$  کدام است؟

- (۱)  $-41$  (۲)  $-39$  (۳)  $-44$  (۴)  $-43$

### حل معادله با تغییر متغیر

۱۲۴- مجموع ریشه‌های معادله  $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$  کدام است؟

- (۱)  $9$  (۲)  $7$  (۳)  $3$  (۴)  $1$

۱۲۵- معادله  $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$  چند جواب دارد؟

- (۱)  $1$  (۲)  $2$  (۳)  $3$  (۴)  $4$

(تهرنی ۹۰)

۱۲۶- مجموع ریشه‌های حقیقی معادله  $(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$  کدام است؟

- (۱)  $-4$  (۲)  $-2$  (۳)  $4$  (۴)  $2$

(ریاضی ۹۷)

۱۲۷- معادله  $(x^2 - 2x)^2 - (x^2 - 2x) = 2$  چند ریشه حقیقی متمایز دارد؟

- (۱)  $1$  (۲)  $2$  (۳)  $3$  (۴)  $4$

۱۲۸- جواب‌های معادله  $(x^2 - 1)^2 = x^2 + 5$  چگونه‌اند؟

- (۱) دو جواب مثبت و دو جواب منفی  
(۲) یک جواب مثبت و یک جواب منفی  
(۳) دو جواب مثبت  
(۴) معادله جواب ندارد.

۱۲۹- معادله  $(x^4 - x^2)^2 - 5(x^4 - x^2) - 6 = 0$  چند ریشه حقیقی دارد؟

- (۱)  $4$  (۲)  $8$  (۳)  $1$  (۴)  $2$

۱۳۰- کوچک‌ترین ریشه معادله  $(x-1)^4 + 2x = x^2 + 3$  کدام است؟

- (۱)  $-1$  (۲)  $1$  (۳)  $1 - \sqrt{2}$  (۴)  $\sqrt{2} - 1$

(تهرنی ۸۵)

۱۳۱- اگر معادله  $x^4 - (m+2)x^2 + m + 5 = 0$  دارای ۴ ریشه حقیقی متمایز باشد، مجموعه مقادیر  $m$  به کدام صورت است؟

- (۱)  $m < -4$  (۲)  $m > 4$  (۳)  $-4 < m < 4$  (۴)  $4 < m < 9$

(کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۱۳۲- به ازای کدام مجموعه مقادیر  $m$ ، معادله  $\frac{1}{4}x^4 + mx^2 + m^2 - 1 = 0$  فقط دارای دو جواب حقیقی متمایز است؟

- (۱)  $(-1, 1)$  (۲)  $\mathbb{R} - [-1, 1]$  (۳)  $(0, +\infty)$  (۴)  $\mathbb{R}$

۱۳۳- یکی از ریشه‌های معادله  $x^4 - mx^2 - m^2 = 1$  چهار واحد از ریشه دیگر بیشتر است. ریشه بزرگ‌تر معادله کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{2}$  (۲)  $2\sqrt{2}$  (۳)  $4$  (۴)  $2$

۸۰- گزینه: در درس نامه گفتیم:  $|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

$$x^2 - 6x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 36 - 12 = 24, a = 1$$

$$\Rightarrow |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{24}}{1} = 2\sqrt{6}$$

۸۱- گزینه:  $\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$  مجموع مربعات ریشه‌ها  
S و P را از معادله پیدا می‌کنیم:

$$2x^2 + 3x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{2} \\ P = \frac{c}{a} = \frac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 2(-3) = \frac{9}{4} + 6 = \frac{9+24}{4} = \frac{33}{4}$$

۸۲- گزینه:

$$\Rightarrow -\frac{b}{a} = \frac{1}{\frac{c}{a}} \Rightarrow -\frac{b}{a} = \frac{a}{c} \Rightarrow a^2 = -bc \Rightarrow a^2 + bc = 0$$

با توجه به معادله داریم:

$$3^2 + (2m-1)(2-m) = 0 \Rightarrow 9 + 4m - 2m^2 + m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow -2m^2 + 5m + 7 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} m = -1 \\ m = -\frac{c}{a} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

اما به ازای  $m = -1$  معادله به صورت  $3x^2 + x + 1 = 0$  خواهد بود که دلتای آن منفی است و ریشه حقیقی ندارد. پس  $m = \frac{7}{2}$  قابل قبول است.

۸۳- گزینه:  $2x^2 - 5x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{5}{2} \\ P = \alpha\beta = -\frac{3}{2} \end{cases}$

برای محاسبه حاصل عبارت داده شده مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta\alpha} = \frac{S^2 - 2P}{P} = \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{3}{2}\right)}{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{\frac{25}{4} + 3}{-\frac{3}{2}} = \frac{\frac{37}{4}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{37}{6}$$

۸۴- گزینه:

مجموع مکعبات ریشه‌ها  $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$   
از معادله، S و P را محاسبه می‌کنیم:

$$x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-3}{1} = 3 \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-2}{1} = -2 \end{cases}$$

پس:  $\xrightarrow{(*)} \text{مجموع مکعبات ریشه‌ها} = (3)^3 - 3(-2)(3) = 27 + 18 = 45$

۸۵- گزینه: چون رادیکالی است، به توان دو می‌رسانیم:

$$A = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \Rightarrow A^2 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

۷۷- گزینه: برای این که معادله دو ریشه حقیقی داشته باشد، باید  $\Delta > 0$  باشد:

$$\Rightarrow 36 - 4(2m-1)(m-2) > 0$$

$$\xrightarrow{+(-4)} (2m-1)(m-2) - 9 < 0$$

$$\Rightarrow 2m^2 - 4m - m + 2 - 9 < 0 \Rightarrow 2m^2 - 5m - 7 < 0$$

در معادله  $2m^2 - 5m - 7 = 0$ ،  $a+c=b$  است. در نتیجه یکی از ریشه‌ها -1 و ریشه دیگر  $\frac{7}{2}$  است. در نتیجه:

$$2m^2 - 5m - 7 < 0 \Rightarrow -1 < m < \frac{7}{2}$$

باید توجه داشت که به ازای  $m = \frac{1}{2}$  با یک معادله درجه اول روبه‌رو هستیم که تنها یک ریشه دارد. پس قابل قبول نیست، اما با توجه به گزینه‌ها به طور قطع، گزینه مورد نظر طراح است.

۷۸- گزینه:

$$x^2 - 4x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-4}{1} = 4 \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-2}{1} = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta + \alpha\beta = 4 + (-2) = 2$$

۷۹- گزینه:  $3x^2 - 2x = 6 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 6 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{جمع ریشه‌ها: } \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-2}{3} = \frac{2}{3} \\ \text{ضرب ریشه‌ها: } \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-6}{3} = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{\frac{2}{3}}{-2} = -\frac{1}{3}$$





در دو کسر اول مخرج مشترک می‌گیریم:

$$A^r = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} + \frac{r}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{S}{P} + \frac{r}{\sqrt{P}} \quad (*)$$

S و P را از معادله داده شده حساب می‌کنیم:

$$4x^r - 12x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = -\frac{b}{a} = -\frac{-12}{4} = 3 \\ P = \frac{c}{a} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

همینا رو تو رابطه (\*) قرار میدیم:

$$A^r = \frac{3}{\frac{1}{4}} + \frac{r}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = 12 + \frac{r}{\frac{1}{2}} = 16 \Rightarrow A = 4$$

۸۶- گزینه ۳ باید معادله را مرتب کنیم:

$$x^r - \sqrt{2}x + \sqrt{2} - x = 0 \Rightarrow x^r - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} = 0$$

مجموع ضرایب معادله صفر است، پس یک ریشه، ۱ و ریشه دیگر  $\frac{c}{a}$  است:

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\alpha^r} + \frac{1}{\beta^r} = \frac{1}{(1)^r} + \frac{1}{(\sqrt{2})^r} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

۸۷- گزینه ۳

$$x^r - \Delta x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \Delta \\ P = \alpha\beta = 3 \end{cases}$$

برای محاسبه  $\alpha^r + \beta^r$  از اتحاد فرعی اتحاد اول استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \alpha^r + \beta^r &= (\alpha^r + \beta^r)^r - 2\alpha^r\beta^r = (S^r - 2P)^r - 2P^r \\ &= (\Delta^r - 2(3)^r) - 2(3)^r = 19^r - 18 = 361 - 18 = 343 \\ \Rightarrow \alpha^r + \beta^r &= \sqrt[3]{343} = \sqrt[3]{7^3} = 7 \end{aligned}$$

۸۸- گزینه ۳

$$x^r - 6x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = 6 \\ P = \alpha\beta = 2 \end{cases} \quad (*)$$

حالا حاصل عبارت داده شده را می‌یابیم:

$$\begin{aligned} (\alpha + \frac{1}{\alpha})^r + (\beta + \frac{1}{\beta})^r &= \alpha^r + \frac{1}{\alpha^r} + 2 + \beta^r + \frac{1}{\beta^r} + 2 \\ &= (\alpha^r + \beta^r) + (\frac{1}{\alpha^r} + \frac{1}{\beta^r}) + 4 = (\alpha^r + \beta^r) + (\frac{\alpha^r + \beta^r}{\alpha^r\beta^r}) + 4 \\ &= (S^r - 2P) + \frac{S^r - 2P}{P^r} + 4 \\ &\stackrel{(*)}{=} (36 - 4) + \frac{36 - 4}{4} + 4 = 32 + 8 + 4 = 44 \end{aligned}$$

۸۹- گزینه ۳ ریشه معادله است، پس آن را در معادله قرار می‌دهیم:

$$\alpha^r - 2\alpha - 4 = 0 \Rightarrow \alpha^r - 4 = 2\alpha \quad (*)$$

آهان! خوب شد. پس عبارتمون این شکلی می‌شه:

$$\begin{aligned} (\alpha^r - 4)^r + 4\beta^r &\stackrel{(*)}{=} (2\alpha)^r + 4\beta^r = 4\alpha^r + 4\beta^r \\ &= 4(\alpha^r + \beta^r) = 4(S^r - 2P) \end{aligned}$$

S و P هم که از معادله داده شده حساب می‌شود:

$$x^r - 2x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = -\frac{-2}{1} = 2 \\ P = \frac{-4}{1} = -4 \end{cases}$$

$$(\alpha^r - 4)^r + 4\beta^r = 4(S^r - 2P) = 4(2^r - 2(-4))$$

$$= 4(4 + 8) = 48$$

۹۰- گزینه ۳ ریشه‌های معادله هستند، پس در معادله صدق می‌کنند:

$$2\alpha^r - 4\alpha + 1 = 0 \xrightarrow{+\alpha} 2\alpha - 4 + \frac{1}{\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow 2\alpha + \frac{1}{\alpha} = 4 \Rightarrow (2\alpha + \frac{1}{\alpha})^r = (4)^r = 16$$

$$2\beta^r - 4\beta + 1 = 0 \Rightarrow 2\beta^r - 4\beta = -1$$

$$\Rightarrow 2(\beta^r - 2\beta) = -1 \Rightarrow \beta^r - 2\beta = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{(2\alpha + \frac{1}{\alpha})^r}{\beta^r - 2\beta} = \frac{16}{-\frac{1}{2}} = -32$$

بنابراین:

۹۱- گزینه ۳ ریشه‌های معادله  $x^r + 2x - 4 = 0$  هستند، پس در معادله صدق می‌کنند:

$$\alpha^r + 2\alpha - 4 = 0 \Rightarrow \alpha(\alpha + 2) = 4$$

$$\Rightarrow \alpha + 2 = \frac{4}{\alpha}$$

$$\beta^r + 2\beta - 4 = 0 \Rightarrow \beta(\beta + 2) = 4$$

$$\Rightarrow \beta + 2 = \frac{4}{\beta} \Rightarrow \frac{\alpha}{(\alpha + 2)^r} + \frac{\beta}{(\beta + 2)^r} = \frac{\alpha}{(\frac{4}{\alpha})^r} + \frac{\beta}{(\frac{4}{\beta})^r}$$

$$= \frac{\alpha}{\frac{16}{\alpha^r}} + \frac{\beta}{\frac{16}{\beta^r}} = \frac{\alpha^r + \beta^r}{16} = \frac{S^r - 2PS}{16}$$

با توجه به معادله  $x^r + 2x - 4 = 0$ ،  $S = -2$  و  $P = -4$  است، در نتیجه:

$$\text{حاصل عبارت} = \frac{(-2)^r - 2(-4)(-2)}{16} = \frac{-8 - 24}{16} = -2$$

۹۲- گزینه ۳ فیلی سوال بیفرد وی در عین حال ابتکاری و قشنگه! بین چی کار می‌کنم:

$$x^r - (\frac{1}{a^r} + a^r)x + \frac{1}{a^r} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{جمع ریشه‌ها: } x_1 + x_2 = \frac{1}{a^r} + a^r \\ \text{ضرب ریشه‌ها: } x_1 x_2 = \frac{1}{a^r} \end{cases}$$

اگر  $x_1 = \frac{1}{a^r}$  و  $x_2 = a^r$  در نظر گرفته شود، تساوی‌های بالا برقرار می‌شوند. حالا حاصل عبارت خواسته شده را می‌یابیم:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{\frac{1}{a^r}}{a^r} + \frac{a^r}{\frac{1}{a^r}} = \frac{1}{a^{2r}} + a^{2r}$$

۹۳- گزینه ۳ رابطه داده شده فقط برحسب  $\alpha$  است. از جمع یا ضرب ریشه‌ها کمک می‌گیریم تا رابطه را برحسب  $\alpha$  و  $\beta$  بنویسیم.

$$P = 2 \Rightarrow \alpha\beta = 2 \Rightarrow \beta = \frac{2}{\alpha} \Rightarrow \beta^r = \frac{2^r}{\alpha^r} \quad (*)$$



$$\Rightarrow \beta^2 + \beta - 6 = 0 \Rightarrow (\beta - 2)(\beta + 3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = 2 \xrightarrow{(*)} \alpha = 0 \\ \beta = -3 \xrightarrow{(*)} \alpha = 5 \end{cases}$$

۹۸- گزینه اول معادله را مرتب می‌کنیم:

$$x(x - m) = m^2 + 1 \Rightarrow x^2 - mx - m^2 - 1 = 0$$

با توجه به معادله حاصل ضرب ریشه‌ها برابر  $1 - m^2 = \frac{c}{a}$  است و با توجه به این که  $1 - m^2 < 0$  پس  $\frac{c}{a} < 0$  است. در نتیجه یکی از ریشه‌ها مثبت و ریشه دیگر منفی است. فرض کنیم  $\alpha > 0$  و  $\beta < 0$  است، بنابراین:

$$|\alpha| - |\beta| = 4 \Rightarrow |\alpha - (-\beta)| = 4 \Rightarrow |\alpha + \beta| = 4$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به معادله}} |m| = 4 \Rightarrow m = \pm 4$$

با توجه به گزینه‌ها  $m = -4$  قابل قبول است.

$$99- گزینه \begin{cases} S = \alpha + \beta = -m \\ P = \alpha\beta = -3 \end{cases}$$

رابطه بین ریشه‌ها به صورت  $2\alpha + \beta = 4$  است، پس:

$$\alpha + \underbrace{\alpha + \beta}_S = 4 \Rightarrow \alpha - m = 4 \Rightarrow \alpha = m + 4$$

$\alpha$  ریشه معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$x^2 + mx - 3 = 0 \xrightarrow{\alpha = m + 4} (m + 4)^2 + m(m + 4) - 3 = 0$$

$$\Rightarrow m^2 + 8m + 16 + m^2 + 4m - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 2m^2 + 12m + 13 = 0 \Rightarrow m = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 4(2)(13)}}{2(2)}$$

$$= \frac{-12 \pm \sqrt{40}}{4} = \frac{-12 \pm 2\sqrt{10}}{4} = \frac{-6 \pm \sqrt{10}}{2}$$

دقت کنید که چون  $\frac{c}{a} < 0$  است، پس معادله حتماً دو ریشه حقیقی دارد.

۱۰۰- گزینه برای این که ریشه‌های معادله معکوس هم باشند، باید  $a = c$  و  $\Delta > 0$  باشد؛ پس اول  $a$  را برابر  $c$  قرار می‌دهیم.  $m$ ها را پیدا می‌کنیم. بعد بررسی می‌کنیم به ازای کدام مقدار  $m > 0$  است. فقط قبلاً باید معادله را مرتب کنیم:

$$mx^2 + 3x + m^2 = 2 \Rightarrow mx^2 + 3x + m^2 - 2 = 0 \quad (*)$$

$$a = c \Rightarrow m = m^2 - 2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$$

در معادله (\*) قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} -x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow m = -1 \text{ قابل قبول است.} \\ 2x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \text{ (غیر قابل قبول)} \end{cases}$$

۱۰۱- گزینه برای این که معادله دو ریشه قرینه داشته باشد باید  $b$  (ضریب  $x$ ) برابر صفر باشد (شرط  $\Delta > 0$  یا داشتن دو ریشه بررسی شود):

$$m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = \pm 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 1: -2x^2 - 1 = 0 \text{ ریشه ندارد.} \\ m = -1: -4x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \\ \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

از طرفی در عبارت داده شده داریم:

$$\frac{\alpha^2 - 4}{\alpha^2} = \alpha^2 - \frac{4}{\alpha^2} \stackrel{(*)}{=} \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) \quad (**)$$

همچنین با توجه به این که  $\alpha < \beta$  است پس  $\alpha - \beta < 0$  و در نتیجه:

$$\alpha - \beta = -\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$\xrightarrow{(**)} \alpha^2 - \beta^2 = \left(-\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\right)(S)$$

پس:

حالا با توجه به معادله  $x^2 - 6x + 2 = 0$  حاصل را می‌یابیم:

$$\alpha^2 - \beta^2 = \left(-\frac{\sqrt{36 - 4}}{|1|}\right)(6) = (-2\sqrt{5})6 = -12\sqrt{5}$$

۹۴- گزینه ریشه‌ها را  $\alpha$  و  $\beta$  در نظر می‌گیریم. یک ریشه ( $\alpha$ ) از نصف ریشه دیگر ( $\beta$ ),  $\Delta$  واحد بیشتر است:

$$\alpha = \frac{\beta}{2} + \Delta \quad (*)$$

با توجه به معادله، جمع ریشه‌ها را داریم:

$$x^2 - 8x + m = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = 8$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{\beta}{2} + \Delta + \beta = 8 \Rightarrow \frac{3\beta}{2} = 3 \Rightarrow \beta = 2$$

$\beta = 2$  ریشه معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$\Rightarrow 2^2 - 8(2) + m = 0 \Rightarrow m = 12$$

۹۵- گزینه ریشه‌ها را  $\alpha$  و  $\beta$  در نظر می‌گیریم:

یک ریشه ( $\alpha$ ) از سه برابر ریشه دیگر ( $\beta$ ) سه واحد بیشتر است:

$$\alpha = 3\beta + 3 \quad (*)$$

$$3x^2 - 17x + m = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{17}{3}$$

جمع ریشه‌ها را داریم:

$$\xrightarrow{(*)} 3\beta + 3 + \beta = \frac{17}{3} \Rightarrow 4\beta = \frac{17}{3} - 3 = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{2}{3} \xrightarrow{(*)} \alpha = 3\beta + 3 = 3\left(\frac{2}{3}\right) + 3 = 5$$

$\alpha = 5$  ریشه معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$3(5)^2 - 17(5) + m = 0 \Rightarrow m = 10$$

می‌توانستید همان  $\beta = \frac{2}{3}$  را در معادله قرار دهید، اما چون کسری بود کمی

محاسباتش سخت می‌شد.

۹۶- گزینه با توجه به معادله داریم:

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow \alpha\beta = 4$$

با توجه به رابطه  $\alpha\beta^2 + 4 = 0$  داریم:

$$(\alpha\beta)(\beta) + 4 = 0 \xrightarrow{\alpha\beta=4} 4\beta + 4 = 0 \Rightarrow \beta = -1$$

$\beta = -1$  ریشه معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$(-1)^2 - 3m(-1) + 4 = 0 \Rightarrow 1 + 3m + 4 = 0 \Rightarrow m = -\frac{5}{3}$$

۹۷- گزینه یکی از ریشه‌ها ( $\alpha$ ) از مجذور ریشه دیگر ( $\beta$ ) ۴ واحد

$$\alpha = \beta^2 - 4 \quad (*)$$

کم‌تر است؛ یعنی:

از طرفی با توجه به معادله:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-2a}{a} \Rightarrow \alpha + \beta = 2 \xrightarrow{(*)} \beta^2 - 4 + \beta = 2$$



پس  $m = -1$  قابل قبوله  $\Delta > 0$

اگر  $k$  واسطه هندسی  $a$  و  $b$  باشد، آن گاه  $k^2 = ab$

۱۰۶- گزینه

$\alpha^2 + \beta^2 = 6$ : مجموع مربعات ریشه‌ها برابر ۶ است.

$$\Rightarrow S^2 - 2P = 6 \quad (*)$$

مقادیر  $S$  و  $P$  را از معادله داده شده محاسبه می‌کنیم:

$$mx^2 - (m+3)x + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \frac{m+3}{m} \\ P = \frac{5}{m} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*)} \left(\frac{m+3}{m}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{m}\right) = 6 \Rightarrow \frac{(m+3)^2}{m^2} - \frac{10}{m} = 6$$

$$\xrightarrow{\times m^2} (m+3)^2 - 10m = 6m^2$$

$$\Rightarrow m^2 + 6m + 9 - 10m = 6m^2$$

$$\Rightarrow m^2 - 4m + 9 = 6m^2 \Rightarrow 5m^2 + 4m - 9 = 0$$

جمع ضرایب صفر است، پس:  $m = 1, m = -\frac{9}{5}$

حالا باید بررسی کنیم به ازای کدام مقدار  $m$  معادله دو ریشه حقیقی دارد یعنی دلتای آن مثبت است. از مقدار راحت‌تر! شروع می‌کنیم:

$$m = 1: x^2 - 4x + 5 = 0 \text{ در معادله}$$

$m = 1$  قابل قبول نیست.  $\Rightarrow$  معادله ریشه ندارد.  $\Delta < 0$

پس با توجه به گزینه‌ها  $m = -\frac{9}{5}$  قابل قبول است.

۱۰۷- گزینه: چون معادله یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی دارد پس

حاصل ضرب ریشه‌ها منفی است یعنی  $\frac{c}{a} < 0$ ؛ وقتی هم  $\frac{c}{a}$  منفی باشد قطعاً  $\Delta > 0$  است. از طرفی، ریشه مثبت از قدرمطلق ریشه منفی کوچک‌تر است

(یعنی مثلاً ریشه مثبت، ۲ و ریشه منفی، -۳ است که  $|-3| > 2$  شده) پس

جمع ریشه‌ها منفی است، یعنی  $-\frac{b}{a} < 0$ . اگر همین دوتا شرط را چک کنیم **فواسته مسئله اهرابی می‌شه!** فقط اول معادله را مرتب کنیم:

$$x^2 + m(x+2) = 2 \Rightarrow x^2 + mx + 2m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{2m-2}{1} < 0 \Rightarrow 2m < 2 \Rightarrow m < 1 \\ -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow -\frac{m}{1} < 0 \Rightarrow m > 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} 0 < m < 1$$

۱۰۸- گزینه: روش اول دو عدد را  $X$  و  $Y$  در نظر می‌گیریم:

$$X + Y = \frac{5}{6} \Rightarrow Y = \frac{5}{6} - X \quad (*)$$

$$XY = \frac{1}{6} \text{ حاصل ضرب دو عدد } \frac{1}{6} \text{ است.}$$

$$\xrightarrow{(*)} X\left(\frac{5}{6} - X\right) = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{6}X - X^2 = \frac{1}{6} \xrightarrow{\times(-6)} 6X^2 - 5X = -1$$

$$2\alpha^2 + \beta^2 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

بنابراین:

۱۰۲- گزینه: یکی از ریشه‌ها  $(\alpha)$ ، مجذور دیگری  $(\beta)$  است.

$$\alpha = \beta^2 \quad (*)$$

با توجه به معادله، مقدار  $\alpha + \beta$  را داریم:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \Rightarrow \alpha + \beta = 6 \xrightarrow{(*)} \beta^2 + \beta = 6$$

$$\Rightarrow \beta^2 + \beta - 6 = 0 \Rightarrow (\beta+3)(\beta-2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = -3 \xrightarrow{\text{در معادله صدق می‌کند}} (-3)^2 - 6(-3) + 5 + m = 0 \\ \Rightarrow 9 + 18 + 5 + m = 0 \Rightarrow m = -32 \\ \beta = 2 \xrightarrow{\text{در معادله صدق می‌کند}} 2^2 - 6(2) + 5 + m = 0 \\ \Rightarrow 4 - 12 + 5 + m = 0 \Rightarrow m = 3 \end{cases}$$

با توجه به گزینه‌ها،  $m = -32$  است.

۱۰۳- گزینه: اگر  $k$  را عددی زوج و طبیعی فرض کنیم، ریشه‌های

معادله را به صورت  $(k-1)^2$  و  $(k+1)^2$  می‌توان در نظر گرفت. با توجه به معادله، مجموع ریشه‌های معادله برابر ۲۹۰ است. پس:

$$(k+1)^2 + (k-1)^2 = 290 \Rightarrow 2(k^2+1) = 290$$

$$\Rightarrow k^2 + 1 = 145 \Rightarrow k^2 = 144 \Rightarrow k = \pm 12$$

$$\xrightarrow{\text{طبیعی } k} k = 12 \Rightarrow \text{ریشه‌ها} = 11^2 \text{ و } 13^2$$

$$\Rightarrow m^2 = (11 \times 13)^2$$

$$\Rightarrow m = 11 \times 13 = 143 \Rightarrow \sqrt{m+1} = \sqrt{144} = 12$$

۱۰۴- گزینه: ریشه‌های معادله را  $\alpha$  و  $\beta$  در نظر می‌گیریم:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{1}{\alpha\beta}$$

با توجه به معادله:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-3}{m^2-4} \Rightarrow \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{3}{m^2-4}$$

$$\Rightarrow m^2 - 4 = 12 \Rightarrow m^2 = 16 \Rightarrow m = \pm 4$$

باید بررسی کنیم به ازای کدام مقدار  $m$  مثبت است (در معادله

$$m^2 - 3x + m = 0 \text{ قرار می‌دهیم.})$$

$$\text{در معادله } m = 4: 12x^2 - 3x + 4 = 0$$

$\Delta < 0 \Rightarrow$  معادله ریشه ندارد

پس  $m = -4$  است.

اگر  $k$  واسطه حسابی دو عدد  $a$  و  $b$  باشد، آن گاه  $k = \frac{a+b}{2}$  است.

۱۰۵- گزینه: طبق معمول ریشه‌ها را  $\alpha$  و  $\beta$  در نظر می‌گیریم:

$$\alpha\beta = 2 \Rightarrow (\sqrt{2})^2 = \alpha\beta \Rightarrow \alpha\beta = 2$$

با توجه به معادله،  $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{m^2-3}{m}$ . در نتیجه:

$$\frac{m^2-3}{m} = 2 \Rightarrow m^2 - 3 = 2m \Rightarrow m^2 - 2m - 3 = 0$$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases}$$

طبق معمول باید چک کنیم به ازای کدام مقدار  $m$ ،  $\Delta > 0$  است:

$$\text{در معادله } m = -1: -x^2 - 5x - 2 = 0$$

۱۱۲- گزینه ۲: یکی از ریشه‌های معادله ۲ است، پس در معادله صدق می‌کند:  
 $\Rightarrow 2(a(2)^2 - 2 - 5) = 2 \Rightarrow 4a - 7 = 1 \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2$   
 $\Rightarrow 2x^2 - x^2 - 5x - 2 = 2 \Rightarrow 2x^2 - x^2 - 5x - 2 = 0$   
 چون  $x = 2$  ریشه است، پس عبارت  $2x^2 - x^2 - 5x - 2$  یک عامل  $x - 2$  دارد. در نتیجه با تقسیم عبارت بر  $x - 2$  عامل‌های دیگر را می‌یابیم:

$$\begin{array}{r} 2x^2 - x^2 - 5x - 2 \quad | \quad x - 2 \\ -(2x^2 - 4x^2) \quad \quad \quad 2x^2 + 3x + 1 \\ \hline 3x^2 - 5x \\ -(3x^2 - 6x) \\ \hline x - 2 \\ -(x - 2) \\ \hline 0 \end{array}$$

$\Rightarrow 2x^2 - x^2 - 5x - 2 = (x - 2)(2x^2 + 3x + 1)$

ریشه‌های دیگر از حل معادله  $2x^2 + 3x + 1 = 0$  به دست می‌آیند.

پس مجموع دو ریشه دیگر برابر  $-\frac{3}{2}$  است.

۱۱۳- در معادله درجه سوم  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  اگر معادله سه ریشه داشته باشد، آن‌گاه:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ (x_1)(x_2)(x_3) = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

پس در معادله  $2x^2 - x^2 - 5x - 2 = 0$  مجموع سه ریشه برابر است با:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$$

یک ریشه ۲ است.  $\xrightarrow{x_1=2} 2 + x_2 + x_3 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_2 + x_3 = -\frac{3}{2}$

پس مجموع دو ریشه دیگر  $-\frac{3}{2}$  است.

۱۱۴- گزینه ۲: در معادله از یک  $x$  فاکتور می‌گیریم تا به فرم ساده‌تری تبدیل شود:

$$x^2 + (x^2 - x)(x + 1 - m) = 0$$

$$\Rightarrow x(x^2 + (x - 1)(x + 1 - m)) = 0$$

$$\Rightarrow x(x^2 + (x^2 - 1 - mx + m)) = 0$$

$$\Rightarrow x(2x^2 - mx + m - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 - mx + m - 1 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

فرض کنیم ریشه‌های معادله  $2x^2 - mx + m - 1 = 0$  و  $\alpha$  و  $\beta$  باشد. با توجه به این‌که مجذور ریشه‌ها برابر ۴ است، پس:

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 4 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 4 \Rightarrow S^2 - 2P = 4 \quad (**)$$

با توجه به معادله  $2x^2 - mx + m - 1 = 0$  و  $S = \frac{m}{2}$  و  $P = \frac{m-1}{2}$  است، بنابراین:

$$\xrightarrow{(**)} \frac{m^2}{4} - 2\left(\frac{m-1}{2}\right) = 4 \Rightarrow \frac{m^2}{4} - m + 1 = 4$$

$$\xrightarrow{\times 4} m^2 - 4m + 4 = 16 \Rightarrow m^2 - 4m - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (m - 6)(m + 2) = 0$$

$$\Rightarrow 6x^2 - 5x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4(6)(1)}}{2(6)} = \frac{5 \pm 1}{12}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5+1}{12} = \frac{1}{3} \xrightarrow{(*)} y = \frac{1}{3} \\ x = \frac{5-1}{12} = \frac{1}{3} \xrightarrow{(*)} y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

پس عدد بزرگ‌تر  $\frac{1}{3}$  است.

۱۰۸- روش دوم: مجموع جواب‌ها  $\frac{5}{6}$  و حاصل ضرب آن‌ها  $\frac{1}{6}$  است، پس معادله به صورت زیر است:

$$\text{معادله: } x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = 0 \xrightarrow{\times 6} 6x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{12} \Rightarrow x = \frac{1}{3} \text{ یا } \frac{1}{2}$$

۱۰۹- گزینه ۲: طول مستطیل را با  $\alpha$  و عرض آن را با  $\beta$  نشان می‌دهیم.

پس:  $2(\alpha + \beta) = 20 \Rightarrow \alpha + \beta = 10 = S$

$\alpha\beta = 24 = P = \text{مساحت}$

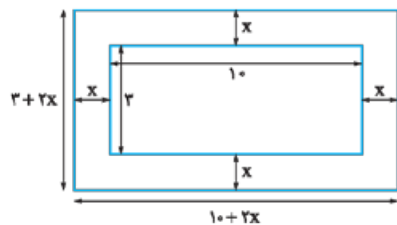
پس معادله را تشکیل می‌دهیم:

$$\text{معادله: } x^2 - 10x + 24 = 0 \Rightarrow (x - 6)(x - 4) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 6, x_2 = 4$$

چون طول مستطیل بزرگ‌تر از عرض آن است، بنابراین  $\alpha = 6$  و در نتیجه با توجه به تساوی  $\alpha + \beta = 10$ ،  $\beta = 4$  است. پس طول مستطیل ۲ واحد از عرض آن بیشتر است.

۱۱۰- گزینه ۲: اگر پهنای آبراه را  $x$  در نظر بگیریم، اندازه‌های روی شکل به صورت مقابل می‌شود:



مساحت آبراه برابر تفاضل مساحت مستطیل کوچک‌تر از مستطیل بزرگ‌تر است:

$$= 4x^2 + 26x + 30 - 30 = 4x^2 + 26x$$

مساحت آبراه ۳۰ است، پس داریم:

$$4x^2 + 26x = 30 \Rightarrow 4x^2 + 26x - 30 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{جمع ضرایب}} \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{30}{4} \end{cases} \times$$

پس پهنای آبراه برابر ۱ متر است.

۱۱۱- گزینه ۲:  $(x + 2)(x^2 - x + m) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ x^2 - x + m = 0 \end{cases}$$

(ریشه‌ها را  $\alpha$  و  $\beta$  در نظر می‌گیریم.)

حاصل ضرب سه ریشه برابر ۶ است:

$$(-2)(\alpha)(\beta) = 6 \Rightarrow \alpha\beta = -3 \quad (*)$$

$\alpha\beta$  حاصل ضرب ریشه‌های معادله  $x^2 - x + m = 0$  است، پس

$$\alpha\beta = m \xrightarrow{(*)} -3 = m \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = m$$





معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  زمانی ریشه مضاعف دارد که  $\Delta = 0$ .

**روش دوم** برای تجزیه عبارت  $x^2 - 2x + 1$  می‌توانید این طوری هم عمل کنید:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 = 0 &\Rightarrow x^2 - x - x + 1 = 0 \\ \Rightarrow (x^2 - x) - (x - 1) = 0 &\Rightarrow x(x - 1) - (x - 1) = 0 \\ \Rightarrow x(x - 1)(x + 1) - (x - 1) = 0 &\Rightarrow (x - 1)(x^2 + x - 1) = 0 \end{aligned}$$

**۱۱۶- گزینه ۳** با توجه به معادله،  $x = 1$  یک ریشه معادله است (چون در معادله صدق می‌کند). بنابراین عبارت  $x^2 - 5x + 4$  یک عامل  $(x - 1)$  دارد. با تقسیم  $x^2 - 5x + 4$  بر  $x - 1$  خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x^2 + x - 4) = 0 &\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + x - 4 = 0 \end{cases} \\ \text{فرض کنیم } \alpha = 1 \text{ باشد پس ریشه‌های } \beta \text{ و } \gamma &\text{ ریشه‌های معادله} \\ S = \beta + \gamma = -1, P = \beta\gamma = -4 &\text{ در نتیجه:} \\ \text{حالا حاصل عبارت } \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} &\text{ را می‌یابیم:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} &= \frac{1}{1^2} + \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta^2 \gamma^2} = 1 + \frac{S^2 - 2P}{P^2} \\ &= 1 + \frac{(-1)^2 - 2(-4)}{(-4)^2} = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16} \end{aligned}$$

**۱۱۷- گزینه ۳** معادله را مرتب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x^2 + (a - 1)x^2 + (4 - a)x - 4 = 0 \\ \text{مجموع ضرایب معادله صفر است } (1 + a - 1 + 4 - a - 4 = 0). \\ \text{پس یک ریشه معادله } x = 1 \text{ است. با تقسیم عبارت} \\ x^2 + (a - 1)x^2 + (4 - a)x - 4 &\text{ بر } x - 1 \text{ سایر عامل‌ها را پیدا می‌کنیم:} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} x^2 + (a-1)x^2 + (4-a)x - 4 \quad | \quad x-1 \\ \underline{-(x^2 - x^2)} \\ ax^2 + (4-a)x \\ \underline{-(ax^2 - ax)} \\ 4x - 4 \\ \underline{-(4x - 4)} \\ 0 \end{array}$$

با توجه به تقسیم، تجزیه معادله به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{معادله: } (x - 1)(x^2 + ax + 4) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ (یک ریشه مثبت)} \\ x^2 + ax + 4 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

برای این که معادله، سه ریشه مثبت داشته باشد باید ریشه‌های معادله  $x^2 + ax + 4 = 0$  هم مثبت باشد. پس باید سه شرط زیر برقرار باشند:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow a^2 - 16 > 0 \Rightarrow a^2 > 16 \Rightarrow a > 4 \text{ یا } a < -4 \\ \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{4}{1} > 0 \Rightarrow \text{همواره برقرار} \\ -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow -\frac{a}{1} > 0 \Rightarrow a < 0 \end{cases}$$

اشتراک  $\rightarrow a < -4$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{در معادله (*)} \rightarrow 2x^2 - 6x + 5 = 0 \\ \Delta < 0 \rightarrow \text{ریشه حقیقی ندارد} \\ \text{در معادله (*)} \rightarrow 2x^2 + 2x - 3 = 0 \\ \Delta > 0 \rightarrow \text{قابل قبول} \end{cases}$$

پس  $m = -2$  قابل قبول است.

**۱۱۴- گزینه ۳**

$$\begin{aligned} (x + 2)(x^2 + ax + 2) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ x^2 + ax + 2 = 0 \text{ (ریشه‌ها } \alpha \text{ و } \beta \text{ در نظر می‌گیریم).} \end{cases} \end{aligned}$$

مجموع معکوس مربعات ریشه‌ها برابر  $-\frac{a}{P}$  است. پس با توجه به این که ریشه‌ها،  $-2$ ،  $\alpha$  و  $\beta$  هستند داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(-2)^2} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} &= -\frac{a}{2} \\ \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 \beta^2} &= \frac{1}{4} + \frac{S^2 - 2P}{P^2} = -\frac{a}{2} \quad (*) \end{aligned}$$

$S$  و  $P$  را از معادله  $x^2 + ax + 2 = 0$  محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \begin{cases} S = -a \\ P = 2 \end{cases} \xrightarrow{(*)} \frac{1}{4} + \frac{(-a)^2 - 2(2)}{2^2} &= -\frac{a}{2} \\ \Rightarrow \frac{1 + a^2 - 4}{4} &= -\frac{a}{2} \end{aligned}$$

طرفین معادله را در ۴ ضرب می‌کنیم:

$$a^2 - 3 = -2a \Rightarrow (a - 1)(a + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$$

اما به ازای  $a = 1$  معادله  $x^2 + ax + 2 = 0$  ریشه حقیقی ندارد. (دلتا منفی می‌شود). پس  $a = -2$ .

**۱۱۵- گزینه ۳ روش اول** مجموع ضرایب معادله صفر است؛ پس یک ریشه معادله یک است. در نتیجه عبارت  $x^2 - 2x + 1$  یک عامل  $x - 1$  دارد. پس عبارت را بر  $x - 1$  تقسیم می‌کنیم و عامل‌های دیگر را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x + 1 \quad | \quad x-1 \\ \underline{-(x^2 - x^2)} \\ -x + 1 \\ \underline{-(-x + 1)} \\ 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x^2 + x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ (یک ریشه مثبت)} \\ x^2 + x - 1 = 0 \xrightarrow{\frac{c}{a} = -1 < 0} \end{cases}$$

یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی دارد

پس در مجموع، معادله دو ریشه مثبت و یک ریشه منفی دارد. دقت کنید، چون  $x = 1$  ریشه معادله  $x^2 + x - 1 = 0$  نیست، پس طبق نکته زیر، معادله ریشه مضاعف ندارد.

معادله  $(x - a)^2 = 0$  ریشه مضاعف دارد.

در نتیجه معادله جدید به صورت زیر است:

$$x^2 - S'x + P' = 0 \rightarrow x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{4} = 0$$

$$\times 4 \rightarrow 4x^2 - 5x - 1 = 0$$

۱۲۰- **گزینه ۲** برای محاسبه مقدار  $k$  به مجموع ریشه‌های معادله جدید

توجه می‌کنیم (در معادله جدید مجموع ریشه‌ها  $-\frac{k}{\lambda}$  است):

$$S' = \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 \Rightarrow \frac{-k}{\lambda} = \alpha\beta(\alpha + \beta) \quad (*)$$

$$2x^2 - 3x = 1 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{3}{2} \\ \alpha\beta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*)} -\frac{k}{\lambda} = \frac{3}{2}(-\frac{1}{2}) \Rightarrow -\frac{k}{\lambda} = -\frac{3}{4} \Rightarrow k = 6$$

۱۲۱- **گزینه ۲** **روش اول** مجموع و حاصل ضرب جواب‌های معادله اولیه

$$x(\Delta x + 2) = 2 \Rightarrow \Delta x^2 + 3x - 2 = 0 \quad \text{برابر است با:}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{3}{\Delta} \\ P = \alpha\beta = -\frac{2}{\Delta} \end{cases}$$

برای محاسبه  $k$  از مجموع ریشه‌های معادله جدید استفاده می‌کنیم:

$$S' = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} \Rightarrow \frac{k}{4} = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha^2\beta^2} \Rightarrow \frac{k}{4} = \frac{S^2 - 2P}{P^2}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{4} = \frac{(-\frac{3}{\Delta})^2 - 2(-\frac{2}{\Delta})}{(-\frac{2}{\Delta})^2}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{4} = \frac{\frac{9}{\Delta^2} + \frac{4}{\Delta}}{\frac{4}{\Delta^2}} = \frac{9 + 4\Delta}{4\Delta} = \frac{29}{4} \Rightarrow k = 29$$

**روش دوم** به معادله اولیه نگاه کنید:

$$x(\Delta x + 2) = 2 \Rightarrow \Delta x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = -\frac{c}{a} = \frac{2}{\Delta} \end{cases}$$

بنابراین ریشه‌های معادله جدید به صورت  $\{\frac{1}{(-1)^2}, \frac{1}{(\frac{2}{\Delta})^2}\} = \{1, \frac{\Delta^2}{4}\}$  هستند. در نتیجه  $x = 1$  در معادله صدق می‌کند:

$$4(1)^2 - k(1) + 25 = 0 \Rightarrow k = 29$$

۱۲۲- **گزینه ۲** اگر ریشه‌های معادله  $4x^2 - 73x + 144 = 0$  را  $\alpha$  و

$\beta$  در نظر بگیریم (پس  $P = \frac{144}{4} = 36$  و  $S = \frac{73}{4}$ )، ریشه‌های معادله

$2x^2 + ax + b = 0$  به صورت  $\sqrt{\alpha}$  و  $\sqrt{\beta}$  خواهد بود. بنابراین داریم:

$$\triangleright P' = \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} \Rightarrow \frac{b}{2} = \sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{P} = \sqrt{36} = 6 \Rightarrow b = 12$$

$$\triangleright S' = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \Rightarrow -\frac{a}{2} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$$

اما به اشکال کوهپولو دارد این تست! اگر  $a = -5$  باشد معادله به صورت زیر می‌شود:

$$(x-1)(x^2 - 5x + 4) = 0 \Rightarrow (x-1)(x-1)(x-4) = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2(x-4) = 0 \Rightarrow x = 1, 4$$

که در این حالت معادله دوتا ریشه دارد نه سه‌تا. پس جواب دقیق‌تر این

سؤال به صورت مقابل است:  $a < -4, a \neq -5$

۱۱۸- **گزینه ۲** **روش اول** معادله  $3x^2 + 7x + 1 = 0$  را معادله اولیه و

ریشه‌هایش را  $\alpha$  و  $\beta$  در نظر می‌گیریم.

ریشه‌های معادله  $x^2 + ax + b = 0$  یک واحد از ریشه‌های معادله

$3x^2 + 7x + 1 = 0$  بیشتر است. پس ریشه‌های معادله جدید به صورت  $\alpha + 1$  و

$\beta + 1$  هستند. برای محاسبه  $b$  حاصل ضرب ریشه‌های معادله جدید را باید

محاسبه کنیم (حاصل ضرب ریشه‌های معادله جدید،  $b$  است):

$$P' = (\alpha + 1)(\beta + 1) \Rightarrow \frac{b}{1} = \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 \quad (*)$$

$\alpha + \beta$  و  $\alpha\beta$  حاصل ضرب و مجموع ریشه‌های معادله

$3x^2 + 7x + 1 = 0$  هستند؛ پس:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{7}{3} \\ \alpha\beta = \frac{1}{3} \end{cases} \xrightarrow{(*)} b = \frac{1}{3} - \frac{7}{3} + 1 = -1$$

**روش دوم** ریشه معادله اولیه را با  $x$  و ریشه معادله جدید را با  $X$  نمایش

می‌دهیم. با توجه به رابطه بین ریشه‌ها داریم:

$$X = x + 1 \Rightarrow x = X - 1$$

با جای‌گذاری این تساوی در معادله اولیه، معادله جدید را می‌یابیم:

$$\xrightarrow{3x^2 + 7x + 1 = 0} 3(X-1)^2 + 7(X-1) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 3(X^2 - 2X + 1) + 7X - 7 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 3X^2 - 6X + 3 + 7X - 7 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 3X^2 + X - 3 = 0 \xrightarrow{+3} X^2 + \frac{1}{3}X - 1 = 0$$

پس:  $b = -1$

۱۱۹- **گزینه ۲** اول دقت کنید که مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های

معادله اولیه برابر است با:

$$2x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{3}{2} \\ \alpha\beta = -\frac{4}{2} = -2 \end{cases} \quad (*)$$

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله جدید را پیدا می‌کنیم:

$$S' = \frac{1}{\alpha} + 1 + \frac{1}{\beta} + 1 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 2 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 2$$

$$\xrightarrow{(*)} S' = \frac{3}{-2} + 2 = -\frac{3}{4} + 2 = \frac{5}{4}$$

$$P' = (\frac{1}{\alpha} + 1)(\frac{1}{\beta} + 1) = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 1$$

$$= \frac{1}{\alpha\beta} + (\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}) + 1 \xrightarrow{(*)} P' = \frac{1}{-2} + \frac{3}{-2} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow P' = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 1 = -1$$





پس مجموع ریشه‌ها برابر  $-2 = -3 + 2 - 4 + 3$  است.

البته این کار می‌توانستید بکنید:

$$x^2 + x - 6 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \text{جمع ریشه‌ها} = -\frac{b}{a} = -1$$

$$x^2 + x - 12 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \text{جمع ریشه‌ها} = -\frac{b}{a} = -1$$

$$\Rightarrow \text{مجموع کل ریشه‌ها} = (-1) + (-1) = -2$$

۱۲۷- گزینه ۳ با فرض (\*)  $x^2 - 2x = t$  داریم:

$$\text{معادله } t^2 - t = 2 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow (t-2)(t+1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -1 \end{cases} \xrightarrow{(*)} \begin{cases} x^2 - 2x = 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \\ x^2 - 2x = -1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\Delta > 0} \text{دو ریشه حقیقی دارد.} \\ \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$n = 1$  ریشه معادله بالایی نیست، پس معادله در مجموع سه ریشه حقیقی متمایز دارد.

۱۲۸- گزینه ۲

$$(x^2 - 1)^2 = x^2 + 5 \Rightarrow x^4 - 2x^2 + 1 = x^2 + 5$$

$$\Rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

با فرض  $x^2 = t$  داریم: معادله  $t^2 - 3t - 4 = 0$

$$\Rightarrow (t-4)(t+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 4 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x^2=t} \begin{cases} x^2 = -1 \text{ (جواب ندارد.)} \\ x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$$

پس معادله دو جواب دارد که یکی مثبت و یکی منفی است.

۱۲۹- گزینه ۲ با فرض  $x^4 - x^2 = t$  داریم:

$$\text{معادله } t^2 - 5t - 6 = 0$$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} t = -1 \xrightarrow{x^4 - x^2 = t} x^4 - x^2 = -1 \\ t = 6 \xrightarrow{x^4 - x^2 = t} x^4 - x^2 = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^4 - x^2 + 1 = 0 \\ x^4 - x^2 - 6 = 0 \end{cases}$$

حل نشده! یک بار دیگه از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم. با فرض  $x^2 = A$

داریم:

$$\begin{cases} A^2 - A + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} \text{ریشه ندارد.} \\ A^2 - A - 6 = 0 \Rightarrow (A-3)(A+2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = -2, A = 3$$

حالا متغیر را برمی‌گردانیم:

$$\xrightarrow{x^2=A} \begin{cases} x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \\ x^2 = -2 \text{ (معادله جواب ندارد.)} \end{cases}$$

پس معادله دو ریشه حقیقی دارد.

۱۳۰- گزینه ۲ را می‌بریم طرف راست و مربع کامل می‌کنیم:

$$(x-1)^4 + 2x = x^2 + 3 \Rightarrow (x-1)^4 = x^2 - 2x + 3$$

$$\Rightarrow (x-1)^4 = (x^2 - 2x + 1) + 2 = (x-1)^2 + 2$$

طرف راست یک عبارت همواره مثبت است، پس باید طرف چپ نیز مثبت

باشد. در نتیجه  $a < 0$ . با این شرط، طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\frac{a^2}{4} = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = S + 2\sqrt{P} \Rightarrow \frac{a^2}{4} = \frac{13}{4} + 2(6) = \frac{121}{4}$$

$$\Rightarrow a = -11$$

$$a + b = -11 + 12 = 1$$

بنابراین:

۱۳۳- گزینه ۲ ریشه‌های معادله  $x^2 - 2x - 1 = 0$  را  $\alpha$  و  $\beta$  در نظر

می‌گیریم. پس  $S = 2$  و  $P = -1$ . ریشه‌های معادله  $4x^2 - 12x + m = 0$

از  $k$  برابر مکعب ریشه‌های معادله  $x^2 - 2x - 1 = 0$ ،  $2$  واحد کم‌تر است،

پس ریشه‌های معادله بالا را می‌توانیم به صورت  $\{k\alpha^3 - 2, k\beta^3 - 2\}$

در نظر بگیریم. برای محاسبه  $m$ ، نیاز به محاسبه ضرب ریشه‌ها داریم. اما

چون  $k$  مجهول است، ابتدا با کمک جمع ریشه‌ها،  $k$  را می‌یابیم.

$$\text{مجموع ریشه‌ها } S' = -\frac{-12}{4} = 3 \Rightarrow k\alpha^3 - 2 + k\beta^3 - 2 = 3$$

$$\Rightarrow k(\alpha^3 + \beta^3) = 7 \Rightarrow k(S^3 - 3PS) = 7$$

$$\xrightarrow{\frac{S=2}{P=-1}} k(\lambda - 3(-1)(2)) = 7 \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

حالا به سراغ حاصل ضرب ریشه‌ها می‌رویم:

$$P' = \frac{m}{4} \Rightarrow (k\alpha^3 - 2)(k\beta^3 - 2) = \frac{m}{4}$$

$$\Rightarrow k^2(\alpha^3\beta^3) - 2(k\alpha^3 + k\beta^3) + 4 = \frac{m}{4}$$

$$\Rightarrow k^2 P^3 - 2k(S^3 - 3PS) + 4 = \frac{m}{4}$$

$$\xrightarrow{k=\frac{1}{4}, S=2, P=-1} \frac{1}{4}(-1) - 2(\frac{1}{4})(\lambda + 6) + 4 = \frac{m}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4} - 14 + 4 = \frac{m}{4} \Rightarrow m = -1 - 56 + 16 = -41$$

۱۳۴- گزینه ۲ با فرض  $x^3 = t$  داریم:

$$\text{معادله } t^2 - 9t + 8 = 0$$

$$\Rightarrow (t-1)(t-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1 \\ t = 8 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = 1 + 2 = 3$$

۱۳۵- گزینه ۲ با فرض  $x^2 = t$  داریم:

$$\text{معادله } t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t-1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1$$

$$\xrightarrow{x^2=t} x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

۱۳۶- گزینه ۲ با فرض  $x^2 + x = t$  داریم:

$$\text{معادله } t^2 - 18t + 72 = 0 \Rightarrow (t-6)(t-12) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 6 \\ t = 12 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x^2+x=t} \begin{cases} x^2 + x = 6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \\ x^2 + x = 12 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -3, x = 2$$

$$\Rightarrow (x+4)(x-3) = 0 \Rightarrow x = -4, x = 3$$



یکی مثبت ( $t_1$ ) و دیگری منفی ( $t_2$ ) دارد. در نتیجه در معادله (\*)

$$\begin{cases} x^2 = t_1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{t_1} \\ x^2 = t_2 \xrightarrow{t_2 < 0} \text{ جواب ندارد} \end{cases} \quad \text{داریم:}$$

پس ریشه‌های معادله (\*),  $\sqrt{t_1}$  و  $-\sqrt{t_1}$  است. چون یکی از ریشه‌ها چهار واحد از ریشه دیگر بیشتر است. بنابراین:

$$\sqrt{t_1} = -\sqrt{t_1} + 4 \Rightarrow 2\sqrt{t_1} = 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{t_1} = 2 \xrightarrow{x = \pm\sqrt{t_1}} x = \pm 2$$

چون  $x = \pm 2$  ریشه‌های معادله (\*) هستند بنابراین ریشه بزرگ‌تر معادله  $x = 2$  است.

حالا با فرض  $(x-1)^2 = t$  داریم:

$$t^2 = t + 2 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow (t+1)(t-2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(x-1)^2 = t} \begin{cases} (x-1)^2 = 2 \Rightarrow x-1 = \pm\sqrt{2} \\ \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + \sqrt{2} \\ x_2 = 1 - \sqrt{2} \end{cases} \\ (x-1)^2 = -1 \quad \times \end{cases}$$

بنابراین کوچک‌ترین ریشه معادله،  $1 - \sqrt{2}$  است.

۱۳۱- گزینه ۲ اول از تغییر متغیر  $x^2 = t$  استفاده می‌کنیم:

$$\text{معادله: } t^2 - (m+2)t + m + 5 = 0$$

برای این که معادله اصلی ۴ تا ریشه داشته باشد، با توجه به این که  $x^2 = t$  است، باید برای  $t$  دو تا جواب مثبت به دست بیاید که برای  $x$  چهار تا جواب حاصل شود. پس باید معادله  $t^2 - (m+2)t + m + 5 = 0$  دو ریشه مثبت داشته باشد. این معادله هم زمانی دو ریشه مثبت دارد که:

$$\begin{cases} 1 \Delta > 0 \Rightarrow -(m+2)^2 - 4(m+5)(1) > 0 \\ \Rightarrow m^2 + 4m + 4 - 4m - 20 > 0 \Rightarrow m^2 > 16 \\ \Rightarrow m > 4 \text{ یا } m < -4 \\ 2 \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{m+5}{1} > 0 \Rightarrow m > -5 \\ 3 -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow -\frac{-(m+2)}{1} > 0 \Rightarrow m+2 > 0 \\ \Rightarrow m > -2 \end{cases}$$

از اشتراک ۱، ۲ و ۳ حدود  $m$  به دست می‌آید:  $m > 4$ .

۱۳۲- گزینه ۲ ابتدا با استفاده از تغییر متغیر  $x^2 = t$  داریم:

$$\text{معادله: } \frac{1}{4}t^2 + mt + m^2 - 1 = 0 \quad (*)$$

برای این که معادله اصلی دو ریشه حقیقی متمایز داشته باشد، باید یکی از دو حالت زیر رخ دهد.

① معادله (\*) یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی داشته باشد. پس باید  $\frac{c}{a} < 0$  باشد:

$$\frac{m^2 - 1}{\frac{1}{4}} < 0 \Rightarrow -1 < m < 1$$

② معادله (\*) یک ریشه مضاعف مثبت داشته باشد:

$$\begin{cases} \Delta = 0 \Rightarrow m^2 - 4\left(\frac{1}{4}\right)(m^2 - 1) = 0 \Rightarrow m^2 - m^2 + 1 = 0 \\ \Rightarrow 1 = 0 \text{ غقیق} \\ -\frac{b}{a} > 0 \end{cases}$$

پس محدوده قابل قبول برای  $m$  بازه  $(-1, 1)$  است.

۱۳۳- گزینه ۲ معادله را مرتب می‌کنیم:

$$x^4 - mx^2 - m^2 - 1 = 0 \quad (*)$$

$$t^2 - mt - m^2 - 1 = 0 \quad (**) \quad \text{با فرض } x^2 = t \text{ داریم:}$$

چون  $0 < -m^2 - 1 = \frac{c}{a}$  است، پس معادله (\*\*\*) دو ریشه مختلف‌العلامت