فهرست

مجموعه‌ها

فصل ۱

۱- گزینه ۲ یک مجموعه باید برای همه معلوم و معین و یکسان باشد.

گزینهٔ (۱): هر کسی می‌تواند ۱۰ عدد گویای دلخواه، کوچک‌تر از ۱۰ انتخاب کند، چون اعداد گویا بین دو عدد دلخواه بی‌شمار است.

گزینهٔ (۲): مضرب‌های صحیح و کوچک‌تر از ۱۰۰۰ عدد ۷، یک مجموعه است و بی‌شمار عضو دارد. $\{۹۹۴,۹۸۷,۹۸۰,۹۷۳,۹۶۶,\dots\}$

گزینهٔ (۳): برای چهار عدد فرد طبیعی، می‌توان بی‌شمار مثال آورد و این عبارت یک مجموعه را مشخص نمی‌کند.

گزینهٔ (۴): عدد ۸ چهار شمارنده دارد: ۸، ۴، ۲، ۱، بیان سه شمارندهٔ آن می‌تواند ۴ حالت مختلف داشته باشد و یک مجموعه نیست.

۲- گزینه ۴ گزینهٔ (۱) مجموعه است. $\{۱۱,۲۲,۳۳,۴۴,۵۵,\dots\}$

گزینهٔ (۲) مجموعه است و بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از صفر عدد (-۱) است. $\{-۱\}$

گزینهٔ (۳) یک مجموعه است. عدد ۱۲۳ مقسوم‌علیه زوج ندارد، چون ۱۲۳ فرد است. پس مجموعه $\{\}$ را مشخص می‌کند.

گزینهٔ (۴) مجموعه نیست. چون عدد ۱۲۰ سه شمارندهٔ اول متمایز دارد. $۱۲۰=۲^{۳}\times۳\times۵$

۳- گزینه ۲ گزینهٔ (۲) مجموعه‌ای را معلوم نمی‌کند. چون موفقیت و انسان موفق، یک موضوع نسبی است و ممکن است برای همگان یکسان نباشد.

در صورتی که هر مجموعه باید برای همه یکسان باشد.

۴- گزینه ۳ برای شمارش عضوها باید عضو تکراری را حذف کرده و به تعداد کاماهای اصلی (,) در مجموعه دقت کرد.

گزینهٔ (۱) : $\{\underbrace{\{۱,۲,۳,۴,۵,\dots,۱۰۰\}}_{\text{تنها عضو مجموعه}}\} \Rightarrow$ یک عضو

گزینهٔ (۲) : $\{۱^{۰},۲^{۰},۳^{۰},\dots,۱۰۰^{۰}\}=\{۱,\cancel{۱},\cancel{۱},\dots,\cancel{۱}\}=\{۱\} \Rightarrow$ یک عضو

گزینهٔ (۳) : $\{۱,\{۱\}\} \Rightarrow ۱\in\{۱,\{۱\}\},\{۱\}\in\{۱,\{۱\}\} \Rightarrow$ ۲ عضو

گزینهٔ (۴) : $\{\{\{\}\},\{\cancel{\varnothing},\{\}\}\}=\{\{\{\}\},\cancel{\{\{\}\}}\}=\{\underbrace{\{\{\}\}}_{\text{عضو}}\} \Rightarrow$ یک عضو

۵- گزینه ۳ عضوهای مساوی را پس از ساده‌کردن عضوها حذف می‌کنیم:

$$A=\{۲^{۳۳},۸^{۱۱},۳۲^{۷},\sqrt{۶۴^{۱۱}}\}=\{۲^{۳۳},(۲^{۳})^{۱۱},(۲^{۵})^{۷},\sqrt{(۲^{۶})^{۱۱}}\}=\{۲^{۳۳},۲^{۳۳},۲^{۳۵},\sqrt{۲^{۶۶}}\}=\{\cancel{۲^{۳۳}},\cancel{۲^{۳۳}},۲^{۳۵},۲^{۳۳}\}=\{۲^{۳۵},۲^{۳۳}\}$$

دو عضو دارد.

۶- گزینه ۴

$$A=\{۲,\{۲\},\{۲,\cancel{۲}\},\{۲,\cancel{۲},\cancel{۲}\}\}=\{۲,\{۲\},\cancel{\{۲\}},\cancel{\{۲\}}\}=\{۲,\{۲\}\} \Rightarrow \begin{cases} \text{۲عضو دارد.} \\ ۶\notin A \\ \{\{۲\}\}\notin A \end{cases}$$

۷- گزینه ۱ اگر $A=\{a_{n},a_{n-۱},\dots,a_{۵}\}$، پنج عضو داشته باشد، حاصل $(n-۵)+۱$ مساوی ۵ خواهد شد.

$$(n-۵)+۱=۵ \Rightarrow n-۴=۵ \Rightarrow n=۹$$

۸- گزینه ۱ عضوهای تکراری را حذف کنیم: $\{a^{۱۰},b^{۲۰},b^{۲۰},c^{۳۰},c^{۳۰},c^{۳۰},\dots,j^{۱۰۰}\}$

با توجه به الگوی بین عضوها، یکی $a^{۱۰}$ ، دوتا $b^{۲۰}$، سه‌تا $c^{۳۰}$، ... و ۱۰تا $j^{۱۰۰}$ داریم که از هر کدام فقط یکی باقی می‌ماند. $\{a^{۱۰},b^{۲۰},c^{۳۰},\dots,j^{۱۰۰}\}$

در الگوی ۱۰، ۲۰، ۳۰، ... تا ۱۰۰، ۱۰ عدد وجود دارد و در نتیجه مجموعه ۱۰ عضو دارد.

۹- گزینه ۳ الگویی بین عضوها وجود دارد، هر عضو نسبت به عضو قبلی ۲تا بیشتر است و تعداد آن‌ها برابر است با:

$$\text{تعداد الگوی منظم ساده} = \frac{\text{عدد بزرگ‌تر} - \text{عدد کوچک‌تر}}{\text{فاصلهٔ اعداد}} + ۱ = \frac{۲^{۱۲} - (۲^{۱۱} + ۲)}{۲} + ۱ = \frac{۲^{۱۲} - ۲^{۱۱} - ۲}{۲} + ۱ = \frac{۲^{۱۲}}{۲} - \frac{۲^{۱۱}}{۲} - \frac{۲}{۲} + ۱$$

$$= ۲^{۱۱} - ۲^{۱۰} - \cancel{۱} + \cancel{۱} = ۲^{۱۱} - ۲^{۱۰} = ۲ \times ۲^{۱۰} - ۲^{۱۰} = ۲^{۱۰}$$

۱۰- گزینه ۳ می‌توانیم مجموعه‌ها را بنویسیم: $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $\{۴,۵,۶\}$ و $\{۷,۸\}$

۱۱- گزینه ۴ عضوهای مجموعهٔ M عبارت هستند از: a و $\{a\}$ و $\{a,\{\}\}$، در نتیجه $\{\} \notin M$ و گزینهٔ (۴) نادرست است.

۱۲- گزینه ۴ چون $a \in \mathbb{Z}$ است، a می‌تواند مثبت یا منفی باشد. اگر $a > ۰$ باشد، آن‌گاه $-a < ۰$ و $-a \notin \mathbb{N}$. یک مثال ساده‌تر هم داریم $a = ۰ \in \mathbb{Z}$ و $-a = ۰ \in \mathbb{Z}$ اما $-a = ۰ \notin \mathbb{N}$.

۱۳- گزینه ۳ مجموعه‌های $\{m-n, n^۳\}$ و $\{-۱\}$ مساوی‌اند. پس حتماً باید $m - n = n^۳ = -۱$ باشد. $\Rightarrow n^۳ = -۱ \Rightarrow n = -۱$

$$m - n = -۱ \Rightarrow m - (-۱) = -۱ \Rightarrow m + ۱ = -۱ \Rightarrow m = -۲ \quad , \quad mn = (-۲)(-۱) = ۲$$

۱۴- گزینه ۱ $A = B$ است و عضوها مساوی هستند:

$$A = B \Rightarrow \{\{x-۱\},\{۳\}\} = \{\{۵\},\{x-y\}\} \Rightarrow \{x-۱\} = \{۵\} \Rightarrow x - ۱ = ۵ \Rightarrow x = ۶$$

$$\Rightarrow \{۳\} = \{x-y\} \Rightarrow ۳ = x - y \Rightarrow ۳ = ۶ - y \Rightarrow y = ۳$$

۱۵- گزینه ۲ هر دو مجموعه، سه عضو دارند. پس عضوها می‌توانند دوبه‌دو مساوی باشند. چند حالت مساوی‌بودن می‌توان در نظر گرفت که بعضی از آن‌ها ممکن است نتیجهٔ درست ندهند.

$$\begin{matrix} A = \{۱, a, b\} \\ B = \{۰, a-۱, b+۲\} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} ۱ = a-۱, a = b+۲, b = ۰ \Rightarrow a = ۲, b = ۰, b = ۰ \Rightarrow \checkmark \\ ۱ = b+۲, b = a-۱, a = ۰ \Rightarrow b = -۱, a = ۰, a = ۰ \Rightarrow \checkmark \end{cases}$$

$(a-۱, a)$ و همچنین $(b, b+۲)$ را با هم مساوی قرار نمی‌دهیم، چون a و b از معادله حذف می‌شوند. حالا دو حالت درست داریم:

$(a = ۲, b = ۰)$ و $(a = ۰, b = -۱)$

گزینهٔ (۴) در هیچ‌کدام صدق نمی‌کند. گزینهٔ (۳) در $(a = ۲, b = ۰)$ صدق می‌کند، اما در دیگری خیر. گزینهٔ (۱) در $(a = ۰, b = -۱)$ صدق می‌کند، اما در دیگری خیر.

گزینهٔ (۲) در $(a = ۰, b = -۱)$ و $(a = ۲, b = ۰)$ صدق می‌کند و با این مقادیر، $a - ۲b = ۲$ همیشه درست است.

۱۶- گزینه ۱ $\{x, y, z, t\} = \{۱,۲,۳,۴\}$

x، y، z و t هر کدام می‌توانند یکی از عددهای ۱، ۲، ۳، و ۴ باشند. چون $x^۲ + y^۲$ یکی از شمارنده‌های $z^۲ + t^۲$ است، حاصل $(x^۲ + y^۲)$ کوچک‌تر یا مساوی $(z^۲ + t^۲)$ خواهد بود. می‌توانیم از حدس و آزمایش استفاده کنیم، اگر $z = ۴$ و $t = ۳$ باشد و $x = ۲$ و $y = ۱$، آن‌گاه $z^۲ + t^۲ = ۲۵$ و $x^۲ + y^۲ = ۵$ و ۵ شمارندهٔ ۲۵ است و این حالت درست است.

حالا انتخابی دیگر: $z = ۴$، $t = ۲$، $x = ۳$ و $y = ۱$، $z^۲ + t^۲ = ۲۰$ و $x^۲ + y^۲ = ۱۰$ و ۱۰ شمارندهٔ ۲۰ است. پس این حالت هم درست است.

و یک انتخاب دیگر: $z = ۴$، $t = ۱$، $x = ۲$، $y = ۳$، $z^۲ + t^۲ = ۱۷$ و $x^۲ + y^۲ = ۱۳$ و ۱۳ شمارندهٔ ۱۷ نیست، پس این حالت نادرست است.

حالت درست دیگر نداریم، چون با انتخاب‌های دیگر $z^۲ + t^۲ < x^۲ + y^۲$ می‌شود.

حالت‌های $t = ۳$، $z = ۴$، $t = ۲$ و $z = ۴$ درست بودند. پس $۴ \in \{z, t\}$.

۱۷- گزینه ۴ دو عضو باید با هم مساوی باشند: $۹ + x = y - ۴ \Rightarrow x - y = -۱۳ \Rightarrow$ بی‌شمار حالت برای x و y وجود دارد.

پس $x^۲ + y^۲$ نیز دارای بی‌شمار مقدار مختلف است و پاسخ درست گزینهٔ (۴) است.

۱۸- گزینه ۲ ابتدا دو عضو مجموعهٔ A را مساوی قرار می‌دهیم: $x - ۲ = ۴ - x \Rightarrow ۲x = ۶ \Rightarrow x = ۳$

حالا عضوهای مجموعهٔ A و B باید مساوی باشند.

$$x - ۲ = y^۲ - ۳ \Rightarrow ۳ - ۲ = y^۲ - ۳ \Rightarrow y^۲ - ۳ = ۱ \Rightarrow y^۲ = ۴ \Rightarrow y = +۲ \text{ یا } -۲$$

$$x + y \Rightarrow \begin{cases} ۳ + (۲) = ۵ \\ ۳ + (-۲) = ۱ \end{cases} \Rightarrow \text{گزینهٔ (۲) درست است.}$$

۱۹- گزینه ۳ مقدار عضوها در هر مجموعه را محاسبه کرده و به ساده‌ترین شکل می‌نویسیم:

گزینهٔ (۱) : $\{(۱^{۰}+۲^{۱}-۳^{۲}),\sqrt{۱۶۹},\frac{۳}{۴}\div\frac{۶}{۲},(-۱۹)\}=\{(-۶),۱۳,\frac{۱}{۴},-۱۹\}$

گزینهٔ (۲) : $\{۱۲+۱,\frac{۱}{۲}\div ۲,(-\frac{۱}{۱۹})^{-۱},-\frac{۱۲}{۲}\}=\{۱۳,\frac{۱}{۴},-۱۹,-۶\}$

گزینهٔ (۳) : $\{-۶,\underbrace{\cancel{(\sqrt{\frac{۱}{۲}})^{۴}}}_{(\frac{۱}{۲})^{۲}},\underbrace{\cancel{\sqrt{۱۴۴}}}_{۱۲}-۱,-\frac{۵۷}{۳}\}=\{-۶,\frac{۱}{۴},۱۱,-۱۹\}$

گزینهٔ (۴) : $\{\underbrace{\cancel{\sqrt{(\frac{۳۸}{۲})^{۲}}}}_{(\frac{۳۸}{۲})}\times(-۱),\sqrt{۱۶}+\sqrt{۸۱},۲(-۳),۴^{-۱}\}=\{-۱۹,۱۳,-۶,\frac{۱}{۴}\}$

مجموعهٔ گزینهٔ (۳) با بقیه مساوی نیست، چون به جای عضو ۱۳، عضو ۱۱ را دارد.

۲۰- گزینه ۴ مجموع اعضای هر سه مجموعه را می‌نویسیم:

$A:w+۴+z+۹+x=۱۳+w+z+x \quad , \quad B:۷+۸+x+y=۱۵+x+y \quad , \quad C:۶+۹+x+y=۱۵+x+y$

این عبارت‌ها با هم مساوی هستند: $۱۳+w+z+\cancel{x}=۱۵+\cancel{x}+y \Rightarrow ۱۳+w+z=۱۵+y \Rightarrow w+z=۲+y$

عددهای باقی‌مانده از بین ۱، ۲، ۳، ... ، ۹، عددهای ۱، ۲، ۳، ۵ هستند. با حدس و آزمایش، مسئله را حل می‌کنیم. اگر $w=۳$، $z=۱$ و $y=۲$ در نظر بگیریم، رابطهٔ $w+z=۲+y$ درست می‌شود و تنها عدد باقی‌مانده، یعنی ۵ برابر x می‌شود.

۲۱- گزینه ۴ نقطه در ناحیه‌ای قرار گرفته است که عددهای مضرب ۱۸ و مضرب ۳ هستند اما مضرب ۴ نیستند. یعنی در تجزیهٔ آن‌ها حداقل $۳^{۲}$ و دقیقاً $۲^{۱}$ وجود دارد.

گزینهٔ (۱): $۶۴=۲^{۶} \Leftarrow$ نادرست   گزینهٔ (۲): $۱۰۲=۲\times۳\times۱۷ \Leftarrow$ نادرست   گزینهٔ (۳): $۱۵۳۶=۳\times۲^{۹} \Leftarrow$ نادرست

گزینهٔ (۴): $۳۴۲=۲\times۳^{۲}\times۱۹ \Leftarrow$ درست   گزینهٔ (۵): $۱۵۳=۳^{۲}\times۱۷ \Leftarrow$ نادرست

۲۲- گزینه ۲ یک الگویابی انجام دهیم.

$A_۱=\{\underset{۱}{\underset{\downarrow}{۱}}\} \; , \; A_۲=\{۲,\underset{۱+۲}{\underset{\downarrow}{۳}}\} \; , \; A_۳=\{۴,۵,\underset{۱+۲+۳}{\underset{\downarrow}{۶}}\} \; , \; A_۴=\{۷,۸,۹,\underset{۱+۲+۳+۴}{\underset{\downarrow}{۱۰}}\}$

عدد آخر هر مجموعه برابر حاصل‌جمع عددهای طبیعی از ۱ تا شمارهٔ مجموعه است. از طرفی اولین عضو هر مجموعه، یکی بیشتر از آخرین عضو مجموعهٔ قبل است. پس آخرین عضو مجموعه $A_{۱۱}$ را محاسبه کرده و با ۱ جمع می‌کنیم تا اولین عضو مجموعهٔ $A_{۱۲}$ به دست بیاید:

$A_{۱۲}$ اولین عضو $=۶۶+۱=۶۷$ $A_{۱۱}$ آخرین عضو $=۱+۲+۳+۴+۵+\cdots+۱۰+۱۱=۶۶$

۲۳- گزینه ۱ عدد ۱ عضو A است، پس می‌توان گفت $(۱\times۲)\in A$ و $(۱-۲)\in A$ و می‌توانیم بنویسیم:

$۱\in A \Rightarrow (۱\times۲)=۲\in A \Rightarrow (۲\times۲)=۴\in A \Rightarrow ۲^{۳}\in A \Rightarrow ۲^{۴}\in A \Rightarrow ۲^{n}\in A$

$۱\in A \Rightarrow (۱-۲)=-۱\in A \Rightarrow (-۱-۲)=-۳\in A \Rightarrow -۵\in A \Rightarrow -۷\in A \Rightarrow \cdots \Rightarrow -۱۳۸۷\in A$

$۲\in A \Rightarrow (۲-۲)=۰\in A \Rightarrow (۰-۲)=-۲\in A \Rightarrow -۴\in A \Rightarrow -۶\in A \Rightarrow \cdots \Rightarrow -۲۰۰۸\in A$

$۲^{۱۱}\in A \Rightarrow ۲^{۱۱}=۲۰۴۸\in A \Rightarrow (۲۰۴۸-۲)=۲۰۴۶\in A \Rightarrow ۲۰۴۴\in A \Rightarrow \cdots \; ۲۰۰۸\in A$

۱۳۸۷ عضو A نیست، چون هیچ عدد فرد طبیعی نمی‌تواند عضو A باشد؛ چون با شروع از عدد ۱ نمی‌توانیم عدد فرد مثبت بسازیم. عددهای زوج مثبت ساخته‌ایم، اما نمی‌توانیم آن‌ها را به عدد فرد تبدیل کنیم، چون تنها عملیات ضرب در ۲ و تفریق با ۲ وجود دارد که دوباره عدد زوج تولید می‌کند.

۲۴- گزینه ۲ در یک الگوی عددهای منظم، میانگین، همیشه برابر میانگین عدد اول و آخر الگو است.

مجموعهٔ مضرب‌های عدد ۴ $\Rightarrow$ کوچک‌ترین عدد $=۴$ و بزرگ‌ترین عدد $=۱۰۰$ $\Rightarrow$ میانگین $=\frac{۱۰۰+۴}{۲}=۵۲$

مجموعهٔ مضرب‌های عدد ۱۰ $\Rightarrow$ کوچک‌ترین عدد $=۱۰$ و بزرگ‌ترین عدد $=۱۰۰$ $\Rightarrow$ میانگین $=\frac{۱۰۰+۱۰}{۲}=۵۵$ ✓

مجموعهٔ مضرب‌های عدد ۸ $\Rightarrow$ کوچک‌ترین عدد $=۸$ و بزرگ‌ترین عدد $=۹۶$ $\Rightarrow$ میانگین $=\frac{۹۶+۸}{۲}=\frac{۱۰۴}{۲}=۵۲$

مجموعهٔ مضرب‌های عدد ۱۲ $\Rightarrow$ کوچک‌ترین عدد $=۱۲$ و بزرگ‌ترین عدد $=۹۶$ $\Rightarrow$ میانگین $=\frac{۹۶+۱۲}{۲}=\frac{۱۰۸}{۲}=۵۴$

۲۵- گزینهٔ ۱ فرض کنیم، مجموعه ۲عضوی باشد: $\{x,x+۱\}\Rightarrow x+(x+۱)=۱۳۸۷\Rightarrow ۲x+۱=۱۳۸۷\Rightarrow ۲x=۱۳۸۶\Rightarrow x=۶۹۳$

یک مجموعه پیدا کردیم: $\{۶۹۳,۶۹۴\}$

فرض کنیم، مجموعه ۳ عضو دارد: $\{x,x+۱,x+۲\}\ \Rightarrow\ x+(x+۱)+(x+۲)=۱۳۸۷\ \Rightarrow\ ۳x+۳=۱۳۸۷\ \Rightarrow\ ۳x=۱۳۸۴$

$\Rightarrow\ x=\frac{۱۳۸۴}{۳}\notin\mathbb{Z}\ \Rightarrow$ مجموعهٔ ۳عضوی نداریم.

با ادامهٔ افزایش مقدار عضوها به نتیجه نمی‌رسیم. یک مجموعهٔ nعضوی از اعداد صحیح و مثبت متوالی در نظر بگیریم:

$\{x,x+۱,x+۲,x+۳,\dots,x+(n-۱)\}\ \Rightarrow$ nعضوی

$$\Rightarrow\ x+(x+۱)+(x+۲)+(x+۳)+\dots+(x+(n-۱))=۱۳۸۷\ \Rightarrow\ nx+\underbrace{(۱+۲+۳+۴+\dots+(n-۱))}_{\text{حاصل جمع (n − ۱) عدد طبیعی از ۱ تا (n − ۱)}}=۱۳۸۷$$

$$\Rightarrow\ nx+\frac{(n-۱)(n)}{۲}=۱۳۸۷\ \xrightarrow{\text{از n فاکتور بگیریم}}\ n(x+\frac{n-۱}{۲})=۱۳۸۷\ \Rightarrow$$

عدد ۱۳۸۷ باید بر n بخش‌پذیر باشد و ۱۳۸۷ را تجزیه می‌کنیم.

$n(x+\frac{n-۱}{۲})=۱۹\times ۷۳\ \Rightarrow\ n=۱۹\ ,\ x+\frac{n-۱}{۲}=۷۳$ یا $n=۷۳\ ,\ x+\frac{n-۱}{۲}=۱۹$

$\xrightarrow{\text{اگر}}\ n=۱۹\ ,\ x+\frac{n-۱}{۲}=۷۳\ \Rightarrow\ x+\frac{۱۹-۱}{۲}=۷۳\ \Rightarrow\ x+۹=۷۳\ \Rightarrow\ x=۶۴\ \Rightarrow\ \{۶۴,۶۵,۶۶,۶۷,\dots,۸۲\}\ \Rightarrow$ ۱۹ عضو دارد.

$\xrightarrow{\text{اگر}}\ n=۷۳,x+\frac{n-۱}{۲}=۱۹\ \Rightarrow\ x+\frac{۷۳-۱}{۲}=۱۹\ \Rightarrow\ x+۳۶=۱۹\ \Rightarrow\ x=-۱۷\ \Rightarrow\ x<۰\ \Rightarrow$ مجموعهٔ درستی نمی‌دهد.

بنابراین دو مجموعه (یک مجموعهٔ ۲عضوی و یک مجموعهٔ ۱۹عضوی) با شرایط مسئله وجود دارد.

۲۶- گزینهٔ ۲ مجموعهٔ $A\varnothing B$، عضوهای $\frac{a}{b}$ را می‌سازد که $a\in A$ و $b\in B$ و $b\neq ۰$ باشد. حالا مجموعهٔ $A\varnothing A$ عضوهای $\frac{a}{b}$ را می‌سازد که $a\in A$ و $b\in A$ و $b\neq ۰$ باشد. مجموعهٔ A در سؤال، مجموعهٔ اعداد سه‌رقمی طبیعی است.

$A=\{۱۰۰,۱۰۱,۱۰۲,۱۰۳,۱۰۴,۱۰۵,\dots,۹۹۸,۹۹۹\}$

ما به دنبال عضوهایی از $A\varnothing A$ هستیم که a بر b بخش‌پذیر باشد، چون باید $\frac{a}{b}\in\mathbb{N}$ شود و در نتیجه a مضرب b است. پس $b<a$ و حتماً $b<۵۰۰$ خواهد بود. بیایید این‌طور فکر کنیم $\frac{a}{b}\in\mathbb{N}$ چه عددهایی می‌تواند باشد؟ مساوی ۱ می‌تواند باشد وقتی که $a=b$ باشد، پس $۱\in A\varnothing A$. در حالت کلی عدد سه‌رقمی a می‌تواند برابر b، $۲b$، $۳b$، $۴b$، $۵b$، $۶b$، $۷b$، $۸b$ و $۹b$ باشد، اما برابر $۱۰b$ و بالاتر نیست، چون مضرب دهم کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی، عددی چهاررقمی است: $۱۰۰\times۱۰=۱۰۰۰$. پس عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ عضو مجموعهٔ $A\varnothing A$ بوده و تنها عضوهای طبیعی آن هستند.

۲۷- گزینهٔ ۳ بزرگ‌ترین عددی که از حاصل‌جمع چهار عدد مجموعه به دست می‌آید، $۲۷+۳۱+۳۵+۳۹=۱۳۲$ است. کوچک‌ترین عدد این حاصل‌جمع چهارتایی نیز $۱۵+۱۹+۲۳+۲۷=۸۴$ است. عددهای مجموعهٔ A، دارای فاصلهٔ ۴تایی هستند. حاصل مجموع چهار عدد از این مجموعه نیز همیشه دارای فاصلهٔ چهارتایی خواهند بود، مثلاً عدد بعد از ۸۴ که از حاصل‌جمع به دست می‌آید، ۸۸ است. باید به جای ۲۷، ۳۱ قرار دهیم: $۱۵+۱۹+۲۳+۳۱=۸۸$

پس الگوی حاصل‌جمع‌ها به شکل روبه‌رو است: $۸۴,۸۸,۹۲,\dots,۱۳۲\ \Rightarrow$ تعداد حاصل جمع‌ها $=\frac{۱۳۲-۸۴}{۴}+۱=\frac{۴۸}{۴}+۱=۱۳$

۲۸- گزینهٔ ۲ حاصل‌جمع، تقسیم و جذر عددهای مربع کامل، ممکن است مربع کامل نباشند. مانند:

$۳^۲+۲^۲=۹+۴=۱۳\ \Rightarrow$ مربع کامل نیست.

$۳^۲\div۲^۲=(\frac{۳}{۲})^۲\ \Rightarrow$ مربع کامل طبیعی نیست.

$\sqrt{۵^۲}=۵\ \Rightarrow$ مربع کامل نیست.

$\Rightarrow$ گزینه‌های (۱) و (۳) و (۴) نادرست هستند.

اما حاصل‌ضرب هر دو عدد مربع کامل، حتماً مربع کامل است و مجموعه نسبت به عمل ضرب بسته است. $a^۲\times b^۲=(a\times b)^۲\ \Rightarrow$ مربع کامل است

۲۹- گزینه ۴ حاصل‌جمع، ضرب و تفریق هر دو عدد صحیح، همیشه عددی صحیح است، اما حاصل تقسیم آن‌ها ممکن است صحیح نباشد. مانند:

$a=۵, b=۲ \Rightarrow a, b \in \mathbb{Z}$

$\frac{۵}{۲} = ۲/۵ \notin \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ گزینهٔ (۴) نادرست است.

۳۰- گزینه ۳

گزینهٔ (۱): $\{n^۲+۱ \mid n \in \mathbb{W}\} \xrightarrow{n=۰,۱,۲,۳,\dots} \{۰^۲+۱, ۱^۲+۱, ۲^۲+۱, ۳^۲+۱, \dots\} = \{۱,۲,۵,۱۰,۱۷,\dots\}$

گزینهٔ (۲): $\{n(n+۲) \mid n \in \mathbb{N}\} \xrightarrow{n=۱,۲,۳,۴,\dots} \{۱(۱+۲), ۲(۲+۲), ۳(۳+۲), ۴(۴+۲), \dots\} = \{۳,۸,۱۵,۲۴,۳۵,\dots\}$

گزینهٔ (۳): $\{(-n)^۲ \mid n \in \mathbb{N}, ۹<n<۱۵\} = \{n^۲ \mid n=۱۰,۱۱,۱۲,۱۳,۱۴\} = \{۱۰^۲,۱۱^۲,۱۲^۲,۱۳^۲,۱۴^۲\} = \{۱۰۰,۱۲۱,۱۴۴,۱۶۹,۱۹۶\}$

گزینهٔ (۳) هم‌خوانی ندارد.

گزینهٔ (۴): $\{\frac{n}{n^۲+۱} \mid n \in \mathbb{Z}, -۴<n<۴\} = \{\frac{n}{n^۲+۱} \mid n=-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳\}$

$= \{-\frac{۳}{(-۳)^۲+۱}, -\frac{۲}{(-۲)^۲+۱}, -\frac{۱}{(-۱)^۲+۱}, \frac{۰}{۰^۲+۱}, \frac{۱}{۱^۲+۱}, \frac{۲}{۲^۲+۱}, \frac{۳}{۳^۲+۱}\} = \{-\frac{۳}{۱۰}, -\frac{۲}{۵}, -\frac{۱}{۲}, ۰, \frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۵}, \frac{۳}{۱۰}\}$

۳۱- گزینه ۴ $\frac{x}{۲} \in \mathbb{N}$، پس xهای بین ۲ تا ۱۰ باید زوج باشند. $x=۴,۶,۸ \Leftarrow$ A سه عضو دارد. بزرگ‌ترین عضو A $= ۸^۲ = ۶۴$

۳۲- گزینه ۱

الف) $\{\varnothing, \cancel{\{\}}\} = \{\varnothing\} \neq \{\}$ ×

ب) $\{x \mid x^۲ \leq ۰\} \Rightarrow x^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow \{۰\} \neq \{\}$ ×

پ) $\{x \mid x \in \mathbb{N}, \frac{۱}{x} > ۱\}, x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \geq ۱ \Rightarrow \frac{۱}{x} \leq ۱ \Rightarrow$ مجموعهٔ (پ) تهی است.

۳۳- گزینه ۱ ابتدا شرط را بررسی کنیم:

$a \in \mathbb{N}, a<۴ \Rightarrow a=۱,۲,۳ \Rightarrow \{\frac{۱}{۸۱-a^۲} \mid a=۱,۲,۳\} = \{\frac{۱}{۸۱-۱^۲}, \frac{۱}{۸۱-۲^۲}, \frac{۱}{۸۱-۳^۲}\} = \{\frac{۱}{۸۰}, \frac{۱}{۷۷}, \frac{۱}{۵۴}\}$

۳۴- گزینه ۳ در مجموعه B، xها عضو A و $\frac{x^۲}{۲} \in \mathbb{N}$ هستند. در صورتی $\frac{x^۲}{۲}$ عددی طبیعی است که $x^۲$ عددی زوج و بزرگ‌تر از صفر باشد.

همهٔ عضوهای مجموعهٔ A را به توان ۲ می‌رسانیم:

$A = \{-۱, -\frac{۲}{۵}, ۰, ۱, \sqrt{۲}, \sqrt{۳}, ۲\} \Rightarrow ((-۱)^۲=۱), ((-\frac{۲}{۵})^۲ = \frac{۴}{۵}), (۰^۲=۰), (۱^۲=۱), (\sqrt{۲}^۲=۲), (\sqrt{۳}^۲=۳), (۲^۲=۴)$

که فقط ۲ و $x=\sqrt{۲}$ قابل قبول است، پس: $B = \{۲, \sqrt{۲}\}$

۳۵- گزینه ۲ اگر به همهٔ عضوهای مجموعهٔ A، یک واحد اضافه کنیم، همگی عضوها برابر، توانی از ۲ خواهند بود.

$\{۰,۱,۳,۷,\dots\} \xrightarrow{+۱} \{۱,۲,۴,۸,\dots\} = \{۲^۰, ۲^۱, ۲^۲, ۲^۳, \dots\}$

و در نتیجه مجموعهٔ A برابر است با: $\{۲^۰-۱, ۲^۱-۱, ۲^۲-۱, ۲^۳-۱, \dots\}$

$x \in \mathbb{W}$، چون توان‌ها از صفر شروع شده‌اند: $A = \{۲^x - ۱ \mid x \in \mathbb{W}\}$

۳۶- گزینه ۴ در همهٔ عضوهای مجموعهٔ داده‌شده، مخرج یک واحد بیشتر از صورت است و همهٔ کسرها به شکل $\frac{a}{a+۱}$ هستند.

$\Rightarrow \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{N}, a+۱=b\}$

۳۷- گزینه ۴ ابتدا عددهای خروجی از شرط را به دست آوریم:

$\frac{x}{۳} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = ۳$ صفر و مضرب‌های صحیح عدد

$x^۲ < ۲۰ \Rightarrow x^۲ = ۰,۱,۴,۹,۱۶ \Rightarrow x = -۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۴$

اما xهای مضرب ۳ و عدد صفر برابر ۳، ۰ و ۳− هستند. $\Rightarrow A = \{-۳, ۰, ۳\}$

۳۸- گزینه ۱ شکل عضو برابر $(x^۲+۲x+۱)$ است که آن را به صورت $(x+۱)^۲$ می نویسیم. یعنی عضوهای مجموعه، همگی مربع کامل هستند.

حالا $(x+۱)$ ها را پیدا کنیم.

$x \in \mathbb{Z}, -۱ \leq x < ۱۰۰ \xrightarrow{+۱} ۰ \leq x+۱ < ۱۰۱ \Rightarrow ۰ \leq x+۱ \leq ۱۰۰ \Rightarrow A = \{(x+۱)^۲ \mid (x=۱) = ۰,۱,۲,۳,۴,\dots,۱۰۰\}$

$\Rightarrow A = \{۰^۲, ۱^۲, ۲^۲, ۳^۲, ۴^۲, \dots, ۱۰۰^۲\} = \{۰,۱,۴,۹,۱۶,\dots,۱۰۰۰۰\}$

۳۹- گزینهٔ ۲ $n \in \mathbb{N}$، به جای n عددگذاری می‌کنیم:

$x=(-۱)^n\times(n^۲-۲n+۱)^۲=(-۱)^n\times((n-۱)^۲)^۲=(-۱)^n\times(n-۱)^۴$

$\Rightarrow \{(-۱)^۱\times(۱-۱)^۴,(-۱)^۲\times(۲-۱)^۴,(-۱)^۳\times(۳-۱)^۴,(-۱)^۴\times(۴-۱)^۴,\dots\} \Rightarrow \{۰,۱,-۲^۴,۳^۴,\dots\}=\{۰,۱,-۱۶,۸۱,\dots\}$

۴۰- گزینهٔ ۲ xها را از بخش شرط پیدا می‌کنیم:

$-(x+۱)\in\mathbb{Z} \Rightarrow -x-۱\in\mathbb{Z} \Rightarrow -x\in\mathbb{Z} \Rightarrow x\in\mathbb{Z}$

$(x+۲)^۲<۲۵ \Rightarrow (x+۲)^۲<۵^۲ \Rightarrow (x+۲)^۲=۰,۱,۴,۹,۱۶ \Rightarrow x+۲=۰,-۱,+۱,-۲,+۲,-۳,+۳,-۴,+۴$

برای به دست آوردن B باید از همهٔ $(x+۲)$ها، ۲ واحد کم کنیم:

$B=\{۰-۲,-۱-۲,+۱-۲,-۲-۲,+۲-۲,-۳-۲,+۳-۲,-۴-۲,+۴-۲\}=\{-۲,-۳,-۱,-۴,۰,-۵,۱,-۶,۲\}$

$=\{-۶,-۵,-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲\}$

۴۱- گزینهٔ ۴ هر دو عضو پشت سر هم مجموعهٔ A، ۱۲ واحد اختلاف دارند.

$A=\{۲۱\ ,\ ۳۳\ ,\ ۴۵\ ,\ ۵۷\ ,\ ۶۹,\dots\}$

$+۱۲\quad +۱۲\quad +۱۲\quad +۱۲$

در نتیجه کوچک‌ترین عضو چهاررقمی مجموعهٔ A و بزرگ‌ترین عضو سه‌رقمی مجموعهٔ A نیز دو عضو پشت سر هم این مجموعه هستند و فاصلهٔ آن‌ها از یکدیگر ۱۲تا است. این دو عدد به ترتیب $(۸۳\times۱۲+۹=۱۰۰۵)$ و $(۸۲\times۱۲+۹=۹۹۳)$ هستند.

۴۲- گزینهٔ ۱

$A=\{x\in\mathbb{Z} \mid ۱۰<(x-۳)^۲<۱۰۰\}$

از نامساوی بخش شرط جذر بگیریم:

$$۱۰<(x-۳)^۲<۱۰۰ \Rightarrow \sqrt{۱۰}<|x-۳|<۱۰ \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{۱۰}<x-۳<۱۰ \Rightarrow \sqrt{۱۰}+۳<x<۱۳ \\ -۱۰<x-۳<-\sqrt{۱۰} \Rightarrow -۷<x<-\sqrt{۱۰}+۳ \end{cases}$$

$\sqrt{۱۰}\simeq ۳/۱$ و نامساوی‌ها را دوباره می‌نویسیم:

$\overbrace{۳/۱+۳}^{۶/۱}<x<۱۳ \Rightarrow ۷\le x<۱۳ \Rightarrow x=۷,۸,۹,۱۰,۱۱,۱۲$

$-۷<x<-۳/۱+۳ \Rightarrow -۷<x\le -۱ \Rightarrow x=-۱,-۲,-۳,-۴,-۵,-۶$

$A=\{-۶,-۵,-۴,-۳,-۲,-۱,۷,۸,۹,۱۰,۱۱,۱۲\}$ و حاصل‌جمع عضوها برابر ۳۶ است.

۴۳- گزینهٔ ۴ ابتدا عضوهای هر مجموعه را تعیین کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} A=\{x \mid x\in P, x<\sqrt{۲۰۰۰}\} \\ \sqrt{۲۰۰۰}=۲۰\sqrt{۵}\simeq ۲۰\times ۲/۲=۴۴ \end{array}\right\} \Rightarrow A=\{۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹,\dots,۴۳\}$$

$B=\{x \mid x\in\mathbb{N}, -۲<x^۲-۱<۱۵\}=\{x \mid x\in\mathbb{N}, -۱<x^۲<۱۶\} \Rightarrow B=\{۱,۲,۳\}$

$A\cap B=\{۲,۳\} \Rightarrow n(A\cap B)=۲$

۴۴- گزینهٔ ۳ چون $B\subseteq A$، در نتیجه عضوهای B نمی‌توانند از ۳۰ بزرگ‌تر باشند:

$B\subseteq A: x\in B \Rightarrow x\in A$

$$\left.\begin{array}{l} x=۴n-۱ \\ x\in A \end{array}\right\} \Rightarrow ۴n-۱\le ۳۰ \Rightarrow ۴n\le ۳۱ \Rightarrow n\le \frac{۳۱}{۴} \Rightarrow n\le ۷$$

به جای n، ۷ عدد می‌توان گذاشت که ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ هستند و ۷ مقدار مختلف برای $x=۴n-۱$ به دست می‌آید، پس B دارای ۷ عضو خواهد بود.

$B=\{۴\times۱-۱,۴\times۲-۱,\dots,۴\times۷-۱\}=\{۳,۷,۱۱,\dots,۲۷\}$

۴۵- گزینهٔ ۱

$\sqrt{k}\in\mathbb{N} \Rightarrow k\in\mathbb{N}$ و k مربع کامل است $\Rightarrow k=۱,۴,۹,۱۶,۲۵,\dots$

$۲^k<۷۰ \Rightarrow ۲^k\le ۶۴=۲^۸ \Rightarrow k\le ۸ \Rightarrow$ k نمی‌تواند از ۸ بزرگ‌تر باشد $\Rightarrow k=۱,۴$

$A=\{۲k \mid k=۱,۴\} \Rightarrow A=\{۲,۸\}$

۴۶- گزینهٔ ۴ چون $\frac{۵x}{۳}\in\mathbb{N}$، در نتیجه ۵x مضرب ۳ است و x باید مضرب ۳ باشد. در بین xهایی که $-۱۰\le x\le ۱۰$، $x=-۹,-۶,-۳,۰,۳,۶,۹$ مضرب ۳ هستند.

$$\Rightarrow A=\{\frac{۵x}{۳} \mid \frac{۵x}{۳}\in\mathbb{N}, x=-۹,-۶,-۳,۰,۳,۶,۹\} \Rightarrow A=\{\frac{۵\times(۹)}{۳},\frac{۵\times(۶)}{۳},\frac{۵\times(۳)}{۳},\frac{۵\times۰}{۳}\} \xrightarrow{\frac{۵\times۰}{۳}\notin\mathbb{N}} A=\{۱۵,۱۰,۵\}$$

$\Rightarrow n(A)=۳$

۴۷- گزینهٔ ۲ ابتدا معادلهٔ $x=x^۳$ را طوری حل کنیم که $x\in\mathbb{Z}$ باشد.

$$x=x^۳ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x^۲=۱ \Rightarrow x=+۱,-۱ \end{cases} \Rightarrow A=\{-۱,۰,۱\} \Rightarrow n(A)=۳ \Rightarrow \text{تعداد زیرمجموعه‌ها}=۲^{n(A)}=۲^۳=۸$$

۴۸- گزینهٔ ۲

$-۳<n\leq ۵, n\in\mathbb{Z} \Rightarrow n=-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۴,۵ \Rightarrow A=\{\frac{(-۲)^۲}{۲^{-۲}},\frac{(-۱)^۲}{۲^{-۱}},\frac{(۰)^۲}{۲^۰},\frac{۱^۲}{۲^۱},\frac{۲^۲}{۲^۲},\frac{۳^۲}{۲^۳},\frac{۴^۲}{۲^۴},\frac{۵^۲}{۲^۵}\}$

$A=\{\frac{۴}{\frac{۱}{۴}},\frac{۱}{\frac{۱}{۲}},۰,\frac{۱}{۲},\frac{۴}{۴},\frac{۹}{۸},\frac{۱۶}{۱۶},\frac{۲۵}{۳۲}\}=\{۱۶,۲,۰,\frac{۱}{۲},۱,\frac{۹}{۸},\cancel{۱},\frac{۲۵}{۳۲}\} \Rightarrow n(A)=۷$

۴۹- گزینهٔ ۲

$\sqrt{x}\leq ۵ \xrightarrow{\text{به‌توان ۲}} x\leq ۲۵$

عضوها باید مثبت باشند، پس: $۲x-۳>۰ \Rightarrow ۲x>۳ \Rightarrow x>\frac{۳}{۲}$

$x\leq ۲۵, x>\frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{۳}{۲}<x\leq ۲۵ \Rightarrow ۲\leq x\leq ۲۵$

تعداد xهای قابل قبول برابر است با: $۲۵-۲+۱=۲۴$

۵۰- گزینهٔ ۴ با توجه به این‌که شکل عضو $x^{۲y}$ است، توان زوج بوده و اگر x منفی هم باشد، جواب نهایی مثبت است. در نتیجه x باید کوچک‌ترین مقدار ممکن باشد تا $x^{۲y}$ کوچک‌ترین مقدار باشد.

$x-y=۷,(x,y\in\mathbb{N}) \Rightarrow x_{\text{کوچک‌ترین}}=۸\,,\, y_{\text{کوچک‌ترین}}=۱ \Rightarrow x^{۲y}=۸^{۲(۱)}=۶۴$

۵۱- گزینهٔ ۳ ابتدا عضوهای مجموعهٔ A را پیدا می‌کنیم: $A=\{x^y \mid x,y\in\mathbb{Z}, x^۲+y^۲<۵\}$

$$x,y\in\mathbb{Z}\ ,\ x^۲+y^۲<۵ \xrightarrow[\text{برای x و y}]{\text{مقدارهای ممکن}} \begin{cases}(x=۱,y=۱),(x=-۱,y=-۱)\\(x=-۱,y=۱),(x=۱,y=-۱)\\(x=۰,y=۱),(x=۱,y=۰)\\(x=۰,y=-۱),(x=-۱,y=۰)\\(x=۰,y=۲),(x=۲,y=۰)\\(x=۰,y=-۲),(x=-۲,y=۰)\end{cases}$$

$$\Rightarrow A=\left\{۱^۱,(-۱)^{-۱},(۰-۱)^۱,(۱)^{-۱},(۰)^۱,(۱)^۰,\underbrace{\cancel{(۰)^{-۱}}}_{\text{تعریف‌نشده}},(-۱)^۰,(۰)^۲,(۲)^۰,\underbrace{\cancel{(۰)^{-۲}}}_{\text{تعریف‌نشده}},(-۲)^۰\right\}$$

$\Rightarrow A=\{۱,-۱,-۱,۱,۰,۱,۱,۰,۱,۱\}=\{-۱,۰,۱\}$

$B=\{x \mid x=۲n, n\in A\} \Rightarrow B=\{x \mid x=۲n-۱, n=-۱,۰,۱\} \Rightarrow B=\{۲(-۱)-۱,۲(۰)-۱,۲(۱)-۱\}=\{-۳,-۱,۱\} \Rightarrow n(B)=۳$

۵۲- گزینهٔ ۳

$A=\{n^۲ \mid n\in\mathbb{Z}, -۶<n<۶\} \Rightarrow n=-۵,-۴,\dots,۴,۵$

$\Rightarrow A=\{\cancel{(-۵)^۲},\cancel{(-۴)^۲},\cancel{(-۳)^۲},\cancel{(-۲)^۲},\cancel{(-۱)^۲},۰,۱^۲,۲^۲,۳^۲,۴^۲,۵^۲\}=\{۰,۱,۴,۹,۱۶,۲۵\}=n(A)=۶$

$B=\{n \mid n\in\mathbb{Z}, \frac{۱۲}{n}\in\mathbb{N}\} \Rightarrow B=$ شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۲ $\Rightarrow B=\{۱,۲,۳,۴,۶,۱۲\} \Rightarrow n(B)=۶$

$E=\{n \mid n\in\mathbb{Z}, n^۲\leq ۲۵\} \Rightarrow n^۲\leq ۲۵ \Rightarrow -۵\leq n\leq ۵ \Rightarrow E=\{-۵,-۴,-۳,\dots,۳,۴,۵\} \Rightarrow n(E)=۱۱$

$X=\{۷(\frac{۱۰^n-۱}{۹}) \mid n\in\mathbb{N}, n<۱۰\} \Rightarrow n=۱,۲,۳,\dots,۹$

$X=\{۷(\frac{۱۰-۱}{۹}),۷(\frac{۱۰^۲-۱}{۹}),۷(\frac{۱۰^۳-۱}{۹}),\dots,۷(\frac{۱۰^۹-۱}{۹})\}=\{۷,۷۷,۷۷۷,\dots,۷۷۷۷۷۷۷۷۷\} \Rightarrow n(X)=۹$

۵۳- گزینهٔ ۴ عددهای فرد در مجموعهٔ عددهای طبیعی یا صحیح تعریف می‌شوند؛ اگر $x\in\mathbb{R}$ یا $x\in\mathbb{Q}$ باشد، عددهای فرد به دست نمی‌آیند و گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست هستند.

گزینهٔ (۳): $\{۲x+۱ \mid x\in\mathbb{N}, -۱۳۹۶\leq x\leq ۰\} \Rightarrow$ هیچ مقداری بر x از شرط بیرون نمی‌آید و این مجموعه $\{\}$ است.

گزینهٔ (۴): $\{۲x-۱ \mid x\in\mathbb{N}, ۰\leq x\leq ۱۳۹۶\} \Rightarrow \{۲\times۰-۱,۲\times۱-۱,۲\times۲-۱,۲\times۳-۱,\dots\}$

$=\{-۱,۱,۳,۵,۷,\dots\} \Rightarrow$ همهٔ عضوها عددهای فرد هستند.

۵۴- گزینه ۲ ابتدا xهایی را که از بخش شرط خارج می‌شود، محاسبه کنیم.

$$-۷ \le \sqrt{x} \le ۴ \xrightarrow{x\in\mathbb{N}} ۱ \le \sqrt{x} \le ۴ \xrightarrow{\text{به‌توان ۲}} ۱ \le x \le ۱۶$$

عضوهایی از A را می‌خواهیم که عدد صحیح نباشند، شکل عضو را ساده کنیم: $\frac{۱۲x}{x^۲} = \frac{۱۲}{x} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$ x نباید شمارندهٔ ۱۲ باشد.

پس $x \ne ۱,۲,۳,۴,۶,۱۲$ و تعداد xهای باقی‌مانده ۱۰تا است، پس تعداد عضوهای غیرصحیح A نیز برابر ۱۰ می‌شود.

۵۵- گزینه ۱ ابتدا حالت‌های مختلف x و y را به دست می‌آوریم:

$$x,y\in\mathbb{Z}, xy=-۲ \Rightarrow (x=۱,y=-۲),(x=-۱,y=۲),(x=۲,y=-۱),(x=-۲,y=۱)$$

$$A=\{۳(۱)^{-(-۲)}-۲(-(-۲))^{-۱},۳(-۱)^{-۲}-۲(-۲)^{-(-۱)},۳(۲)^{-(-۱)}-۲(-(-۱))^{-۲},۳(-۲)^{-۱}-۲(-۱)^{-(-۲)}\}$$

$$A=\{۳-۲(\frac{۱}{۲}),۳-۲(-۲),۳(۲)-۲(۱),۳(-\frac{۱}{۲})-۲(۱)\}=\{۳-۱,۳+۴,۶-۲,-\frac{۳}{۲}-۲\}=\{۲,۷,۴,-\frac{۷}{۲}\} \Rightarrow \text{گزینهٔ (۱)}$$

۵۶- گزینه ۴

$$xy=۶ \Rightarrow (x=۱,y=۶),(x=۶,y=۱),(x=۲,y=۳),(x=۳,y=۲)$$

$$,(x=-۱,y=-۶),(x=-۶,y=-۱),(x=-۲,y=-۳),(x=-۳,y=-۲)$$

در ظاهر باید ۸ محاسبه انجام دهیم اما به حاصل دو کسر زیر دقت کنید:

$$(x=۱,y=۶) \Rightarrow \frac{۳x+y}{۳x-y}=\frac{۳(۱)+۶}{۳(۱)-۶}=-\frac{۹}{۳}=-۳$$

$$(x=-۱,y=-۶) \Rightarrow \frac{۳x+y}{۳x-y}=\frac{۳(-۱)+(-۶)}{۳(-۱)-(-۶)}=\frac{-۳-۶}{-۳+۶}=-\frac{۹}{۳}=-۳$$

فقط کافی است، حاصل کسرها را برای x و yهای مثبت محاسبه کنیم. چون وقتی x و y هر دو قرینه می‌شوند، حاصل کسر $\frac{۳x+y}{۳x-y}$ تغییر نمی‌کند.

$$\Rightarrow J=\{-۳,\frac{۳(۶)+۱}{۳(۶)-۱},\frac{۳(۲)+۳}{۳(۲)-۳},\frac{۳(۳)+۲}{۳(۳)-۲}\}=\{-۳,\frac{۱۹}{۱۷},۳,\frac{۱۱}{۷}\} \Rightarrow n(J)=۴$$

۵۷- گزینه ۲

$$x,y\in\mathbb{Z},-۴\le ۲x\le ۲ \Rightarrow -۲\le x\le ۱ \Rightarrow x=(-۲) \text{ یا } (-۱) \text{ یا } (۰) \text{ یا } (۱)$$

$$xy=۱۲ \Rightarrow (x=۱,y=۱۲),(x=-۱,y=-۱۲),(x=-۲,y=-۶) \Rightarrow A=\{۲^{۳(۱)+۱۲},۲^{۳(-۱)+(-۱۲)},۲^{۳(-۲)+(-۶)}\}$$

$$=\{۲^{۱۵},۲^{-۱۵},۲^{-۱۲}\} \Rightarrow n(A)=۳ \Rightarrow \text{تعداد زیرمجموعه‌ها}=۲^۳=۸$$

۵۸- گزینه ۱ با توجه به $xy=۸$ و $x,y\in\mathbb{Z}$، می‌توان گفت مقدارهای ممکن x و y عبارت‌اند از:

$$(x=۱,y=۸),(x=۸,y=۱),(x=۲,y=۴),(x=۴,y=۲)$$

$$,(x=-۱,y=-۸),(x=-۸,y=-۱),(x=-۲,y=-۴),(x=-۴,y=-۲)$$

$$\Rightarrow A=\{۱^۸,۸^۱,۲^۴,۴^۲,(-۱)^{(-۸)},(-۸)^{(-۱)},(-۲)^{(-۴)},(-۴)^{(-۲)}\}=\{۱,۸,۱۶,\cancel{۱۶},\cancel{۱},(-\frac{۱}{۸}),\frac{۱}{۱۶},\cancel{\frac{۱}{۱۶}}\} \Rightarrow n(A)=۵$$

۵۹- گزینه ۴ می‌دانیم $A \supseteq \{۶,۹\}$، در نتیجه $x^۲+k$ به ازای دو عدد مختلف باید برابر ۶ و ۹ باشد.

$$\begin{matrix} x=a \Rightarrow a^۲+k=۶ \\ x=b \Rightarrow b^۲+k=۹ \end{matrix} \xrightarrow{(-)} (b^۲+k)-(a^۲+k)=۹-۶ \Rightarrow b^۲-a^۲=۳$$

عبارت $b^۲-a^۲$ را تجزیه می‌کنیم و چون $a,b\in\mathbb{Z}$، معادله حل می‌شود:

$$b^۲-a^۲=(b-a)(b+a)=۳ \Rightarrow b-a=۱,b+a=۳ \Rightarrow b=۲,a=۱$$

یعنی x باید ۱ و ۲ باشد تا عددهای ۶ و ۹ به دست بیاید. $a^۲+k=۶ \Rightarrow ۱^۲+k=۶ \Rightarrow k=۵$

حالا باید بفهمیم $k=۵$، عضو کدام مجموعه است. چون بخش شرط همهٔ مجموعه‌ها $x\in\mathbb{Z}$ است، فقط چهار معادلهٔ زیر را حل می‌کنیم و جوابی قابل قبول است که $x\in\mathbb{Z}$ باشد.

گزینهٔ (۱): $۵x+۱=۵ \Rightarrow x=\frac{۴}{۵}\notin\mathbb{Z}$

گزینهٔ (۲): $۴x+۳=۵ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\notin\mathbb{Z}$

گزینهٔ (۳): $۲x+۶=۵ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}\notin\mathbb{Z}$

گزینهٔ (۴): $۳x-۴=۵ \Rightarrow x=۳\in\mathbb{Z}$ ✓

۶۰- گزینهٔ ۲ فرض کنیم کوچک‌ترین عضو مجموعهٔ A، ۱۰۰۰ باشد.

$$\Rightarrow ۱۵k-۷=۱۰۰۰ \Rightarrow ۱۵k=۱۰۰۷ \Rightarrow k=\frac{۱۰۰۷}{۱۵}\notin \mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{r|l} ۱۰۰۷ & ۱۵ \\ \hline ۱۰۰۵ & ۶۷ \\ \hline ۲ & \end{array}$$

$\frac{۱۰۰۷}{۱۵}$ عضو نیست اما اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم ۱۰۰۷ بر ۱۵ را به دست بیاوریم، می‌توان عدد موردنظر را پیدا کرد.

اگر: $k=۶۷ \Rightarrow ۱۵k-۷=۱۵\times ۶۷-۷=۹۹۸$

پس k باید ۶۸ باشد، پس $۱۵k-۷=۱۵\times ۶۸-۷=۱۰۱۳$. ۱۰۱۳ کوچک‌ترین عضو مجموعه است که رقم یکان آن ۳ می‌باشد.

۶۱- گزینهٔ ۲

> **نکتهٔ خوب:** اگر حاصل‌جمع دو عدد ثابت باشد، حاصل‌ضرب آن‌ها وقتی بزرگ‌ترین مقدار خود را دارد که دو عدد مساوی یا در نزدیک‌ترین حالت نسبت به هم باشند.

$x+y\le ۲۰, x\in E$ (اعداد زوج) , $y\in O$ (اعداد فرد)

$x+y$ را مساوی ۱۹ قرار می‌دهیم تا بزرگ‌ترین عددها را بتوانیم به دست بیاوریم (دقت کنید $x+y$ مساوی ۲۰ نمی‌شود، چون x زوج و y فرد است).

$$\left.\begin{array}{l} x+y=۱۹ \\ x,y \text{ نزدیک باشند} \end{array}\right\} \Rightarrow x=۱۰, y=۹ \Rightarrow (x-۱)(y-۱)=(۱۰-۱)(۹-۱)=۹\times ۸=۷۲$$

۶۲- گزینهٔ ۳ ابتدا شکل عضو را ساده کنیم:

$$F=\{۳\times (\frac{۱۰^{۲n-۱}-۱}{۹}) \mid n\in \mathbb{N}\}$$

$$F=\{\frac{۱۰^{۲n-۱}-۱}{۳} \mid n\in \mathbb{N}\} \Rightarrow n=۱,۲,۳,۴,۵,\dots$$

$$F=\{\frac{۱۰^{۲(۱)-۱}-۱}{۳},\frac{۱۰^{۲(۲)-۱}-۱}{۳},\frac{۱۰^{۲(۳)-۱}-۱}{۳},\frac{۱۰^{۲(۴)-۱}-۱}{۳},\dots\}=\{\frac{۱۰-۱}{۳},\frac{۱۰^{۳}-۱}{۳},\frac{۱۰^{۵}-۱}{۳},\frac{۱۰^{۷}-۱}{۳},\dots\}$$

$$F=\{\frac{۹}{۳},\frac{۹۹۹}{۳},\frac{۹۹۹۹۹}{۳},\frac{۹۹۹۹۹۹۹}{۳},\dots\}=\{۳,۳۳۳,۳۳۳۳۳,۳۳۳۳۳۳۳,\dots\}$$

۶۳- گزینهٔ ۲ ابتدا شکل عضو را ساده می‌کنیم:

$$\frac{۳^{x+۱}}{۹^{۲y}}=\frac{۳^{x+۱}}{(۳^{۲})^{۲y}}=\frac{۳^{x+۱}}{۳^{۴y}}=۳^{x+۱}\div ۳^{۴y}=۳^{x+۱-۴y}=۳^{x-۴y+۱}$$

از روی شرط، حاصل $x-۴y+۱$ را به دست می‌آوریم:

$$۴y-x=۲ \Rightarrow -۲=x-۴y \Rightarrow x-۴y+۱=-۲+۱ \Rightarrow x-۴y+۱=-۱ \Rightarrow A=\{۳^{x-۴y+۱}\}=\{۳^{-۱}\}=\{\frac{۱}{۳}\}$$

۶۴- گزینهٔ ۴ $-\frac{x}{۳}\in \mathbb{Q}$، پس می‌توان گفت که $x\in \mathbb{Q}$. در بازهٔ $-۴<x\le ۳$ بی‌شمار عدد گویا وجود دارد، در نتیجه مجموعهٔ A بی‌شمار عضو دارد.

۶۵- گزینهٔ ۳ در بخش شرط $x\in I$ و $x\le ۵$، پس تا این‌جا x می‌تواند مقدارهای صفر، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ را داشته باشد اما شرط دیگر هم باید درست باشد.

$(۳^{x}-۳)\in \mathbb{N}, x=۰,۱,۲,۳,۴,۵$

$$۳^{۰}-۳=-۲\notin \mathbb{N}, ۳^{۱}-۳=۰\notin \mathbb{N}, ۳^{۲}-۳=۶\in \mathbb{N} \Rightarrow$$

به ازای $۲\le x$، $(۳^{x}-۳)\in \mathbb{N}$ است و تعداد عضوهای مجموعه ۴ تا است.

۶۶- گزینهٔ ۳ مجموعهٔ داده‌شده را به شکل توان‌های ۲ می‌نویسیم.

$$\{\frac{۱}{۸},\frac{۱}{۲},۲,۸,\dots\}=\{۲^{-۳},۲^{-۱},۲^{۱},۲^{۳},\dots\}$$

یعنی ۲ به توان عدد فرد با شروع از (۳−). گزینه‌های (۱) و (۴) توان‌های زوج هم برای ۲ می‌سازند، چون ۲^{x} و ۲^{-x} هستند.

از $۲^{-۱}$ شروع‌شده و نادرست است.

گزینهٔ (۲): $\{۲^{۲x+۱} \mid x\in \mathbb{Z}, x>-۲\}=\{۲^{۲(-۱)+۱},\dots\}=\{۲^{-۱},\dots\}$

گزینهٔ (۳): $\{۲^{۲x-۵} \mid x\in \mathbb{N}\}=\{۲^{۲(۱)-۵},۲^{۲(۲)-۵},۲^{۲(۳)-۵},۲^{۲(۴)-۵},\dots\}=\{۲^{-۳},۲^{-۱},۲^{۱},۲^{۳},\dots\}$ ✓

۶۷- گزینهٔ ۳ در گزینهٔ (۴) به ازای هر $n\in\mathbb{N}$، $n^۳>n^۲$ است و این مجموعه عضو پایانی ندارد.

گزینهٔ (۲): $n=۱ \Rightarrow ۲^۱>۱^۲, n=۲ \Rightarrow ۲^۲=۲^۲, n=۳ \Rightarrow ۲^۳<۳^۲, n=۴ \Rightarrow ۲^۴=۴^۲, n=۵ \Rightarrow ۲^۵>۵^۲$

$, n=۶ \Rightarrow ۲^۶>۶^۲ \Rightarrow$ این مجموعه عضو پایانی ندارد.

و از همین مثال متوجه می‌شویم، مجموعهٔ $\{n\in\mathbb{N} \mid n^۲>۲^n\}$ دارای عضو پایانی است. $\{n\in\mathbb{N} \mid n^۲>۲^n\}=\{۳\}$

گزینهٔ (۱) نیز دارای عضو پایانی نیست، چون $n=۱۰ \Rightarrow ۲^{۱۰}=۱۰۲۴>۱۰^۳=۱۰۰۰$ و برای $n>۱۰$، همواره $۲^n>n^۳$ است.

۶۸- گزینهٔ ۲ به شرط مجموعه نگاه کنیم: $۱<\frac{a}{b}$ پس $a<b$ و چون $b<۱۳$ است، می‌توان گفت: $a<b<۱۳$ و $a,b\in\mathbb{N}$، پس b می‌تواند همهٔ عددهای ۲، ۳، ۴، ۵، ...، ۱۱، ۱۲ باشد. a نیز می‌تواند عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ...، ۱۰، ۱۱ باشد، به شرطی که $۱<\frac{a}{b}$ حفظ شود. اگر $a=۱$ را در نظر بگیریم، b می‌تواند عددهای ۲، ۳، ۴، ... تا ۱۲ را اختیار کند و کسرهای زیر ساخته می‌شود:

$$\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۵},\frac{۱}{۶},\frac{۱}{۷},\frac{۱}{۸},\frac{۱}{۹},\frac{۱}{۱۰},\frac{۱}{۱۱},\frac{۱}{۱۲}, \Rightarrow \text{۱۱ کسر}$$

اگر $a=۲$ باشد، $b\geq ۳$ بوده و b نمی‌تواند مقدارهای زوج را بگیرد، چون $a=۲$ با مخرج ساده شده و کسر مساوی با کسرهای قبلی می‌سازد.

$$\frac{۲}{۳},\cancel{\frac{۲}{۴}},\frac{۲}{۵},\cancel{\frac{۲}{۶}},\frac{۲}{۷},\cancel{\frac{۲}{۸}},\frac{۲}{۹},\cancel{\frac{۲}{۱۰}},\frac{۲}{۱۱},\cancel{\frac{۲}{۱۲}} \Rightarrow \text{۵ کسر}$$

اگر $a=۳$ باشد، $b\geq ۴$ بوده و b نباید مضرب ۳ باشد. $\Rightarrow \frac{۳}{۴},\frac{۳}{۵},\frac{۳}{۷},\frac{۳}{۸},\frac{۳}{۱۰},\frac{۳}{۱۱} \Rightarrow$ ۶ کسر

اگر $a=۴$ باشد، $b\geq ۵$ و b مضرب ۲ نباشد. $\frac{۴}{۵},\frac{۴}{۷},\frac{۴}{۹},\frac{۴}{۱۱} \Rightarrow$ ۴ کسر

اگر $a=۵$ باشد، $b\geq ۶$ و b مضرب ۵ نباشد. $\frac{۵}{۶},\frac{۵}{۷},\frac{۵}{۸},\frac{۵}{۹},\frac{۵}{۱۱},\frac{۵}{۱۲} \Rightarrow$ ۶ کسر

اگر $a=۶$ باشد، $b\geq ۶$ و b مضرب ۲ و ۳ نباشد. $\frac{۶}{۷},\frac{۶}{۱۱} \Rightarrow$ ۲ کسر

اگر $a=۷$ باشد، $b\geq ۸$ و b مضرب ۷ نباشد. $\frac{۷}{۸},\frac{۷}{۹},\frac{۷}{۱۰},\frac{۷}{۱۱},\frac{۷}{۱۲} \Rightarrow$ ۵ کسر

و کسرهای دیگر به این شکل هستند. $\frac{۸}{۹},\frac{۸}{۱۱},\frac{۹}{۱۰},\frac{۹}{۱۱},\frac{۱۰}{۱۱},\frac{۱۱}{۱۲} \Rightarrow$ ۶ کسر

و در کل ۴۵ کسر مختلف و ۴۵ عضو خواهیم داشت.

۶۹- گزینهٔ ۳ تهی زیرمجموعهٔ همهٔ مجموعه‌هاست؛ حتی خود تهی. پس: $\varnothing\subseteq\varnothing$ و گزینهٔ (۳) نادرست است.

۷۰- گزینهٔ ۴ عضوهای زیرمجموعه‌ها، باید عضو مجموعهٔ اصلی هم باشند اما در گزینهٔ (۴)، $\{\{a\}\}\notin L$ و $\{b,\{\{a\}\}\}\not\subseteq L$.

۷۱- گزینهٔ ۳ $M=\{\{\},\{\varnothing\}\} \Rightarrow \{\}\in M,\{\varnothing\}\in M$

$$\left.\begin{array}{l}\text{اولین زیرمجموعه}: \{\}\\ \text{تک‌عضوی‌ها}: \{\{\}\},\{\{\varnothing\}\}\\ \text{دوعضوی‌ها}: \{\{\},\{\varnothing\}\}=M\end{array}\right\} \Rightarrow \{\{\},\{\{\}\},\{\{\varnothing\}\},M\}$$

۷۲- گزینهٔ ۲ $A=\{a,\{۱,۲a+b\}\}$ و $B=\{۳,۲a+۱,\{-a,۰\}\}$

$A\subseteq B$ است، با توجه به شکل مجموعه‌ها، تساوی مقابل حتماً برقرار است: $\{۱,۲a+b\}=\{-a,۰\} \Rightarrow \begin{cases}-a=۱\ ,\ a=-۱\\ ۲a+b=۰ \Rightarrow b=-۲a=+۲\end{cases}$

۷۳- گزینهٔ ۴ ابتدا عضوهای A را بنویسیم: $A=\{x \mid \frac{۲۰}{\frac{۱}{۲}x}\in\mathbb{Z}\} \Rightarrow A=\{x \mid \frac{۴۰}{x}\in\mathbb{Z}\}$

$A=$ شمارنده‌های صحیح عدد ۴۰ $=\{-۴۰,-۲۰,-۱۰,-۸,-۵,-۴,-۲,-۱,۱,۲,۴,۵,۸,۱۰,۲۰,۴۰\} \Rightarrow n(A)=۱۶$

تعداد زیرمجموعه‌های ۱۵عضوی یک مجموعهٔ ۱۶عضوی با تعداد زیرمجموعه‌ها $(۱۶-۱۵)=$ یک‌عضوی برابر است.

$۱۶=$ تعداد زیرمجموعه‌های یک‌عضوی برای مجموعهٔ ۱۶عضوی

۷۴- گزینه ۱ مجموعهٔ A عضوهایی را در خود دارد که عضو P بوده و مقدار آن‌ها کم‌تر از $\sqrt{۸۰۰۰}$ است. مجموعهٔ اعداد اول، بی‌شمار عضو دارد و پایان ندارد؛ پس حتماً $A \subseteq P$ است.

۷۵- گزینه ۳ یک مجموعهٔ n عضوی، ۲^n زیرمجموعه دارد و مجموعهٔ زیرمجموعه‌های آن ۲^n عضو و $۲^{(۲^n)} = ۲^{۲^n}$ زیرمجموعه دارد. به مجموعهٔ زیرمجموعه‌ها، مجموعهٔ توانی می‌گویند.

۷۶- گزینه ۴ از $n(A) < n(B)$، نمی‌توان قطعی گفت که $A \subseteq B$؛ ممکن است $A \not\subseteq B$. اما وقتی می‌گوییم $B \subseteq C$، آن‌گاه حتماً $n(B) \le n(C)$ خواهد بود ⇐ گزینهٔ (۳) می‌تواند درست نباشد.

$$\left.\begin{matrix} A \not\subseteq B \\ B \subseteq C \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \not\subseteq C \Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) می‌تواند درست نباشد.

$$\left.\begin{matrix} B \subseteq C \Rightarrow n(B) \le n(C) \\ n(A) < n(B) \end{matrix}\right\} \Rightarrow n(A) < n(C) \Rightarrow$$ گزینهٔ (۴) حتماً درست است.

۷۷- گزینه ۴ $A = \{۱,۲\}$ و $C = \{-۱,۰,۱,۲,۳\}$، آن‌گاه مجموعهٔ B حتماً عضوهای ۱ و ۲ را دارد اما عضوهای ۱-، صفر و ۳ را می‌تواند داشته باشد یا نداشته باشد. پس گزینهٔ (۳) و (۱) ممکن است نادرست باشد.

$C \subseteq D$، یعنی $n(C) \le n(D)$ و ممکن است تعداد عضوهای C و D برابر باشد. پس گزینهٔ (۲) نادرست است.

$C \subseteq D$، یعنی: $۰ \in C, -۱ \in C \Rightarrow ۰ \in D, -۱ \in D$ و حتماً $\{۰,-۱\} \subset D$ است.

۷۸- گزینه ۴ مجموعه‌ای که تنها یک زیرمجموعه دارد، مجموعهٔ تهی است ⇐ $A = \varnothing$ $\qquad ۲^n \xrightarrow{n=۰} ۲^۰ = ۱$

و تهی، زیرمجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها است.

گزینهٔ (۴) نادرست است، چون: $A \cap \{a,b\} = \varnothing \cap \{a,b\} = \varnothing$

۷۹- گزینه ۱ مجموعهٔ $\{۲,۳,۴,x,y\}$، $۲^۳ = ۸$ زیرمجموعه دارد، پس مقدار عضوهای آن باید برابر ۳ شود. یعنی x و y می‌توانند مقدارهای ۲ یا ۳ یا ۴ را داشته باشند. $(x+y)$ باید کوچک‌ترین مقدار شود. پس: $x = y = ۲ \Rightarrow x + y = ۴$

۸۰- گزینه ۲ مجموعهٔ $A = \{-۱,-۲,-۸,۲x,y+۱,z\}$، هفت زیرمجموعهٔ محض و در نتیجه ۸ زیرمجموعه دارد و باید $n(A) = ۳$ شود. (۲x، y+۱ و z) می‌توانند مقدارهای (۱-، ۲-، ۸-) را داشته باشند، برای آن‌که $(x+y+z)$ کم‌ترین مقدار ممکن شود:

$$z = -۸, y+۱ = -۸, ۲x = -۸ \Rightarrow z = -۸, y = -۹, x = -۴ \Rightarrow x + y + z = -۴ + (-۹) + (-۸) = -۲۱$$

۸۱- گزینه ۲ ابتدا مجموعهٔ A را با عضوهایش می‌نویسیم: $A = \{x \mid -۳x - ۱ \ge -۱۶, x \in \mathbb{W}\}$

$$-۳x - ۱ \ge -۱۶ \Rightarrow ۳x + ۱ \le ۱۶ \Rightarrow ۳x \le ۱۵ \Rightarrow x \le ۵$$

$$x \le ۵, x \in \mathbb{W} \Rightarrow A = \{۰,۱,۲,۳,۴,۵\} \Rightarrow n(A) = ۶$$

برای نوشتن زیرمجموعه‌های شامل ۴ و بدون صفر، هر دو عضو را کنار گذاشته و مقدار زیرمجموعه‌های ممکن را با عضوهای باقی‌مانده به دست می‌آوریم: ۴ عضو باقی می‌ماند $\Rightarrow ۲^۴ = ۱۶$

۸۲- گزینه ۳ با توجه به رابطهٔ $\{۲,۴,۶,۸\} \subseteq A \subseteq \{۱,۲,۳,۴,\dots,۱۰\}$، مجموعهٔ A می‌تواند همهٔ زیرمجموعه‌های ممکن که چهار عضو ۲، ۴، ۶ و ۸ را دارند، باشد، پس این چهار عضو را کنار گذاشته و تعداد زیرمجموعه‌های حاصل از ۶ عضو باقی‌مانده از مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,۴,\dots,۱۰\}$ را محاسبه می‌کنیم: $۲^۶ = ۶۴$

۸۳- گزینه ۳ در مجموعه‌ای مانند A، زیرمجموعه‌هایی که زیرمجموعهٔ B نیز هستند، از عضوهای مشترک A و B ساخته می‌شوند. پس در این‌جا زیرمجموعه‌های حاصل از اشتراک مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$ با هر یک از مجموعه‌های $\{۱,۲,۳,۴\}$ و $\{۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$ باید از کل زیرمجموعه‌های خودش کم شود.

$$\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\} \cap \{۱,۲,۳,۴\} = \{۱,۲,۳,۴\} \Rightarrow ۲^۴ = ۱۶$$

$$\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\} \cap \{۳,۴,۵,۶,۷,۸\} = \{۳,۴,۵,۶,۷\} \Rightarrow ۲^۵ = ۳۲$$

اما دقت کنید که برخی زیرمجموعه‌ها دو بار شمرده شده‌اند، چون $\{۱,۲,۳,۴\}$ و $\{۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$ هم دارای عضو مشترک هستند که $\{۳,۴\}$ می‌باشد و لازم است $۲^۲$ به جواب نهایی اضافه شود. $\Rightarrow ۲^۷ - ۲^۴ - ۲^۵ + ۲^۲ = ۸۴$

۸۴- گزینه ۲ زیرمجموعه‌های ۳عضوی را می‌خواهیم که عدد ۱۰ حتماً عضو آن‌ها باشد. پس دو عضو دیگر (غیر از ۱۰) باید انتخاب کرد. البته در بین این دو عضو عددهای ۲ و ۳ نباید انتخاب شوند و باید از بین ۱۲ عدد باقی‌مانده، زیرمجموعه‌های ۲عضوی را انتخاب کرد و ۱۰ را به آن زیرمجموعه‌ها اضافه کرد.

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های ۲عضوی یک مجموعهٔ ۱۲عضوی} = \frac{۱۲ \times (۱۲-۱)}{۲} = \frac{۱۲ \times ۱۱}{۲} = ۶۶$$

۸۵- گزینهٔ ۳ وقتی کوچک‌ترین عضو مجموعه ۳ باشد، یعنی عدد ۲ در زیرمجموعه‌های موردنظر جایی ندارد و عضوهای ۴، ۵، ۶، ۷ باقی می‌مانند که باید ۳ تا از آن‌ها، برای‌ساختن زیرمجموعهٔ ۴عضوی با عدد ۳ انتخاب شوند.

تعداد زیرمجموعه‌های سه‌عضوی از مجموعهٔ ۴عضوی = تعداد زیرمجموعه‌های یک‌عضوی از مجموعهٔ ۴عضوی = ۴

۸۶- گزینهٔ ۴ ابتدا کل زیرمجموعه‌ها را به دست آورده و سپس زیرمجموعه‌هایی که اصلاً عدد اول ندارند را از کل زیرمجموعه‌ها، کم می‌کنیم:

تعداد زیرمجموعه دارای حداقل یک عدد اول = (تعداد کل زیرمجموعه‌ها) − (تعداد زیرمجموعه‌هایی که حداقل یک عضو اول دارند)

$= ۲^۸ - ۲^۴ = ۲۵۶ - ۱۶ = ۲۴۰$

۸۷- گزینهٔ ۴ $A = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \Rightarrow$ عددهای اول مجموعهٔ $A = \{۲,۳,۵\}$

تعداد زیرمجموعه‌هایی که عدد اول دارند $(۷ = ۱ - ۲^۳)$ است. عدد ۱ را به خاطر این‌که یکی از زیرمجموعه‌ها تهی است، کم کردیم.

۸۸- گزینهٔ ۲ $A = \{۱,۲,۳,۴,۵\} \Rightarrow$ عددهای اول مجموعهٔ $A = \{۲,۳,۵\}$

برای‌ساختن زیرمجموعه‌ها، ابتدا باید ۲ عضو اول برداریم که سه حالت ایجاد می‌شود: (۲,۳) یا (۲,۵) یا (۳,۵) و عضوهای دیگر می‌توانند (۴,۱) باشند که $۲^۲$ دارد. $\Rightarrow$ حالت ۳ × حالت $۲^۲$ = حالت ۱۲

۸۹- گزینهٔ ۲ تعداد زیرمجموعه‌های دوعضوی مجموعهٔ nعضوی $= \dfrac{n(n-۱)}{۲} = ۴۵ \Rightarrow n(n-۱) = ۹۰ \Rightarrow n = ۱۰$

تعداد زیرمجموعهٔ ۹عضوی مجموعهٔ ۱۰عضوی = تعداد زیرمجموعهٔ ۱عضوی مجموعهٔ ۱۰عضوی = ۱۰

۹۰- گزینهٔ ۲ A، ۶ عضو دارد. با توجه به سؤال: $n_۰ + n_۱ + n_۲ + n_۳ + n_۴ + n_۵ + n_۶ =$ تعداد کل زیرمجموعه‌ها $= ۲^۶ = ۶۴$

$n_۰ =$ تعداد مجموعه بدون عضو یا تهی $= ۱$

$n_۱ =$ تعداد زیرمجموعه دارای یک عضو $= ۶$

$\Rightarrow n_۰ + n_۱ = ۷ \Rightarrow n_۲ + n_۳ + n_۴ + n_۵ + n_۶ = ۶۴ - ۷ = ۵۷$

۹۱- گزینهٔ ۲ به دنبال زیرمجموعه‌هایی مانند $\{۴,a,b\}$ هستیم که $۴ + a + b = ۱۵$ و $a \neq b$.

$۴ + a + b = ۱۵ \Rightarrow a + b = ۱۱$

به دنبال جفت‌هایی از مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,...,۹\}$ هستیم، که حاصل‌جمع آن‌ها ۱۱ شود.

a	۲	۳	۴	۵
b	۹	۸	۷	۶

$(a = ۲, b = ۹)$ یا $(a = ۳, b = ۸)$ یا $(a = ۴, b = ۷)$ یا $(a = ۵, b = ۶)$

که حالت $(a = ۴, b = ۷)$ قابل قبول نیست، چون زیرمجموعهٔ $\{۴,۴,۷\}$ ساخته می‌شود که در اصل دوعضوی و مساوی $\{۴,۷\}$ است؛ پس فقط ۳ زیرمجموعهٔ $\{۴,۲,۹\}$، $\{۴,۳,۸\}$ و $\{۴,۵,۶\}$ ساخته می‌شود.

۹۲- گزینهٔ ۳ تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ $(۲n - ۱)$ عضوی $= ۲^{۲n-۱} = ۳۲ = ۲^۵ \Rightarrow ۲n - ۱ = ۵$

$\Rightarrow ۲n = ۶ \Rightarrow n = ۳ \Rightarrow$ اما این مجموعه ۵ عضو دارد

۹۳- گزینهٔ ۴ $\dfrac{۲^{n+۳}}{۲^{n-۱}} = ۲^{(n+۳)-(n-۱)} = ۲^{۳+۱} = ۲^۴ = ۱۶$

۹۴- گزینهٔ ۴ تعداد عضوهای $B = ۵ \Rightarrow$ تعداد زیرمجموعهٔ $B = ۲^۵$ تعداد عضوهای $A = n \Rightarrow$ تعداد زیرمجموعهٔ $A = ۲^n$

$۲^n - ۲^۵ = ۹۶ \Rightarrow ۲^n = ۹۶ + ۲^۵ = ۹۶ + ۳۲ = ۱۲۸ = ۲^۷ \Rightarrow n = ۷$

۹۵- گزینهٔ ۲ تعداد عضوهای $A = k$

$۲^{k+۲} = ۲^k + ۱۹۲ \Rightarrow ۲^{k+۲} - ۲^k = ۱۹۲ \Rightarrow ۲^k(۲^۲ - ۱) = ۱۹۲ \Rightarrow ۲^k \times ۳ = ۱۹۲ \Rightarrow ۲^k = ۶۴ = ۲^۶ \Rightarrow k = ۶$

۹۶- گزینهٔ ۲ تعداد زیرمجموعهٔ محض یک مجموعهٔ nعضوی $= ۲^n - ۱$

$\Rightarrow ۲^{k+۳} - ۱ = ۲^{k+۵} - ۹۷ \Rightarrow ۲^{k+۳} - ۲^{k+۵} = -۹۷ + ۱ \Rightarrow ۲^{k+۳}(۱ - ۲^۲) = -۹۶ \Rightarrow ۲^{k+۳} \times (-۳) = -۹۶$

$\Rightarrow ۲^{k+۳} = ۳۲ = ۲^۵ \Rightarrow k + ۳ = ۵ \Rightarrow k = ۲$

تعداد زیرمجموعهٔ مجموعهٔ $(k + ۲)$ عضوی $= ۲^{k+۲} = ۲^{۲+۲} = ۲^۴ = ۱۶$

۹۷- گزینهٔ ۳ $n(B)$ را برابر x بگیریم و معادله را بنویسیم:

$۲^{x-۳} = ۲^x - ۲۲۴ \Rightarrow ۲^x - ۲^{x-۳} = ۲۲۴ \Rightarrow ۲^{x-۳}(۲^۳ - ۱) = ۲۲۴ \Rightarrow ۲^{x-۳} \times ۷ = ۲۲۴ \Rightarrow ۲^{x-۳} = \dfrac{۲۲۴}{۷} = ۳۲ = ۲^۵$

$\Rightarrow x - ۳ = ۵ \Rightarrow x = ۸$

۹۸- گزینهٔ ۲ معادلهٔ مسئله را می‌نویسیم: $۱۰\times ۲^{k}-۲^{k+۳}=۶۴\Rightarrow ۲^{k}(۱۰-۲^{۳})=۶۴\Rightarrow ۲^{k}\times ۲=۶۴\Rightarrow ۲^{k}=۳۲=۲^{۵}\Rightarrow k=۵$

یک مجموعهٔ ۵عضوی، چهار زیرمجموعهٔ ۴عضوی دارد.

۹۹- گزینهٔ ۱

$A=\{۱۰,۱۱,۱۲,۱۳,۱۴,\dots,۹۷,۹۸,۹۹\}$

با توجه به مسئله: $B=\{۵k\mid k\in A\}\subseteq A$

بزرگ‌ترین عضوی که در B می‌توان قرار داد، عدد ۹۵ است. چون ۹۵ عضو A بوده و $۹۵=۵\times ۱۹$ و همچنین $۱۹\in A$. پس عضوهای B به شکل $\{۵\times ۱۹,۵\times ۱۸,۵\times ۱۷,۵\times ۱۶,\dots,۵\times ۱۰\}$ روبه‌رو هستند:

که تعداد عضوهایش $۱۹-۱۰+۱=۱۰$ است.

۱۰۰- گزینهٔ ۴ در مجموعهٔ $M=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$، زیرمجموعه‌های $\{\}$، یک‌عضوی و دوعضوی، دارای ۳ عدد متوالی نیستند.

$n(M)=۵\Rightarrow$ تعداد تهی $=۱$ و تعداد یک‌عضوی $=۵$ و تعداد دوعضوی $=\frac{۵\times ۴}{۲}=۱۰$

در زیرمجموعه‌های ۳عضوی، $\{۱,۲,۴\}$، $\{۱,۲,۵\}$، $\{۲,۳,۵\}$، $\{۱,۳,۵\}$، $\{۱,۳,۴\}$، $\{۱,۴,۵\}$ و $\{۲,۴,۵\}$ سه عدد متوالی ندارند، که ۷تا هستند.

در زیرمجموعه‌های چهارعضوی نیز، فقط $\{۱,۲,۴,۵\}$، سه عدد متوالی ندارد.

تعداد زیرمجموعه‌های بدون سه عدد متوالی $=۱+۵+۱۰+۷+۱=۲۴$

۱۰۱- گزینهٔ ۴ می‌توانیم این مجموعه‌ها را بنویسیم: $\{۱,۲,۳\},\{۱,۴,۵\},\{۱,۶,۷\},\{۲,۴,۶\},\{۲,۵,۷\},\{۳,۴,۷\},\{۳,۵,۶\}$

۱۰۲- گزینهٔ ۳ عدد ۴۵ را تجزیه کرده و شمارنده‌های آن را از کوچک به بزرگ می‌نویسیم:

$۴۵=۳^{۲}\times ۵\Rightarrow$ شمارنده‌های ۴۵ $=\{۱,۳,۵,۹,۱۵,۴۵\}$

چون در مجموعه، مجاز به نوشتن عضو تکراری نیستیم، فقط این زیرمجموعه‌ها وجود دارد: $\{۱,۴۵\}\ ,\ \{۳,۱۵\}\ ,\ \{۵,۹\}$

۱۰۳- گزینهٔ ۱ شرط اول می‌گوید، حداقل یکی از اعداد ۱، ۲ و ۳ عضو A باشند، بودن یا نبودن هر کدام از این اعداد ۲ حالت دارد.

تعداد حالت‌های بودن یا نبودن سه عدد ۱، ۲ و ۳ $=۲\times ۲\times ۲=۲^{۳}=۸$

اما در یکی از این حالت‌ها هیچ‌کدام از این عددها در مجموعهٔ A قرار نخواهند گرفت و در نتیجه: تعداد حالت‌های شرط اول $=۸-۱=۷$

شرط دوم بیان می‌کند که از بین ۴ و ۵، یا هر دو عضو A باشد یا اصلاً هیچ‌کدام نباشند پس شرط دوم، فقط ۲ حالت دارد.

در شرط سوم، یکی از عددهای ۶ یا ۷ یا ۸ وجود دارند؛ یعنی با ۳ حالت روبه‌رو خواهیم بود.

شرط‌ها در مورد اعداد ۹ و ۱۰ صحبت نمی‌کنند، بودن یا نبودن آن‌ها مهم نیست؛ در نتیجه هر کدام ۲ حالت دارند و با $۲\times ۲=۴$ روبه‌رو هستیم.

برای ساختن زیرمجموعهٔ A سه شرط اول باید رعایت شده و وضعیت دو عدد ۹ و ۱۰ معلوم شود و از اصل ضرب استفاده می‌کنیم:

$\underset{\text{شرط اول}}{۷}\times\underset{\text{شرط دوم}}{۲}\times\underset{\text{شرط سوم}}{۳}\times\underset{\text{وضعیت ۹ و ۱۰}}{۴}=۷\times ۲\times ۳\times ۴=۱۶۸$

۱۰۴- گزینهٔ ۳ همهٔ مضرب‌های ۶، زوج خواهند بود اما مضرب‌های ۳ و ۹، می‌توانند فرد هم باشند. پس مضرب‌های ۳ و مضرب‌های ۹ نمی‌توانند، زیرمجموعهٔ مضرب‌های ۶ باشند.

عدد ۱۲ مضرب ۶ است، در نتیجه همهٔ مضرب‌های ۱۲، حتماً مضرب ۶ هستند و (مضرب‌های ۱۲) $\subseteq$ (مضرب‌های ۶).

۱۰۵- گزینهٔ ۲

نکتهٔ خوب: در یک مجموعهٔ nعضوی، هر عضو در $۲^{n-۱}$ زیرمجموعه وجود دارد.

هر عضو یک مجموعهٔ شش‌عضوی، مانند $\{a,b,c,d,e,f\}$، در ۳۲ زیرمجموعهٔ آن حضور دارد. (این‌طور فکر کنید: چند زیرمجموعه داریم که حتماً a عضو آن باشد؟)

وقتی مجموع هر زیرمجموعه را می‌نویسیم و با هم جمع می‌کنیم، مانند این است که همهٔ اعضا را به تعداد تکرارشده‌شان با هم جمع کنیم:

حاصل جمع مجموع همهٔ عددهای زیرمجموعه‌ها $=۳۲a+۳۲b+۳۲c+۳۲d+۳۲e+۳۲f=۳۲(a+b+c+d+e+f)=۳۲\times ۴۰=۱۲۸۰$

۱۰۶- گزینهٔ ۱ به شرطی می‌توان تعدادی عدد را به دو دسته با مجموع برابر تقسیم کرد که مجموع عددهای آن تعداد اعداد، زوج باشد. در گزینه‌های (۳) و (۴) مجموع عددهای داده‌شده، زوج نیست.

$$\text{گزینهٔ (۳)}: \{1,2,3,4,\dots,21\} \Rightarrow \text{مجموع اعداد} = \frac{21\times(21+1)}{2}=\frac{21\times 22}{2}=21\times 11=231$$

در مجموعهٔ $\{1^2,2^2,3^2,\dots,10^2\}$ نیز پنج عدد زوج $(2^2,4^2,6^2,8^2,10^2)$ و پنج عدد فرد $(1^2,3^2,5^2,7^2,9^2)$ داریم که حاصل‌جمع این ۱۰ عدد، فرد خواهد بود. در مجموعهٔ گزینهٔ (۲) $\{2^1,2^2,2^3,\dots,2^{10}\}$، حاصل‌جمع همهٔ عضوها برابر است با:

$$2^1+2^2+2^3+\dots+2^{10}=\underbrace{\underbrace{\underbrace{2+2^1}_{2^2}+2^2}_{2^3}+2^3}_{2^4}+\dots+2^{10}-2=2^{11}-2$$

پس دو دسته با مجموع $\frac{2^{11}-2}{2}$ باید بسازیم:

$$\frac{2^{11}-2}{2}=2^{10}-1 \Rightarrow$$

چون $(2^{10}-1)$ عددی فرد است، نمی‌توانیم آن را با مجموع عضوهای زوج بسازیم.

اما در مجموعهٔ گزینهٔ (۱) چون عددها متوالی هستند، به راحتی این کار تقسیم به دسته با مجموع مساوی انجام می‌شود، چون عددها به ۱۰ دسته با مجموع‌های برابر ۲۱ تقسیم می‌شوند.

$$\{1,2,3,4,5,\dots,20\}$$

$$(1+20)=(2+19)=(3+18)=(4+17)=(5+16)=\dots=(10+11)$$

برای دو دسته‌کردن آن‌ها، کافی است ۵تا از این دسته‌ها را در یک مجموعه و ۵تای دیگر را در مجموعهٔ بعدی قرار دهیم.

۱۰۷- گزینهٔ ۱ برای آن‌که مجموع دو عدد زوج باشد، باید یا هر دو فرد یا هر دو زوج باشند. در مجموعهٔ $A=\{1,2,3,\dots,10\}$ پنج عدد فرد $(1,3,5,7,9)$ و پنج عدد زوج $(2,4,6,8,10)$ داریم، یا ۲تا از مجموعهٔ اعداد فرد یا ۲تا از مجموع اعداد زوج انتخاب می‌کنیم:

$$\Rightarrow \text{انتخاب ۲تا از ۵ عدد فرد} + \text{انتخاب ۲تا از ۵ عدد زوج} = \frac{5\times 4}{2}+\frac{5\times 4}{2}=10+10=20$$

۱۰۸- گزینهٔ ۳ در حل سؤال دقت می‌کنیم که ۵ و ۷ نباید عضو زیرمجموعه‌ها باشند و هم‌چنین همهٔ عددهای ۲، ۴، ۶ و ۸ نمی‌توانند در یک زیرمجموعه باشند و عدد ۴ نباید با هر کدام از عددهای ۲، ۶ و ۸ به تنهایی در یک زیرمجموعه باشد. حالا این زیرمجموعه‌ها عبارت هستند از:

$$\{1\},\{4\},\{1,4\},\{1,2,8\},\{1,2,4,8\},\{1,2,3,6\},\{1,2,3,4,6\},\{1,3,6,8\}$$

$$\{1,3,4,6,8\},\{2,8\},\{2,4,8\},\{2,3,6\},\{2,3,4,6\},\{3,6,8\},\{3,4,6,8\},$$

۱۰۹- گزینهٔ ۲ در مجموعهٔ $\{x,x+2\}$، اگر x فرد باشد، $(x+2)$ عدد فرد بعد از آن است و اگر x زوج باشد، $(x+2)$ عدد زوج بعد از آن خواهد بود.

مجموعهٔ A را به دو تکه، اعداد فرد متوالی و زوج متوالی تقسیم می‌کنیم:

$$\{1,3,5,7,9,11,\dots,95,97,99\} \Rightarrow \text{تعداد اعضا} = \frac{99-1}{2}+1=50$$

$$\{2,4,6,8,10,12,\dots,94,96,98\} \Rightarrow \text{تعداد اعضا} = \frac{98-2}{2}+1=49$$

در مجموعهٔ اعداد فرد ۴۹ جفت، مانند $(1,3)$، $(3,5)$، $(5,7)$، ....، $(97,99)$ داریم. در مجموعهٔ اعداد زوج، ۴۸ جفت مانند $(2,4)$، $(4,6)$، $(6,8)$، ....، $(96,98)$ داریم و در کل $49+48=97$ جفت، یا زیرمجموعهٔ ۲عضوی به شکل $\{x,x+2\}$ خواهیم داشت.

۱۱۰- گزینهٔ ۳ عدد ۱ نمی‌تواند عضو S باشد، چون همهٔ عددها مضرب ۱ هستند. اگر ۲ را به عنوان کوچک‌ترین عضو در نظر بگیریم، بقیهٔ ۵ عدد باید فرد باشند که به مجموعهٔ $\{2,3,5,7,9,11\}$ می‌رسیم که درست نیست. چون ۹ مضرب ۳ است، اگر عدد ۳ را به عنوان کوچک‌ترین عضو در نظر بگیریم، عضوهای دیگر می‌توانند ۵ عضو از بین عددهای $(4,5,6,8,10,11)$ باشند و در نهایت مجبور هستیم دو عضو $(5,10)$ یا $(4,8)$ را انتخاب کنیم که دوباره درست نخواهد بود.

حالا کوچک‌ترین عضو را ۴ در نظر بگیریم و مجموعهٔ S برابر است با $\{4,5,6,7,9,11\}$ که درست است و هیچ عضوی مضرب عضو دیگر نیست.

۱۱۱- گزینهٔ ۲ در بین عددهای ۱ تا ۳۰، ۶ عدد مضرب ۵ هستند، پس حداکثر یکی از این ۶ عدد (یعنی ۵، ۱۰، ۱۵، ۲۰، ۲۵ و ۳۰) می‌توانند عضو S باشند. در بین عددهای ۱ تا ۳۰، شش عدد داریم که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر عدد ۵ برابر ۱ است، یعنی عددهای ۱، ۶، ۱۱، ۱۶، ۲۱، ۲۶. شش عدد هم داریم که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر عدد ۵ برابر ۴ است، یعنی عددهای ۴، ۹، ۱۴، ۱۹، ۲۴، ۲۹. از این دو دسته فقط یکی را می‌توانیم انتخاب کنیم، چون مجموع هر کدام از آن‌ها با هم، مضرب ۵ است. مثلاً $45=16+29$ یا $5=4+1$. در بین عددهای ۱ تا ۳۰، شش عدد داریم که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر عدد ۵ برابر ۲ است و به همین ترتیب، شش عدد با باقی‌ماندهٔ ۳ داریم که $(2,7,12,17,22,27)$ و $(3,8,13,18,23,28)$ هستند. از این دو دسته نیز فقط یکی را می‌توان انتخاب کرد، پس در کل می‌توان $1+6+6=13$ عدد انتخاب کرد.

۱۱۲- گزینه ۴ برای‌ساختن زیرمجموعه‌هایی که مجموع عضوها مضرب ۳ باشند، آن‌ها را به سه مجموعه تقسیم می‌کنیم.

A = عضوهای مضرب ۳، B = عضوهایی که در تقسیم بر ۳ باقی‌ماندهٔ ۱ دارند. C = عضوهایی که در تقسیم بر ۳ باقی‌ماندهٔ ۲ دارند.

$A=\{۳,۶,۹\}, B=\{۱,۴,۷\}, C=\{۲,۵,۸\}$

سه‌تا از زیرمجموعه‌های با مجموع عضوهای مضرب ۳، همین مجموعه‌های A و B و C هستند.

مجموعه‌های دیگر را باید این‌طور ساخت: یک عضو از A، یک عضو از B و یک عضو از C که همیشه حاصل‌جمع این سه انتخاب مضرب ۳ است.

$\underset{\text{انتخاب از A}}{\underline{\text{۳حالت}}}\ \underset{\text{انتخاب از B}}{\underline{\text{۳حالت}}}\ \underset{\text{انتخاب از C}}{\underline{\text{۳حالت}}} \Rightarrow ۳\times۳\times۳=۲۷ \qquad ۲۷+۳=۳۰$

۱۱۳- گزینه ۳ در مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,\dots,۱۱,۱۲\}$، شش جفت عدد داریم که حاصل‌جمع آن‌ها برابر ۱۳ است.

$(۱,۱۲)\ ,\ (۲,۱۱)\ ,\ (۳,۱۰)\ ,\ (۴,۹)\ ,\ (۵,۸)\ ,\ (۶,۷)$

اگر بزرگ‌ترین عضو زیرمجموعه ۱۲ و کوچک‌ترین آن ۱ باشد، ۱۰ عضو دیگر می‌توانند در زیرمجموعه باشند یا نباشند. پس $۲^{۱۰}$ زیرمجموعه با بزرگ‌ترین عضو برابر ۱۲ و کوچک‌ترین عضو برابر ۱ وجود دارد.

اگر بزرگ‌ترین عضو زیرمجموعه ۱۱ و کوچک‌ترین آن ۲ باشد، ۸ عضو دیگر می‌توانند عضو زیرمجموعه باشند یا نباشند و در این حالت $۲^۸$ زیرمجموعه داریم. طبق همین روند، تعداد کل زیرمجموعه‌ها برابر است با:

$$\underset{۲^{۱۰}}{\underset{\downarrow}{(۱,۱۲)}} + \underset{۲^{۸}}{\underset{\downarrow}{(۲,۱۱)}} + \underset{۲^{۶}}{\underset{\downarrow}{(۳,۱۰)}} + \underset{۲^{۴}}{\underset{\downarrow}{(۴,۹)}} + \underset{۲^{۲}}{\underset{\downarrow}{(۵,۸)}} + \underset{۲^{۰}}{\underset{\downarrow}{(۶,۷)}} = ۱۰۲۴+۲۵۶+۶۴+۱۶+۴+۱=۱۳۶۵$$

۱۱۴- گزینه ۲ در مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,۴,\dots,۸\}$ اختلاف جفت عددهای $(۴,۸),(۳,۷),(۲,۶),(۱,۵)$، برابر ۴ است.

اگر در جفت عددها، یکی بزرگ‌ترین عضو زیرمجموعه و دیگری کوچک‌ترین عضو آن باشد، هر کدام از ۳ عضو دیگر بین آن‌ها، می‌تواند در زیرمجموعه باشد یا نباشد. مثلاً وقتی ۵ بزرگ‌ترین عضو و یک کوچک‌ترین عضو باشد، عددهای ۲، ۳، ۴ هر کدام ۲ حالت دارد که در زیرمجموعه باشند یا نباشند.

$(۱,۵) \Rightarrow ۲^۳$ زیرمجموعه

هر کدام از دسته‌های دیگر نیز $۲^۳$ زیرمجموعه می‌سازند و تعداد کل آن‌ها، برابر $۴\times۲^۳=۳۲$ می‌شود.

۱۱۵- گزینه ۳ چون همهٔ علامت‌ها $\cap$ است، پرانتز را برمی‌داریم:

$$(A\cap B)\cap(A\cap B')=A\cap B\cap A\cap B' \xrightarrow{\text{جابه‌جایی}} \underbrace{(A\cap A)}_{A}\cap\underbrace{(B\cap B')}_{\varnothing}=A\cap\varnothing=\varnothing$$

۱۱۶- گزینه ۱ از قوانین دمورگان استفاده می‌کنیم:

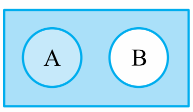
$$B'\cup C'=(B\cap C)' \Rightarrow (A\cup B'\cup C')\cap[A\cup(B\cap C)]=(A\cup(B\cap C)')\cap[A\cup(B\cap C)]$$

$$\xrightarrow[\text{توزیع‌پذیری}]{\text{برعکس}} A\cup\underbrace{((B\cap C)'\cap(B\cap C))}_{\varnothing}=A$$

۱۱۷- گزینه ۴ A و B جدا از هم هستند. $\Leftarrow A\cap B=\varnothing$

$A\cap B'=A-B=A-(A\cap B)=A-\varnothing=A$

از نمودار ون هم می‌توانستیم کمک بگیریم:

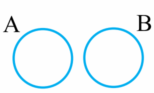


$A\cap B'=$ مجموعه‌ای که دو بار رنگ شده $=A$

۱۱۸- گزینه ۲

$$\left.\begin{array}{l} A\cup(B\cap A')=(A\cup B)\cap\underbrace{(A\cup A')}_{M}=A\cup B \\ A\subseteq B \end{array}\right\} \Rightarrow A\cup B=B$$

۱۱۹- گزینه ۳ اگر $A-B=A$ باشد، یعنی A و B دو مجموعهٔ جدا از هم هستند و $A\cap B=\varnothing$:



$\Rightarrow B-A=B$

گزینهٔ (۱) : $A\not\subseteq B, B\not\subseteq A \Rightarrow A\cup B\neq A\neq B$

گزینهٔ (۲) : $A\cap B=\varnothing\neq B$

گزینهٔ (۴) : $A\cap B=\varnothing \Rightarrow B\subseteq A' \Rightarrow A'\cup B=A'$

۱۲۰- گزینه ۱ با استفاده از شرط‌های داده‌شده، حاصل عبارت‌ها را به دست می‌آوریم.

$A\cap B=A \Rightarrow A\subseteq B \Rightarrow A-B=\varnothing$

$A\subseteq B, C\subseteq A \Rightarrow C\subseteq A\subseteq B \Rightarrow C\subseteq B \Rightarrow C\cup B=B$

$(A-B)\cup(C\cup B)=\varnothing\cup B=B$

۱۲۱- گزینه ۲ ابتدا نتایج حاصل از $A\subseteq B$ را بررسی می‌کنیم:

$A\subseteq B \Rightarrow (A\cap B)=A, (B-A)=B-A, A-B=\varnothing$

$$\left.\begin{array}{r}[(A-B)]\cup(B-A)\cup(A\cap B)=\varnothing\cup(B-A)\cup A=A\cup B\\ A\subseteq B\end{array}\right\} \Rightarrow A\cup B=B$$

۱۲۲- گزینه ۴ حاصل عبارت‌ها را به دست می‌آوریم:

گزینه (۱): $\left.\begin{array}{r}A-(B-A)=A-(B\cap A')=A\cap(B\cap A')'=A\cap(B'\cup A)\\ A\subseteq(B'\cup A)\end{array}\right\} \Rightarrow A\cap(B'\cup A)=A$ ✓

گزینه (۲): $(A\cup B)-B=(A\cup B)\cap B'=(A\cap B')\cup \overset{\varnothing}{\cancel{(B\cap B')}}=A-B$ ✓

گزینه (۳): $(B-A)\cup(A\cap B)=(B\cap A')\cup(B\cap A)=B\cap \overset{M}{\cancel{(A\cup A')}}=B$ ✓

گزینه (۴): $B\cup(A-B)=B\cup(A\cap B')=(B\cup A)\cap \overset{M}{\cancel{(B\cup B')}}=B\cup A$ ✗

۱۲۳- گزینه ۱

الف) $(A\cap B)\subseteq B \Rightarrow (A\cap B)\cup B=B$ ✓

ب) $(A-B)\cup B=(A\cap B')\cup B=(A\cup B)\cap \underset{M}{\cancel{(B'\cup B)}}=A\cup B$ ✓

پ) A و $(B-A)$ دو مجموعهٔ جدا از هم هستند. $\Rightarrow A\cap(B-A)=\varnothing$ ✗

ت) $(B\cap C)\subseteq(B\cup C) \Rightarrow (A\cap D\cap B\cap C)\subseteq(B\cup C) \Rightarrow (A\cap B\cap C\cap D)\cup(B\cup C)=B\cup C$ ✓

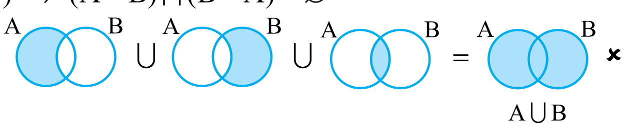
۱۲۴- گزینه ۳

گزینه (۱): $A-B=A\cap B'=B'\cap A=B'-A'$ ✓

گزینه (۲): $A-B=A\cap B'$ ✓

گزینه (۴): $(A-B)$ و $(B-A)$ جدا از هم هستند: $\Rightarrow (A-B)\cap(B-A)=\varnothing$ ✓

گزینه (۳): $[A-B]\cup[B-A]\cup(A\cap B)=$



۱۲۵- گزینه ۳ با استفاده از جبر مجموعه‌ها مسئله را حل می‌کنیم:

گزینه (۱): $A'\cap(A\cup B)=\overset{\varnothing}{\cancel{(A'\cap A)}}\cup(A'\cap B)=B\cap A'=B-A$ ✓

گزینه (۲): $A\cap(B\cup A')=(A\cap B)\cup \overset{\varnothing}{\cancel{(A\cap A')}}=A\cap B$ ✓

گزینه (۳): $\underbrace{(A\cap(A\cup B))}_{A}\cup(B-A)=A\cup(B-A)=A\cup B$ ✗

گزینه (۴): $A\cup(B'-A)=A\cup(B'\cap A')=(A\cup B')\cap \overset{M}{\cancel{(A\cup A')}}=A\cup B'$ ✓

۱۲۶- گزینه ۲

گزینه (۱): $(A\cap B)\cup(A\cap B')=A\cap \overset{M}{\cancel{(B\cup B')}}=A$ ✗

گزینه (۲): $A\cap(B-C)=A\cap B\cap C'=(A\cap B)\cap C'=(A\cap B)-C$ ✓

گزینه (۳): $(A-B)\subseteq(A\cup B) \Rightarrow (A\cup B)\cup(A-B)=A\cup B$ ✗

گزینه (۴): $A\cap(A'-B')=\underbrace{A\cap A'}_{\varnothing}\cap B'=\varnothing$ ✗

۱۲۷- گزینه ۴

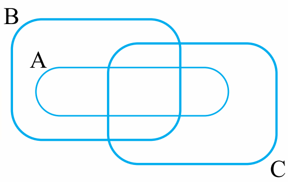
$B-A=B-(A\cap B) \Rightarrow (B-A)\cup(A\cap B)=B$

$[(B-A)\cup(A\cap B)]-B=B-B=\varnothing \Rightarrow \varnothing'=M$

۱۲۸- گزینهٔ ۴

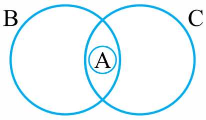
$$(A\cap[\underbrace{(\cancel{B\cap A'}^{\,B}\cup B)}_{(B\cap A')\subseteq B}])\cap(A-B)=(A\cap B)\cap(A-B)\xrightarrow{\text{(A−B) هیچ عضوی از B ندارد.}}\varnothing$$

۱۲۹- گزینهٔ ۳ وقتی $A\subseteq(B\cup C)$، نمی‌توانیم حتماً بگوییم که $A\subseteq B$ و $A\subseteq C$؛ چون ممکن است حالتی که در شکل می‌بینید به وجود آمده باشد.



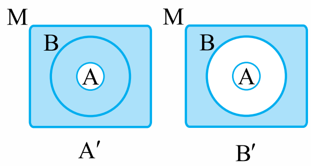
اما وقتی هم‌زمان $A\subseteq(B\cap C)$ می‌شود، یعنی همهٔ عضوهای A در ناحیهٔ مشترک B و C حضور دارند و هر عضو A هم در B است و هم در C و در نتیجه هر دو شرط $A\subseteq B$ و $A\subseteq C$ لازم است.

گزینهٔ (۲) می‌تواند نادرست باشد، به نمودار دقت کنید: $B\not\subseteq C\xrightarrow{\text{اما}}$ شرط مسئله درست است. $\Rightarrow$



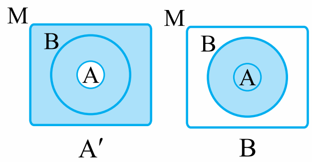
۱۳۰- گزینهٔ ۴

الف) $A\subseteq B\Rightarrow$



$\Rightarrow B'\subseteq A'$ ✓

ب) $A\subseteq B\Rightarrow$



$\Rightarrow A'\cup B=M$ ✓

پ) $A\subseteq B\Rightarrow A\cap B'=A-B=\varnothing$ ✓

۱۳۱- گزینهٔ ۴ مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ را در نظر بگیریم، مجموعه‌های A و B و C و D را با توجه به دو شرط $(A\cup C)=(B\cup D)$ و $(A\cap C)=(B\cap D)$ و با استفاده از اعضای آن تعیین کنیم:

$A=\{۱,۲,۳\}$ و $C=\{۴,۵,۶\}$ و $B=\{۱,۳,۵\}$ و $D=\{۲,۴,۶\}$

$A\cup C=B\cup D=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و $A\cap C=B\cap D=\varnothing$

الف) $A\cap B=\{۱,۳\}\neq C\cap D=\{۴,۶\}$ ✗

ب) $A\cup B=\{۱,۲,۳,۵\}\neq C\cup D=\{۲,۴,۵,۶\}$ ✗

پ) $A\not\subseteq B$ و $D\not\subseteq B$ ✗

ت) $A\neq B$ و $C\neq D$ ✗

هر چهار عبارت نادرست است و جواب گزینهٔ (۴) است.

۱۳۲- گزینهٔ ۳ $(A-B)$ هیچ عضوی از B ندارد، پس وقتی $(A-B)\subseteq B$ می‌شود، $A-B=\varnothing$ خواهد بود و در نتیجه $A\subseteq B$ است.

$$[(A-B')\cup(B-A')]\cap A=[(A\cap B)\cup(B\cap A)]\cap A=\underbrace{A\cap B}_{A}\cap A=A$$

۱۳۳- گزینهٔ ۱ اگر $A\cap B=A$ باشد، $A\subseteq B$ می‌شود.

$A\subseteq B,C\subseteq A\Rightarrow C\subseteq B$

$(A-B)\cup(C\cup B)=\varnothing\cup(B)=B$

۱۳۴- گزینهٔ ۲

گزینهٔ (۱): $(A\cap B)\subseteq A\Rightarrow(A\cap B)\cup A=A$ ✗

گزینهٔ (۲): $(A\cup B)-B=(A\cup B)\cap B'=(A\cap B')\cup\underbrace{\cancel{(B\cap B')}}^{\varnothing}=A\cap B'$ ✓

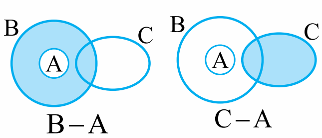
گزینهٔ (۳): $A-B'=A\cap B$ ✗

گزینهٔ (۴): $(A-B)'=(A\cap B')'=A'\cup B$ ✗

۱۳۵- گزینهٔ ۴ گزینهٔ (۱) و (۳) درست است، چون هر عضوی که در A هست در B نیز هست. پس همهٔ عضوهای موجود در $(A\cup C)$ در $(B\cup C)$ نیز هست و همچنین عضوهای $(A\cap C)$ در $(B\cap C)$ نیز هستند.

گزینهٔ (۲) درست است. $A\subseteq B\Rightarrow A-B=\varnothing\Rightarrow(A-B)\subseteq(B-C)$

گزینهٔ (۴) نادرست است، به نمودار دقت کنید.



۱۳۶- گزینهٔ ۱ **الف)** درست است، چون همهٔ عضوهای $(A\cup B)$ در $D\cup(B\cup A)$ وجود دارند.

ب) نادرست است. $(A'\cap B')=(A\cup B)'\not\subseteq(A\cup B)$

پ) نادرست است، مجموعهٔ C زیرمجموعهٔ $((A-B)\cup C)$ است. همچنین در مجموعهٔ $((A-B)\cup C)$ هیچ عضوی از B نداریم. بنابراین $C-B=C\cap B'$ حتماً زیرمجموعهٔ $((A-B)\cup C)$ است.

ت) نادرست است. $(X'\cap Y'\cap A\cap B')=\underbrace{(X\cup Y\cup A'\cup B)'}_{E'}\not\subseteq\underbrace{(X\cup Y\cup A'\cup B)}_{E}$

۱۳۷- گزینهٔ ۴ می‌دانیم $x\in(A'\cup B)'$ است، عبارت را ساده کنیم: $x\in(A'\cup B)'\Rightarrow x\in(A\cap B')\Rightarrow x\in(A-B)$

یعنی x عضو A هست اما عضو B نیست، در نتیجه x بر ۳ بخش‌پذیر است اما بر ۵ بخش‌پذیر نیست.

۱۳۸- گزینهٔ ۳ مجموعهٔ B دو عضو ۳ و ۴ را دارد و چون $A\cup B=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ است، مجموعهٔ A حتماً ۱، ۲ و ۵ را در خود دارد. اما ممکن است هر کدام از عضوهای ۳ یا ۴ را داشته باشد یا نداشته باشد. هر کدام ۲ حالت دارند و در نتیجه $۲^۲=۴$ حالت بر A وجود دارد.

۱۳۹- گزینهٔ ۲

$A=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,۳\geq|x|\}\Rightarrow|x|\leq۳\Rightarrow-۳\leq x\leq۳\Rightarrow A=\{-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳\}$

$B=\{x\in\mathbb{N}\,|\,x^۲<۹\}\Rightarrow x^۲<۹\Rightarrow x\in\mathbb{N},x=۱,۲\Rightarrow B=\{۱,۲\}$

$A-B=\{-۳,-۲,-۱,۰,۳\}\Rightarrow n(A-B)=۵\Rightarrow$ تعداد زیرمجموعه‌ها $=۲^۵=۳۲$

۱۴۰- گزینهٔ ۲ ابتدا مجموعهٔ B را با اعضایش مشخص می‌کنیم:

$B=\{x\,|\,\frac{x}{۳}\in\mathbb{Z},-۴<x\leq۱۲\}\Rightarrow$ x باید مضرب ۳ یا صفر باشد.

$-۴<x\leq۱۲\Rightarrow B=\{-۳,۰,۳,۶,۹,۱۲\}$

حالا مجموعهٔ A را بررسی کنیم: $A=\{x^۲-m\,|\,x\in\mathbb{Z},-۳<x\leq m\}$

$۳<x\leq m\Rightarrow x=-۳,-۲,-۱,۰,\dots,m\quad,\quad m\geq۴$

$\Rightarrow A=\{(-۳)^۲-m,(-۲)^۲-m,(-۱)^۲-m,۰^۲-m,۱^۲-m,\dots,m^۲-m\}$

m را باید طوری انتخاب کنیم که A و B سه عضو مشترک داشته باشند، چون: $n(A\cap B)=۳$

و m کوچک‌ترین مقدار ممکن باشد تا حداقل تعداد عضوهای $(A-B)$ به دست بیاید. اگر $m=۴$ قرار داده شود، نتیجهٔ موردنظر به دست می‌آید:

$A=\{۹-m,۴-m,۱-m,۰-m,\cancel{۱-m},\cancel{۴-m},\cancel{۹-m},۱۶-m\}=\{۹-۴,۴-۴,۱-۴,۰-۴,۱۶-۴\}=\{۵,۰,-۳,-۴,۱۲\}$

$A\cap B=\{-۳,۰,۱۲\}\Rightarrow n(A\cap B)=۳\quad,\quad A-B=\{-۴,۵\}\Rightarrow n(A-B)=۲$

۱۴۱- گزینهٔ ۳ ابتدا هر مجموعه را با اعضایش مشخص می‌کنیم: $A=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,\sqrt{x}\leq۴,\sqrt{x}\in\mathbb{N}\}$

$\sqrt{x}\in\mathbb{N}\Rightarrow$ عدد x مربع کامل است.

$\sqrt{x}\leq۴\xrightarrow{\text{به توان ۲}}x\leq۱۶,x>۰\Rightarrow A=\{۱۶,۹,۴,۱\}\quad,\quad B=\{۲x\,|\,x\in\mathbb{Z}\}=\{\dots,-۴,-۲,۰,۲,۴,\dots\}$

$A\cap B=\{۱۶,۴\}\Rightarrow n(A\cap B)=۲$

۱۴۲- گزینهٔ ۴ چند مجموعهٔ A_n را بنویسیم:

$A_۱=\{۱\},A_۲=\{۱,۲\},A_۳=\{۱,۲,۳\},A_۴=\{۱,۲,۳,۴\},\dots,A_n=\{۱,۲,۳,۴,\dots,n\}\Rightarrow A_۱\subset A_۲\subset A_۳\subset A_۴\subset\dots\subset A_n$

$\Rightarrow\underbrace{\underbrace{\underbrace{A_۱\cup A_۲}_{A_۲}\cup A_۳}_{A_۳}\cup A_۴}_{A_۴}\cup\dots\cup A_n=A_n$

۱۴۳- گزینهٔ ۱ A_i ها را بنویسیم:

$A_۱=\{x\,|\,-۱<x<۱,x\in\mathbb{N}\}\Rightarrow A_۱=\varnothing$

$A_۲=\{x\,|\,-۲<x<۲,x\in\mathbb{N}\}\Rightarrow A_۲=\{۱\}\quad,\quad A_۳=\{x\,|\,-۳<x<۳,x\in\mathbb{N}\}=\Rightarrow A_۳=\{۱,۲\}$

$A_۴=\{x\,|\,-۴<x<۴,x\in\mathbb{N}\}\Rightarrow A_۴=\{۱,۲,۳\}\quad,\quad A_n=\{x\,|\,-n<x<n,x\in\mathbb{N}\}\Rightarrow A_n=\{۱,۲,۳,۴,\dots,(n-۱)\}$

$\Rightarrow A_۱\cap A_۲\cap A_۳\cap A_۳\cap A_۴\cap\dots\cap A_n=\varnothing$

۱۴۴- گزینهٔ ۳ هر مجموعه ۱۰ عضو دارد و با شمارهٔ مجموعه شروع می‌شود.

$$A_۳=\{۳,۴,۵,۶,\ldots,۱۲\},\quad A_۴=\{۴,۵,۶,۷,\ldots,۱۳\} \Rightarrow A_۳\cap A_۴=\{۴,۵,۶,۷,۸,\ldots,۱۲\}$$

$$A_۷=\{۷,۸,۹,۱۰,\ldots,۱۶\},\quad A_۸=\{۸,۹,۱۰,۱۱,\ldots,۱۷\} \Rightarrow A_۷\cap A_۸=\{۸,۹,۱۰,۱۱,\ldots,۱۶\}$$

پس مجموعه‌های $A_۳$ تا $A_۸$ مجموعه عضوهای $\{۸,۹,۱۰,۱۱,۱۲\}$ را دارند و این مجموعه، مساوی اشتراک همهٔ آن‌ها است و پنج عضو دارد.

۱۴۵- گزینهٔ ۱ اگر $A\subseteq B\subseteq C$ باشد، تعداد عضوهای $A\cup B\cup C$ کم‌ترین مقدار خود را دارد و $A\cup B\cup C=C$ بوده و ۴ عضو دارد.

اگر مجموعه‌های A، B و C را طوری انتخاب کنیم که عضو مشترک هر کدام حداقل یکی باشد، مجموعه‌هایی مانند زیر خواهیم داشت:

$$A=\{a,b\}\ ,\ B=\{a,b,d\}\ ,\ C=\{a,e,f,g\} \Rightarrow A\cup B\cup C=\{a,b,\cancel{a},c,d,\cancel{a},e,f,g\}=\{a,b,c,d,e,f,g\}$$

البته مجموعه‌ها را طوری نوشتیم که در اجتماع آن‌ها بیشترین عضو را داشته باشد. $\Rightarrow n(A\cup B\cup C)=۷$

۱۴۶- گزینهٔ ۵ با توجه به شکل داده‌شدهٔ صورت سؤال داریم:

$$D=A-B\ ,\ E=B-C\ ,\ F=D-E$$

$$F=D-E=(A-B)-(B-C)$$

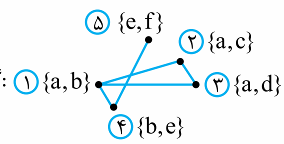
مجموعهٔ $(B-C)$ از B عضو دارد اما هیچ عضوی از C ندارد. مجموعهٔ $(A-B)$ هیچ عضوی از B ندارد، پس $(A-B)\cap(B-C)$ تهی است و

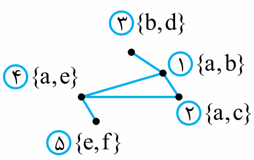
$$F=A-B \Rightarrow F=D$$

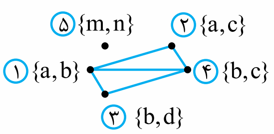
گزینهٔ (۵) درست است. $(D\cap C)=(F\cap C)\subseteq F$

دلیلی برای درستی گزینهٔ (۱) نداریم، برای گزینهٔ (۲) نیز دلیل حتمی برای درست‌بودن نداریم. برای گزینهٔ (۳) و (۴) نیز دلیل درستی قطعی وجود ندارد و ممکن است درست نباشد.

۱۴۷- گزینهٔ ۱ برای حل این مسئله می‌توان از حدس و آزمایش استفاده کرد. با این روش برای گزینه‌های(۲)، (۳) و (۴) می‌توان ۵ مجموعهٔ متفاوت را نوشت اما برای گزینهٔ (۱) نمی‌توان ۵ مجموعهٔ متفاوت نوشت. شماره‌های هر نقطه، ترتیب نوشتن مجموعهٔ مناسب را نشان می‌دهد.

گزینهٔ (۴):


گزینهٔ (۳):


گزینهٔ (۲):


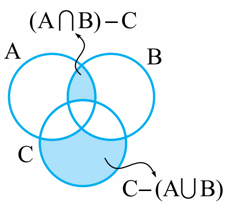
در گزینهٔ (۱) چون یکی از نقطه‌ها به ۴ مجموعهٔ دیگر وصل است، نمی‌توان حالت درستی نوشت.

۱۴۸- گزینهٔ ۱ هر مستطیل نوعی متوازی‌الاضلاع است. پس: $A\subseteq D$ و هر لوزی نوعی متوازی‌الاضلاع است. پس: $C\subseteq D$

هر مربعی هم نوعی لوزی و هم نوعی مستطیل است. پس: $B\subseteq C$ و $B\subseteq A$

شکل گزینهٔ (۱) این شرایط را برقرار می‌کند.

۱۴۹- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل داده‌شده، می‌توانیم عبارت‌های زیر را بنویسیم:



$$A=\{۰,۱,۲,۳,\ldots,۲۹\}$$

$$B=\{۱۳,۱۴,۱۵,۱۶,\ldots,۳۳\}$$

$$C=\{۱۵,۱۶,۱۷,\ldots,۳۵\}$$

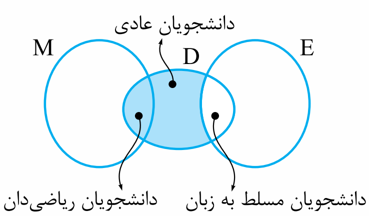
$$\Rightarrow A\cup B=\{۰,۱,۲,۳,۴,\ldots,۳۰,۳۱,۳۲,۳۳\}\Rightarrow C-(A\cup B)=\{۳۴,۳۵\} \Rightarrow \text{تعداد عضو}=۲$$

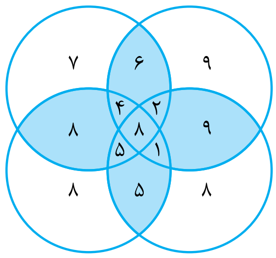
$$\Rightarrow A\cap B=\{۱۳,۱۴,۱۵,۱۶,۱۷,۱۸,\ldots,۲۹\} \Rightarrow (A\cap B)-C=\{۱۳,۱۴\} \Rightarrow \text{تعداد عضو}=۲$$

$$\Rightarrow ۲+۲=۴$$

۱۵۰- گزینهٔ ۳ مجموعهٔ D به سه بخش تقسیم شده است.

اجتماع دو مجموعهٔ دانشجویان عادی و دانشجویان ریاضی‌دان، دانشجویانی است که هیچ عضوی از دانشجویان مسلط به زبان خارجی ندارند.





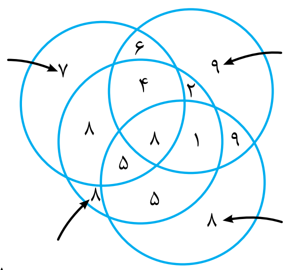
۱۵۱- گزینهٔ ۴ افرادی که حداقل از دو اپراتور استفاده می‌کنند، رنگ شده‌اند:

کل نفرات استفاده‌کننده (۱۰۰۰۰ نفر) با مجموع همهٔ عددها متناسب است.

$$۷+۶+۹+۸+۴+۲+۵+۱+۸+۹+۸+۵+۸=۸۰$$

افرادی که حداقل از دو اپراتور استفاده می‌کنند با مجموع عددهای ناحیهٔ رنگ‌شده متناسب هستند.

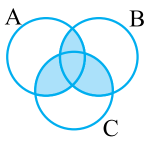
$$۶+۴+۲+۸+۸+۹+۵+۱+۵=۴۸ \Rightarrow \frac{۴۸}{۸۰}=\frac{x}{۱۰۰۰۰} \Rightarrow x=\frac{۴۸\times ۱۰۰۰۰}{۸۰}=۶۰۰۰$$



۱۵۲- گزینهٔ ۱ در بین نمونهٔ ۸۰ نفری، بخش‌هایی که با علامت نشان داده شده‌اند، افرادی هستند که فقط به یک ورزش علاقه دارند. اگر نسبت این افراد در کل ۵۰۰ نفر رعایت شود، تعداد تقریبی کل دانش‌آموزانی که فقط به یک رشته علاقه دارند، به دست می‌آید.

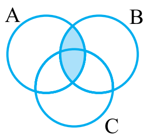
$$۳۲=۸+۸+۹+۷= \text{تعداد افراد علاقه‌مند به یک ورزش در ۸۰ نفر}$$

$$\Rightarrow \frac{۳۲}{۸۰}=\frac{x}{۵۰۰} \Rightarrow x=\frac{۳۲\times ۵۰۰}{۸۰}=۲۰۰$$

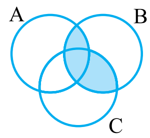


۱۵۳- گزینهٔ ۳ مجموعهٔ A، B، C را به صورت کلی در نظر بگیریم:

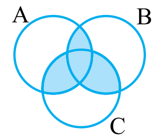
ناحیهٔ رنگ‌شده، عضوهایی دارد که حداقل در دو مجموعه دارای عضو هستند، نتیجهٔ گزینه‌های (۳) و (۴) برابر این ناحیهٔ رنگ شده است.



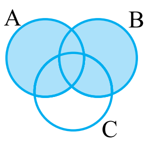
$(A\cap B)$ $\Rightarrow$



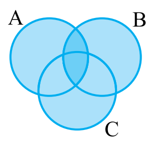
$(A\cap B)\cup(B\cap C)$ $\Rightarrow$



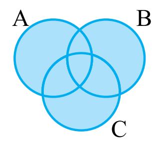
$\underbrace{(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(A\cap C)}_{\text{گزینهٔ (۳)}}$



$(A\cup B)$ $\Rightarrow$



ناحیهٔ دو بار رنگ‌شده $=(A\cup B)\cap(B\cup C)$ $\Rightarrow$



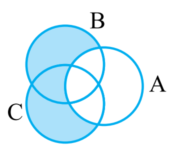
ناحیهٔ ۳ بار رنگ‌شده $=(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(A\cup C)$

۱۵۴- گزینهٔ ۳ ناحیهٔ رنگی از اجتماع دو تکهٔ $(A\cap B)$ و $(A\cap C)$ به وجود می‌آید.

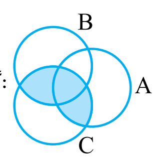
$$(A\cap B)\cup(A\cap C) \xrightarrow{\text{عکس توزیع‌پذیری}} A\cap(B\cup C) \Rightarrow \text{گزینهٔ (۳)}$$

نمودار گزینه‌های دیگر:

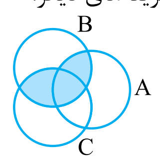
گزینهٔ (۱): $(B\cup C)-A$



گزینهٔ (۲):

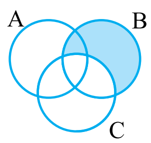


گزینهٔ (۴): $(A\cup C)\cap B$

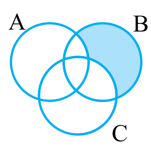


۱۵۵- گزینهٔ ۴ ناحیهٔ رنگی، بخشی از B است که بخش‌های A و C از آن حذف شده است.

گزینهٔ (۱):

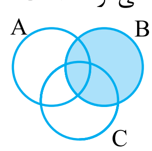


$(B-C)$ $\Rightarrow$

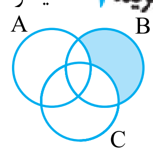


$(B-C)-A$ ✓

گزینهٔ (۲):

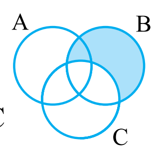


B $\Rightarrow$

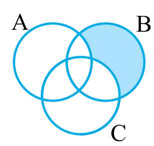


$B-(A\cup C)$

گزینهٔ (۳): $\xrightarrow{(B-C)\subseteq B}$ $B\cap(B-C)=B-C$

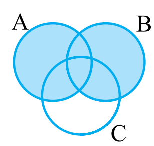


$\Rightarrow$

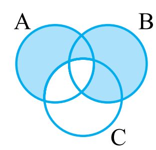


$(B\cap(B-C))-(A\cap B)$

گزینهٔ (۴):

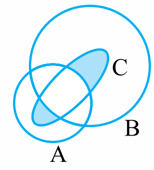


$(A\cup B)$ $\Rightarrow$

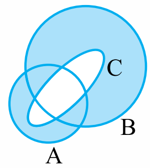


$(A\cup B)-(A\cap C)$

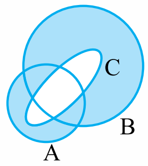
۱۵۶-گزینهٔ ۳ ناحیهٔ رنگی را می‌توان این‌طور به دست آورد، از $(A\cap B)$، مجموعهٔ C را برداریم.

گزینهٔ (۴): 

$C-(A\cup B)$

گزینهٔ (۲): 

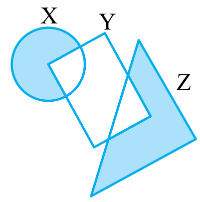
$(A\cup B)-C$

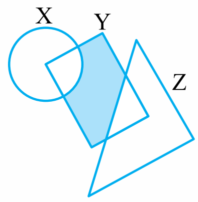
گزینهٔ (۱): 

$(A-C)\cup(B-C)$

۱۵۷-گزینهٔ ۴ حاصل اجتماع دو مجموعهٔ حاصل از اشتراک Y با هر دو مجموعهٔ X و Z برابر جواب است:

$(Y\cap X)\cup(Y\cap Z)\xrightarrow{\text{عکس توزیع‌پذیری}} Y\cap(X\cup Z)$

گزینهٔ (۲): $(X\cup Z)-Y$ 

گزینهٔ (۱): $Y-(X\cup Z)$ 

گزینهٔ (۳): $X\cap Y\cap Z=\varnothing$

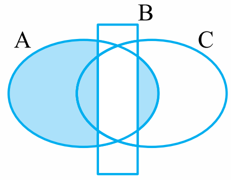
۱۵۸-گزینهٔ ۴

گزینهٔ (۲) : $(B-C)\cup(C-B)$

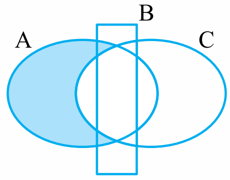
گزینهٔ (۱) : $(A-(B\cup C))\cup((B\cap C)-(A\cap B\cap C))$

گزینهٔ (۳) : $A-(A\cap B\cap C)$

گزینهٔ (۴):

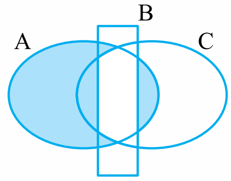


$(A-B)$

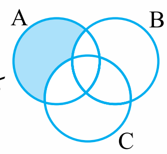


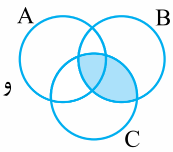
$(A-C)$

$\Rightarrow$



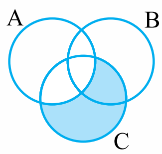
$(A-B)\cup(A-C)$

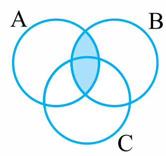
۱۵۹-گزینهٔ ۳ مجموعهٔ نمایش داده‌شده را می‌توان از اجتماع 

و 

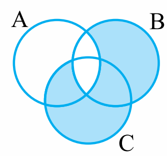
که به ترتیب برابر $(B\cap C)$ و $A-(B\cup C)$ هستند، به دست آورد.

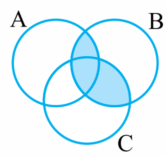
$(A-(B\cup C))\cup(B\cap C)$ درست است.

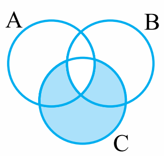
۱۶۰-گزینهٔ ۲ مجموعهٔ نمایش داده‌شده از دو بخش 

و 

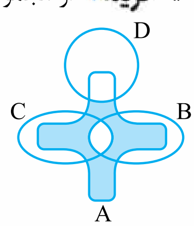
که به ترتیب برابر $(A\cap B)$ و $(C-A)$ بوده و حاصل $(A\cap B)\cup(C-A)$ به دست می‌آید.

گزینهٔ (۴): 

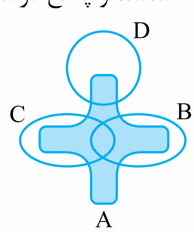
گزینهٔ (۳): 

گزینهٔ (۱): 

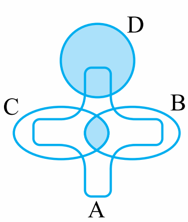
۱۶۱-گزینهٔ ۲ از مجموعهٔ A، مجموعه‌های B، C و D برداشته شده‌اند و پاسخ درست، گزینهٔ (۲) است.

گزینهٔ (۴): 

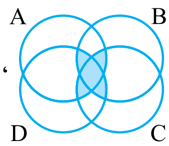
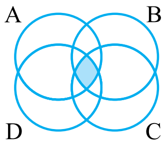
$(A-(B\cap C))-D$

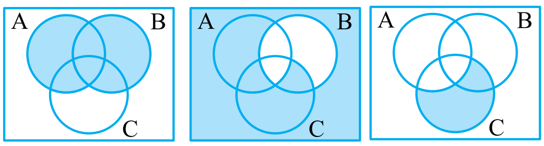
گزینهٔ (۳) : 

$B\cap C\cap D=\varnothing \Rightarrow A-(B\cap C\cap D)=A$

گزینهٔ (۱): 

$(A\cap B\cap C)\cup D$

۱۶۲- گزینهٔ ۴ اگر از  ، مجموعهٔ  را برداریم، مجموعهٔ موردنظر به دست می‌آید. این مجموعه به ترتیب برابر $(A\cap C)\cup(B\cap D)$ و $(A\cap B\cap C\cap D)$ است و جواب $(A\cap C)\cup(B\cap D)-(A\cap B\cap C\cap D)$ است.



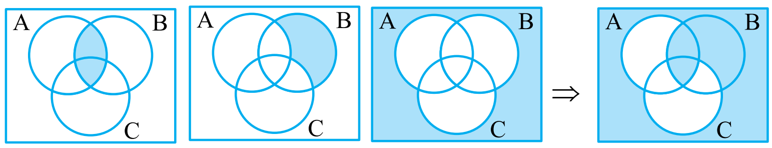
$(A\cup B)$ (B') $(C-A)$

۱۶۳- گزینهٔ ۳ در مجموعه‌های A، B و C، نمودار ون مجموعه‌های $A\cup B$، B' و $C-A$ عبارت‌اند از:

با توجه به مجموعه‌های بالا ناحیهٔ $(A\cap B)$ فقط در مجموعهٔ $(A\cup B)$ قرار دارد.

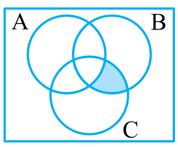
ناحیهٔ $((B-A)-C)$ نیز فقط در $(A\cup B)$ قرار دارد.

ناحیهٔ $(A\cup B\cup C)'$ نیز فقط در (B') قرار دارد، لذا جواب درست از کنار هم قراردادن آن‌ها ساخته می‌شود.



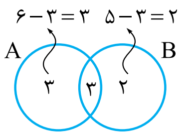
$(A\cap B)$ $(B-A)-C$ $(A\cup B\cup C)'$

دقت کنید!!! دو مجموعهٔ $(C-A)$ و $(A\cup B)$ در ناحیهٔ رنگی شکل مقابل مشترک هستند و در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴)، این ناحیه، رنگی شده است که باعث نادرستی این گزینه‌ها می‌شود چون اعضای این ناحیه هم عضو $(A\cup B)$ و هم عضو $(C-A)$ هستند.



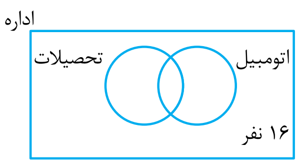
۱۶۴- گزینهٔ ۳ مجموعهٔ $A =$ افرادی که عینک دارند و $B =$ افرادی که ساعت دارند.

$(A\cap B) =$ افرادی که هم عینک دارند و هم ساعت.



$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\Rightarrow ۸=۵+۶-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=۳$$

۱۶۵- گزینهٔ ۱ نمودار ون را برای این مسئله بکشیم. با توجه به نمودار ون:

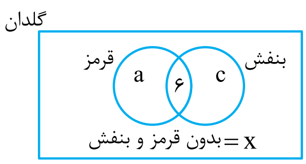


$$n(\text{اتومبیل}\cup\text{تحصیلات})=۴۰-۱۶=۲۴$$

$$n(\text{اتومبیل}\cup\text{تحصیلات})=n(\text{تحصیلات})+n(\text{اتومبیل})-n(\text{اتومبیل}\cap\text{تحصیلات})$$

$$۲۴=۲۰+۶-n(\text{اتومبیل}\cap\text{تحصیلات})\Rightarrow n(\text{اتومبیل}\cap\text{تحصیلات})=۲$$

۱۶۶- گزینهٔ ۳ نمودار ون مسئله را بکشیم. ابتدا ناحیهٔ مشترک قرمز و بنفش را برابر ۶ قرار می‌دهیم:

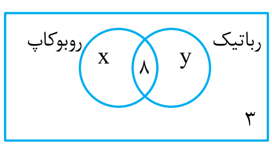


حالا: $a+۶=۲۴\Rightarrow a=۱۸$

$c+۶=۲۹\Rightarrow c=۲۳$

$$\text{تعداد گل در گلدان}=a+۶+c+x\Rightarrow \underbrace{۱۸+۶+۲۳}_{۴۷}+x=۵۳\Rightarrow x=۵۳-۴۷\Rightarrow x=۶$$

۱۶۷- گزینهٔ ۳



$\Rightarrow x+۸=۱۳\Rightarrow x=۵$

$\Rightarrow ۸+y=۱۷\Rightarrow y=۹$

$\text{تعداد کل نفرات کلاس}=x+۸+y+۳=۵+۸+۹+۳=۲۵$

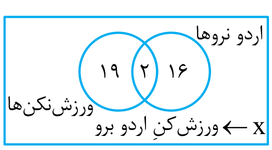
۱۶۸- گزینهٔ ۳ عبارت‌های «ورزش‌نکردن» و «اردونرفتن» می‌تواند ما را به شک بیاندازد اما می‌توانیم تعداد افرادی که ورزش نمی‌کنند یا اردو نمی‌روند را با رابطهٔ عدد اصلی مجموعه به دست آورد:

$A=$ ورزش نکن‌ها , $B=$ اردو نروها

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۱۸+۲۱-۲=۳۷$$

به غیر از این ۳۷ نفر، بقیه هم به اردو و هم به ورزش می‌روند. $۴۲-۳۷=۵$

این مسئله را این‌طور حل کردیم که تلاش کنید بدون شکل هم، مسئله را حل کنید. تلاش کنید که در ذهن، این مفاهیم را تصور کنید. این هم نمودار ون مسئله:

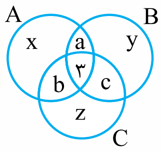


$$\Rightarrow x=۴۲-(۱۹+۲+۱۶)=۵$$

۱۶۹- گزینه ۲ A = فوتبالی‌ها و B = بسکتبالی‌ها و C = والیبالی‌ها

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

$$۵۹=\underbrace{۲۹+۳۲+۲۰-۷-۸-۱۰}_{۵۶}+n(A\cap B\cap C)\Rightarrow n(A\cap B\cap C)=۵۹-۵۶=۳$$



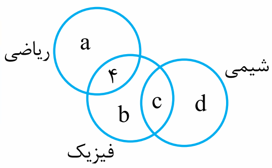
برای ادامهٔ مسئله بهتر است، نمودار ون را بکشیم. ابتدا در ناحیهٔ $(A\cap B\cap C)$، عدد ۳ را قرار می‌دهیم:

$$n(A\cap B)=۷\Rightarrow a+۳=۷\Rightarrow a=۴ \quad , \quad n(A\cap C)=۸\Rightarrow b+۳=۸\Rightarrow b=۵$$

$$n(B\cap C)=۱۰\Rightarrow c+۳=۱۰\Rightarrow c=۷$$

$$\underbrace{x+y+z}_{\text{تک‌ورزشی‌ها}}+a+b+c+۳=۵۹\Rightarrow x+y+z+(۴+۵+۷)+۳=۵۹\Rightarrow x+y+z=۵۹-۱۹=۴۰$$

۱۷۰- گزینه ۳ با توجه به توضیحات سؤال، سعی می‌کنیم نمودار ون را رسم کنیم:



فقط فیزیک درست می‌دهند $\Leftarrow b=۳ \Leftarrow \underbrace{a+۴}_{۱۰}+b+\underbrace{c+d}_{۷}=۲۰$ = کل دبیران

۱۷۱- گزینه ۳ برای حل مسئله این نکته را یادآوری کنیم:

> **نکتهٔ خوب:** تعداد مضرب‌های طبیعی عدد m در بین عددهای ۱ تا n همیشه برابر است با: خارج قسمت صحیح تقسیم n بر m.

برگردیم به مسئله: مضرب‌های ۲ = A و مضرب‌های ۳ = B و $A\cap B$ = هم‌مضرب ۲، هم‌مضرب ۳ = مضرب‌های ۶

$\Rightarrow n(A)=$ خارج قسمت صحیح تقسیم ۱۰۰۰ بر ۲ $=۵۰۰$ ، $n(B)=$ خارج قسمت صحیح تقسیم ۱۰۰۰ بر ۳ $=۳۳۳$

$\Rightarrow n(A\cap B)=$ خارج قسمت صحیح تقسیم ۱۰۰۰ بر ۶ $=۱۶۶$

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۵۰۰+۳۳۳-۱۶۶=۶۶۷$$

۱۷۲- گزینه ۱ مجموعه‌جواب این مسئله، دقیقاً متمم مجموعه‌جواب مسئلهٔ قبلی است.

$A=$ مضرب‌های ۲ یا ۳ $\Rightarrow A'=$ نه مضرب ۲، نه مضرب ۳ $\Rightarrow n(A')=n(M)-n(A)=۱۰۰۰-۶۶۷=۳۳۳$

۱۷۳- گزینه ۴ مجموعهٔ مضرب ۳ را A و مجموعهٔ مضرب ۱۱ را B در نظر می‌گیریم: $A-B$ = مجموعه عددهایی که مضرب ۱۱ نیست اما مضرب ۳ است.

پس به دنبال $n(A-B)$ هستیم: $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

$n(A)=$ خارج قسمت صحیح تقسیم ۱۳۹۶ بر ۳ $=۴۶۵$

$n(A\cap B)=n($مضرب‌های ۳×۱۱$)=n($مضرب‌های ۳۳$)=$ خارج قسمت صحیح تقسیم ۱۳۹۶ بر ۳۳ $=۴۲\Rightarrow n(A-B)=۴۶۵-۴۲=۴۲۳$

۱۷۴- گزینه ۱ مجموعهٔ X را عددهایی در نظر بگیریم که مضرب ۲ یا ۳ یا ۵ باشند. این مجموعه، متمم مجموعهٔ موردنظر مسئله است. پس ابتدا $n(X)$ را به دست می‌آوریم، سپس از تعداد کل عضوهای مجموعهٔ مرجع که عددهای ۱ تا ۹۹۹ هستند، کم می‌کنیم.

$A=$ مضرب‌های ۲ ، $B=$ مضرب‌های ۳ ، $C=$ مضرب‌های ۵

$A\cap B=$ مضرب‌های ۶ ، $A\cap C=$ مضرب‌های ۱۰ ، $B\cap C=$ مضرب‌های ۱۵ ، $A\cap B\cap C=$ مضرب‌های ۳۰

$n(A)=$ خارج قسمت صحیح تقسیم ۹۹۹ بر ۲ $=۴۹۹$ ، $n(B)=$ خارج قسمت صحیح تقسیم ۹۹۹ بر ۳ $=۳۳۳$

$n(C)=$ خارج قسمت صحیح تقسیم ۹۹۹ بر ۵ $=۱۹۹$ ، $n(A\cap B)=$ خارج قسمت صحیح تقسیم ۹۹۹ بر ۶ $=۱۶۶$

$n(A\cap C)=$ خارج قسمت صحیح تقسیم ۹۹۹ بر ۱۰ $=۹۹$ ، $n(B\cap C)=$ خارج قسمت صحیح تقسیم ۹۹۹ بر ۱۵ $=۶۶$

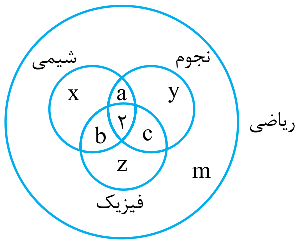
$n(A\cap B\cap C)=$ خارج قسمت صحیح تقسیم ۹۹۹ بر ۳۰ $=۳۳$

$X=$ عددهای مضرب ۲ یا ۳ یا ۵ $=A\cup B\cup C$

$$n(X)=n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$
$$=۴۹۹+۳۳۳+۱۹۹-۱۶۶-۹۹-۶۶+۳۳=۷۳۳$$

$X'=$ عددهایی که مضرب ۲ یا ۳ یا ۵ نیستند ، $n(X')=n(M)-n(X)=۹۹۹-۷۳۳=۲۶۶$

۱۷۵- گزینهٔ ۳ با توجه به سؤال، ۵۰ نفر المپیاد ریاضی می‌خوانند که همهٔ دانش‌آموزان هستند. در ناحیهٔ مشترک همهٔ مجموعه‌ها، عدد ۲ را قرار می‌دهیم.



هم فیزیک، هم شیمی $\Rightarrow b+۲=۵ \Rightarrow b=۳$

هم فیزیک، هم نجوم $\Rightarrow ۲+c=۷ \Rightarrow c=۵$

هم شیمی، هم نجوم $\Rightarrow a+۲=۶ \Rightarrow a=۴$

شیمی‌ها $\Rightarrow ۱۸=x+a+۲+b \Rightarrow ۱۸=x+۴+۲+۳ \Rightarrow x=۹$

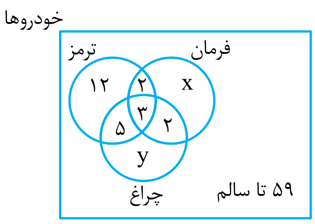
نجوم‌ها $\Rightarrow ۱۷=y+a+۲+c \Rightarrow ۱۷=y+۴+۲+۵ \Rightarrow y=۶$

فیزیک‌ها $\Rightarrow ۲۴=z+b+۲+c \Rightarrow ۲۴=z+۳+۲+۵ \Rightarrow z=۱۴$

کل نفرات $=۵۰=x+y+z+a+b+c+۲+m$

$۵۰=\underbrace{۹+۶+۱۴+۴+۳+۵+۲}_{۴۳}+m \Rightarrow m=۷$

۱۷۶- گزینهٔ ۱ چراغ‌خراب‌ها $=C$، فرمان‌خراب‌ها $=B$، ترمزخراب‌ها $=A$



$n(A\cap B)=۵ ، n(A\cap C)=۸ ، n(B\cap C)=۵ ، n(A\cap B\cap C)=۳$

نمودار ون را رسم کنیم:

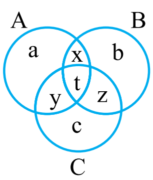
$\Rightarrow n(A)=۱۲+۲+۳+۵=۲۲ \Rightarrow$ نقص چراغ

کل خودروها $=۱۰۰=۵۹+۱۲+۲+۳+۵+۲+x+y \Rightarrow x-y=۱۷$

تعداد فرمان خراب‌ها = تعداد چراغ‌خراب‌ها $\Rightarrow x+۲+\cancel{۳}+\cancel{۲}=y+۵+\cancel{۳}+\cancel{۲} \Rightarrow x-y=۳$

$$\begin{cases}x+y=۱۷\\x-y=۳\end{cases} \xrightarrow{(+)} ۲x=۲۰ \Rightarrow \overset{\text{فقط نقص فرمان}}{\overset{\uparrow}{x=۱۰}} \Rightarrow \underset{\text{فقط نقص چراغ}}{\underset{\downarrow}{y=۷}}$$

۱۷۷- گزینهٔ ۳ برای مجموعه‌های A، B و C یک نمودار ون معمولی رسم می‌کنیم و تعداد عضوهای هر ناحیه را با یک مجهول نشان می‌دهیم:

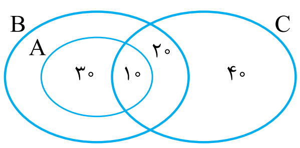


$n(A-B)=a+y=۳ \quad , \quad n(B-C)=x+b=۲ \quad , \quad n(B-A)=b+z=۲$

$n(C-A)=z+c=۴ \quad , \quad n(C-B)=y+c=۵ \quad , \quad n(A-C)=a+x=?$

$$\begin{cases}x+b=۲\\b+z=۲\end{cases} \xrightarrow{(-)} \begin{cases}x-z=۰\\z+c=۴\end{cases} \xrightarrow{(+)} \begin{cases}x+c=۴\\y+c=۵\end{cases} \xrightarrow{(-)} \begin{cases}x-y=-۱\\a+y=۳\end{cases} \xrightarrow{(+)} a+x=۲$$

۱۷۸- گزینهٔ ۲ مجموعهٔ دانش‌آموزان مدرسه دارای ۱۰۰ عضو است. اگر همهٔ دانش‌آموزان عضو B یا C باشند، می‌توان نوشت:



$n(B\cup C)=n(B)+n(C)-n(B\cap C)$

$۱۰۰=۶۰+۷۰-n(B\cap C) \Rightarrow n(B\cap C)=۳۰$

یعنی ۳۰ دانش‌آموز از B حتماً عضو C نیستند و عبارت (پ) نادرست است. با توجه به شکل، عبارت‌های (الف) و (ب) درست هستند.

۱۷۹- گزینهٔ ۵ همهٔ عددهایی که نه بر ۵ و نه بر ۱۱ بخش‌پذیر هستند، حذف شده‌اند. پس عددهای مضرب ۵ یا مضرب ۱۱ باقی مانده‌اند. به دنبال ۲۰۰۴ امین عدد باقی‌مانده هستیم، پس بهتر است در یک تعداد معین و متوالی بررسی کنیم که چند عدد باقی می‌ماند. باید دسته‌هایی پیدا کنیم که تعداد عدد باقی‌مانده در آن‌ها یکسان باشد. هر دستهٔ ۵۵تایی از ۱ تا ۱۰۰۰۰ مناسب است، در بین عددهای ۱ تا ۵۵، ۱۱ عدد مضرب ۵، ۵ عدد مضرب ۱۱ و یک عدد، هم‌مضرب ۱۱ و هم‌مضرب ۵ است. عددهای باقی‌مانده در ۱ تا ۵۵ $=۱۱+۵-۱=۱۵$

که عبارت هستند از: ۵، ۱۰، ۱۱، ۱۵، ۲۰، ۲۲، ۲۵، ۳۰، ۳۳، ۳۵، ۴۰، ۴۴، ۴۵، ۵۰، ۵۵

به دنبال ۲۰۰۴ امین عدد هستیم، ۲۰۰۴ را بر ۱۵ تقسیم می‌کنیم و داریم: $۲۰۰۴=۱۵\times ۱۳۳+۹$

پس باید به نهمین عدد (یعنی ۳۳)، ۱۳۲ بار عدد ۵۵ را اضافه کنیم: ۲۰۰۴ ام عدد $=۱۳۳\times ۵۵+۳۳=۷۳۴۸$

۱۸۰- گزینه ۲ عددهای روی تاس ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ است که در بین آن‌ها عددهای ۲، ۳، ۵، ۷ اول هستند.

احتمال اول‌بودن $= \frac{۴}{۱۰} = \frac{۲}{۵}$

۱۸۱- گزینه ۴ احتمال را در هر گزینه محاسبه کنیم:

گزینهٔ (۱): $\frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۶} =$ احتمال مضرب۳ $< \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۶} =$ احتمال مضرب ۲ نبودن $\Rightarrow$ ×

گزینهٔ (۲): $\frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۶} =$ احتمال فردبودن تاس $= \frac{۱}{۲} =$ احتمال روشدن سکه $\Rightarrow$ ×

گزینهٔ (۳): $\frac{۱}{۴} =$ احتمال دو سکه روشدن $< \frac{۱}{۲} =$ احتمال روآمدن یک سکه $\Rightarrow$ ×

حالت‌های پرتاب دو سکه : (رو, رو)(رو, پشت)(پشت, رو)(پشت, پشت)

گزینهٔ (۴): $\frac{۵}{۳۶} =$ احتمال مجموع دو تاس ۵ شود. $< \frac{۱}{۶} = \frac{۶}{۳۶} =$ احتمال مجموع دو تاس ۷ شود. $\Rightarrow$ ✓

$(۱,۴)(۲,۳)(۳,۲)(۴,۱)$ $\qquad$ $(۱,۶)(۲,۵)(۳,۴)(۴,۳)(۵,۲)(۶,۱)$

۱۸۲- گزینه ۵ تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰ (اعداد ۱ تا ۱۹)، نوزده عدد است. از ۱ تا ۱۹، عددهای ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷ و ۱۹، عدد اول هستند (تعداد اعداد اول ۱ تا ۱۹ = ۸تا). عدد ۱، نه اول و نه مرکب است و بقیهٔ اعداد مرکب هستند.

تعداد اعداد مرکب $= ۱۹ - ۸ - ۱ = ۱۰$

احتمال اول‌بودن $= \frac{۸}{۱۹}$

احتمال مرکب‌بودن $= \frac{۱۰}{۱۹}$

$\Rightarrow \frac{\text{احتمال مرکب‌بودن}}{\text{احتمال اول‌بودن}} = \frac{\frac{۱۰}{۱۹}}{\frac{۸}{۱۹}} = \frac{۱۰}{۸} = \frac{۵}{۴}$

۱۸۳- گزینه ۳ **حالت اول:**

قرمز = ۷ ، زرد = ۵ ، سبز = ۴

احتمال قرمزبودن $= \frac{۷}{۱۶}$ ، احتمال زردبودن $= \frac{۵}{۱۶}$ ، احتمال سبزبودن $= \frac{۴}{۱۶} = \frac{۱}{۴}$

حالت دوم:

قرمز $= ۷ + ۴ = ۱۱$ ، زرد $= ۵ + ۳ = ۸$ ، سبز $= ۴ + ۱ = ۵$

احتمال قرمزبودن $= \frac{۱۱}{۲۴}$ ، احتمال زردبودن $= \frac{۸}{۲۴} = \frac{۱}{۳}$ ، احتمال سبزبودن $= \frac{۵}{۲۴}$

گزینهٔ (۱) نادرست است، چون احتمال سبزبودن کم شده است: $\frac{۵}{۲۴} < \frac{۱}{۴}$

گزینهٔ (۲) نادرست است، چون احتمال سبز و قرمز را افزایش داده‌ایم: $\frac{۱۱}{۲۴} > \frac{۷}{۱۶}$ و $\frac{۱}{۳} > \frac{۵}{۱۶}$

با توجه به جملات بالا گزینهٔ (۳) درست و گزینهٔ (۴) نادرست است.

۱۸۴- گزینه ۴ اگر $P(A-B) = P(A) - P(B)$ باشد، یعنی:

$$n(A-B) = n(A) - n(B) \Rightarrow B \subseteq A \Rightarrow B - A = \varnothing \Rightarrow P(B-A) = ۰$$

۱۸۵- گزینه ۳ تعداد مهره‌های زرد را y در نظر بگیریم:

تعداد کل مهره‌ها $= ۱۴ + y$

احتمال زردبودن مهره $= \frac{y}{۱۴+y} = ۰/۴۴ \Rightarrow \frac{y}{۱۴+y} = \frac{۴۴}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{y}{۱۴+y} = \frac{۲۲}{۵۰} \Rightarrow ۵۰y = ۳۰۸ + ۲۲y$

$$\Rightarrow \underbrace{۵۰y - ۲۲y}_{۲۸y} = ۳۰۸ \Rightarrow y = \frac{۳۰۸}{۲۸} = ۱۱$$

۱۸۶- گزینه ۱ تعداد کل حالت‌هایی که می‌توانیم یک واحد را بخریم، $۵۲ = ۱۳ \times ۴$ است. واحدهایی که حرف D را دارند، ۱۳تا هستند. 1D، 2D، 3D، ...، 8D، ... و 13D. تعداد واحدهایی که عدد ۸ را دارند، ۴تا است: 8A، 8B، 8C، 8D. که 8D را دو بار نوشتیم.

کل حالت‌های مطلوب $= ۱۳ + ۴ - ۱ = ۱۶ \Rightarrow$ احتمال موردنظر $= \frac{۱۶}{۵۲} = \frac{۴}{۱۳}$

۱۸۷- گزینه ۱ همهٔ برداشتن‌های قبلی هیچ تأثیری روی برداشتن فردا ندارد. چون دو حالت ۴۷ یا ۷۳ را داریم، احتمال برداشتن $\frac{۲}{۱۰۰} = \frac{۱}{۵۰}$ می‌باشد.

۱۸۸- گزینه ۴ وضعیت فرزند اول معلوم است، سه فرزند دیگر یا باید (پسر، پسر، پسر) یا (دختر، دختر، دختر) باشد. در کل $۲^۳$ حالت نیز برای این سه فرزند داریم. $\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$ = احتمال هم‌جنس بودن سه فرزند آخر

۱۸۹- گزینه ۲ در فضای نمونه $S=\{۱,a,۲,b,۳,c,۴,d\}$ به شرطی احتمال پیشامد برابر $\frac{۳}{۴}=\frac{۶}{۸}$ می‌شود که تعداد عضو پیشامد ۶تا باشد، پس تعداد پیشامدهای شش‌عضوی یا همان تعداد زیرمجموعه‌های شش‌عضوی موردنظر است.

تعداد ۶عضوی‌ها در مجموعهٔ ۸عضوی = تعداد ۲عضوی‌ها در مجموعهٔ ۸عضوی = $\frac{۸\times۷}{۲}=۲۸$

۱۹۰- گزینه ۴ با تجزیهٔ عدد ۶۰، تعداد شمارنده‌های آن را به دست می‌آوریم:

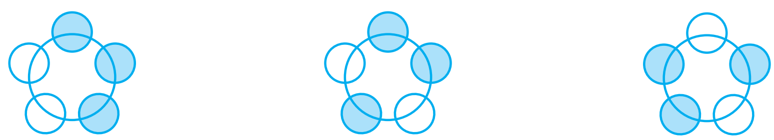
$۶۰=۲^۲\times۳^۱\times۵^۱ \Rightarrow$ تعداد شمارنده‌ها $=(۲+۱)(۱+۱)(۱+۱)=۱۲$

شمارنده‌های کوچک‌تر از ۷ عدد ۶۰ $=۱,۲,۳,۴,۵,۶ \Rightarrow$ احتمال انتخاب شمارندهٔ کوچک‌تر از ۷ $=\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}$

۱۹۱- گزینه ۵ در این‌جا پاسخ‌دادن به هر سؤال مانند پرتاب سکه است. یعنی پاسخ‌دادن به سؤال، $۲^۳$ حالت دارد. هر کدام را یا درست می‌گوید یا غلط. حالت‌های برنده = (درست، درست، غلط) (درست، غلط، درست) (غلط، درست، درست) (درست، درست، درست)

احتمال برنده‌شدن $=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$

۱۹۲- گزینه ۳ حالت‌های مختلف دستبند، با سه مهرهٔ سیاه و دو مهرهٔ سفید را بکشیم:



(۱) (۲) (۳)

صبر کنید!!!

حالت جدیدی وجود ندارد، در اصل شکل (۲) و (۳) هم مساوی است (از نظر قرارگرفتن مهره‌ها نسبت به هم). پس در کل ۲تا دستبند مختلف می‌توان ساخت که در هیچ‌کدام یک مهرهٔ سیاه بین دو مهره قرار نمی‌گیرد و احتمال موردنظر صفر است.

دقت کنید!!! بدون این صحبت‌ها هم چون سه‌تا مهرهٔ سیاه داریم و دوتا سفید، اصلاً این حالت به وجود نخواهد آمد.

۱۹۳- گزینه ۳ تعداد کل حالات پرتاب دو تاس، ۳۶تا است و حالت‌هایی که مجموع عددهای دو تاس ۴ است، عبارت‌اند از: (۱,۳)، (۲,۲) و (۳,۱)؛ یعنی ۳ حالت. احتمال ۴شدن مجموع اعداد دو تاس $=\frac{۳}{۳۶}$

۱۹۴- گزینه ۳ فقط ۳ حالت وجود دارد که حاصل‌جمع عددهای دو تاس بیشتر از ۱۰ شود.

حاصل‌جمع $=۱۱ \Rightarrow (۶,۵),(۵,۶)$, حاصل‌جمع $=۱۲ \Rightarrow (۶,۶) \Rightarrow$ احتمال موردنظر $=\frac{۳}{۳۶}=\frac{۱}{۱۲}$

۱۹۵- گزینه ۱ برای درک بهتر حالت‌های مختلف مجموع دو تاس، به بخش درس‌نامه مراجعه کنید و نمودار داده‌شده را ببینید. اما برای حل سؤال به شکل عادی می‌دانیم بیشترین حاصل‌جمع عدد دو تاس ۱۲ و کم‌ترین آن ۲ است. پس عددهای اول بین ۲ تا ۱۲ را با حاصل‌جمع دو تاس می‌توان ساخت.

حاصل‌جمع	۲	۳	۵	۷	۱۱
حالت‌های مختلف	(۱,۱)	(۱,۲) (۲,۱)	(۱,۴) (۲,۳) (۳,۲) (۴,۱)	(۱,۶) (۲,۵) (۳,۴) (۴,۳) (۵,۲) (۶,۱)	(۵,۶) (۶,۵)

تعداد کل حالت‌هایی که حاصل‌جمع عدد اول می‌شود: $۱۵=۱+۲+۴+۶+۲$

احتمال اول‌بودن حاصل‌جمع $=\frac{۱۵}{۳۶}=\frac{۵}{۱۲}$

۱۹۶- گزینهٔ ۴ تعداد کل حالت را به دست بیاوریم: $۲^۲ \times ۶^۲$

اما حالت‌های مطلوب:

فرد	زوج	رو یا پشت	متفاوت با	
۳ حالت	۳ حالت	۲ حالت	۱ حالت	$=۳\times۳\times۲\times۱$
تاس (۱)	تاس (۲)	سکهٔ (۱)	سکهٔ (۲)	

به اندازهٔ همین، تعداد حالت دوباره وجود دارد. چون تاس (۲) می‌تواند فرد و تاس (۱) می‌تواند زوج باشد.

$$\Rightarrow \text{تعداد کل حالت‌های مطلوب} = (۳\times۳\times۲\times۱)\times۲ = ۳^۲\times۲^۲ \Rightarrow \text{احتمال موردنظر} = \frac{۳^۲\times\cancel{۲^۲}}{۶^۲\times\cancel{۲^۲}} = (\frac{۳}{۶})^۲ = \frac{۱}{۴}$$

۱۹۷- گزینهٔ ۱

$\text{تعداد زردها} = y$ ، $\text{تعداد آبی‌ها} = b$ ، $\text{تعداد سبزها} = g$

با توجه به سؤال روابط روبه‌رو را نوشتیم:

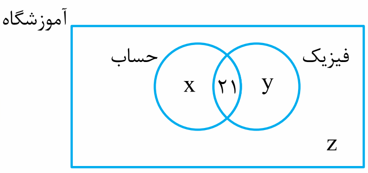
$$(y=۳g\,,\,g=۳b) \Rightarrow y=۳(۳b) \Rightarrow y=۹b$$

$$\text{احتمال زردبودن} = \frac{y}{y+b+g} = \frac{۹b}{۹b+b+۳b} = \frac{۹\cancel{b}}{۱۳\cancel{b}} = \frac{۹}{۱۳}$$

۱۹۸- گزینهٔ ۳ خانم مورد بحث ۳ فرزند دارد، در کل $۲^۳$ حالت می‌توان برای فرزندان او در نظر گرفت. اما این بار کمی فرق می‌کند، چون می‌دانیم برای فرزندان او حالت (پسر، پسر، پسر) نداریم. پس: $n(S)=۷$

حالت مطلوب وقتی است که در بین فرزندان بیش از یک دختر داشته باشیم. یعنی حالت‌های (دختر، دختر، پسر)، (دختر، پسر، دختر)، (پسر، دختر، دختر) و (دختر، دختر، دختر) و احتمال موردنظر $\frac{۴}{۷}$ خواهد بود.

۱۹۹- گزینهٔ ۱ نمودار ون مسئله را رسم می‌کنیم:



$n(\text{آموزشگاه}) = ۲۰۰$

$\text{حسابی‌ها} = x+۲۱=۴۵ \Rightarrow x=۲۴$ ، $\text{فیزیکی‌ها} = y+۲۱=۵۲ \Rightarrow y=۳۱$

$\text{تعداد دانش‌آموزان نه حسابی، نه فیزیک} = z = ۱۲۴ \Leftarrow n(\text{آموزشگاه}) = x+۲۱+y+z \Rightarrow ۲۰۰=۲۴+۲۱+۳۱+z \Rightarrow z=۱۲۴$

$$\text{احتمال موردنظر} = \frac{z}{۲۰۰} = \frac{۱۲۴}{۲۰۰} = \frac{۶۲}{۱۰۰} = ۰/۶۲$$

۲۰۰- گزینهٔ ۲ بیایید ساده فکر کنیم، از این اصل ضرب و این‌ها الان استفاده نکنیم. موقعیت A و B نسبت به هم سه حالت دارد:

۱) B دست راست A است. ۲) B روبه‌روی A است. ۳) B دست چپ A است. $\Leftarrow$ $\frac{۱}{۳}$ = احتمال روبه‌رو بودن A و B

۲۰۱- گزینهٔ ۱ برای فرد یا زوج بودن عدد، یکان آن به ترتیب باید فرد یا زوج باشد. برای یکان می‌توانیم ۹ انتخاب داشته باشیم که ۵تا از آن‌ها فرد است، پس احتمال فردبودن $\frac{۵}{۹}$ است.

۲۰۲- گزینهٔ ۲ امتیاز مرحلهٔ ۱۱ام را x در نظر بگیرید. برای ورود به مرحلهٔ نهایی، میانگین حداقل ۱۸۸ باید باشد.

$$\text{حداقل میانگین ۱۱ دور مسابقه} = ۱۸۸ = \frac{\text{مجموع قبلی} + x}{۱۰+۱}$$

$$۱۸۷۰ = ۱۰\times۱۸۷ = ۱۰\times\text{میانگین قبلی} = \text{مجموع امتیازات قبلی} \Rightarrow ۱۸۸ = \frac{۱۸۷۰+x}{۱۱} \Rightarrow ۱۸۸\times۱۱-۱۸۷۰=x$$

$$\Rightarrow ۲۰۶۸-۱۸۷۰=x \Rightarrow x=۱۹۸$$

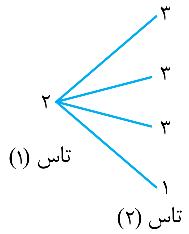
یعنی او باید حداقل ۱۹۸ را به دست بیاورد، امتیازهای ممکن او از ۱۸۱ تا ۲۰۰ است که شامل ۲۰ عدد است. او در حالت‌های ۱۹۸، ۱۹۹ و ۲۰۰ به مرحلهٔ بعدی می‌رود.

$$\Rightarrow \text{احتمال صعود} = \frac{۳}{۲۰} = \frac{۱۵}{۱۰۰} = ۰/۱۵ = \text{۱۵ درصد}$$

۲۰۳- گزینهٔ ۱ اصل ضرب؟... نه!

بیایید واگن‌ها را بچینیم. در مورد A و B، همیشه دو حالت پیش می‌آید: یا A نسبت به B به لوکوموتیو نزدیک‌تر است یا B نسبت به A به لوکوموتیو نزدیک‌تر است. پس احتمال نزدیک‌تربودن A به لوکوموتیو برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

۲۰۴- گزینهٔ ۴ دو تاس را می‌ریزیم، در کل ۳۶ حالت به وجود می‌آید. برای فردشدن مجموع دو تاس، باید یکی زوج و دیگری فرد بیاید. حالت‌های ممکن به شکل مقابل است:



$\Rightarrow$ حالت $۴ \times \underset{\downarrow}{۲} = ۸$

هر تاس دوتا عدد ۲ دارد

همین ۸ حالت را وقتی برای تاس (۲)، عدد ۲ ظاهر شود، نیز داریم. کل حالت‌های مطلوب $= ۸ + ۸ = ۱۶$.

احتمال فردبودن حاصل‌جمع $= \frac{۱۶}{۳۶} = \frac{۴}{۹}$

این مسئله را می‌توانستیم با اصل ضرب و جمع یا احتمال مستقل هم حل کنیم اما کشف ریزه‌کاری و این‌که ببینید راه دیگری هم هست، خیلی بهتر است.

۲۰۵- گزینهٔ ۲ فرض کنیم مجموع عدد دو تاس ۲x شود، (۲x) قطر همان دایره است که عدد مساحتش از عدد محیطش کوچک‌تر است.

$$\text{قطر} = ۲x \Rightarrow \text{شعاع} = x \Rightarrow \text{مساحت} = \pi x^۲ , \text{محیط} = ۲\pi x \Rightarrow \text{محیط} > \text{مساحت} \Rightarrow ۲\cancel{\pi} x > \cancel{\pi} x^۲ \Rightarrow ۲x > x^۲ \Rightarrow ۲ > x$$

$$\Rightarrow ۴ > ۲x \Rightarrow ۲x = \text{مجموع دو تاس} = ۱ \text{ یا } ۲ \text{ یا } ۳$$

مجموع دو تاس ۱ نمی‌شود، پس (۲x) به دست آمده مخالف ۱ خواهد بود. مجموع دو تاس می‌تواند ۲ یا ۳ باشد که در کل سه حالت دارد (۱,۱)، (۲,۱) و (۱,۲).

احتمال موردنظر $= \frac{۳}{۳۶} = \frac{۱}{۱۲}$

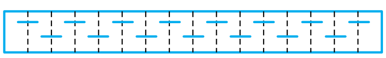
۲۰۶- گزینهٔ ۳ بیایید دو عدد x و y را دو تاس با ۵۰ وجه در نظر بگیریم که عددهای ۱ تا ۵۰ روی آن‌ها نوشته شده‌اند. پس در کل $۵۰^۲ = ۲۵۰۰$ حالت داریم. حالا باید حالت‌هایی را که حاصل‌جمع دو عدد x و y برابر ۵۰ است به دست آوریم:

x	۱	۲	۳	۴	۵	...	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰
y	۵۰	۴۹	۴۸	۴۷	۴۶	...	۴	۳	۲	۱

$\Rightarrow$ در کل ۵۰ حالت

احتمال حاصل‌جمع ۵۱ $= \frac{۵۰}{۲۵۰۰} = \frac{۱}{۵۰}$

۲۰۷- گزینهٔ ۲ وقتی ۱۴ اتومبیل در ۱۶ جای پارک، توقف می‌کنند، ۱۴ جای پارک اشغال می‌شود و دوتا باقی می‌ماند. اما پندار به شرطی می‌تواند پارک کند که این دو جای پارک خالی، کنار هم باقی مانده باشند. در ۱۶ مکان پشت سر هم، ۱۵ حالت داریم که دو مکان چسبیده به هم انتخاب کنیم.



$\Rightarrow$ تعداد حالت مطلوب $= ۱۵$

تعداد حالت‌هایی که دو جای پارک از ۱۶ جای پارک خالی بماند، برابر تعداد زیرمجموعه‌های دوعضوی مجموعهٔ ۱۶عضوی است.

تعداد کل حالت‌ها $= \frac{۱۶ \times ۱۵}{۲} = ۱۲۰ \Rightarrow$ احتمال پارک‌کردن $= \frac{۱۵}{۱۲۰} = \frac{۱}{۸} = \frac{۲}{۱۶}$

۲۰۸- گزینهٔ ۳ احتمال هر پیشامد را حساب می‌کنیم:

الف) $P(A) = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$

ب) $P(B) = \frac{\text{انتخاب ۵ از ۱۰}}{۲^{۱۰}} = \frac{\frac{۱۰!}{۵! \times ۵!}}{۲^{۱۰}} = \frac{\frac{۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶}{۱۲۰}}{۱۰۲۴} = \frac{۲۵۲}{۱۰۲۴}$

پ) $P(C) = \frac{\text{انتخاب ۵۰ از ۱۰۰}}{۲^{۱۰۰}} = \frac{\frac{۱۰۰!}{۵۰! \times ۵۰!}}{۲^{۱۰۰}} = \frac{\frac{۱۰۰ \times ۹۹ \times ۹۸ \times \cdots \times ۵۱}{۵۰!}}{۲^{۱۰۰}}$

$۲^{۱۰۰}$ از این عدد صورت خیلی بزرگ‌تر است و در نتیجه: $P(A) > P(B) > P(C) \Rightarrow$ گزینهٔ (۳)

۲۰۹- گزینهٔ ۳ برای آن‌که حاصل‌ضرب سه عدد انتخابی، توانی از ۲ نباشد، حداقل یکی از عددهای انتخابی باید توانی از ۲ نباشد (مثل ۶ که فقط مضرب ۲ نیست و مضرب ۳ هم هست). حالت‌بندی زیر نشان می‌دهد که این‌طور انتخاب‌کردن ساده نیست.

سارا	۲	۲	~~۲~~	~~۲~~	~~۲~~	~~۲~~	۲
روزبه	۲	~~۲~~	۲	~~۲~~	~~۲~~	۲	~~۲~~
اشکان	~~۲~~	۲	۲	~~۲~~	۲	~~۲~~	~~۲~~

انتخاب عددهای ۲، ۴ یا ۸ (توانی از ۲) را با $\boxed{۲}$ و انتخاب عددهای ۶ یا ۱۰ را با $\boxed{\cancel{۲}}$ نشان داده‌ایم، به جای این‌که این حالت‌ها را بشماریم، حالت‌هایی را بشماریم که همه $\boxed{۲}$ را انتخاب کنند. متمم این مجموعه برابر جواب مسئله است:

$$\frac{n(\{۲,۴,۸\})}{n(\{۲,۴,۶,۸,۱۰\})}=\frac{۳}{۵}=\text{احتمال انتخاب عددی که توان ۲ برای هر کدام از نفرات}$$

$$\text{احتمال انتخاب‌ها مستقل است}\Rightarrow \text{احتمال توان ۲ شدن حاصل‌ضرب}=\frac{۳}{۵}\times\frac{۳}{۵}\times\frac{۳}{۵}=\frac{۲۷}{۱۲۵}\Rightarrow \text{احتمال توان ۲ نشدن حاصل‌ضرب}=۱-\frac{۲۷}{۱۲۵}=\frac{۹۸}{۱۲۵}$$

۲۱۰- گزینه ۵ عدد m^n که $m\in\{۱۱,۱۳,۱۵,۱۷,۱۹\}$ و $n\in\underbrace{\{۱۹۹۹,۲۰۰۰,۲۰۰۱,\dots,۲۰۱۸\}}_{\text{۲۰ تا}}$، در حالت‌های زیر دارای رقم یکان ۱ است:

$$\text{اگر } m=۱۱ \Rightarrow n=\text{هر عدد دلخواه} \Rightarrow \text{که رقم یکان ۱ دارد } ۱۱^n \text{ احتمال}=\underbrace{(\frac{۱}{۵})}_{\text{احتمال انتخاب ۱۱ از مجموعه‌اش}}\times(\frac{۲۰}{۲۰})=\frac{۱}{۵}$$

$$\text{اگر } m=۱۳ \text{ یا } ۱۷ \Rightarrow n=\text{مضرب ۴ باشد} \Rightarrow \text{ با رقم یکان ۱ } ۱۷^n \text{ و } ۱۳^n \text{ احتمال}=(\frac{۲}{۵})\times(\frac{۵}{۲۰})=\frac{۱}{۱۰}$$

$$n\in\{۲۰۰۰,۲۰۰۴,\dots,۲۰۱۶\}\Rightarrow \text{۵ تا}$$

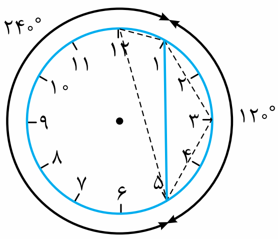
$$\text{اگر } m=۱۵ \Rightarrow \text{هیچ رقم یکان } m^n\text{، ۱ نمی‌شود و همیشه مساوی ۵ است.}$$

$$\text{اگر } m=۱۹ \Rightarrow n=\text{زوج باشد} \Rightarrow \text{ با رقم یکان ۱ } ۱۹^n \text{ احتمال}=(\frac{۱}{۵})\times(\frac{۱۰}{۲۰})=\frac{۱}{۱۰}$$

$$n\in\underbrace{\{۲۰۰۰,۲۰۰۲,۲۰۰۴,\dots,۲۰۱۶\}}_{\text{۱۰ تا}}$$

$$\text{ با رقم یکان ۱ } m^n \text{ احتمال}=\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۰}=\frac{۴}{۱۰}=\frac{۲}{۵}$$

۲۱۱- گزینه ۴ عددهای ساعت آن را به ۱۲ بخش مساوی تقسیم کرده است؛ یعنی اندازهٔ کمان بین هر دو عدد ساعت $\frac{۳۶۰}{۱۲}=۳۰$ درجه است. اندازهٔ کمان بین دو شمارهٔ برداشته‌شدهٔ ۱ و ۵ (همان دو رأس مثلث) برابر $۳۰\times۴=۱۲۰$ درجه از سمت راست و $۳۰\times۸=۲۴۰$ از سمت چپ یعنی رأس سوم.



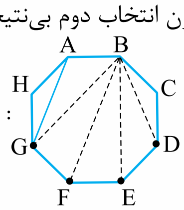
اگر روی عددهای ۱۲,۱۱,۱۰,۹,۸,۷,۶ قرار بگیرد، زاویهٔ این رأس مثلث برابر $\frac{۱۲۰}{۲}=۶۰$ می‌شود و اگر رأس سوم روی عددهای ۴,۳,۲ قرار بگیرد، زاویهٔ این رأس برابر $\frac{۲۴۰}{۲}=۱۲۰$ می‌باشد. پس رأس سوم نباید روی شماره‌های ۲ یا ۳ یا ۴ قرار بگیرد.

اما همهٔ عددهای ۱۲,۱۱,۱۰,۹,۸,۷,۶ هم برای تشکیل مثلثی که همهٔ زاویه‌های آن تند باشد، مناسب نیستند. چون اگر رأس سوم روی عددهای ۱۲ یا ۱۱ قرار بگیرد، زاویهٔ رأس ۱ باز یا قائمه می‌شود. همچنین اگر رأس سوم روی عددهای ۶ یا ۷ قرار بگیرد زاویهٔ رأس ۵ باز یا قائمه می‌شود.

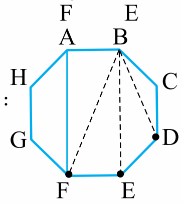
در نتیجه فقط شماره‌های ۱۰,۹,۸ برای رأس سوم مطلوب هستند. در نتیجه: $\text{احتمال تشکیل مثلث حاده‌الزاویه}=\frac{۳}{۱۰}=۰/۳$

۲۱۲- گزینه ۴ تعداد کل انتخاب‌های ممکن $n(S)=۶\times۶=۳۶$ است. برای آن‌که طبق صورت سؤال به سه ناحیه در ۸ضلعی برسیم، حالت‌های زیر وجود دارد (دقت کنید که برای انتخاب اول که به A وصل می‌شود، انتخاب H و C بی‌فایده است؛ چون انتخاب دوم بی‌نتیجه خواهد بود).

حالت اول: ۴ حالت $=$ D یا E یا F یا G $=$ انتخاب برای B $\Leftarrow$: انتخاب G برای A



حالت دوم: ۳ حالت $=$ D یا E یا F $=$ انتخاب برای B $\Leftarrow$: انتخاب F برای A



به همین ترتیب اگر برای A، نقطه‌های E و D را انتخاب کنیم، انتخاب نقطه برای B، ۲ حالت و ۳ حالت خواهد داشت:

$$\text{تعداد کل انتخاب‌های مطلوب}=۴+۳+۲+۱=۱۰ \Rightarrow \text{احتمال موردنظر}=\frac{۱۰}{۳۶}=\frac{۵}{۱۸}$$

۲۱۳- گزینهٔ۴ در پرتاب چهار سکه، در کل $۱۶ = ۲^۴$ حالت وجود دارد.
تعداد حالت‌هایی که حداقل یک «رو» ظاهر شود، متمم تعداد حالت‌هایی است که اصلاً «رو» ظاهر نشود (همه «پشت» بیاید) که فقط ۱ حالت است.

$$\text{تعداد حالت‌های حداقل یک «رو»} = ۲^۴ - ۱ = ۱۶ - ۱ = ۱۵ \Rightarrow \text{احتمال حداقل یک «رو»} = \frac{۱۵}{۱۶}$$

۲۱۴- گزینهٔ۱ کامپیوتر هر بار باید از بین عددهای ۱ تا ۲۰ که ۲۰ عدد می‌شوند، فقط یکی از عددهای $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ را انتخاب کند. پس احتمال هر انتخاب موردنظر $\frac{۵}{۲۰} = \frac{۱}{۴}$ می‌شود. هر انتخاب مستقل از انتخاب دیگر است:

$$\underset{۱\le x\le ۵}{\text{احتمال برداشتن سه } x} = \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۶۴}$$

۲۱۵- گزینهٔ۱ در پرتاب دو تاس متفاوت، سه وضعیت به وجود می‌آید:
① عدد دو تاس برابر است که ۶ حالت دارد. ② عدد تاس اول بزرگ‌تر است. ③ عدد تاس دوم بزرگ‌تر است.
تعداد حالت‌های وضعیت‌های (۲) و (۳) مساوی است. چون در پرتاب دو تاس، در کل $۶ \times ۶ = ۳۶$ حالت داریم، تعداد حالت‌هایی که عدد تاس دوم بزرگ‌تر باشد، برابر است با: $\frac{۳۶ - ۶}{۲} = \frac{۳۰}{۲} = ۱۵$

$$\text{احتمال بزرگ‌تربودن عدد تاس دوم} = \frac{۱۵}{۳۶} = \frac{۵}{۱۲} = \frac{۱۰}{۲۴}$$

۲۱۶- گزینهٔ۲ انتخاب هر جعبه برای قراردادن توپ در آن، مستقل از یکدیگر است. اولین توپ را برمی‌داریم، احتمال درست قراردادن آن در جعبه $\frac{۱}{۴}$ است. حالا یک جعبه کم شده است، احتمال درست قراردادن دومین توپ در جعبه $\frac{۱}{۳}$ است. احتمال درست قراردادن توپ‌های سوم و چهارم نیز به ترتیب $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۱}$ است و احتمال درست قرارگرفتن توپ‌ها برابر $\frac{۱}{۱} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲۴}$ است.

۲۱۷- گزینهٔ۵ حاصل‌ضرب عددها وقتی منفی می‌شود که یکی از عددهای روشده مثبت و عدد روشدهٔ دیگر منفی باشد:

$$S = \{۲,۱,۰,-۱,-۲,-۳\} \Rightarrow n(S) = ۶$$

$$\text{احتمال منفی‌بودن تاس اول و مثبت‌بودن تاس دوم} = \frac{n(\{-۱,-۲,-۳\})}{n(S)} \times \frac{n(\{۱,۲\})}{n(S)} = \frac{۳}{۶} \times \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۶}$$

$$\text{احتمال مثبت‌بودن تاس اول و منفی‌بودن تاس دوم} = \frac{۲}{۶} \times \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۶} \Rightarrow \text{احتمال موردنظر} = \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۶} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

۲۱۸- گزینهٔ۳ اگر گوی‌های برداشته‌شده از دو جعبه هم‌رنگ باشند، رنگ‌های آن‌ها نمی‌تواند سفید باشد، چون جعبهٔ (۲) رنگ سفید ندارد.

$$\text{احتمال برداشتن گوی بنفش از جعبهٔ (۲)} = \frac{۲}{۲+۲} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲} \qquad \text{احتمال برداشتن گوی بنفش از جعبهٔ (۱)} = \frac{۳}{۱+۳+۲} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

$$\text{احتمال برداشتن گوی طلایی از جعبهٔ (۲)} = \frac{۲}{۲+۲} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲} \qquad \text{احتمال برداشتن گوی طلایی از جعبهٔ (۱)} = \frac{۲}{۱+۳+۲} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{احتمال برداشتن دو گوی بنفش} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴} \\ \text{احتمال برداشتن دو گوی طلایی} = \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۶} \end{array}\right\} \xrightarrow{(+)} \text{احتمال هم‌رنگ بودن} = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۶} = \frac{۱۰}{۲۴} = \frac{۵}{۱۲}$$

۲۱۹- گزینهٔ۳ وقتی نیاز به برگزاری مسابقهٔ سوم داریم که هر کدام از تیم‌ها در یکی از دو مسابقهٔ اولیه برنده و در دیگری بازنده شوند.

$$\text{احتمال پیروزی ایران در هر بازی} = ٪۶۰ = \frac{۶۰}{۱۰۰} \Rightarrow \text{احتمال پیروزی برزیل در هر بازی} = ٪۱۰۰ - ٪۶۰ = ٪۴۰ = \frac{۴۰}{۱۰۰}$$

حالت اول:

$$\underset{\text{بازی اول}}{\text{ایران برنده}}\ \underset{\text{بازی دوم}}{\text{برزیل برنده}} \Rightarrow \text{احتمال حالت اول} = \frac{۶۰}{۱۰۰} \times \frac{۴۰}{۱۰۰} = \frac{۲۴۰۰}{۱۰۰۰۰} = \frac{۲۴}{۱۰۰}$$

حالت دوم:

$$\underset{\text{بازی اول}}{\text{برزیل برنده}}\ \underset{\text{بازی دوم}}{\text{ایران برنده}} \Rightarrow \text{احتمال حالت دوم} = \frac{۴۰}{۱۰۰} \times \frac{۶۰}{۱۰۰} = \frac{۲۴۰۰}{۱۰۰۰۰} = \frac{۲۴}{۱۰۰}$$

$$\text{احتمال نیاز به مسابقهٔ سوم} = \frac{۲۴}{۱۰۰} + \frac{۲۴}{۱۰۰} = \frac{۴۸}{۱۰۰} = ٪۴۸$$

۲۲۰- گزینه ۱ در این سؤال احتمال برداشتن هر گوی مستقل از برداشتن گوی‌های دیگر است. یعنی در برداشتن گوی اول، احتمال برداشتن هر کدام از آن‌ها $\frac{1}{9}$ است. در برداشتن گوی دوم نیز احتمال برداشتن هر کدام از گوی باقی‌مانده برابر $\frac{1}{8}$ است و در برداشتن گوی سوم هم این احتمال $\frac{1}{7}$ است. در نتیجه هر سه عددی که انتخاب می‌کنید تا از برداشتن گوی‌ها حاصل شود، دارای احتمال $\frac{1}{7}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{504}$ است. پس برداشتن اعداد روی یک سطر یا ستون یا قطر نیز $\frac{1}{504}$ است.

ما در این‌جا، ۳ سطر، ۳ ستون و ۲ قطر داریم که احتمال برداشتن اعداد روی آن‌ها برابر است با: $8\times\frac{1}{504}=\frac{8}{504}$

۲۲۱- گزینه ۲ وقتی یک هرم چهاروجهی را می‌اندازیم یک وجه آن‌که قاعده است، روی زمین قرار گرفته و دیده نمی‌شود. برای آن‌که بتوانیم با وجه‌هایی که دیده می‌شوند عدد ۲۰۱۷ را بسازیم، به حداقل یکی از رقم‌های ۷، ۱، ۰ و ۲ نیاز داریم. پس اگر یکی از این رقم‌ها اصلاً دیده نشوند، نمی‌توان ۲۰۱۷ را ساخت؛ یعنی در حالتی که به طور مثال همهٔ رقم‌های ۲ در وجه پایین قرار بگیرند. پس احتمال آن‌که همهٔ رقم‌های ۱ یا ۲ یا صفر یا ۷ در وجه پایینی قرار بگیرند را محاسبه کرده و از عدد ۱ کم می‌کنیم:

تعداد کل حالت‌ها برای عددهای وجه‌های پایینی $=\underline{4}\ \underline{4}\ \underline{4}\ \underline{4}\Rightarrow 4\times4\times4\times4=4^4$

تعداد حالاتی که عددهای وجه پایینی همگی مساوی باشند = ۴ حالت

پس احتمال مساوی‌بودن رقم‌های وجه پایینی برابر $\frac{4}{4^4}$ است.

$\Rightarrow$ احتمال ساختن عدد ۲۰۱۷ $=1-\frac{4}{4^4}=1-\frac{1}{4^3}=1-\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$

۲۲۲- گزینه ۵ برای آن‌که حاصل $ad-bc$ زوج باشد، ad و bc هر دو باید فرد یا هر دو زوج باشند. برای فرد و زوج بودن ضرب‌های ad و bc حالت‌های مقابل وجود دارد: زوج × زوج = زوج و زوج × فرد = زوج و فرد × زوج = زوج و فرد × فرد = فرد

یعنی به طور جداگانه ad و bc با احتمال $\frac{1}{4}$ فرد و با احتمال $\frac{3}{4}$ زوج هستند.

احتمال فردبودن همزمان ad و bc $=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$

احتمال زوج‌بودن همزمان ad و bc $=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$

$\xrightarrow{(+)}\frac{1}{16}+\frac{9}{16}=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$

۲۲۳- گزینه ۴ کمی ساده‌تر نگاه کنیم. احتمال آن‌که مجموع عددهای روشده برابر ۷ باشد، چه‌قدر است؟ خب، همهٔ عددهای روشده باید برابر ۱ باشد که فقط یک حالت دارد، پس جواب $\frac{1}{6^7}$ است. حالا احتمال آن‌که مجموع عددهای روشده برابر ۴۲ باشد، چه‌قدر است؟ خب، همهٔ عددهای روشده باید برابر ۶ باشد که فقط یک حالت دارد، پس جواب این هم $\frac{1}{6^7}$ است.

حالا در حالت کلی می‌توان گفت، یک حالت قرینه در این مسئله وجود دارد. یعنی اگر دو عدد متفاوت به ترتیب از ۴۲ و ۷، فاصلهٔ مساوی داشته باشند، احتمال یکسان دارند. اگر فاصله را x در نظر بگیریم، می‌توان گفت: دو عدد مجموع با احتمال برابر $7+x$ و $42-x$ است که در این‌جا:

$7+x=10\Rightarrow x=3\Rightarrow 42-x=42-3=39$

۲۲۴- گزینه ۴ حل مسئله را دسته‌بندی می‌کنیم:

حالت اول: گوی اولی برابر ۱ باشد، آن‌گاه گوی دوم باید ۲ یا ۳ باشد تا در گوی سوم، حاصل‌جمع از ۴ عبور کند.

$\Rightarrow$ (احتمال ۱ بودن گوی اول) × (احتمال ۲ یا ۳ بودن گوی دوم) = احتمال حالت اول $\Rightarrow\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$

حالت دوم: گوی اولی برابر ۲ باشد، پس گوی دوم فقط می‌تواند ۱ باشد تا در گوی سوم، حاصل‌جمع بیش از ۴ شود.

احتمال ۲بودن گوی اول

$\Rightarrow\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$

احتمال ۱بودن گوی اول

حالت سوم: گوی اولی برابر ۳ باشد و گوی دوم باید ۱ باشد.

احتمال ۳بودن گوی اول

$\Rightarrow\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$

احتمال ۱بودن گوی دوم

$\Rightarrow$ احتمال موردنظر $=\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}=\frac{1}{5}$

پاسخنامه

۲۲۵- گزینهٔ ۲ برداشتن بدون جای‌گذاری، یعنی این‌که اگر سنگی را برداریم به کیسه برنمی‌گردد. احتمال هم‌رنگ بودن دو سنگ را برای کیسهٔ اول به دست می‌آوریم:

$$\text{احتمال قرمزبودن دو سنگ درکیسهٔ اول}=\frac{۲}{\underbrace{۲+۲}_{\text{سنگ اول}}}\times\frac{۱}{\underbrace{۲+۱}_{\text{سنگ دوم}}}=\frac{۲}{۴}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۶}$$

$$\text{احتمال آبی‌بودن دو سنگ درکیسهٔ اول}=\frac{۲}{۲+۲}\times\frac{۱}{۱+۲}=\frac{۲}{۴}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۶}$$

$$\xrightarrow{(+)}\ \text{احتمال هم‌رنگ در کیسهٔ اول}=\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

$$\text{احتمال قرمزبودن دو سنگ در کیسهٔ دوم}=\frac{۲}{۲+۲+g}\times\frac{۱}{۲+۱+g}=\frac{۲}{۴+g}\times\frac{۱}{۳+g}=\frac{۲}{(۴+g)(۳+g)}$$

$$\text{احتمال آبی‌بودن دو سنگ در کیسهٔ دوم}=\frac{۲}{۲+۲+g}\times\frac{۱}{۱+۲+g}=\frac{۲}{۴+g}\times\frac{۱}{۳+g}=\frac{۲}{(۴+g)(۳+g)}$$

$$\text{احتمال سبزبودن دو سنگ در کیسهٔ دوم}=\frac{g}{۲+۲+g}\times\frac{g-۱}{۲+۲+g-۱}=\frac{g}{۴+g}\times\frac{g-۱}{۳+g}=\frac{g(g-۱)}{(۴+g)(۳+g)}$$

$$\xrightarrow{(+)}\ \text{احتمال هم‌رنگ‌بودن درکیسهٔ دوم}=\frac{۲}{(۴+g)(۳+g)}+\frac{۲}{(۴+g)(۳+g)}+\frac{g(g-۱)}{(۴+g)(۳+g)}=\frac{۴+g(g-۱)}{(۴+g)(۳+g)}$$

احتمال هم‌رنگ بودن دو سنگ برداشته‌شده از هر کیسه مساوی است. $\Rightarrow \frac{۴+g(g-۱)}{(۴+g)(۳+g)}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{۴+g^{۲}-g}{g^{۲}+۷g+۱۲}=\frac{۱}{۳}$

$$\Rightarrow ۳(۴+g^{۲}-g)=g^{۲}+۷g+۱۲\Rightarrow \cancel{۱۲}+۳g^{۲}-۳g=g^{۲}+۷g+\cancel{۱۲}\Rightarrow ۳g^{۲}-۳g-g^{۲}-۷g=۰$$

$$\Rightarrow ۲g^{۲}-۱۰g=۰\Rightarrow g(۲g-۱۰)=۰\Rightarrow g=۰\ \text{یا}\ ۲g-۱۰=۰\Rightarrow g=۵$$

۲۲۶- گزینهٔ ۴ برای برنده‌شدن سینا، باید کوروش و امیر در پرتاب‌های خود بازنده شوند. موضوع مهم این است که سینا می‌تواند پس از پرتاب سوم برنده شود، اما ممکن است برنده هم نشود و حالا در پرتاب ششم فرصت دارد برنده شود؛ اما باز هم ممکن است بازی ادامه یابد و حالا در پرتاب نهم فرصت دارد. این روند تا بی‌نهایت ادامه دارد. در پرتاب‌های قبل از سینا همه باید بازنده باشند، حتی خود سینا در پرتاب‌های قبل از پرتاب آخر.

$$\text{سینا در پرتاب سوم برنده شود}=\overset{(۱)}{(\text{احتمال باخت کوروش})}\times\overset{(۲)}{(\text{احتمال باخت امیر})}\times\overset{(۳)}{(\text{احتمال برد سینا})}=\frac{۳}{۶}\times\frac{۴}{۶}\times\frac{۱}{۶}$$

$$\text{سینا در پرتاب ششم برنده شود}=(\text{باخت کوروش})\times(\text{باخت امیر})\times(\text{باخت سینا})\times(\text{باخت کوروش})\times(\text{باخت امیر})\times(\text{برد سینا})$$

$$=\frac{۳}{۶}\times\frac{۴}{۶}\times\frac{۵}{۶}\times\frac{۳}{۶}\times\frac{۴}{۶}\times\frac{۱}{۶}=(\frac{۳}{۶})^{۲}\times(\frac{۴}{۶})^{۲}\times(\frac{۵}{۶})\times\frac{۱}{۶}$$

$$\text{سینا در پرتاب نهم برنده شود}=\underset{\text{باخت‌های کوروش}}{(\frac{۳}{۶})^{۳}}\times\overset{\text{باخت‌های امیر}}{(\frac{۴}{۶})^{۳}}\times\underset{\text{باخت‌های سینا}}{(\frac{۵}{۶})^{۲}}\times\overset{\text{برد سینا}}{\frac{۱}{۶}}$$

$$\text{احتمال برد سینا}=P=(\frac{۳}{۶})(\frac{۴}{۶})(\frac{۱}{۶})+(\frac{۳}{۶})^{۲}(\frac{۴}{۶})^{۲}(\frac{۵}{۶})(\frac{۱}{۶})+(\frac{۳}{۶})^{۳}(\frac{۴}{۶})^{۳}(\frac{۵}{۶})^{۲}(\frac{۱}{۶})+(\frac{۳}{۶})^{۴}(\frac{۴}{۶})^{۴}(\frac{۵}{۶})^{۳}(\frac{۱}{۶})+\cdots$$

در عبارت بالا هر عدد در $(\frac{۳}{۶})(\frac{۴}{۶})(\frac{۵}{۶})$ ضرب شده است تا عدد بعدی به دست بیاید.

$$(\frac{۳}{۶})(\frac{۴}{۶})(\frac{۵}{۶})\times P=(\frac{۳}{۶})^{۲}(\frac{۴}{۶})^{۲}(\frac{۵}{۶})(\frac{۱}{۶})+(\frac{۳}{۶})^{۳}(\frac{۴}{۶})^{۳}(\frac{۵}{۶})^{۲}(\frac{۱}{۶})+(\frac{۳}{۶})^{۴}(\frac{۴}{۶})^{۴}(\frac{۵}{۶})^{۳}(\frac{۱}{۶})+(\frac{۳}{۶})^{۵}(\frac{۴}{۶})^{۵}(\frac{۵}{۶})^{۴}(\frac{۱}{۶})+\cdots$$

اگر دو عبارت را از هم کم کنیم، همهٔ جمله‌های دوم به بعد عبارت اولی حذف می‌شوند و فقط عدد اول باقی می‌ماند:

$$P-(\frac{۳}{۴})(\frac{۴}{۶})(\frac{۵}{۶})\times P=(\frac{۳}{۶})(\frac{۴}{۶})(\frac{۱}{۶})\Rightarrow P-\frac{۵}{۱۸}P=\frac{۱}{۱۸}\Rightarrow\frac{۱۳}{۱۸}P=\frac{۱}{۱۸}\Rightarrow P=\frac{۱}{۱۸}\div\frac{۱۳}{۱۸}=\frac{۱}{۱۳}$$

۲۲۷- گزینهٔ ۳ تعداد عددهای سه‌رقمی بدون رقم تکراری را به دست می‌آوریم. ابتدا حالت‌های صدگان را تعیین می‌کنیم:

$$\underset{\text{صدگان}}{\underline{۹}}\ \ \underset{\text{دهگان}}{\underline{۹}}\ \ \underset{\text{یکان}}{\underline{۸}}\Rightarrow ۹\times۹\times۸=۶۴۸\Rightarrow ۶۴۸\times۲=۱۲۹۶$$

هر رمز دو دقیقه طول می‌کشد.

۲۲۸- گزینه۲ دو انتخاب داریم: مستقیم از A به B برویم یا ابتدا به C رفته و سپس به B برویم:

۳ مسیر = مستقیم از A به B

$\underset{A\to C}{\underline{\text{۲ حالت}}}\ \underset{C\to B}{\underline{\text{۳حالت}}} = ۲\times ۳ = ۶$ = از A به C و سپس C به B

$\Rightarrow$ کل حالت‌ها $= ۳ + ۶ = ۹$

۲۲۹- گزینه۱ با توجه به تعداد رنگ‌های استفاده‌شده دسته‌بندی را انجام دهیم:

یک رنگ استفاده کنیم $\Rightarrow$ ۴ حالت

دو رنگ استفاده کنیم $\Rightarrow$ $\underline{۴}\ \underline{۳} = ۴\times ۳ = ۱۲$ حالت

سه رنگ استفاده کنیم $\Rightarrow$ $\underline{۴}\ \underline{۳}\ \underline{۲} \Rightarrow ۴\times ۳\times ۲ = ۲۴$ حالت

چهار رنگ استفاده کنیم $\Rightarrow$ $\underline{۴}\ \underline{۳}\ \underline{۲}\ \underline{۱} \Rightarrow ۴\times ۳\times ۲\times ۱ = ۲۴$ حالت

$\Rightarrow$ کل حالت‌ها $= ۴ + ۱۲ + ۲۴ + ۲۴ = ۶۴$

۲۳۰- گزینه۳ از گوشهٔ شکل آغاز کنیم. مربع گوشه را می‌توان به ۴ حالت مختلف رنگ کرد، اما سه مربع مجاور به ۳، ۲ و ۱ حالت رنگ می‌شوند. مربع A نباید هم‌رنگ دو مربع با حالت‌های ۲ و ۱ باشد اما می‌تواند ۲ رنگ داشته باشد. پس مربع A، ۲ حالت اما مربع B با مربع A و مربع‌های حالت‌های ۲ و ۱ مجاور است و خود B فقط یک حالت دارد.

۴	۲	۲	A
۳	۱	۱	B

$\Rightarrow$ تعداد کل حالت‌های رنگ‌آمیزی $= ۴\times ۳\times ۲\times ۱\times ۲\times ۱ = ۴۸$

۲۳۱- گزینه۴ آبی = a، قرمز = g و زرد = z

a	z	g	a
z	g	a(1)	z
a	z	g	a
z	g	a	z

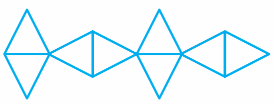
از مستطیل گوشهٔ چپ بالا شروع کنیم، می‌توانیم آن را با a رنگی کنیم اما دو مستطیل پایین آن باید متفاوت باشند؛ یعنی g و z. برای رنگ‌کردن مستطیل سمت راست a، چاره‌ای جز رنگ‌کردن با z نداریم. برای رنگ‌کردن مستطیل (۱) نیز چاره‌ای جز رنگ‌کردن با a نداریم و بقیهٔ مستطیل‌ها با همین الگو رنگ خواهند شد.

پس برای انتخاب رنگ گوشهٔ چپ راست ۳ انتخاب داریم و دو مستطیل پایین آن نیز در کل ۲ حالت دارند. پس کل حالت‌های رنگی $۶ = ۲\times ۳$ است.

۲۳۲- گزینه۳ عددهای ۱ تا ۸ را می‌توان به ۴ دسته با مجموعه‌های برابر تقسیم کرد: (۱,۸)، (۲,۷)، (۳,۶)، (۴,۵) .

پس هر دسته در مثلث‌های یک لوزی قرار خواهند گرفت. برای لوزی اول ۴ حالت، لوزی دوم ۳ حالت، لوزی سوم، ۲ حالت و لوزی آخر یک حالت داریم. اما هر لوزی دو حالت دیگر نیز دارد، چه حالتی؟ این‌که مثلاً ۸ بالا باشد یا ۱ بالا باشد؟، یا ۷ سمت راست باشد یا ۲ سمت راست باشد؟

۲حالت ۲حالت ۲حالت ۲حالت



۴ ۳ ۲ ۱

$\Rightarrow (۴\times ۳\times ۲\times ۱)(۲\times ۲\times ۲\times ۲) = ۴!\times ۱۶$

۲۳۳- گزینه۳ برای حل این مسئله بیشترین مقدار ممکن را به دست آورده و کوچک‌ترین مقدار را نیز محاسبه می‌کنیم:

کم‌ترین $\Rightarrow$ $۱+۱+۱=۳$ $\Rightarrow$ هر سه تاس ۱ بیاید

بیشترین $\Rightarrow$ $۶+۶+۶=۱۸$ $\Rightarrow$ هر سه تاس ۶ بیاید

حالا سؤال این‌جاست. آیا همهٔ عددهای بین ۳ و ۱۸ را می‌توان ساخت؟ جواب: «بله».

جدول الگویابی:

تاس اول	۱	۲	۲	۲	۳	۳	...	۵	۶	۶	۶
تاس دوم	۱	۱	۲	۲	۲	۳	...	۵	۵	۶	۶
تاس سوم	۱	۱	۱	۲	۲	۲	...	۵	۵	۵	۶
جمع سه تاس	۳	۴	۵	۶	۷	۸	...	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸

از ۳ تا ۱۸، $۱۶ = ۱ + (۱۸ - ۳)$ عدد وجود دارد.

۲۳۴- گزینه۴ عدد ۱۰۰۰، رقم ۹ ندارد و آن را کنار می‌گذاریم. عددهای ۱ تا ۹۹۹ را به سه دسته تقسیم می‌کنیم. یک‌رقمی‌ها، دورقمی‌ها و سه‌رقمی‌ها.

تعداد اعداد یک‌رقمی بدون رقم ۹ = ۸تا

تعداد اعداد دورقمی بدون رقم ۹ $= \underset{\text{حالت‌های دهگان}}{۸} \times \underset{\text{حالت‌های یکان}}{۹} = ۸\times ۹ = ۷۲$

تعداد اعداد سه‌رقمی بدون رقم ۹ $= \underset{\text{حالت‌های صدگان}}{۸} \times \underset{\text{حالت‌های دهگان}}{۹} \times \underset{\text{حالت‌های یکان}}{۹} = ۸\times ۹\times ۹ = ۶۴۸$

تعداد اعدادی که رقم ۹ ندارند $= ۸ + ۷۲ + ۶۴۸ + ۱ = ۷۲۹$

حالا از اصل متمم استفاده می‌کنیم؛ یعنی عددهایی که رقم ۹ ندارند را از کل عددها کم می‌کنیم: تعداد اعدادی که رقم ۹ دارند $= ۱۰۰۰ - ۷۲۹ = ۲۷۱$

۲۳۵- گزینهٔ ۱ عددهایی با رقم ۱ یا ۳ به حالت‌های زیر تقسیم‌بندی می‌شوند:

حالت اول: همهٔ ده رقم ۱ باشد ⇐ فقط یک عدد داریم.

حالت دوم: یک رقم ۳ و هفت رقم ۱ باشد: ۳۱۱۱۱۱۱۱,۱۳۱۱۱۱۱۱,۱۱۳۱۱۱۱۱,...,۱۱۱۱۱۱۱۳ ⇐ ۸ عدد

حالت سوم: دو رقم ۳ و چهار رقم ۱ باشد:

۳۳۱۱۱۱,۳۱۳۱۱۱,۳۱۱۳۱۱,۳۱۱۱۳۱,۳۱۱۱۱۳
۱۳۳۱۱۱,۱۳۱۳۱۱,۱۳۱۱۳۱,۱۳۱۱۱۳
۱۱۳۳۱۱,۱۱۳۱۳۱,۱۱۳۱۱۳
۱۱۱۳۳۱,۱۱۱۳۱۳
۱۱۱۱۳۳
⇐ ۱۵ عدد

حالت چهارم: سه رقم ۳ و یک رقم ۱ باشد: ۳۳۳۱,۳۳۱۳,۳۱۳۳,۱۳۳۳

و در کل ⇐ $۱+۸+۱۵+۴=۲۸$

۲۳۶- گزینهٔ ۳ برای ساختن زیرمجموعه‌های A و B که $A\cap B=\varnothing$ بوده و مجموع اعضای آن‌ها به ترتیب زوج و فرد باشد، می‌توان گفت عدد ۱، یا عضو A است یا عضو B و ۲ حالت دارد. عددهای ۲ و ۳ و ۴ نیز به همین ترتیب هر کدام ۲ حالت دارند و می‌توانند عضو A یا B باشند.

دقت کنید!!! مجموع اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ برابر ۱۰ است که عددی زوج است. پس تا این‌جا باید A و B یا هر دو هم‌زمان فرد یا هر دو هم‌زمان زوج باشند. حالا وضعیت عضو ۵ مشخص می‌شود. اگر مجموع اعضای A فرد بود، به مجموعهٔ A اضافه می‌شود. اگر مجموع اعضای B زوج بود به B اضافه می‌شود و عضو ۵، ۱ حالت خواهد داشت و تعداد کل حالت‌ها برابر است با: $۲\times۲\times۲\times۲\times۱=۱۶$

۲۳۷- گزینهٔ ۲ حاصل‌جمع ۲ عدد به شرطی زوج است که یا هر دو فرد یا هر دو زوج باشند. در بین اعداد ۱ تا ۱۱، ۵ عدد زوج $\{۲,۴,۶,۸,۱۰\}$ و ۶ عدد فرد $\{۱,۳,۵,۷,۹,۱۱\}$ داریم. پس جواب مسئله، حاصل‌جمع انتخاب ۲ عدد از هر مجموعه است.

$$\underbrace{\binom{۵}{۲}}_{\text{۲ عدد زوج}}+\overbrace{\binom{۶}{۲}}^{\text{دو عدد فرد}}=\frac{۵\times۴}{۲}+\frac{۶\times۵}{۲}=۱۰+۱۵=۲۵$$

۲۳۸- گزینهٔ ۴ مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,۴,۵,...,۱۱,۱۲\}$ دارای ۶ عضو فرد ۱,۳,۵,۷,۹,۱۱ و ۶ عضو زوج ۲,۴,۶,۸,۱۰,۱۲ می‌باشد. پس تعداد زیرمجموعه‌های شش‌عضوی با ۴ عضو زوج و ۲ عضو فرد به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{\binom{۶}{۴}}{\text{تعداد حالت‌های ۴ عضو زوج}}\times\frac{\binom{۶}{۲}}{\text{تعداد حالت‌های ۲ عضو فرد}}=\frac{۶!}{۴!\times۲!}\times\frac{۶!}{۴!\times۲!}=\frac{\overset{۳}{\cancel{۶}}\times۵}{\cancel{۲}}\times\frac{\overset{۳}{\cancel{۶}}\times۵}{\cancel{۲}}=۱۵^۲=۲۲۵$$

۲۳۹- گزینهٔ ۲ برای ساختن یک عدد سه‌رقمی با خاصیت این‌که صدگان از دهگان و دهگان از یکان بیشتر باشد، حتماً به سه رقم متمایز نیاز داریم و هر سه رقمی که انتخاب کنیم می‌توانیم آن را با همین شرط بچینیم. پس جواب، همان انتخاب ۳ رقم از ۱۰ رقم است.

$$\binom{۱۰}{۳}=\frac{۱۰!}{۳!۷!}=\frac{۱۰\times۹\times۸}{۳!}=\frac{۷۲۰}{۶}=۱۲۰$$

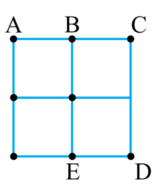
۲۴۰- گزینهٔ ۳ اگر تعداد مهمان‌ها n باشد، تعداد دست‌دادن‌ها برابر انتخاب ۲ از n خواهد بود، چون هر دو نفر با هم، یک عمل «دست‌دادن» انجام می‌دهند.

$$\binom{n}{۲}=۲۸\Rightarrow\frac{n(n-۱)}{۲}=۲۸\Rightarrow n(n-۱)=۵۶\Rightarrow n=۸$$

۲۴۱- گزینهٔ ۳ نقطه‌های روی محیط دایره هیچ‌گاه روی یک خط راست قرار نمی‌گیرند و هر سه نقطه‌ای که انتخاب کنیم، یک مثلث ساخته می‌شود.

پس جواب انتخاب، ۳ نقطه از ۵ نقطه است: $\binom{۵}{۳}=\frac{۵\times۴\times۳}{۳!}=\frac{۶۰}{۶}=۱۰$

۲۴۲- گزینهٔ ۴ برای ساخت مثلث به سه رأس نیاز داریم اما رأس‌های انتخاب‌شده نباید روی یک خط راست باشد، چون نقاط روی یک خط راست، مثلث نمی‌سازند.



ابتدا حالت‌های انتخاب ۳ رأس را به دست می‌آوریم، سپس حالت‌هایی که سه نقطه روی یک خط هستند را کم می‌کنیم.

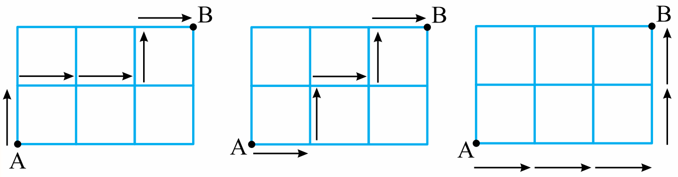
$$\text{کل حالت‌های انتخاب ۳ رأس}=\binom{۷}{۳}=\frac{۷\times۶\times۵}{۳!}=\frac{۷\times\cancel{۶}\times۵}{\cancel{۶}}=۳۵$$

سه نقطهٔ انتخابی روی پاره‌خط‌های AC، AD و BE را باید از کل کم کرد: $۳۵-۳=۳۲$

۲۴۳- گزینهٔ ۳ مسافت طی‌شده وقتی حداقل است که فقط در جهت‌های $\longrightarrow$ یا $\uparrow$ حرکت کنیم.

در شکل‌ها سه مسیر مختلف داده شده‌اند. همهٔ این مسیرها و دیگر مسیرها در این مسئله حتماً سه تا علامت $\longrightarrow$ و ۲ تا علامت $\uparrow$ دارد و به هر طریق دلخواه اگر آن‌ها را بچینیم، از A به B می‌رسیم. در این‌جا از رابطهٔ جایگشت با تکرار استفاده کنیم (به درس‌نامه مراجعه کنید):

$$\Rightarrow \text{تعداد کل مسیرها} = \frac{۵!}{۳!۲!} = \frac{۵\times۴}{۲} = ۱۰$$



$(\uparrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\rightarrow)$ $(\rightarrow\uparrow\rightarrow\uparrow\rightarrow)$ $(\rightarrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\uparrow)$

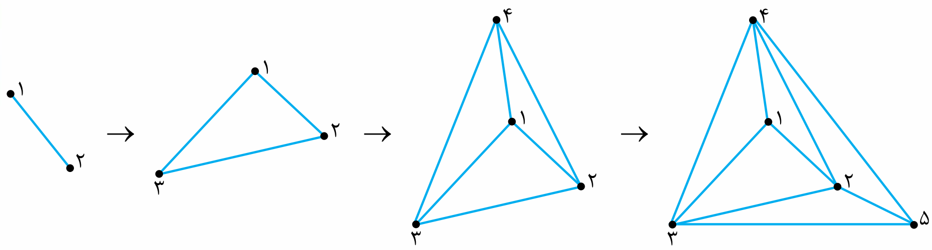
۲۴۴- گزینهٔ ۳ ممکن است بگویید ۳ توپ کافی است، ۳ توپ برداشتن و به نتیجه رسیدن برای خوش‌شانس‌ترین فرد است. اما ممکن است فرد دیگری این‌قدر خوش‌شانس نباشد و مسئله به دنبال جواب حتمی است. پس ما بدشانس‌ترین را انتخاب می‌کنیم، بدشانس‌ترین فرد، ابتدا ۵ توپ فوتبال، سپس ۴ توپ بسکتبال برمی‌دارد. حالا یک توپ که بردارد، حتماً سه توپ از سه ورزش دارد. $۵+۴+۱=۱۰$

۲۴۵- گزینهٔ ۱ مانند مسئلهٔ قبلی باید حالتی را در نظر بگیریم که بدشانس‌ترین حالت باشد. بدشانس‌ترین فرد، ابتدا ۳ مهرهٔ آبی، سپس ۴ مهرهٔ قرمز، سپس ۴ مهرهٔ سیاه و ۴ مهرهٔ سفید برمی‌دارد. حالا هر مهره‌ای بردارد، ۵ مهره از سیاه یا سفید دارد و تعداد کل مهرهٔ موردنظر بدشانس‌ترین فرد $۱۶=۱+۴+۴+۴+۳$ است.

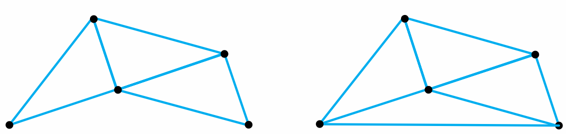
۲۴۶- گزینهٔ ۴ هر سه نفری که انتخاب می‌کنیم، حداقل یکی عینک دارد. چه زمانی نمی‌توانیم این کار را بکنیم؟ وقتی که سه نفر باشند که عینک نداشته باشند و ما این سه نفر را انتخاب خواهیم کرد. پس ۳ نفر بدون عینک درست نیست و حداکثر دو نفر می‌توانند بدون عینک باشند. دو نفر بدون عینک، ۴۰ نفر با عینک. در کل ۴۲ نفر به اردو رفته‌اند.

۲۴۷- گزینهٔ ۳

مسیر مقابل را دنبال کنید تا به جواب برسید. در هر مرحله سعی کردیم، نقطهٔ بعد را طوری انتخاب کنیم که نقطهٔ جدید به بیشترین نقطهٔ ممکن و بدون قطع‌کردن خطوط دیگر وصل شود.



و در کل ۹ پاره‌خط داریم، این تفکر از رسم شکل‌های قبل حاصل شده است. اگر چنین شکل‌هایی کشیده بودید باید با فکرکردن ادامه می‌دادید.



۷ پاره‌خط ۸ پاره‌خط

۲۴۸- گزینهٔ ۲ ابتدا بررسی می‌کنیم «چه زیرمجموعه‌هایی «نارنجک» نیستند؟» خب! مجموعهٔ تهی «نارنجک» نیست، زیرمجموعه‌ای که هیچ عددی فرد یا هیچ عددی زوج ندارد، «نارنجک» نیست.

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌هایی که هیچ عدد زوجی ندارد} = \underbrace{۲\times۲\times۲\times۲}_{\text{حالت بودن یا نبودن هر یک از عددهای فرد ۷,۵,۳,۱}} - \underset{\text{حالت تهی}}{۱} = ۱۵$$

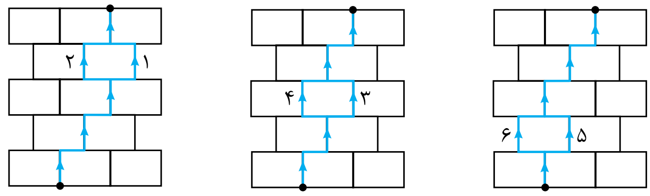
تعداد زیرمجموعه‌هایی که هیچ عدد فردی ندارند نیز دقیقاً مانند زیرمجموعه‌هایی است که عدد زوج ندارند؛ یعنی ۱۵تا.

زیرمجموعهٔ دیگری که نارنجک نیست، زیرمجموعه‌ای است که دقیقاً یک عدد فرد یا دقیقاً یک عدد زوج دارد. تعداد این دو دسته زیرمجموعه هم با هم مساوی است.

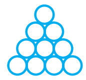
$$\text{تعداد زیرمجموعه‌هایی که دقیقاً یک عضو زوج دارند} = \underbrace{۲\times۲\times۲\times۲}_{\text{حالت بودن یا نبودن هر یک از اعداد فرد ۷,۵,۳,۱}} \times \underset{\text{وجود یکی از اعداد زوج ۲ یا ۴ یا ۶ یا ۸}}{۴} = ۶۴$$

در نتیجه تعداد زیرمجموعه‌هایی که دقیقاً یک عدد فرد دارند هم ۶۴تا است.

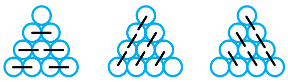
$$\text{تعداد زیرمجموعه‌هایی که «نارنجک» نیستند} = ۱+۱۵+۶۴+۶۴ = ۱۵۹$$



۲۴۹- گزینه ۲ مسیرهای مورچه به شکل روبه‌رو خواهند بود.

۲۵۰- گزینه ۴ ابتدا یک مسئلهٔ ساده‌تر حل کنیم. فرض کنیم مثلث داده‌شده کوچک‌تر بود و مانند  بود؛ یعنی به جای ۱۱ ردیفی که شکل اولیه دارد، ۴ ردیف داشت.

هر هشت‌تایی ⚬⚬، ⚬⚬ و ⚬⚬ را با علامت –، \ و / روی شکل می‌شماریم.



$\Rightarrow ۳(۱+۲+۳)=۳\times۶=۱۸$

حالا اگر یک ردیف به کل دایره‌ها اضافه می‌شد، تعداد هشت‌تایی‌ها برابر می‌شد با: $۳(۱+۲+۳+۴)=۳۰$ تا

حالا که ۱۱ ردیف داریم، تعداد هشت‌تایی‌ها برابر است با: $۳(۱+۲+۳+\cdots+۹+۱۰)=۳(۵۵)=۱۶۵$

۲۵۱- گزینه ۴ برای زوج‌شدن حاصل‌ضرب دو عدد، می‌توان یک زوج و یک فرد یا هر دو را زوج انتخاب کرد.

$$\left.\begin{array}{l}\underset{\text{عدد اولی فرد}}{\underline{\text{۳ حالت}}}\ \underset{\text{عدد دومی زوج}}{\underline{\text{۲ حالت}}} \Rightarrow ۳\times۲=۶\\ \underset{\text{عدد اولی زوج}}{\underline{\text{۲حالت}}}\ \underset{\text{عدد دومی فرد}}{\underline{\text{۳حالت}}} \Rightarrow ۲\times۳=۶\\ \underset{\text{عدد اولی زوج}}{\underline{\text{۲حالت}}}\ \underset{\text{عدد دومی زوج}}{\underline{\text{۱حالت}}} \Rightarrow ۲\times۱=۲\end{array}\right\} \xrightarrow{(+)} ۶+۶+۲=۱۴$$

تعداد کل حالت‌ها نیز برابر $\underset{\text{عدد دومی}}{\underline{\text{۴حالت}}}\ \underset{\text{عدد اولی}}{\underline{\text{۵ حالت}}}$ و $۵\times۴=۲۰$ است.

$\text{احتمال موردنظر}=\frac{۱۴}{۲۰}=\frac{۷۰}{۱۰۰}=۰/۷$

۲۵۲- گزینه ۴ ابتدا تعداد کل حالت‌ها را به دست بیاوریم. ۵ حرف داریم و این حرف‌ها می‌توانند به $۵!=۵\times۴\times۳\times۲\times۱$ حالت کنار هم قرار بگیرند. حالا دو حرف «س» و «د» را در کنار هم و یک حرف در نظر می‌گیریم. با این کار، حالا ۴ حرف متمایز داریم، البته خود «س» و «د» می‌توانند خودشان با هم جا عوض کنند که کل حالت‌ها در ۲ ضرب می‌شود.

$\boxed{\text{س د}}$ $\underline{\text{۳ حالت}}$ $\underline{\text{۲ حالت}}$ $\underline{\text{۱ حالت}}$

$\text{احتمال موردنظر}=\frac{۴!\times۲}{۵!}=\frac{\cancel{۴}\times\cancel{۳}\times\cancel{۲}\times۱\times۲}{۵\times\cancel{۴}\times\cancel{۳}\times\cancel{۲}\times۱}=\frac{۲}{۵}$

۲۵۳- گزینه ۱ تعداد کل حالت‌های مختلف رنگ‌کردن خانه‌ها برابر $۴^۶$ است، چون هر خانه ۴ حالت دارد.

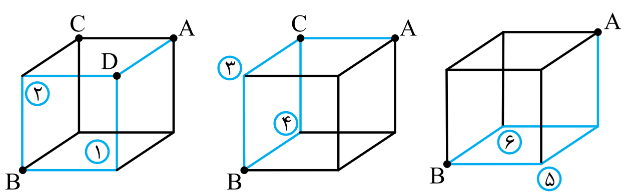
۴	۴	۴	۴	۴	۴
۱	۲	۳	۴	۵	۶

برای رنگ‌کردن خانهٔ اول، ۴ حالت داریم، برای رنگ‌کردن خانهٔ دوم فقط باید رنگ خانهٔ اول را انتخاب نکنیم که ۳ حالت داریم. برای انتخاب رنگ خانهٔ سوم، فقط باید رنگ خانهٔ دوم را انتخاب نکنیم و دوباره ۳ حالت و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم:

۴	۳	۳	۳	۳	۳
۱	۲	۳	۴	۵	۶

$\text{احتمال موردنظر}=\frac{۴\times۳^۵}{۴^۶}=\frac{۳^۵}{۴^۵}=(\frac{۳}{۴})^۵$

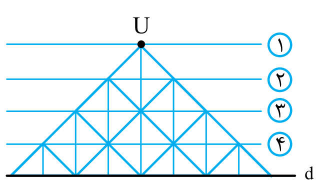
۲۵۴- گزینه ۱ برای رسیدن از نقطهٔ A به B، در کل ۶ مسیر مختلف با کوتاه‌ترین طول (طول مسیر = ۳) داریم.



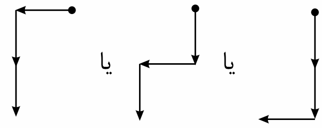
مسیری که از C می‌گذرد و کوتاه‌ترین است، اصلاً از D عبور نمی‌کند.

پس حالت‌های مطلوب ۲ است. $\text{احتمال موردنظر}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$

۲۵۵- گزینه ۳ به شکل مقابل نگاه کنید، به هر کدام از خط‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ که رسیده باشید، ۳ حالت برای ادامهٔ مسیر دارید و جواب $۳\times۳\times۳\times۳=۸۱$ خواهد بود.



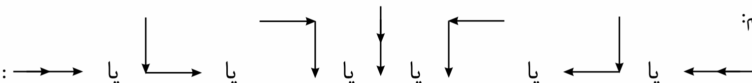
۲۵۶- گزینه ۱ ابتدا بررسی کنیم که کلمهٔ «خیلی» را به چند حالت می‌توان ساخت. اگر از بالاترین (خ) شروع کنیم، فقط یک راه داریم. از (خ) پایین بیاییم تا به (ی) برسیم: خ ی ل ی. حالا شکل را، از سمت راست شکل در نظر بگیرید، هر چه مسیر این طرف وجود دارد، در سمت چپ نیز وجود دارد؛ چون شکل متقارن است.

۳ حالت $\Rightarrow$  $\Rightarrow$ خ ی / خ ل / ی ل

برای حالت (خ ی ل / ی ل ی) هم ۳ حالت داریم و برای (خ ی ل ی) ۱ حالت، پس کل حالت‌ها برای ساخت «خیلی» برابر است با:

$$\underbrace{(۱+۳+۳+۱)}_{\text{سمت‌چپ}}+\underbrace{۱}_{\text{وسط}}+\underbrace{(۱+۳+۳+۱)}_{\text{سمت‌راست}}=۱۷$$

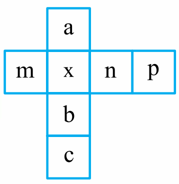
برای ساختن کلمهٔ «سبز» در کل ۷ حالت داریم:

س / س ب س / س ب ز ب س : 

«خیلی» را که ساختیم از پایین‌ترین (ی) با یک حرف، به بالاترین (س) می‌رسیم و در پایان می‌توان نوشت:

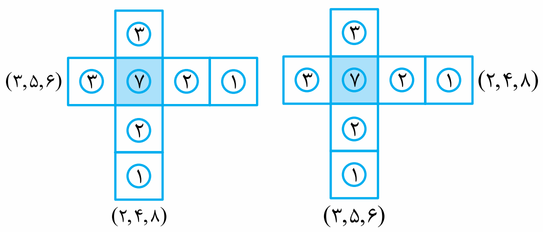
$$\underbrace{۱۷}_{\text{حالت‌های (خیلی)}}\ \underbrace{۷}_{\text{حالت‌های (سبز)}}=۱۷\times۷=۱۱۹$$

۲۵۷- گزینه ۳ ابتدا بررسی کنیم که عددها را چطور باید چید؟ عدد x در تقاطع سطر و ستون قرار دارد و در هر سطر و ستون حاصل‌جمع ۲۱ است.



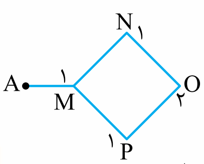
$$\text{ستون}+\text{سطر}=(a+x+b+c)+(m+x+n+p)=۲۱\times۲=۴۲\Rightarrow x+\underbrace{a+b+c+m+n+p+x}_{\text{حاصل جمع عددهای ۲ تا ۸}=۳۵}=۴۲\Rightarrow x=۷$$

عدد ۷ حتماً در محل اتصال سطر و ستون قرار دارد اما (m,n,p) و (a,b,c) چطور انتخاب می‌شوند؟ حاصل $(m+n+p)$ و $(a+b+c)$ باید مساوی ۱۴ شود که با ۷، مساوی ۲۱ خواهد شد. به جای (m,n,p) و (a,b,c) می‌توانیم عددهای $(۳,۵,۶)$ یا $(۲,۴,۸)$ را قرار دهیم پس دو حالت مقابل را داریم. حالت‌های هر مربع را با (۳) یا (۲) یا (۱) نوشتیم.

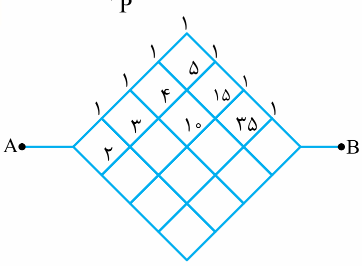


$۳!\times۳!=۳۶$ $\quad$ $۳!\times۳!=۳۶$ $\quad$ کل حالت‌ها $=۳۶+۳۶=۷۲$

۲۵۸- گزینه ۲ از نقطهٔ A آغاز می‌کنیم. برای هر نقطه روی شکل یک عدد می‌سازیم؛ این عدد مساوی تعداد راه‌هایی است که به آن نقطه می‌رسند. مثلاً راه رسیدن به نقطهٔ M، N و P فقط یکی است. پس برای M، N و P می‌نویسیم: ۱ اما برای O، ۲ می‌نویسیم، چون هم از N به O می‌رسیم، هم از P.



شکل مقابل با همین روش (که معروف به روش پاسکال است) نوشته شده است.



برای رسیدن به B، ۷۰ مسیر مختلف با کوتاه‌ترین طول وجود دارد.

۲۵۹- گزینه ۲ تعداد کل حالت‌های روشن یا خاموش بودن لامپ‌ها $(۶۴=۲^۶)$ است. تعداد حالت‌های روشن‌بودن ۳ لامپ از ۶ لامپ، برابر انتخاب ۳ از ۶ می‌باشد:

$$\binom{۶}{۳}=\frac{۶\times۵\times۴}{۳!}=\frac{\cancel{۶}\times۵\times۴}{\cancel{۶}}=۲۰$$

$$\text{تعداد حالت‌های ۴ لامپ روشن}=\binom{۶}{۴}=\frac{۶!}{۴!۲!}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳}{۴!}=۱۵\quad,\quad \text{تعداد حالت‌های ۵ لامپ روشن}=\binom{۶}{۵}=\frac{۶!}{۵!۱!}=۶$$

$$\text{تعداد حالت‌های ۶ لامپ روشن}=۱\quad,\quad \text{کل حالت‌های مطلوب}=۲۰+۱۵+۶+۱=۴۲\Rightarrow \text{احتمال موردنظر}=\frac{۴۲}{۶۴}=\frac{۲۱}{۳۲}$$

۲۶۰- گزینهٔ ۱ **روش اول:** تعداد کل حالت‌ها یا $n(S)$ برابر $۲^۶$ است.

باید در ششمین پرتاب، سومین «رو» بیاید، پس تکلیف ششمین پرتاب معلوم است و باید «رو» باشد. در بین ۵ پرتاب اول، حتماً باید دوتا «رو» و بقیه «پشت» بیاید. تعداد حالت‌های این پیشامد ۱۰تا است:

ر ر پ پ پ، ر پ ر پ پ، پ ر ر پ پ، ر پ پ ر پ، پ ر پ ر پ، پ پ ر ر پ، ر پ پ پ ر، پ ر پ پ ر، پ پ ر پ ر، پ پ پ ر ر

$$\text{احتمال موردنظر} = \frac{۱۰}{۶۴} = \frac{۵}{۳۲}$$

روش دوم: تعداد حالت‌های «رو» آمدن دو سکه در ۵ پرتاب را می‌توان از رابطهٔ انتخاب ۲تا از ۵تا به دست آورد.

$$n(S) = ۲^۶$$

$$n(A) = \binom{۵}{۲} = \frac{۵\times۴}{۲} = ۱۰ \Rightarrow \text{احتمال موردنظر} = \frac{۱۰}{۶۴} = \frac{۵}{۳۲}$$

۲۶۱- گزینهٔ ۴ تعداد کل مربع‌ها بدون در نظرگرفتن رنگ آن‌ها را می‌توان از محاسبهٔ عبارت زیر به دست آورد:

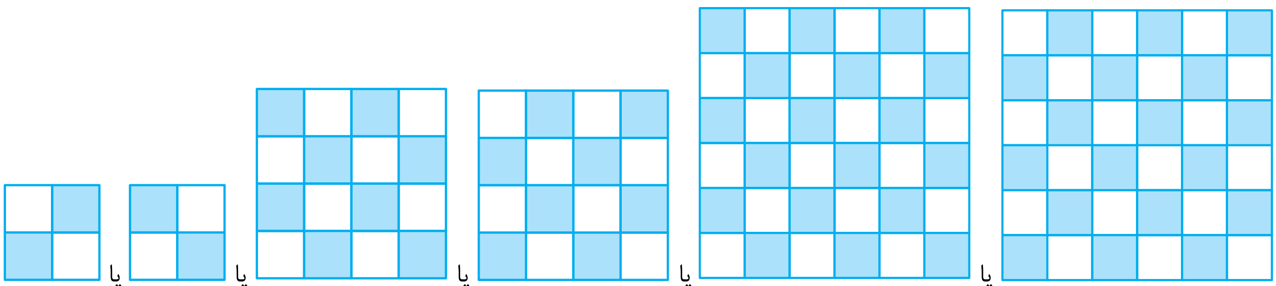
$$\underbrace{(۶\times۶)}_{\text{مربع‌ها با ضلع ۱}}+\underbrace{(۵\times۵)}_{\text{مربع‌ها با ضلع ۲}}+\underbrace{(۴\times۴)}_{\text{مربع‌ها با ضلع ۳}}+\underbrace{(۳\times۳)}_{\text{مربع‌ها با ضلع ۴}}+\underbrace{(۲\times۲)}_{\text{مربع‌ها با ضلع ۵}}+\underbrace{(۱\times۱)}_{\text{مربع با ضلع ۶}} = ۳۶+۲۵+۱۶+۹+۴+۱ = ۷۱$$

اما برای مربع‌هایی که بیش از نصف آن‌ها رنگی است نیز، از نظم اندازه و از کوچک به بزرگ شروع کنیم.

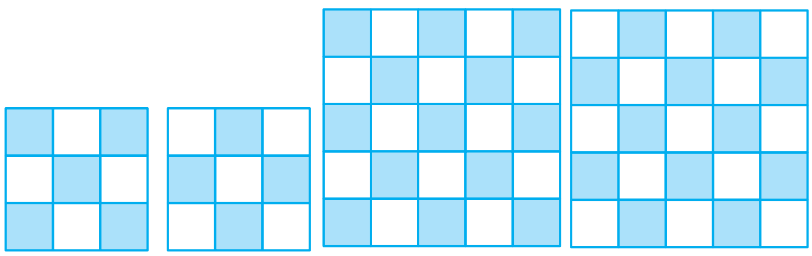
$\frac{۶\times۶}{۲} = ۱۸$ = نصف کل مربع‌های کوچک = مربع‌های کوچک که کل آن‌ها رنگی است. = مربع‌های به ضلع ۱ که بیش از نصف آن رنگی است.

هر مربع به ضلع ۲ را در نظر بگیرید، دقیقاً نیمی از آن‌ها رنگی است. $\Rightarrow$ ۰ = مربع‌های به ضلع ۲ که بیش از نصف آن‌ها رنگی است.

در شکل داده‌شده، هیچ مربع زوج‌ضلعی که بیش از نصف آن رنگی باشد، نداریم. در همگی آن‌ها دقیقاً $\frac{۱}{۲}$ رنگ شده است.



در مربع‌های (۳×۳) و (۵×۵) دو حالت اتفاق می‌افتد. در برخی از آن‌ها بیش از نصف و در برخی دیگر کم‌تر از نصف رنگی است.



کم‌تر از نصف رنگی $\downarrow$ ۲تا — بیش از نصف رنگی $\downarrow$ ۲تا — کم‌تر از نصف رنگی $\downarrow$ ۸تا — بیش از نصف رنگی $\downarrow$ ۸تا

$$\text{تعداد حالت‌های مطلوب} = ۱۸+۸+۲ = ۲۸ \Rightarrow \text{احتمال موردنظر} = \frac{۲۸}{۷۱}$$

۲۶۲- گزینهٔ ۲ ابتدا کل حالت‌ها را پیدا کنیم. ۷ رقم داریم و یک عدد ۷ رقمی بدون تکرار:

$$\underline{۷}\,\underline{۶}\,\underline{۵}\,\underline{۴}\,\underline{۳}\,\underline{۲}\,\underline{۱} \Rightarrow n(S) = ۷!$$

عددهایی به ۲۵ بخش‌پذیرند که دو رقم سمت راست آن‌ها ۰۰، ۲۵، ۵۰ و ۷۵ باشد. چون رقم صفر نداریم، فقط دو حالت ۲۵ و ۷۵ به دست می‌آید.

دو رقم آخر را قرار داده و در جاهای دیگر حالت‌ها را می‌نویسیم:

$$\underline{۵}\,\underline{۴}\,\underline{۳}\,\underline{۲}\,\underline{۱}\,\boxed{۲}\,\boxed{۵} \Rightarrow ۵!$$

$$\underline{۵}\,\underline{۴}\,\underline{۳}\,\underline{۲}\,\underline{۱}\,\boxed{۷}\,\boxed{۵} \Rightarrow ۵!$$

$$\xrightarrow{(+)} ۵!\times۲ = n(A)$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۵!\times۲}{۷!} = \frac{۲}{۷\times۶} = \frac{۱}{۲۱}$$

۲۶۳- گزینه۲ تعداد کل حالت‌ها برابر انتخاب ۲تا از ۹تا است:

$$n(S)=\binom{۹}{۲}=\frac{۹\times ۸}{۲}=۳۶$$

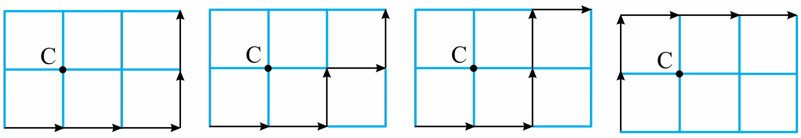
برای فردشدن مجموع دو عدد انتخابی، یکی باید زوج و دیگری باید فرد باشد.

$$\underbrace{\frac{\text{۵حالت}}{\text{انتخاب عدد فرد}}}\;\underbrace{\frac{\text{۴حالت}}{\text{انتخاب عدد زوج}}}=۴\times ۵=۲۰\Rightarrow \text{احتمال موردنظر}=\frac{۲۰}{۳۶}=\frac{۵}{۹}$$

۲۶۴- گزینه۴ برای رسیدن از A به B و با کوتاه‌ترین طول، باید در همهٔ حالت‌ها، سه حرکت ⟶، ⟶، ⟶ و دو حرکت ↑، ↑ را انجام دهیم. پس تعداد حالت‌های کنار هم قرارگرفتن این حرکت را به دست می‌آوریم. از روش جایگشت با تکرار استفاده کنیم:

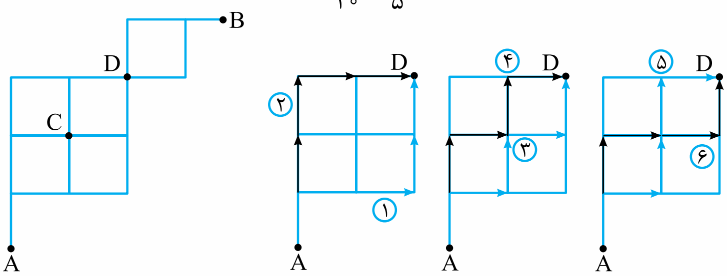
$$\frac{۵!}{۲!۳!}=\frac{۵\times ۴}{۲!}=\frac{۲۰}{۲}=۱۰$$

مسیرهایی که از نقطهٔ C عبور نمی‌کنند به شکل مقابل هستند که ۴تا مسیر هستند.



$$\Rightarrow \text{احتمال عبورنکردن از نقطهٔ } C=\frac{۴}{۱۰}=\frac{۲}{۵}$$

۲۶۵- گزینه۲ ابتدا تعداد کل مسیرها از A تا B را به دست می‌آوریم. مسیر را به دو قسمت تبدیل می‌کنیم، از A به D و از D به B. ۶ مسیر از A به D داریم و ۲ مسیر از D به B. در کل از A به B $(۶\times ۲=۱۲)$ مسیر مختلف داریم:



برای شمارش تعداد مسیرهایی که از نقطهٔ C عبور نمی‌کند، ابتدا مسیرهای عبوری از نقطهٔ C را پیدا می‌کنیم و از کل مسیرها کم می‌کنیم. برای رسیدن از A به B با عبور از C، ابتدا از A به C در دو مسیر، از C به D در دو مسیر و از D به A در دو مسیر می‌توانیم عبور کنیم. تعداد کل مسیرهای عبوری از نقطهٔ C برابر $۸=۲\times۲\times۲$ است.

$$\text{تعداد مسیرهایی که از } C \text{ عبور نمی‌کنند}=۱۲-۸=۴$$

$$\text{احتمال عبورنکردن از نقطهٔ } C=\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$$

۲۶۶- گزینه۴ تعداد کل حالت‌های ممکن برابر $۶^۳=۲۱۶$ است. برای آن‌که تعداد حالت‌های عدد زرد > عدد آبی > عدد قرمز باشد، می‌توان این حالت را در نظر گرفت که مثلاً زرد، آبی و قرمز به ترتیب یکان، دهگان و صدگان عددی سه‌رقمی هستند که فقط با $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ ساخته می‌شوند. پس ۳تا عدد از این مجموعه انتخاب کرده و طوری می‌چینیم که یکان > دهگان > صدگان باشد.

$$\text{تعداد حالت‌های مطلوب}=\binom{۶}{۳}=\frac{۶\times ۵\times ۴}{۳!}=\frac{۱۲۰}{۶}=۲۰\Rightarrow \text{احتمال موردنظر}=\frac{۲۰}{۲۱۶}=\frac{۵}{۵۴}$$

۲۶۷- گزینه۴ ابتدا کل حالت‌های ممکن را حساب کنیم، افراد نوبت به نوبت شناسنامه‌ها را انتخاب می‌کنند. نفر اول ۴ انتخاب، نفر دوم ۳ انتخاب و نفر سوم دو انتخاب و نفر چهارم ۱ انتخاب دارند. سپس تعداد کل حالت‌های ممکن $۱\times۲\times۳\times۴=۲۴$ است.

حالا حالت‌های مطلوب را بشماریم. ابتدا حالتی که فقط دو نفر درست شناسنامهٔ خود را بردارند. اگر نام افراد A، B، C وD و شناسنامهٔ درست هر کدام آن‌ها به ترتیب a، b، c و d باشد، جدول روبه‌رو حالت‌هایی که فقط دو نفر شناسنامهٔ خود را بردارند را نشان می‌دهد.

A	B	C	D
a	b	d	c
a	d	c	b
a	c	b	d
d	b	c	a
c	b	a	d
b	a	c	d

و فقط یک حالت وجود دارد که بیش از دو نفر شناسنامه‌شان را درست بردارند و آن حالتی که همه، شناسنامهٔ خود را درست بردارند. در نتیجه:

$$\text{تعداد حالت‌های مطلوب}=۶+۱=۷$$

$$\text{احتمال موردنظر}=\frac{۷}{۲۴}$$

۲۶۸-گزینه۳ تعداد دانش‌آموزان چپ‌دست را x در نظر بگیریم. راست‌دست‌ها ۴۰ درصد بیشتر از چپ‌دست‌ها هستند و می‌توان گفت:

$$\text{تعداد راست‌دست‌ها} = x + ۰/۴x = ۱/۴x$$

پس تعداد کل دانش‌آموزان برابر $۲/۴x = x + ۱/۴x$.

برای **انتخاب** دو نفر از n نفر، از رابطهٔ $\frac{n(n-۱)}{۲}$ استفاده می‌کنیم. پس در این‌جا $n = ۲/۴x$:

$$\text{تعداد کل انتخاب‌های دونفره} = \frac{۲/۴x(۲/۴x-۱)}{۲}$$

$$\text{تعداد حالت‌های تیم چپ‌دست ـ راست‌دست} = (\text{تعداد چپ‌دست}) \times (\text{تعداد راست‌دست}) = x \times ۱/۴x$$

$$\text{احتمال انتخاب تیم راست‌دست ـ چپ‌دست} = \frac{x \times ۱/۴x}{\left(\frac{۲/۴x(۲/۴x-۱)}{۲}\right)} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲ \times ۱/۴x^۲ = \frac{۲/۴x(۲/۴x-۱)}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲ \times ۲ \times ۱/۴\cancel{x}^{\cancel{۲}\,x} = ۲/۴\cancel{x}(۲/۴x-۱) \Rightarrow ۵/۶x = ۵/۷۶x - ۲/۴ \Rightarrow ۵/۷۶x - ۵/۶x = ۲/۴ \Rightarrow ۰/۱۶x = ۲/۴$$

$$\Rightarrow x = \frac{۲/۴}{۰/۱۶} \Rightarrow x = ۱۵$$

$$\text{تعداد کل} = ۲/۴x = ۲/۴ \times ۱۵ = ۳۶$$

۲۶۹-گزینه۲ احتمال قرارگرفتن علامت $(\rightarrow)$ روی هر کدام از رنگ‌ها برابر تقسیم زاویهٔ مرکزی آن بر ۳۶۰ درجه است.

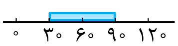
$$\text{زاویهٔ مرکزی سفید} = ۳۶۰ - (۵۳ + ۲۹ + ۳۷ + ۹۱) = ۱۵۰^\circ \qquad \text{احتمال قرارگرفتن } (\nearrow) \text{ روی ناحیهٔ سفید} = \frac{۱۵۰}{۳۶۰} = \frac{۱۵}{۳۶} = \frac{۵}{۱۲}$$

۲۷۰-گزینه۴ دو عدد انتخاب‌شده یا باید مثبت یا هر دو منفی باشد. در بازهٔ $[-۲۰,۱۰]$، صفر تا ۱۰ ناحیهٔ مثبت و صفر تا ۲۰− ناحیهٔ منفی است. طول ناحیهٔ مثبت برابر ۱۰ و طول ناحیهٔ منفی برابر ۲۰ است، پس احتمال انتخاب هر عدد مثبت $\frac{۱}{۳}$ و انتخاب هر عدد منفی $\frac{۲}{۳}$ است.

$$\left.\begin{array}{l}\text{احتمال هر دو عدد مثبت} = \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۹}\\[2mm] \text{احتمال هر دو عدد منفی} = \frac{۲}{۳} \times \frac{۲}{۳} = \frac{۴}{۹}\end{array}\right\} \xrightarrow{(+)} \frac{۱}{۹} + \frac{۴}{۹} = \frac{۵}{۹}$$

۲۷۱-گزینه۱ اندازهٔ یک زاویه برابر ۶۰ درجه است، پس مجموع دو زاویهٔ دیگر مانند A و B برابر ۱۲۰ خواهد بود. $\hat{A} + \hat{B} = ۱۲۰$

زاویهٔ C تند است، برای آن‌که هر دو زاویهٔ $\hat{A}$ و $\hat{B}$ تند باشند؛ هر کدام از زاویه‌های $\hat{A}$ و $\hat{B}$ می‌توانند بین صفر تا ۱۲۰ درجه باشند. یعنی مقدار هر کدام می‌تواند روی پاره‌خط مقابل قرار بگیرد.



اگر A یا B (فرقی نمی‌کند) بین ۳۰ تا ۹۰ باشند، مثلث حتماً ۳ زاویهٔ تند خواهد داشت.

$$P = \frac{\text{طول پاره‌خط از ۳۰ تا ۹۰}}{\text{طول پاره‌خط از ۰ تا ۱۲۰}} = \frac{۹۰-۳۰}{۱۲۰-۰} = \frac{۶۰}{۱۲۰} = \frac{۱}{۲}$$

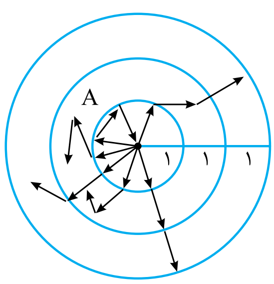
۲۷۲-گزینه۲

$$\text{مساحت کل صفحه} = ۱۵ \times ۱۵ \times \pi = ۲۲۵\pi$$

$$\text{مساحت ناحیهٔ تیره} = \text{مساحت دایره با شعاع ۱۰} - \text{مساحت دایره با شعاع ۵} = ۱۰ \times ۱۰ \times \pi - ۵ \times ۵ \times \pi = ۱۰۰\pi - ۲۵\pi = ۷۵\pi$$

$$\Rightarrow \text{احتمال برخورد با ناحیهٔ تیره} = \frac{\text{مساحت ناحیهٔ تیره}}{\text{مساحت کل صفحه}} = \frac{۷۵\pi}{۲۲۵\pi} = \frac{۱}{۳}$$

۲۷۳-گزینه۲ قورباغهٔ موردنظر می‌تواند در هر پرش، در هر جهت دلخواه پرش کند. اما اگر روی یک خط راست بپرد در نهایت به محیط دایره‌ای به شعاع سه متر از نقطهٔ شروع می‌رسد. شکل مقابل فاصله‌های مختلف قورباغه را از نقطهٔ شروع پس از سه پرش نشان می‌دهد، بعضی از پرش‌های مختلفی که قورباغه می‌تواند ببرد را نشان داده‌ایم:



پس بی‌شمار نوع و شکل برای سه پرش وجود دارد، پس شمارش آن‌ها بی‌معنی است.

نقطهٔ پایانی می‌تواند در سه ناحیه با توجه به نوع پرش‌ها قرار بگیرد: ① فاصله صفر تا ۱ از نقطهٔ شروع ② فاصله ۱ تا ۲ از نقطهٔ شروع (ناحیهٔ A) ③ فاصلهٔ ۲ تا ۳ از نقطهٔ شروع.

$$\text{احتمال قرارگیری قورباغه در فاصلهٔ ۱ تا ۲ از نقطهٔ شروع} = \frac{\text{مساحت ناحیهٔ A}}{\text{مساحت دایره به شعاع ۲}} = \frac{\text{مساحت دایره به شعاع ۲} - \text{مساحت دایره به شعاع ۱}}{\text{مساحت دایره به شعاع ۳}}$$

$$= \frac{۲ \times ۲ \times \pi - ۱ \times ۱ \times \pi}{۳ \times ۳ \times \pi} = \frac{۴\pi - \pi}{۹\pi} = \frac{۳\pi}{۹\pi} = \frac{۱}{۳}$$