

خرید کتاب های کنکور

با تخفیف ویژه

و

ارسال رایگان

Medabook.com

+



یک جله تماس تلفنی رایگان

با مشاوران رتبه برتر

برای انتخاب بهترین منابع

دبیرستان و کنکور

۰۲۱ ۲۸۴۲۵۲۱۰

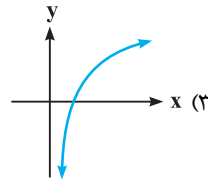


تابع نمایی و نمودار آن

می‌توانیم در مورد تابع‌هایی که متغیرشون توی توان قرار می‌گیره، صحبت کنیم.

۱- کدام یک از گزینه‌های زیر، بیانگر یک تابع نمایی است؟

$$y = \frac{1}{\pi^{-x}} \quad (۴)$$



$$y - 4x = 1 \quad (۲)$$

$$y = \frac{x-2}{3x+1} \quad (۱)$$

مشابه تمرین کتاب درسی

۲- در تابع با ضابطه $f(x) = a \cdot b^x$; $b > 0$ داریم $f(0) = \frac{3}{2}$ و $f(-2) = \frac{3}{22}$. مقدار $f(\frac{3}{2})$ کدام است؟

$$۲۴ \quad (۴)$$

$$۱۲ \quad (۳)$$

$$۸ \quad (۲)$$

$$۶ \quad (۱)$$

۳- نمودار تابع $f(x) = (\frac{1}{3})^{ax+b}$ ، محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع می‌کند. اگر $f(1) = \frac{1}{3}$ باشد، مقدار تابع f در نقطه $x = -1$ کدام است؟

$$۹ \quad (۴)$$

$$۲۷ \quad (۳)$$

$$\frac{1}{9} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{27} \quad (۱)$$

۴- به ازای چه مقادیری از a، با افزایش مقدار x در تابع $y = (a^2 - 3a + 3)^x$ ، مقدار y هم افزایش می‌یابد؟

$$\mathbb{R} - [-2, -1] \quad (۴)$$

$$\mathbb{R} - [1, 2] \quad (۳)$$

$$[1, 2] \quad (۲)$$

$$[-2, -1] \quad (۱)$$

۵- به ازای چه مقادیری از m، در نمودار تابع نمایی با ضابطه $f(x) = (0.4)^{-x} \cdot m^{x+3}$ با افزایش مقدار x، مقدار تابع کاهش می‌یابد؟

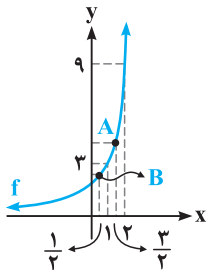
$$0 < m < 0.4 \quad (۴)$$

$$0 < m < 0.6 \quad (۳)$$

$$m > 0.4 \quad (۲)$$

$$|m| > 0.4 \quad (۱)$$

۶- با توجه به نمودار تابع نمایی f در شکل مقابل، حاصل $y_A - y_B$ کدام است؟



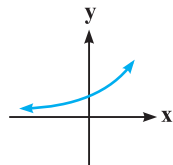
$$\sqrt{3} \quad (۱)$$

$$3\sqrt{3} \quad (۲)$$

$$4\sqrt{3} \quad (۳)$$

$$2\sqrt{3} \quad (۴)$$

۷- به ازای کدام مقادیر k، نمودار تابع نمایی $y = (4 - |k|)x^2 + 3^{kx}$ به صورت مقابل است؟



$$\emptyset \quad (۱)$$

$$\text{فقط } ۴ \quad (۲)$$

$$\text{فقط } ۴ \quad (۳)$$

$$۴ \text{ یا } ۴ \quad (۴)$$

مشابه تمرین کتاب درسی

۸- داده‌های کدام یک از جدول‌های زیر، می‌تواند بیانگر یک تابع نمایی باشد؟

x	-1	0	1	2
y	-0.5	1/5	-2	4

(۴)

x	0	1	2	3
y	0.5	-0.5	0.5	-0.5

(۳)

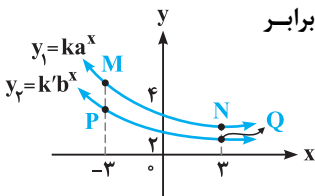
x	10	20	30	40
y	16	12	9	6/75

(۲)

x	1	0	-1	-2
y	4	1	-2	-5

(۱)

۹- با توجه به نمودار توابع نمایی y_1 و y_2 در شکل روبه‌رو، حاصل ضرب عرض‌های نقاط P و Q، چند برابر حاصل ضرب عرض‌های نقاط M و N است؟



$$۱۲ \quad (۲)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۱)$$

$$۴۸ \quad (۴)$$

$$۴ \quad (۳)$$

۱۰- تابع نمایی f با دامنه \mathbb{R} و ضابطه $f(x) = k^6 \times a^x$ مفروض است. اگر $f(3) = 4$ و $f(7) = 64$ باشد، مقدار $f(5)$ کدام است؟

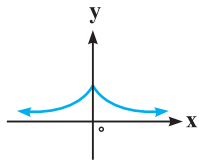
$$۳۲ \quad (۴)$$

$$۳۰ \quad (۳)$$

$$۱۶ \quad (۲)$$

$$۸ \quad (۱)$$

۱۱- شکل مقابل، نمودار کدام یک از توابع زیر است؟



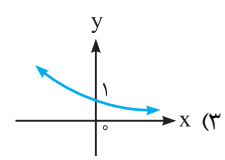
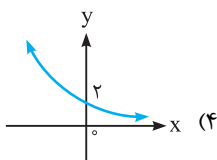
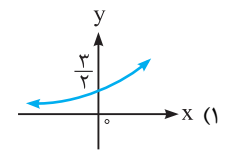
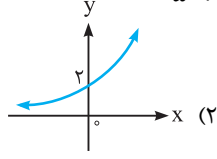
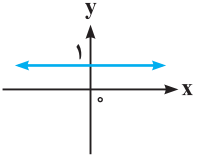
$y = 2^{-|x|}$ (۲)

$y = |2^{-x}|$ (۴)

$y = |2^x|$ (۱)

$y = 2^{|x|}$ (۳)

۱۲- اگر نمودار تابع $g(x) = a^x$ به صورت روبه‌رو باشد، نمودار تابع $f(x) = 2a \times \left(\frac{3}{a^2+1}\right)^x$ کدام است؟



۱۳- نمودار توابع $y = x + 1$ و $y = 2^x$ ($x \geq 0$)، هم‌دیگر را در نقاط A و B قطع می‌کنند. طول پاره‌خط AB کدام است؟

$2\sqrt{3}$ (۴)

$2\sqrt{2}$ (۳)

$\sqrt{3}$ (۲)

$\sqrt{2}$ (۱)

۱۴- کدام یک از نمودارهای زیر در ناحیه اول، بالاتر از سایر نمودارها قرار دارد؟

$y = 2^{2x+1}$ (۲)

$y = 2^{2x-1}$ (۱)

$y = 3(4)^{x-1}$ (۴)

$y = 4^x$ (۳)

۱۵- در کدام یک از بازه‌های زیر، نمودار تابع $y = 3^{-2x}$ ، بالای نمودار تابع $y = 4^{-2x}$ قرار می‌گیرد؟

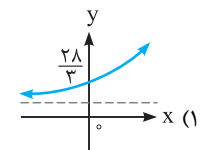
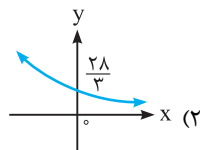
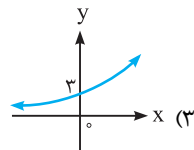
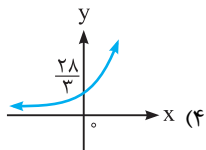
$(-3, 2)$ (۲)

$(-1, +\infty)$ (۱)

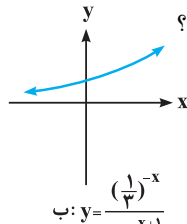
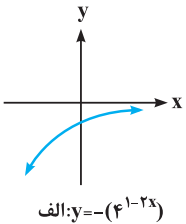
$(-6, -2)$ (۴)

$(2, 7)$ (۳)

۱۶- نمودار تابع $f(x) = 3^{x-1} + 3^{x+2}$ کدام است؟



۱۷- کدام یک از نمودارهای روبه‌رو با توجه به تابع داده شده، به صورت صحیح رسم شده است؟



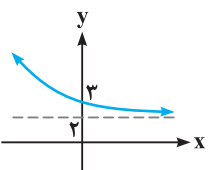
(۱) فقط (الف)

(۲) فقط (ب)

(۳) (الف) و (ب)

(۴) هیچ‌کدام

۱۸- با توجه به نمودار تابع با ضابطه $f(x) = k + \left(\frac{1}{3}\right)^{(x-p)}$ در شکل مقابل، دوتایی مرتب (k, p) کدام است؟



مشابه تمرین کتاب درسی

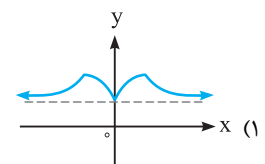
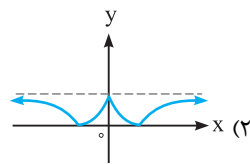
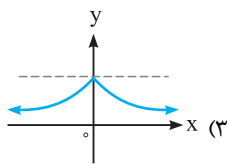
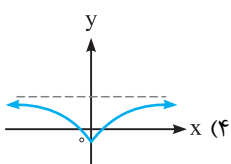
$(1, 0)$ (۲)

$(0, 2)$ (۱)

$(2, 1)$ (۴)

$(2, 0)$ (۳)

۱۹- نمودار تابع $y = \frac{1}{4} - \pi^{-|x|}$ شبیه کدام است؟



معادلات نمایی

با تابع نمایی و نمودار آن آشنا شوید. حالا بریم سراغ معادله‌هایی که در اون‌ها، توابع نمایی دیده می‌شه.

۲۰- اگر $2^A = \left(\frac{4\sqrt{32}}{2\sqrt{8}}\right)^2$ ، عدد A کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۶ (۳) $8\sqrt{2}$ (۴) $12\sqrt{2}$

۲۱- اگر $9^x = 3^{x+1}$ باشد، حاصل $(5^x)^{-1}$ کدام است؟

- (۱) ۰/۱ (۲) ۰/۲ (۳) ۰/۴ (۴) ۰/۸

۲۲- حاصل ضرب ریشه‌های معادله $\left(\frac{1}{125^{x-1}}\right)^{2x+2} = (25)^{x-1}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $-\frac{4}{3}$

۲۳- نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = 2^{ax-1}$ از نقطه $(4, 2\sqrt{2})$ می‌گذرد. نمودار f، خط $y = 4\sqrt{2}$ را با چه طولی قطع می‌کند؟

- (۱) $\frac{26}{5}$ (۲) $\frac{18}{5}$ (۳) $\frac{14}{3}$ (۴) $\frac{11}{3}$

۲۴- اگر $x = 10^k$ و $10^{k+2} = (x^{5+k})^{\frac{1}{6}}$ باشد، حاصل $\frac{x}{k}$ کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۳۵۰۰ (۲) $-\frac{1}{2000}$ (۳) ۲۵۰۰ (۴) $-\frac{1}{6000}$

تجربی خارج ۹۳

۲۵- فاصله نقطه تلاقی دو منحنی به معادلات $y = 3^x$ و $y = (\sqrt{2})^{x+1} + 4$ از نقطه $A(0, 4)$ ، کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۲۶- معادله $9^x + 3^x - 2 = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) صفر

۲۷- مجموع ریشه‌های معادله $3^{2x} - 4 \times 3^{x+1} + 27 = 0$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۲۸- معادله $5^{x+3} - 5^{x+2} + 5^{x+1} = 105x \times 3^x$ چند جواب حقیقی دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

کار در کلاس کتاب درسی

۲۹- معادله $x^2 = 2^x$ چند جواب حقیقی دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۴

۳۰- معادله $4 + 2^{-x} - x = 0$ چند جواب حقیقی دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

نامعادلات نمایی

معادله‌های نمایی رو دیدین، حالا نوبت می‌رسه به نامعادله‌های نمایی. با ما همراه باشید.

۳۱- کدام یک از اعداد زیر بین $3^{0/62}$ و $3^{0/21}$ قرار دارد؟

- (۱) $3^{-0/9}$ (۲) ۳ (۳) $3^{0/74}$ (۴) $3^{0/49}$

مشابه فعالیت کتاب درسی

۳۲- چه تعداد از نامساوی‌های زیر، درست است؟

- (الف) $4^{3/5} < 4^3$ (ب) $3\sqrt{11} > 3\sqrt{13}$ (پ) $x > y \Rightarrow 5^x > 5^y$ (ت) $x > y \Rightarrow (0/3)^x < (0/3)^y$
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

مشابه کار در کلاس کتاب درسی

۳۳- اگر $x = (0/4)\sqrt{5}$ و $y = \left(\sin \frac{\pi}{4}\right)^{-0/1}$ ، آن‌گاه کدام گزینه، درست است؟

- (۱) X بزرگتر از ۱، Y بین ۰ و ۱
 (۲) X بین ۰ و ۱، Y بزرگتر از ۱
 (۳) X و Y بین ۰ و ۱
 (۴) X و Y بزرگتر از ۱

مشابه تمرین کتاب درسی

۳۴- مجموعه جواب نامعادله $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-11} \geq 5^{-x}$ شامل چند عدد طبیعی است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) بیشمار

- ۳۵- مجموعه جواب نامعادله $(\frac{4}{3})^{-x} \geq (\frac{27}{64})^{2x-1} (\frac{9}{16})^{1-x}$ کدام است؟
- (۱) $x \leq -\frac{1}{3}$ (۲) $x \geq \frac{1}{3}$ (۳) $x \geq -\frac{1}{3}$ (۴) $x \leq \frac{1}{3}$
- ۳۶- مجموعه جواب نامعادله $(\frac{1}{\sqrt{2}+1})^{4-2x} > (\sqrt{2}-1)^{x+2}$ کدام است؟
- (۱) $x > 3$ (۲) $x < \frac{1}{2}$ (۳) $x > \frac{1}{2}$ (۴) $x < 4$
- ۳۷- مجموعه جواب نامعادله $(\sqrt{3}-1)^{x^2} > (4-2\sqrt{3})^{5x-12}$ شامل چند عدد طبیعی است؟
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بیشمار

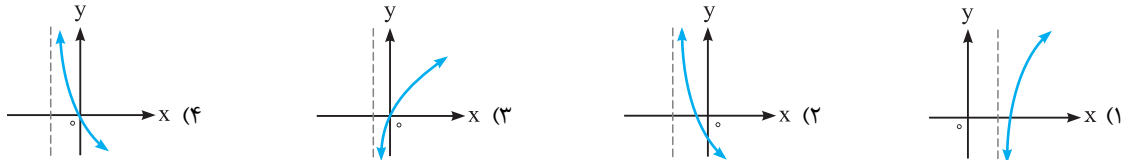
تابع لگاریتمی (معکوس تابع نمایی)

توی یک جمله کوتاه می‌شه گفت، تابع لگاریتمی یعنی معکوس تابع نمایی، که در این مورد، فرغایی دارم براتون!

۳۸- اگر $0 < b < 1$ باشد، نمودار توابع $y = \log_b x$ و $y = b^x$ هم‌دیگر را

- (۱) قطع نمی‌کنند. (۲) در دو نقطه قطع می‌کنند.
 (۳) بالای خط $y = x$ قطع می‌کنند. (۴) در یک نقطه قطع می‌کنند.

۳۹- نمودار معکوس تابع $y = 3^x - 1$ کدام است؟



۴۰- فاصله نقطه برخورد تابع نمایی $y = 2^x$ با محور y ها و نقطه برخورد معکوس این تابع با محور x ها، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) ۲ (۴) $2\sqrt{2}$

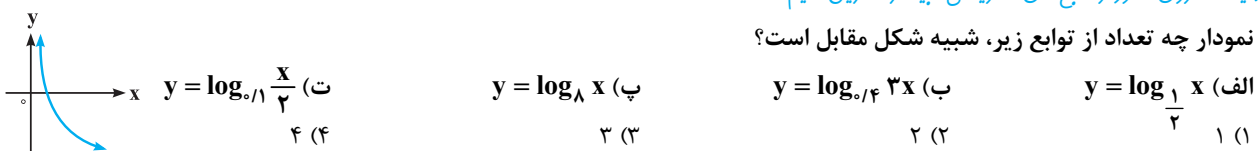
۴۱- ضابطه تابع معکوس $f(x) = (\frac{1}{25})^{1-x} + 5^{2x-1}$ کدام است؟

- (۱) $\log_5 \frac{6}{25} x$ (۲) $\log_5 \frac{25}{6} x$ (۳) $\log_{25} \frac{6}{25} x$ (۴) $\log_{25} \frac{25}{6} x$

رسم نمودار تابع لگاریتمی

برنست روی نمودار تابع‌های لگاریتمی، بیشتر تمرین کنیم.

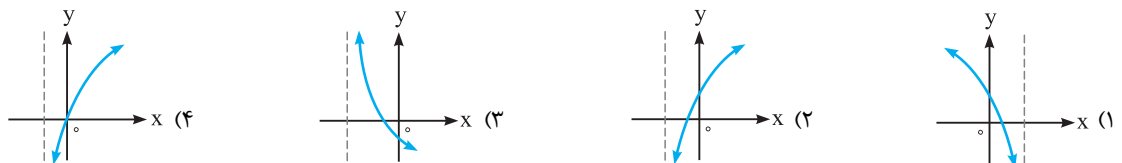
۴۲- نمودار چه تعداد از توابع زیر، شبیه شکل مقابل است؟



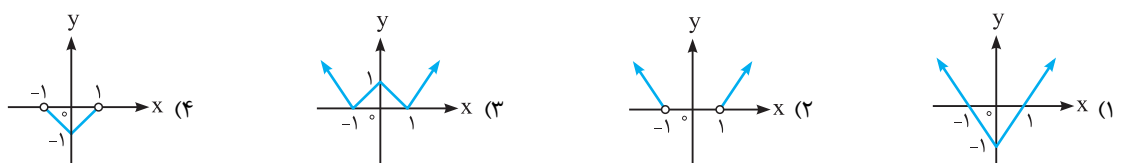
۴۳- به ازای چه مقادیری از a ، در تابع $y = \log_{(\frac{3-a}{4})} x$ با افزایش مقدار x ، مقدار y کاهش می‌یابد؟

- (۱) $|a| < \sqrt{6}$ (۲) $|a| > 2$ (۳) $2 < |a| < \sqrt{6}$ (۴) $0 < |a| < 9$

۴۴- نمودار تابع $y = 2 - \log_{0.3}(x+1)$ شبیه کدام است؟



۴۵- نمودار تابع $\log_2 y = \log_2 (|x-1|)$ کدام است؟



دامنه تابع لگاریتمی

۱۰ بریم سراغ بررسی دامنه تابع‌های لگاریتمی.

۴۶- دامنه تعریف تابع $y = \log_{(x-4)}(x^2 - 9)$ کدام است؟

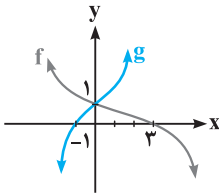
- (۱) $(4, +\infty)$ (۲) $(4, +\infty) - \{5\}$ (۳) $\mathbb{R} - (3, 4)$ (۴) $(3, +\infty) - \{5\}$

۴۷- دامنه تابع $y = \frac{\log_2(16 - x^2)}{\log_2(x - 2)}$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) بیشمار (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

۴۸- با توجه به شکل مقابل، دامنه تابع $y = \log_{g(x)} f(x)$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) صفر (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) ۲



ارتباط بین تساوی نمایی و لگاریتمی

۱۰ نمایی رو می‌شناسید. لگاریتمی رو هم می‌شناسید. حالا می‌فوییم برونیم چه ارتباطی بین تساوی نمایی با لگاریتمی وجود داره!

۴۹- اگر $2 \log_{10.8} \alpha - 1 = 0$ و $\log_{12} \beta = \frac{1}{4}$ باشند، حاصل $\frac{\alpha}{\alpha - \beta}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$

۵۰- اگر $\log_3 4 = \alpha$ و $\log_2 5 = \beta$ باشد، آن‌گاه $3^{\alpha\beta}$ کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۶ (۳) ۲۵ (۴) ۲۰

۵۱- اگر $\log_2 12 = \alpha$ باشد، عدد $4^{\alpha-2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{2}$ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴) ۱۸

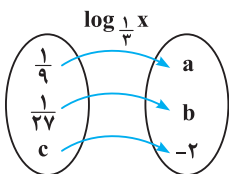
تجربی خارج ۸۶

ویژگی‌های لگاریتم (بخش اول)

۱۰ توی لگاریتم‌ها یه ویژگی‌هایی وجود داره که باید فیللی هواستون به اونا باشه. این ویژگی‌ها رو دو بخش کردیم و مسئله‌های فوبی رو برای هر بخش آوردیم. ازتون می‌فوییم با دقت کامل روی اونا کار کنید.

۵۲- با توجه به شکل زیر، مقدار $a - b - c$ کدام است؟

برگرفته از کتاب درسی



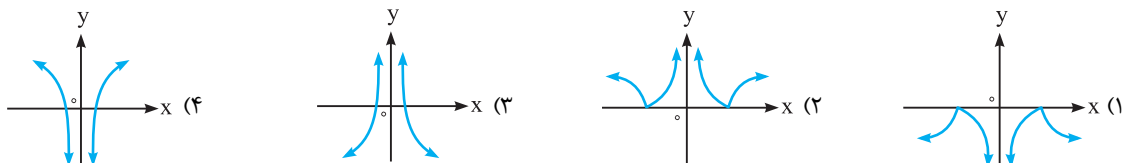
- (۱) -۱۰ (۲) -۹ (۳) ۱۴ (۴) ۸

برگرفته از کتاب درسی

۵۳- حاصل کدام عبارت، بزرگ‌تر از بقیه است؟

- (۱) $\log_3 \frac{1}{27}$ (۲) $\log_{\frac{1}{3}} 81$ (۳) $\log_{\frac{1}{5}} 625$ (۴) $\log_{16} 64$

۵۴- نمودار تابع $y = \log \left| \frac{1}{x} \right|$ کدام است؟



مشابه تمرین کتاب درسی

۵۵- اگر $f(x) = 4 - 5 \log_9 \left(\frac{x}{3} + 6 \right)$ باشد، مقدار $f(63)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{5}$ (۲) $-\frac{2}{5}$ (۳) $-\frac{4}{5}$ (۴) $-\frac{5}{5}$

۵۶- نمودار تابع $y = \log_{\frac{1}{2}}(ax + b)$ محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۱- و نیمساز ناحیه چهارم را در نقطه‌ای به عرض ۱- قطع کرده است. b کدام است؟

ریاضی خارج ۹۴

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) ۳

۵۷- اگر $x = (\frac{\sqrt{2}}{e})^{-2}$ باشد، حاصل $\log_3(x+1)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) ۳

ریاضی خارج ۸۷

۵۸- اگر $x = 8 \log_4 2\sqrt{2}$ باشد، لگاریتم عدد $4(x+3)$ در پایه x کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۲ (۴) ۳

۵۹- حاصل $\log_{27} \frac{1}{9} + |\log_{27} \frac{1}{9}| + \log_{\frac{1}{16}} 8\sqrt[3]{2}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{6}$ (۲) $-\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{5}{6}$

۶۰- اگر $\sqrt{a} = b^2 = x^3$ باشد، حاصل $\log_x a - 2 \log_x b$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) $\frac{5}{4}$

۶۱- حاصل عبارت $\log_{\sqrt{4}} 2\sqrt{2} + \log_{\frac{1}{49}} 2\sqrt{2} + \log_{\sqrt{4}} 2\sqrt[3]{81}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{17}{5}$ (۲) $\frac{27}{4}$ (۳) $\frac{25}{3}$ (۴) $\frac{27}{2}$

۶۲- تابع $f(x) = \log_3(ax+b)$ فقط برای مقادیر $x \in (-\frac{1}{3}, +\infty)$ ، بامعنی است. اگر $f(4) = 2$ باشد، آن‌گاه $f(-\frac{4}{9})$ کدام است؟

ریاضی داخل ۹۴

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

۶۳- تعداد نقاط تلاقی نمودارهای دو تابع $y = 2^x$ و $y = \log_2 \sqrt{x}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

تجربی خارج ۹۱

۶۴- نمودارهای دو تابع $f(x) = \log_2 \frac{1}{x}$ و $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ نسبت به هم چگونه‌اند؟

- (۱) $f(x)$ بالاتر (۲) $g(x)$ بالاتر (۳) منطبق‌اند (۴) فقط در یک نقطه، متقاطع

ریاضی داخل ۹۶

۶۵- تابع با ضابطه $f(x) = a + \log_2(bx-4)$ از دو نقطه $(2, 6)$ و $(12, 10)$ می‌گذرد. a کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

ریاضی داخل ۹۱

۶۶- اگر $3^a = A$ باشد، آن‌گاه $9A^2$ کدام است؟

- (۱) $2+2a$ (۲) $3+2a$ (۳) $2+a^2$ (۴) $3+a^2$

۶۷- اگر $8^k = 4\sqrt{2}$ باشد، مقدار لگاریتم $(6k+1)$ در مبنای ۳۶ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۲ (۴) ۳

۶۸- اگر $\log_y x = 2$ باشد، آن‌گاه حاصل $\log_{y\sqrt{y}} x\sqrt[3]{y}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{2}$ (۲) $\frac{14}{9}$ (۳) $\frac{14}{3}$ (۴) $\frac{7}{6}$

۶۹- اگر $\log 4 = k$ باشد، حاصل $\log 0.125$ کدام است؟

- (۱) $6k$ (۲) $\frac{3k}{2}$ (۳) $-\frac{3k}{2}$ (۴) $-6k$

۷۰- اگر $\log_b a = \frac{3}{2}$ ، آن‌گاه $\log_{\sqrt{b}} ab^2$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۷۱- حاصل $\log_{x\sqrt[3]{x}} \sqrt[3]{x^2} \sqrt{x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{9}{8}$ (۳) $\frac{5}{8}$ (۴) $\frac{8}{9}$

۷۲- اگر $f(x) = 4^x - 4^{-x}$ باشد، حاصل $f(\log \frac{4}{3}) + f(\log \frac{3}{4})$ کدام است؟

- (۱) $\log 3$ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) $\log 4$

۷۳- اگر $x = \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{37})$ باشد، آن‌گاه لگاریتم $x^2 + 3x + 1$ در پایه ۴ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

پایسختارنامه تشریح

۱ ابتدا درسنامه زیر را بخوانید.

تابع نمایی و نمودار آن

تعریف: هر تابع به صورت $y = k \times a^x$ که در آن $k \neq 0$ و $a > 0, a \neq 1$ و x یک متغیر باشد را تابع نمایی با پایه a می‌نامیم (مانند $y = 3^x, y = 0.5 \times 2^x, y = (\frac{1}{4})^x$ و یا $y = (\frac{1}{\pi})^x$ که همگی تابع نمایی هستند).

* **فلا سؤال** اینه که پرا پایه، مثبت و مخالف بکه؟ دلش اینه که اگه a منفی باشه، x نمی‌تونه هر عدد حقیقی رو اختیار کنه (مثلاً در مورد $y = (-2)^x$ ، متغیر x نمی‌تونه مساوی $\frac{1}{2}$ باشه، چون $\sqrt{-2} = (-2)^{\frac{1}{2}}$ تعریف نشده هست، به این خاطر که اعداد منفی در رادیکال با فرجه زوج، بی‌معنی می‌شن). در ضمن اگه a مساوی صفر یا یک باشه، تابع به صورت $y = 0$ یا $y = 1$ ثابت درمیاد که دیکه نمایی نیست! مثال زیر، قضیه را برایتان روشن‌تر می‌کند.

مثال کدام یک از توابع زیر، یک تابع نمایی است؟

الف) تابع نمایی نیست. $y = 3x^2 - 5x + 4$

ب) تابع نمایی نیست. $y = x^3 + 1$

پ) تابع نمایی نیست. $y = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$

ت) تابع نمایی است. $y = 3^{-2x+1} = 3 \times 3^{-2x} = 3(3^{-2})^x = 3(\frac{1}{9})^x$

* اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت و a و b دو عدد حقیقی باشند، داریم:

۱) $x^0 = 1$

۲) $x^a \times x^b = x^{a+b}$

۳) $(xy)^a = x^a \cdot y^a$

۴) $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$

۵) $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$

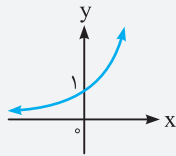
۶) $(x^a)^b = x^{ab}$

۷) $(\frac{x}{y})^a = \frac{x^a}{y^a}$

خب، حالا که تابع نمایی را شناختید، بهتر است در مورد نمودارش هم مطالبی را بدانید.

نمودار تابع نمایی $y = a^x$:

۱ به‌طور کلی نمودار تابع $y = a^x$ در صورتی که $a > 1$ باشد، به صورت مقابل بوده و دارای ویژگی‌های زیر می‌باشد:



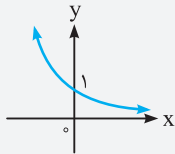
الف) دامنه آن \mathbb{R} و برد آن $(0, +\infty)$ است.

ب) هر خطی که موازی محور x ها رسم شود، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، پس تابع یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است.

پ) با افزایش مقدار x ، مقدار y هم زیاد می‌شود، پس اگر $x_2 > x_1$ باشد، آن‌گاه $a^{x_2} > a^{x_1}$ می‌باشد (و برعکس).

ت) نمودار تابع با محور x ها هیچ برخوردی ندارد و همواره بالای محور x ها قرار دارد ($y > 0$)، ولی محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند (پون وقتی $x = 0$ باشه، $y = a^0 = 1$ می‌شه).

۲ نمودار تابع $y = a^x$ در صورتی که $0 < a < 1$ باشد، به صورت مقابل بوده و دارای ویژگی‌های زیر می‌باشد:



الف) دامنه آن \mathbb{R} و برد آن $(0, +\infty)$ است.

ب) تابع یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است.

پ) با افزایش مقدار x ، مقدار y کم می‌شود، پس اگر $x_2 > x_1$ باشد، آن‌گاه $a^{x_2} < a^{x_1}$ می‌باشد (و برعکس).

ت) نمودار تابع با محور x ها هیچ برخوردی ندارد و همواره بالای محور x ها قرار می‌گیرد. در ضمن محور y ها را در $y = 1$ قطع می‌کند.

توجه براساس مطالبی که گفته شد می‌توان نتیجه گرفت که تابع نمایی $y = a^x$ ، همواره مثبت است. به عنوان مثال می‌توان نوشت: $|\delta^{-x}| = \delta^{-x}$ و $|\delta^x| = \delta^x$.

په‌های عزیزم، مثال نموداری زیر رو ببینید تا درسنامه‌ای رو که تا این قسمت از کار براتون گفتیم به فوبی توی ذهنتون با بیفته.

مثال نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = 2^x$

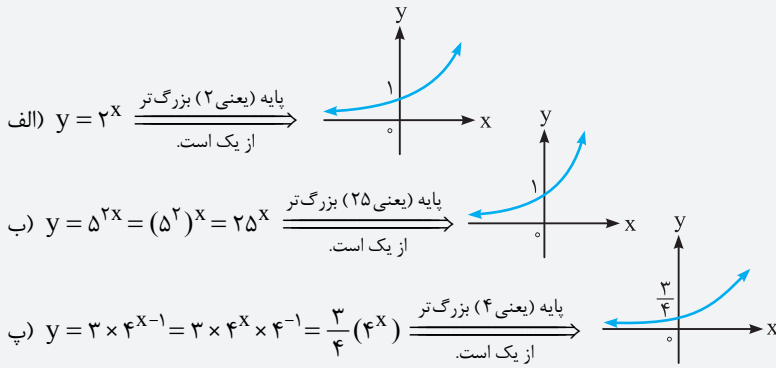
ب) $y = 5^{2x}$

پ) $y = 3 \times 4^{x-1}$

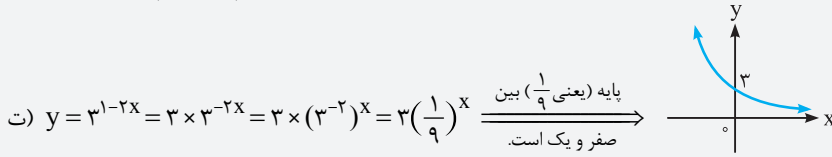
ت) $y = 3^{1-2x}$

ث) $y = 2^{x+3} + 2^x$

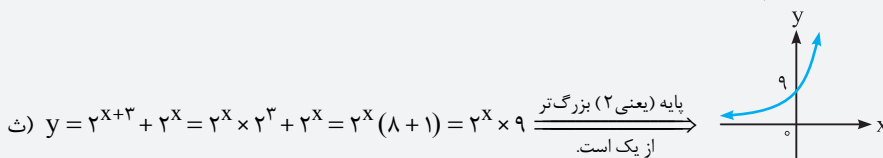
پاسخ:



راستی شاید بپرسید چرا توی مورد (ب)، نمودار تابع، محور لها رو در $\frac{3}{4}$ قطع کرده ولی توی دو تای قبلی، محور لها در ۱ قطع شده، فب دلیلش واضحه! به خاطر اون ضریب $\frac{3}{4}$ هستش که توی 4^x ضرب شده و باعث می شه که وقتی $x = 0$ هست، y هم مساوی بشه با (4^0) یعنی $\frac{3}{4}$.



در این جا هم وقتی x رو صفر می دیم، y مساوی می شه با $3 \left(\frac{1}{9}\right)^0$ ، یعنی ۳، پس همون طور که می بینید، نمودار محور لها رو توی ۳ قطع کرده.



مثال درستی یا نادرستی موارد زیر را بررسی کنید.

الف) نقطه $\left(\frac{1}{3}, \sqrt[3]{7}\right)$ روی نمودار $y = 7^x$ قرار دارد.

ب) محل تقاطع نمودار $y = 6^x$ با محور y ها، نقطه $(0, 6)$ است.

پ) دامنه توابع $y = x^2$ و $y = 2^x$ یکسان هستند.

ت) محل تقاطع نمودار $y = 9^x$ با محور x ها، نقطه $(9, 0)$ است.

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$$

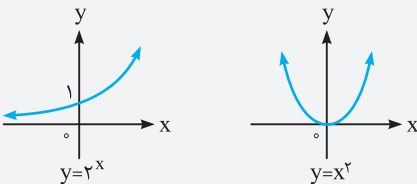
پاسخ: الف) درست است، زیرا با قرار دادن $x = \frac{1}{3}$ ، داریم:

در نتیجه نقطه $\left(\frac{1}{3}, \sqrt[3]{7}\right)$ روی نمودار $y = 7^x$ قرار دارد.

ب) نادرست است، زیرا اگر $x = 0$ باشد، $y = 6^0 = 1$ می شود، پس محل تقاطع نمودار $y = 6^x$ با محور y ها، نقطه $(0, 1)$ است نه $(0, 6)$.

پ) درست است، زیرا با توجه به نمودار دو تابع $y = x^2$ و $y = 2^x$ نتیجه می گیریم که دامنه

هر دوی آنها برابر \mathbb{R} است، ببینید:



ت) نادرست است، زیرا نمودار تابع نمایی $y = 9^x$ اصلاً با محور x ها برخوردی ندارد.

مثال اگر در تابع $f(x) = m^x + n^x$ ($m, n > 0$) داشته باشیم $f(1) = 12f(-1)$ و $f(3) = 18f(1)$ ، آنگاه مقدار $f(2)$ کدام است؟

۳۰ (۴)

۲۴ (۳)

۶ (۲)

۳۲ (۱)

پاسخ: $f(2) = m^2 + n^2$ ، حال برای پیدا کردن مقدار $m^2 + n^2$ به صورت زیر عمل می کنیم:

$$f(1) = 12f(-1) \Rightarrow m + n = 12(m^{-1} + n^{-1}) \Rightarrow m + n = 12\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) \Rightarrow m + n = 12\left(\frac{n+m}{mn}\right) \Rightarrow 1 = \frac{12}{mn} \Rightarrow mn = 12 \quad (*)$$

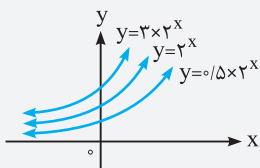
از طرفی $f(3) = 18f(1)$ ، پس:

$$m^3 + n^3 = 18(m + n) \Rightarrow (m+n)(m^2 - mn + n^2) = 18(m+n) \Rightarrow m^2 - mn + n^2 = 18 \quad (**)$$

حال اگر دو طرف تساوی های (*) و (**) را با هم جمع کنیم، خواهیم داشت:

$$mn + (m^2 - mn + n^2) = 12 + 18 \Rightarrow m^2 + n^2 = 30$$

پس $f(2) = 30$ ، یعنی گزینه (۴) درست است.



توجه بجهها یک موضوعی هم در مورد تابع نمایی $y = m \times a^x$ بدانید. در این تابع، عرض نقاط تابع $y = a^x$ را m برابر می‌کنیم. حال اگر $m > 1$ باشد، نمودار آن بالای نمودار $y = a^x$ و اگر $0 < m < 1$ باشد، نمودار آن پایین نمودار $y = a^x$ قرار می‌گیرد، مانند شکل روبه‌رو:

همان‌طور که در درسنامه به‌طور مفصل توضیح دادیم، تابع با ضابطه $y = \frac{1}{\pi-x}$ که همان $y = \pi^x$ می‌باشد، نشان‌دهنده یک تابع نمایی است.

۳ ۲ ابتدا مقادیر a و b را پیدا می‌کنیم تا بتوانیم مقدار $f(\frac{3}{2})$ را به‌دست آوریم:

$$f(x) = a \cdot b^x : \begin{cases} f(0) = \frac{3}{2} \Rightarrow a \times b^0 = \frac{3}{2} \Rightarrow a \times 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{2} \\ f(-2) = \frac{3}{32} \Rightarrow a \times b^{-2} = \frac{3}{32} \xrightarrow{a = \frac{3}{2}} \frac{3}{2} \times \frac{1}{b^2} = \frac{3}{32} \Rightarrow b^2 = 16 \xrightarrow{b > 0} b = 4 \end{cases}$$

پس $f(x) = \frac{3}{2} \times 4^x$ است و داریم:

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \times (4)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \times (2^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \times 2^3 = 3 \times 4 = 12$$

۳ ۳ با توجه به گفته‌های مسأله، نتیجه می‌گیریم نمودار تابع $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{ax+b}$ از نقاط $(0, 3)$ و $(1, \frac{1}{3})$ عبور می‌کند، پس:

$$\begin{cases} f(0) = 3 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^b = 3 \Rightarrow (3^{-1})^b = 3 \Rightarrow 3^{-b} = 3 \Rightarrow -b = 1 \Rightarrow b = -1 \\ f(1) = \frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{a+b} = \frac{1}{3} \Rightarrow a+b = 1 \xrightarrow{b=-1} a-1 = 1 \Rightarrow a = 2 \end{cases}$$

بنابراین $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}$ می‌باشد، پس داریم:

$$f(-1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{2(-1)-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = (3^{-1})^{-3} = 3^3 = 27$$

۳ ۴ همان‌طور که در درسنامه گفتیم، برای این‌که با افزایش مقدار x ، مقدار y هم در تابع نمایی $y = a^x$ افزایش یابد، باید $a > 1$ باشد، پس در مورد

تابع $y = (a^2 - 3a + 3)^x$ ، داریم:

$$a^2 - 3a + 3 > 1 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 > 0 \Rightarrow (a-2)(a-1) > 0 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} a & 1 & 2 \\ \hline a-2 & - & + \\ a-1 & - & + \\ \hline (a-2)(a-1) & + & + \end{array} \Rightarrow a < 1 \text{ یا } a > 2 \Rightarrow a \in \mathbb{R} - [1, 2]$$

۴ ۵ فب، این تست نسبت به تست قبلی به کم ففون تره. بهتر است که اول ضابطه تابع را به صورت زیر بنویسیم:

$$f(x) = (0.4)^{2-x} \cdot m^{x+3} = \left(\frac{2}{5}\right)^{2-x} \cdot m^{x+3} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^{-x} \cdot m^{x+3} = \left(\frac{4}{25}\right) \left(\frac{5}{2}\right)^x \cdot m^x \cdot m^3 = \left(\frac{4}{25} m^3\right) \cdot \left(\frac{5}{2} m\right)^x$$

اگر قرار باشد با افزایش مقدار x در تابع نمایی $y = a^x$ ، مقدار y کاهش یابد، باید $0 < a < 1$ باشد، بنابراین:

$$0 < \frac{5}{2} m < 1 \xrightarrow{\times \frac{2}{5}} 0 < m < \frac{2}{5} \Rightarrow 0 < m < 0.4$$

۴ ۶ از آن‌جا که نمودار، مربوط به یک تابع نمایی است، پس با توجه به نمودار از روی نقاط $C(1, 3)$ و $D(2, 9)$ می‌توان نوشت:

$$f(x) = k \times a^x \Rightarrow \begin{cases} C(1, 3) \in f : 3 = k \times a \Rightarrow k = \frac{3}{a} (*) \\ D(2, 9) \in f : 9 = k \times a^2 \xrightarrow{(*)} 9 = \frac{3}{a} \times a^2 \Rightarrow 9 = 3a \Rightarrow a = 3 \xrightarrow{k = \frac{3}{a}} k = 1 \end{cases}$$

بنابراین $f(x) = 3^x$ و در نتیجه:

$$\begin{cases} y_B = f\left(\frac{1}{2}\right) = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \\ y_A = f\left(\frac{3}{2}\right) = 3^{\frac{3}{2}} = 3\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow y_A - y_B = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

۲ ۷ چون تابع نمایی است، پس باید x ، فقط در توان باشد، در نتیجه باید جمله شامل x^2 را از بین ببریم. برای این کار باید $4 - |k| = 0$ باشد،

پس $|k| = 4$ و یا $k = \pm 4$. اما اگر $k = -4$ باشد، تابع به فرم $y = 3^{-4x} = \left(\frac{1}{81}\right)^x$ در می‌آید که در این صورت با افزایش مقدار x ، مقدار y کم می‌شود،

پس قابل قبول نیست، بنابراین $k = 4$ است.

نیم نگاه

اگر نقاطی از تابع نمایی $y = k \times a^x$ را انتخاب کنیم که طول آن نقاط، تشکیل یک دنباله حسابی دهند، آن گاه عرض نقاط نیز تشکیل یک دنباله هندسی می دهند.

* قدرنسبت دنباله هندسی به وجود آمده، برابر a است (یعنی پایه تابع نمایی)، پس باید بزرگتر از صفر و مخالف یک باشد ($a > 0$ و $a \neq 1$).

بیانی دیگر: تابع نمایی f با دامنه \mathbb{R} و ضابطه $f(x) = k \times a^x$ را در نظر بگیرید، به طوری که $f(a) = y_1$ و $f(b) = y_2$ باشد، در این صورت داریم:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \sqrt{y_1 y_2}$$

در این جا x های هر چهار گزینه، تشکیل دنباله حسابی داده اند، اما در مورد y ها، در گزینه (۱)، y ها تشکیل دنباله حسابی با قدرنسبت $d = -3$ می دهند، اما در گزینه (۲)، y ها تشکیل دنباله هندسی با قدرنسبت $q = \frac{12}{16} = 0.75$ می دهند، بنابراین بیانگر یک تابع نمایی است. در گزینه (۳)، y ها یک دنباله هندسی با قدرنسبت $q = -1 < 0$ درست کرده اند، بنابراین قابل قبول نیست. در گزینه (۴) اصلاً y ها دنباله حسابی یا هندسی نمی سازند.

۱ ۹

روش اول: چون $x = -3$ و $x = 0$ و $x = 3$ تشکیل دنباله حسابی می دهند، پس $y_1(-3)$ ، $y_1(0)$ و $y_1(3)$ هم یک دنباله هندسی می سازند. همچنین

$$\begin{cases} y_1(0) = \sqrt{y_1(-3) \times y_1(3)} \Rightarrow 4 = \sqrt{y_M \times y_N} \Rightarrow 16 = y_M \times y_N \\ y_2(0) = \sqrt{y_2(-3) \times y_2(3)} \Rightarrow 2 = \sqrt{y_P \times y_Q} \Rightarrow 4 = y_P \times y_Q \end{cases}$$

بنابراین: $y_2(0)$ ، $y_2(3)$ و $y_2(-3)$ نیز تشکیل دنباله هندسی می دهند. بنابراین:

$$\text{در نتیجه } \frac{y_P \times y_Q}{y_M \times y_N} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \text{ است.}$$

روش دوم: با توجه به نمودار داده شده در صورت مسأله، می توان نوشت:

$$\begin{cases} (0, 4) \in y_1 \xrightarrow{y_1 = k a^x} 4 = k \times a^0 = k \times 1 = k \Rightarrow y_1 = 4 \times a^x \\ (0, 2) \in y_2 \xrightarrow{y_2 = k' b^x} 2 = k' \times b^0 = k' \times 1 = k' \Rightarrow y_2 = 2 \times b^x \end{cases}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{y_P \times y_Q}{y_M \times y_N} = \frac{(2 \times b^{-3}) \times (2 \times b^3)}{(4 \times a^{-3}) \times (4 \times a^3)} = \frac{4 \times b^0}{16 \times a^0} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

روش اول: چون $f(3) = 4$ و $f(7) = 64$ است، یعنی نقاط $(3, 4)$ و $(7, 64)$ روی نمودار تابع قرار دارند. پس همان طور که گفتیم حتماً

نقطه $(\frac{3+7}{2}, \sqrt{4 \times 64}) = (\frac{5}{2}, \sqrt{256}) = (\frac{5}{2}, 16)$ هم روی نمودار تابع قرار دارد، به عبارتی دیگر:

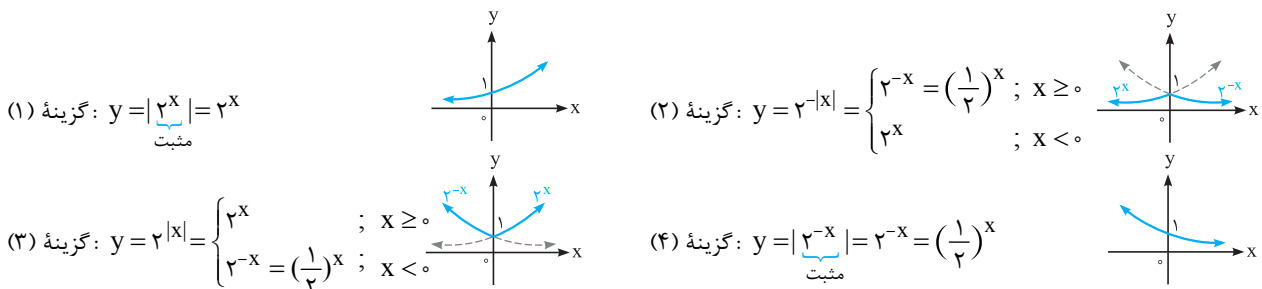
$$f\left(\frac{3+7}{2}\right) = \sqrt{4 \times 64} \Rightarrow f\left(\frac{5}{2}\right) = \sqrt{2^2 \times 2^6} = \sqrt{2^8} = 2^4 = 16$$

روش دوم:

$$\begin{cases} f(3) = 4 \Rightarrow 4 = k^6 \times a^3 \Rightarrow k^6 = \frac{4}{a^3} \\ f(7) = 64 \Rightarrow 64 = k^6 \times a^7 \Rightarrow k^6 = \frac{64}{a^7} \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{a^3} = \frac{64}{a^7} \Rightarrow a^4 = 16 \xrightarrow{a > 0} a = 2 \Rightarrow k^6 = \frac{4}{2^3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = k^6 a^x = \frac{1}{2} \times 2^x \Rightarrow f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} \times 2^{\frac{5}{2}} = \frac{2^{\frac{5}{2}}}{2} = 2^{\frac{3}{2}} = 16$$

نمودار هر یک از گزینه ها را رسم می کنیم:



همان طور که می بینید، نمودار تابع در گزینه (۲)، شبیه شکل داده شده در صورت مسأله است.

یادآوری

* راستی بپه های عزیزم ۳ با استفاده از انتقال هم می توانیم برشی از توابع رو رسم کنیم. ببینید:

انتقال عرضی و طولی: همان طور که در ریاضی دهم خواندید برای رسم نمودار $y = f(x) + k$ وقتی $k > 0$ است، نمودار $y = f(x)$ را k واحد به سمت بالا می بریم و وقتی $k < 0$ است، نمودار $y = f(x)$ را $|k|$ واحد به سمت پایین می آوریم. همچنین برای رسم نمودار $y = f(x+k)$ وقتی $k > 0$ است، نمودار $y = f(x)$ را k واحد به سمت چپ می بریم و وقتی $k < 0$ است، نمودار $y = f(x)$ را $|k|$ واحد به سمت راست می بریم.

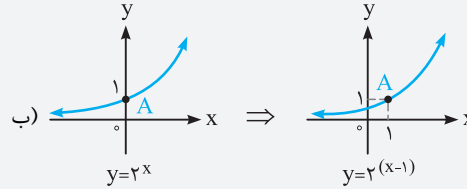
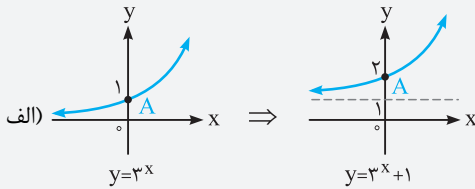
برای فهم بهتر، مثال زیر را ببینید.

مثال نمودار هر یک از توابع نمایی زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = 3^x + 1$

ب) $g(x) = 2^{(x-1)}$

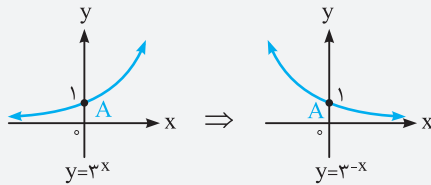
پاسخ:



قرینه نسبت به محور yها: برای رسم نمودار $y = f(-x)$ ، ابتدا نمودار $y = f(x)$ را رسم کرده و بعد آن را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم.

مثال نمودار تابع $y = 3^{-x}$ را رسم کنید.

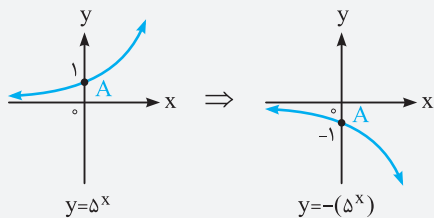
پاسخ:



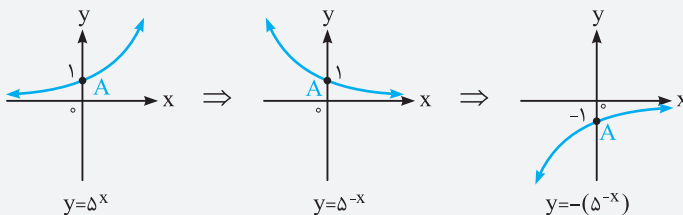
قرینه نسبت به محور xها: برای رسم نمودار $y = -f(x)$ ، ابتدا نمودار $y = f(x)$ را رسم کرده و بعد آن را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

مثال نمودار توابع $y = -(\Delta^x)$ و $y = -(\Delta^{-x})$ را رسم کنید.

پاسخ: برای رسم $y = -(\Delta^x)$ داریم:



همچنین برای رسم $y = -(\Delta^{-x})$ داریم:

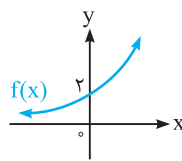


۱۲ بچه‌ها از روی نمودار داده‌شده در تست، نتیجه می‌گیریم

که به ازای هر x حقیقی، $g(x) = 1$ است، یعنی $a^x = 1$ است، پس

$a = 1$ بوده و در نتیجه داریم:

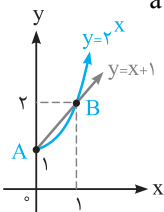
$$f(x) = 2a^x \times \left(\frac{3}{a^2+1}\right)^x \xrightarrow{a=1} f(x) = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^x$$



۱۳ به تست فوب نموداری! با رسم نمودار توابع $y = 2^x$ و $y = x + 1$ در یک دستگاه مختصات، می‌فهمیم

که نمودار این دو تابع، هم‌دیگر را در نقاط $A(0, 1)$ و $B(1, 2)$ قطع می‌کنند. ببینید:

$$\Rightarrow |AB| = \sqrt{(1-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2}$$



تذکر فاصله بین نقاط $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ از رابطه $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ به دست می‌آید.

۱۴ اگر همه تابع‌ها را در یک پایه بنویسیم، همه چیز برآینان معلوم می‌شود:

(۱) گزینه $y = 2^{2x-1} = (2^2)^x \times 2^{-1} = 4^x \times \frac{1}{2}$

(۲) گزینه $y = 2^{2x+1} = (2^2)^x \times 2 = 4^x \times 2$

(۳) گزینه $y = 4^x$

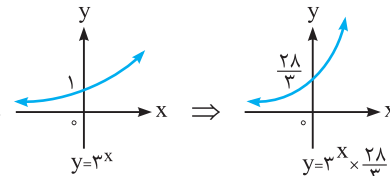
(۴) گزینه $y = 3(4)^{x-1} = 3(4^x) \times 4^{-1} = 4^x \times \frac{3}{4}$

از ضرایب 4^x مشخص است که نمودار تابع $y = 4^x \times 2$ در ناحیه اول، بالاتر از بقیه است.

۳ ۱۵ باید بازه‌ای را پیدا کنیم که در آن، نمودار $y = 3^{-2x} = (\frac{1}{9})^x$ بالای نمودار $y = 4^{-2x} = (\frac{1}{16})^x$ قرار دارد. اگر به نمودار این دو تابع نگاه کنید، موضوع حل می‌شود. واضح است که در بازه $(0, +\infty)$ ، نمودار $(\frac{1}{9})^x$ بالای نمودار $(\frac{1}{16})^x$ قرار می‌گیرد، که بازه $(2, 7)$ در گزینه ۳ است. زیرمجموعه‌ای از همین بازه است.

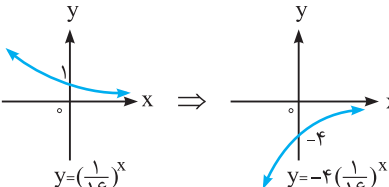
توضیح بیشتر: تابع نمایی $y = a^x$ را در نظر بگیرید. هرچه پایه (یعنی a)، بزرگ‌تر باشد، رشد تابع هم بیشتر می‌شود. به همین دلیل، رشد $y = (\frac{1}{9})^x$ بیشتر از رشد $y = (\frac{1}{16})^x$ است و همین موضوع باعث شده که نمودار $(\frac{1}{9})^x$ با وجود این‌که در x های منفی، پایین‌تر از نمودار $(\frac{1}{16})^x$ قرار دارد، وقتی وارد x های مثبت می‌شود، نمودارش بالای نمودار $(\frac{1}{16})^x$ قرار گیرد.

۴ ۱۶ داریم $f(x) = 3^{x-1} + 3^{x+2}$ ، بنابراین:

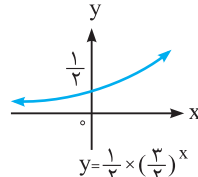
$$f(x) = 3^x \times 3^{-1} + 3^x \times 3^2 = 3^x \times (\frac{1}{3} + 9) = \frac{28}{3} \times 3^x \Rightarrow$$


۳ ۱۷ نگاه کنید:

الف) $y = -(4^{1-2x}) = -(4 \times 4^{-2x}) = -4 \times (\frac{1}{16})^x$:



ب) $y = \frac{(\frac{1}{3})^{-x}}{2^{x+1}} = \frac{3^x}{2^x \times 2} = \frac{1}{2} \times (\frac{3}{2})^x$:

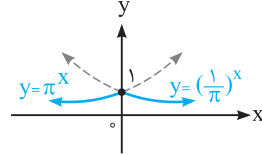


۳ ۱۸ نمودار رسم شده، در واقع نمودار x است که دو واحد به سمت بالا انتقال یافته، پس $k = 2$ است. از طرفی نقطه $(0, 3)$ روی نمودار قرار دارد، پس:

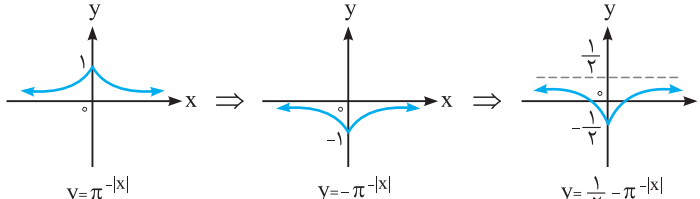
$$f(0) = 3 \Rightarrow 2 + (\frac{1}{\pi})^{(0-p)} = 3 \Rightarrow (\frac{1}{\pi})^{(-p)} = 1 \Rightarrow -p = 0 \Rightarrow p = 0$$

بنابراین $(k, p) = (2, 0)$ است.

۴ ۱۹ ابتدا نمودار تابع $y = \pi^{-|x|}$ را رسم می‌کنیم:

$$y = \pi^{-|x|} = \begin{cases} \pi^{-x} = (\frac{1}{\pi})^x & ; x \geq 0 \\ \pi^x & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow$$


حال مراحل زیر را دنبال می‌کنیم:



۲۰. ابتدا درسنامه زیر را بخوانید.

معادلات نمایی

معادله‌هایی که در آن‌ها، متغیر در توان قرار گرفته باشد، معادلات نمایی می‌نامند. برای حل این معادلات، باید به گونه‌ای عمل کنیم که در هر طرف تساوی، یک عبارت نمایی با پایه‌های برابر قرار داشته باشند (البته بدون ضریب هم باشند). در این صورت توان‌ها را در دو طرف با هم برابر قرار می‌دهیم تا جواب‌های معادله به دست آید. جواب‌های این معادله را پیدا می‌کنیم. $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)$

مثال معادلات نمایی زیر را حل کنید.

الف) $25^{3y-2} = 125^{y+4}$ ب) $4^{2n-1} = \frac{1}{64^3}$ پ) $9^{\frac{2x}{3}+1} = \left(\frac{1}{243}\right)^2$

پاسخ: بچه‌ها در هر کدام از موارد بالا، اول باید پایه‌ها را در دو طرف معادله یکسان کنید، ببینید:

الف) $25^{3y-2} = 125^{y+4} \Rightarrow (5^2)^{3y-2} = (5^3)^{y+4} \Rightarrow 5^{6y-4} = 5^{3y+12}$

حال که پایه‌ها یکی شد، نتیجه می‌گیریم $6y - 4 = 3y + 12$ ، پس:

$$3y = 16 \Rightarrow y = \frac{16}{3}$$

ب) $4^{2n-1} = \frac{1}{64^3} \Rightarrow (2^2)^{2n-1} = (64)^{-3} = (2^6)^{-3} \Rightarrow 2^{4n-2} = 2^{-18} \Rightarrow 4n - 2 = -18 \Rightarrow 4n = -16 \Rightarrow n = -4$

پ) $9^{\frac{2x}{3}+1} = \left(\frac{1}{243}\right)^2 \Rightarrow (3^2)^{\frac{2x}{3}+1} = ((243)^{-1})^2 \Rightarrow 3^{\frac{4x}{3}+2} = (3^5)^{-2} \Rightarrow 3^{\frac{4x}{3}+2} = 3^{-10} \Rightarrow \frac{4x}{3} + 2 = -10 \Rightarrow \frac{4x}{3} = -12 \Rightarrow 4x = -36 \Rightarrow x = -9$

توجه در حل بعضی از معادلات نمایی، می‌توان عبارت نمایی را برابر یک متغیر در نظر گرفت و آن را به یک معادله جبری تبدیل و آن را حل کرد.

مثال حاصل ضرب ریشه‌های معادله $(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 4$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) -۱

پاسخ: یادتان نرود که $2 + \sqrt{3}$ و $2 - \sqrt{3}$ معکوس یکدیگرند، زیرا:

$$(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$$

حال فرض کنید $(2 + \sqrt{3})^x = t$ ، در این صورت:

$$t + \frac{1}{t} = 4 \Rightarrow \frac{t^2 + 1}{t} = 4 \Rightarrow t^2 + 1 = 4t \Rightarrow t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4(1)(1) = 12 \Rightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2 + \sqrt{3})^x = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow x = 1 \\ (2 + \sqrt{3})^x = 2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = (2 + \sqrt{3})^{-1} \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

(گزینه ۴) حاصل ضرب ریشه‌ها = $1 \times (-1) = -1$

در این جا باید سمت چپ تساوی را ساده کنیم تا شبیه طرف دیگر تساوی شود و بعد A را به دست آوریم:

$$\left(\frac{4\sqrt{33}}{2\sqrt{8}}\right)^2 = \left(\frac{(2^2)^{4\sqrt{3}}}{2^{2\sqrt{3}}}\right)^2 = \left(\frac{2^{8\sqrt{3}}}{2^{2\sqrt{3}}}\right)^2 = (2^{6\sqrt{3}})^2 = 2^{12\sqrt{3}}$$

و حالا از مقایسه جواب به دست آمده با 2^A ، نتیجه می‌گیریم: $A = 12\sqrt{3}$

۲۱. از تساوی $3^{x+1} = 9^x$ نتیجه می‌گیریم:

$$3^{x+1} = (3^2)^x = 3^{2x} \Rightarrow x + 1 = 2x \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (\Delta^x)^{-1} \frac{x=1}{\Delta^{-1}} = \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{5} = 0.2$$

۲۲. ابتدا باید معادله را ساده‌تر کنیم تا در دو طرف تساوی، پایه‌های یکسان ایجاد شود:

$$(25)^{x-1} = \left(\frac{1}{125^{x-1}}\right)^{2x+2} \Rightarrow (5^2)^{x-1} = \left(\frac{1}{(5^3)^{x-1}}\right)^{2x+2} \Rightarrow 5^{2x-2} = \left(\frac{1}{5^{3(x-1)}}\right)^{2(x+1)}$$

$$\Rightarrow 5^{2x-2} = (5^{-3(x-1)})^{2(x+1)} \Rightarrow 5^{2x-2} = 5^{-6(x^2-1)} \Rightarrow 2x - 2 = -6x^2 + 6 \Rightarrow 6x^2 + 2x - 8 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{c}{a} = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

بنابراین ضرب ریشه‌ها برابر است با $1 \times -\frac{4}{3} = -\frac{4}{3}$

تذکره در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ داریم:

$$\begin{cases} \text{اگر } a + b + c = 0 \Rightarrow x = 1, x = -\frac{c}{a} \\ \text{اگر } a + c = b \Rightarrow x = -1, x = -\frac{c}{a} \end{cases}$$

۱ ۲۳ نمودار تابع f از نقطه $(4, 2\sqrt{2})$ می‌گذرد، این یعنی $f(4) = 2\sqrt{2}$ است، در نتیجه داریم:

$$f(x) = 2^{ax-1} \Rightarrow f(4) = 2^{4a-1} \xrightarrow{f(4)=2\sqrt{2}} 2^{4a-1} = 2\sqrt{2} = 2 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 4a-1 = \frac{3}{2} \Rightarrow 4a = \frac{5}{2} \Rightarrow a = \frac{5}{8}$$

پس $f(x) = 2^{\frac{5}{8}x-1}$ است. حالا باید بفهمیم که نمودار f ، خط $y = 4\sqrt{2}$ را با چه طولی قطع می‌کند. برای این کار، معادله $2^{\frac{5}{8}x-1} = 4\sqrt{2}$ را حل می‌کنیم تا مقدار x مشخص شود:

$$2^{\frac{5}{8}x-1} = 2^2 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{2}} \Rightarrow \frac{5}{8}x - 1 = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{5}{8}x = \frac{13}{2} \Rightarrow x = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{5}{8}} = \frac{26}{5}$$

۳ ۲۴ اگر دو طرف معادله $(x^{\delta+k})^{\frac{1}{\epsilon}} = 10^{k+2}$ را به توان ۶ برسانیم از دست توان $\frac{1}{\epsilon}$ خلاص می‌شویم که این طوری می‌شود:

$$(10^{k+2})^{\epsilon} = x^{\delta+k} \Rightarrow 10^{\epsilon k+12} = x^{\delta+k} \xrightarrow{x=10^k} 10^{\epsilon k+12} = (10^k)^{\delta+k} \Rightarrow 10^{\epsilon k+12} = 10^{\delta k+k^2} \quad (*)$$

و حالا از معادله (*) نتیجه می‌گیریم $\epsilon k + 12 = \delta k + k^2$ ، بنابراین:

$$k^2 - k - 12 = 0 \Rightarrow (k-4)(k+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 4 \xrightarrow{x=10^k} x = 10^4 = 10000 \Rightarrow \frac{x}{k} = \frac{10000}{4} = 2500 \\ k = -3 \xrightarrow{x=10^k} x = 10^{-3} = \frac{1}{1000} \Rightarrow \frac{x}{k} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3000} \end{cases}$$

۴ ۲۵ برای پیدا کردن نقطه تلاقی دو منحنی، باید منحنی‌های $y = 2^x$ و $y = (\sqrt{2})^{x+1} + 4$ را با هم قطع دهیم، یعنی باید معادله $2^x = (\sqrt{2})^{x+1} + 4$ را حل کنیم، پس می‌توان نوشت:

$$2^x = \sqrt{2} \times (\sqrt{2})^x + 4 \xrightarrow{(\sqrt{2})^x = t} t^2 = \sqrt{2}t + 4 \Rightarrow t^2 - \sqrt{2}t - 4 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2+16}}{2} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \xrightarrow{(\sqrt{2})^x = t} (\sqrt{2})^x = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2^{\frac{x}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = 3 \\ t = \frac{-2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} \xrightarrow{(\sqrt{2})^x = t} (\sqrt{2})^x = -\sqrt{2} : \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

همواره مثبت

در نتیجه:

$$x = 3 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در } y = 2^x} y = 2^3 = 8 \Rightarrow \text{نقطه تلاقی: } B(3, 8) \Rightarrow \begin{cases} A(0, 4) \\ B(3, 8) \end{cases} \Rightarrow AB = \sqrt{(3-0)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

۱ ۲۶ در این مسأله، نمی‌توانیم در دو طرف تساوی، پایه‌های یکسان ایجاد کنیم، پس با تغییر متغیر $3^x = t$ ، فرم معادله را تغییر می‌دهیم:

$$9^x + 3^x - 2 = 0 \Rightarrow (3^x)^2 + 3^x - 2 = 0 \Rightarrow t^2 + t - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} t = -2 \Rightarrow 3^x = -2 \text{ (چون حاصل تابع نمایی، همواره مثبت است)} \\ t = 1 \Rightarrow 3^x = 1 \xrightarrow{3^0=1} x = 0 \end{cases}$$

بنابراین معادله، فقط یک ریشه حقیقی دارد.

۲ ۲۷ فرض کنیم $3^x = A$ ، در این صورت می‌توانیم معادله $3^{2x} - 4 \times 3^{x+1} + 27 = 0$ را به صورت زیر بنویسیم:

$$(3^x)^2 - 4 \times 3 \times 3^x + 27 = 0 \Rightarrow A^2 - 12A + 27 = 0 \Rightarrow (A-9)(A-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 9 \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow x = 2 \\ A = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

بنابراین مجموع ریشه‌های معادله برابر $2+1=3$ می‌باشد.

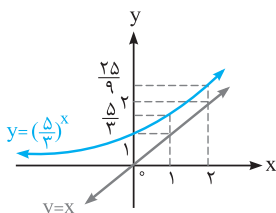
۴ ۲۸ ابتدا بهتر است ظاهر معادله را یک کم ساده‌تر کنیم:

$$5^{x+3} - 5^{x+2} + 5^{x+1} = 105x \times 3^x \Rightarrow 5^x(125 - 25 + 5) = 105x \times 3^x$$

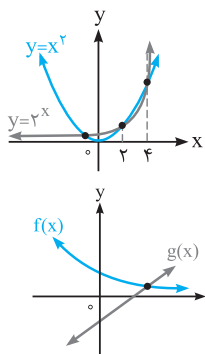
$$\Rightarrow 5^x \times 105 = 105x \times 3^x \Rightarrow 5^x = x \times 3^x \Rightarrow \frac{5^x}{3^x} = x \Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x = x$$

الان خوب شد! حالا برای این‌که تعداد جواب‌های معادله را پیدا کنیم، کافی است نمودارهای $y = x$ و $y = \left(\frac{5}{3}\right)^x$ را

در یک دستگاه مختصات رسم کنیم تا تعداد نقاط تلاقی دو نمودار به دست آید:



معادله جواب ندارد. \Rightarrow هیچ نقطه برخوردی ندارند. \Rightarrow



۱ ۲۹ به روش نموداری حلش می‌کنیم. یعنی چه؟ یعنی این‌که کافی است نمودار دو تابع $y = 2^x$ و $y = x^2$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم و تعداد نقاطی که نمودارها هم‌دیگر را قطع می‌کنند، پیدا کنیم:

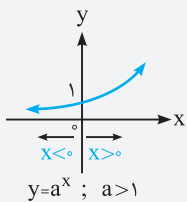
معادله سه ریشه دارد. \Rightarrow نمودار دو تابع، سه نقطه برخورد دارند. \Rightarrow

۳ ۳۰ برای تعیین تعداد جواب‌های حقیقی معادله $4 + 2^{-x} - x = 0$ ، ابتدا معادله را به فرم $2^{-x} = x - 4$ می‌نویسیم و بعد نمودار توابع $f(x) = 2^{-x}$ و $g(x) = x - 4$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم تا تعداد نقاط برخورد آن‌ها پیدا شود:

معادله یک جواب دارد. \Rightarrow یک نقطه برخورد دارند. \Rightarrow

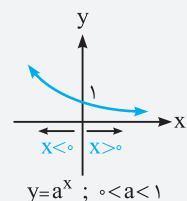
۴ ۳۱ ابتدا درسنامه زیر را بخوانید.

نامعادلات نمایی



دانش‌آموزان کلمه، یک بار دیگر نمودار تابع نمایی $y = a^x$ را ببینید و به نتایج به‌دست آمده زیر، دقت کنید.

$$\Rightarrow \begin{cases} x < 0 \Rightarrow 0 < a^x < 1 & (\text{یعنی وقتی عدد بزرگ‌تر از ۱ به توان منفی می‌رسد، بین ۰ و ۱ می‌شود.}) \\ x > 0 \Rightarrow a^x > 1 & (\text{یعنی وقتی عدد بزرگ‌تر از ۱ به توان مثبت می‌رسد، بزرگ‌تر از ۱ می‌شود.}) \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} x < 0 \Rightarrow a^x > 1 & (\text{یعنی وقتی عدد بین ۰ و ۱، به توان منفی می‌رسد، بزرگ‌تر از ۱ می‌شود.}) \\ x > 0 \Rightarrow 0 < a^x < 1 & (\text{یعنی وقتی عدد بین ۰ و ۱، به توان مثبت می‌رسد، بین ۰ و ۱ می‌شود.}) \end{cases}$$

* همان‌طور که قبلاً هم گفتیم، در تابع نمایی $y = a^x$ ، اگر $a > 1$ باشد، آن‌گاه با افزایش مقدار x ، مقدار y هم افزایش می‌یابد و به ازای $x_2 > x_1$ نتیجه می‌شود $a^{x_2} > a^{x_1}$ ، بنابراین:

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \iff^{a>1} f(x) > g(x) \text{ یعنی جهت نامساوی عوض نمی‌شود.}$$

اما اگر $0 < a < 1$ باشد، آن‌گاه با افزایش مقدار x ، مقدار y کاهش می‌یابد و به ازای $x_2 > x_1$ نتیجه می‌شود $a^{x_2} < a^{x_1}$ ، بنابراین:

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \iff^{0<a<1} f(x) < g(x) \text{ یعنی جهت نامساوی عوض می‌شود.}$$

* یارتون نره! برای حل نامعادلات نمایی، اولین کاری که باید انجام دهید، این است که پایه‌ها را در دو طرف نامعادله، یکسان کنید. اگر پایه‌ها بزرگ‌تر از یک بودند، بدون این‌که جهت نامعادله را عوض کنید، برای توان‌ها، نامعادله را بنویسید و مجموعه جواب آن را بیابید. اما اگر پایه‌ها بین صفر و یک بودند، جهت نامعادله را عوض کنید و برای توان‌ها، نامعادله را بنویسید و مجموعه جواب آن را به‌دست آورید.

مثال نامعادلات نمایی زیر را حل کنید.

الف) $35^{x-2} \leq 243$ ب) $4^{3x+1} > 16^{2x-2}$ پ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{4x-1} \geq \left(\frac{1}{27}\right)^{x+1}$

پاسخ: همان‌طور که گفتیم، ابتدا باید پایه‌ها را در دو طرف نامعادله، یکسان کرده، سپس با توجه به مقدار a ، جهت نامعادله را برای توان‌ها تعیین کنید.

الف) $35^{x-2} \leq 243 \Rightarrow 35^{x-2} \leq 3^5$

چون پایه‌ها در دو طرف نامعادله، مساوی ۳ هستند (یعنی بزرگ‌تر از یک می‌باشند)، پس جهت نامعادله را برای توان‌ها عوض نمی‌کنیم و می‌نویسیم:

$$5x - 2 \leq 5 \Rightarrow 5x \leq 7 \Rightarrow x \leq \frac{7}{5}$$

ب) $4^{3x+1} > 16^{2x-2} \Rightarrow (2^2)^{3x+1} > (2^4)^{2x-2} \Rightarrow 2^{6x+2} > 2^{8x-8}$

باز هم پایه‌ها در دو طرف نامعادله، بزرگ‌تر از یک هستند، پس برای توان‌ها جهت نامعادله را عوض نمی‌کنیم:

$$6x + 2 > 8x - 8 \Rightarrow 10 > 2x \Rightarrow x < 5$$

پ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{4x-1} \geq \left(\frac{1}{27}\right)^{x+1} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{4x-1} \geq \left(\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)^{x+1} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{4x-1} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{3x+3}$

این بار پایه‌ها در دو طرف نامعادله، بین صفر و یک هستند، پس در ادامه کار جهت نامعادله را عوض می‌کنیم، این‌جوری: $4x - 1 \leq 3x + 3 \Rightarrow x \leq 4$

با توجه به این‌که $0/62 < 0/49 < 0/21$ می‌باشد، پس $3^0/62 < 3^0/49 < 3^0/21$ است.

۲ ۳۲ الف) $\frac{1}{3} \approx 3/33$ ، پس $\frac{1}{3} > \frac{3}{5}$ است و در نتیجه $4^{3/5} > 4^{3/3}$ می‌باشد، بنابراین (الف) نادرست است.
 ب) $\sqrt{11} < \sqrt{13}$ ، پس $3\sqrt{11} < 3\sqrt{13}$ است، در نتیجه (ب) نادرست می‌باشد.
 پ) اگر $x > y$ باشد، آن‌گاه $5^x > 5^y$ خواهد بود، پس (پ) درست است.
 ت) اگر $x > y$ باشد، آن‌گاه $(0/3)^x < (0/3)^y$ می‌باشد، پس (ت) درست است.
 بنابراین دو تا از نامساوی‌های داده شده درست است.

۲ ۳۳ در مورد $x = (0/4)^{\sqrt{5}}$ ، چون پایه برابر $0/4$ و بین صفر و یک می‌باشد و توانش (یعنی $\sqrt{5}$)، عددی مثبت است، پس $x = (0/4)^{\sqrt{5}}$ بین صفر و یک خواهد بود. اما در مورد $y = (\sin \frac{\pi}{4})^{-0/1}$ یا $y = (\frac{\sqrt{2}}{2})^{-0/1}$ چون پایه (یعنی $\frac{\sqrt{2}}{2}$) بین صفر و یک است و به توان منفی رسیده، پس مقدار y ، عددی بزرگ‌تر از یک می‌باشد.

۱ ۳۴ در مورد نامعادله $(\frac{1}{5})^{3x-11} \geq 5^{-x}$ می‌توان نوشت:
 $(\frac{1}{5})^{3x-11} \geq (\frac{1}{5})^x \xrightarrow{0 < \frac{1}{5} < 1}$ چون پایه بین صفر و یک است، پس جهت نامعادله عوض می‌شود.
 $3x - 11 \leq x \Rightarrow 2x \leq 11 \Rightarrow x \leq \frac{11}{2} = 5/5$
 بنابراین اعداد طبیعی ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ در مجموعه جواب نامعادله فوق قرار دارند.

۲ ۳۵ ابتدا طرفین نامعادله را ساده می‌کنیم تا پایه‌ها در دو طرف، یکسان شوند:
 $(\frac{4}{3})^{-x} \geq (\frac{27}{64})^{2x-1} (\frac{9}{16})^{1-x} \Rightarrow (\frac{4}{3})^{-x} \geq ((\frac{3}{4})^3)^{2x-1} ((\frac{3}{4})^2)^{1-x} \Rightarrow (\frac{4}{3})^{-x} \geq (\frac{3}{4})^{6x-3} (\frac{3}{4})^{2-2x} \Rightarrow (\frac{4}{3})^{-x} \geq (\frac{3}{4})^{4x-1}$
 حالا خوب شد. پایه‌ها در دو طرف نامعادله، یکی شده‌اند. اما حواستان باشد که پایه‌ها بین صفر و یک هستند، بنابراین باید جهت نامعادله را عوض کنیم:

$x \leq 4x - 1 \Rightarrow 1 \leq 3x \Rightarrow x \geq \frac{1}{3}$
۳ ۳۶ دقت کنید $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ همان $\sqrt{2}-1$ است (چون $\frac{1}{\sqrt{2}+1} \times \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}-1$)، به همین خاطر نامعادله به صورت زیر درمی‌آید:

$(\sqrt{2}-1)^{4-2x} > (\sqrt{2}-1)^{x+2} \xrightarrow{\text{چون پایه بین صفر و یک است}} 4-2x < x+2 \Rightarrow 2 < 4x \Rightarrow x > \frac{1}{2}$
 پس جهت نامعادله، عوض می‌شود.
۱ ۳۷ با توجه به اتحاد مربع دو جمله‌ای داریم $(\sqrt{3}-1)^2 = 4 - 2\sqrt{3}$ ، پس نامعادله را این طوری می‌نویسیم:

$(\sqrt{3}-1)^{x^2} > (4-2\sqrt{3})^{5x-12} \Rightarrow (\sqrt{3}-1)^{x^2} > ((\sqrt{3}-1)^2)^{5x-12} \Rightarrow (\sqrt{3}-1)^{x^2} > (\sqrt{3}-1)^{10x-24}$ (*)
 با توجه به این‌که $\sqrt{3}-1$ ، عددی بین صفر و یک است، پس از نامساوی (*) باید جهت نامعادله را برای توان‌ها عوض کنیم:

$$x^2 < 10x - 24 \Rightarrow x^2 - 10x + 24 < 0 \Rightarrow (x-6)(x-4) < 0 \Rightarrow \frac{x}{(x-6)(x-4)} < 0 \Rightarrow x \in (4, 6)$$

بنابراین مجموعه جواب نامعادله داده شده، شامل یک عدد طبیعی (یعنی $x = 5$) است.

۴ ۳۸ ابتدا درسنامه زیر را بخوانید.

تابع لگاریتمی (معکوس تابع نمایی)

در قسمت‌های قبلی گفتیم تابع نمایی $y = a^x$ ، یک‌به‌یک است، پس وارون‌پذیر می‌باشد که وارون آن را **تابع لگاریتمی** نامیده و می‌نویسیم:

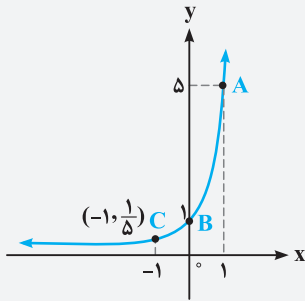
«لگاریتم x در مبنای a » : $f(x) = a^x \xrightarrow{\text{تابع معکوس}} y = f^{-1}(x) = \log_a x$

$0 < a < 1$

$a > 1$

* اگر نمودار تابع نمایی $y = a^x$ را نسبت به نیمساز نواحی اول و سوم ($y = x$) قرینه کنیم، نمودار تابع لگاریتمی به دست می‌آید. به شکل‌های مقابل توجه کنید:

۱- لایلاس دانشمند بزرگ فرانسوی درباره لگاریتم گفته است: «لگاریتم ابزاری است قابل ستایش که به کمک آن، کار چند ماه به چند روز کاهش می‌یابد، عمر اخترشناسان را دو برابر می‌کند و از خطاهای کوچک می‌گذرد و از عبارات طولانی و جدانشدنی ریاضی بیزار است.»



توجه قرینه نقطه $A(x, y)$ نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم، نقطه $A'(y, x)$ است.

مثال با توجه به نمودار تابع $f(x) = 5^x$ در شکل مقابل، حاصل هر یک از موارد زیر را به دست آورید.

الف) دامنه و برد تابع f

ب) دامنه و برد تابع f^{-1}

پ) مقدار $f(1)$ ، $f(0)$ ، $f^{-1}(\frac{1}{5})$ و $f^{-1}(5)$

ت) مقدار a به شرطی که $f^{-1}(a) = 1$

پاسخ: ابتدا نمودار تابع $f(x) = 5^x$ را نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع وارون f (یعنی f^{-1}) که به صورت $f^{-1}(x) = \log_5 x$ می‌باشد، به دست آید.

حال برویم سراغ موارد خواسته شده:

الف) دامنه f ، \mathbb{R} و برد آن، بازه $(0, +\infty)$ است.

ب) دامنه f^{-1} ، بازه $(0, +\infty)$ و برد آن، \mathbb{R} است.

پ) نمودار تابع f از نقاط $(0, 1)$ و $(1, 5)$ می‌گذرد، پس $f(0) = 1$ و $f(1) = 5$ است. از طرفی نمودار تابع f^{-1} از نقاط $(1, 0)$ و $(5, 1)$ می‌گذرد، پس $f^{-1}(1) = 0$ و $f^{-1}(5) = 1$ می‌باشد (با توجه به ضابطه $f^{-1}(x) = \log_5 x$ نیز می‌توان $f^{-1}(5)$ و $f^{-1}(1)$ را حساب کرد که در ادامه مطالب به آن می‌پردازیم).

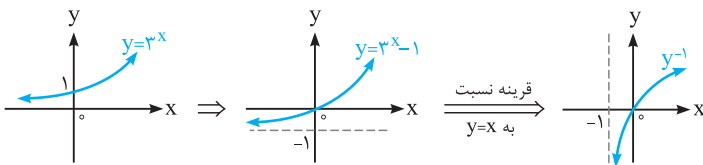
ت) از روی نمودار تابع f^{-1} مشخص است که این نمودار از نقطه $(5, 1)$ می‌گذرد، پس $f^{-1}(5) = 1$ می‌باشد. بنابراین از تساوی $f^{-1}(a) = 1$ نتیجه می‌گیریم $a = 5$ است.

دو نکته مهم:

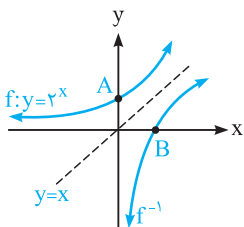
۱) همان‌طور که می‌بینید، نمودار تابع نمایی $y = a^x$ و معکوس آن (یعنی $y = \log_a x$)، فقط در شرایطی یک‌دیگر را قطع می‌کنند که $0 < a < 1$ باشد. در ضمن طول نقطه برخورد، عددی بین صفر و یک است.

۲) نمودار تابع لگاریتمی $y = \log_a x$ با محور y هیچ برخوردی ندارد و همواره در سمت راست محور y قرار دارد، ولی محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع می‌کند (یعنی $\log_a 1 = 0$ است).

با چیزهایی که برایتان گفتیم، جواب سؤال مشخص است.



۳۹ ۳) ابتدا نمودار تابع $y = 3^x$ را رسم می‌کنیم، سپس آن را یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار $y = 3^x - 1$ به دست آید. در آخر، نمودار را نسبت به نیمساز نواحی اول و سوم ($y = x$) قرینه می‌کنیم تا نمودار معکوسش به دست آید.



۴۰ ۲) برای پیدا کردن نقطه برخورد منحنی با محور y ها، باید x را صفر بگذاریم: $y = 2^0 = 1$ ، پس نقطه $A(0, 1)$ روی f قرار دارد. بنابراین نقطه $B(1, 0)$ روی f^{-1} قرار دارد و داریم:

$$AB = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$$

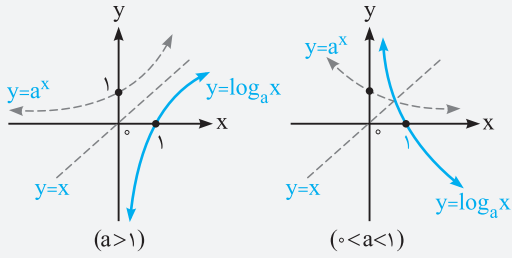
۴۱ ۴) ابتدا تابع $y = (\frac{1}{25})^{1-x} + 5^{2x-1}$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y = 25^{x-1} + 5^{2x-1} = (25^x \times \frac{1}{25}) + (5^{2x} \times \frac{1}{5}) = (25^x \times \frac{1}{25}) + (25^x \times \frac{1}{5}) = 25^x (\frac{1}{25} + \frac{1}{5})$$

$$\Rightarrow y = \frac{6}{25} (25^x) \Rightarrow \frac{25}{6} y = 25^x \Rightarrow x = \log_{25} \frac{25}{6} y$$

بنابراین $f^{-1}(x) = \log_{25} \frac{25}{6} x$ می‌باشد.

رسم نمودار تابع لگاریتمی



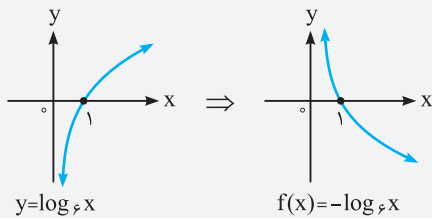
گفتیم تابع لگاریتمی $y = \log_a x$ ، معکوس تابع $y = a^x$ است و نمودار آن را از طریق قرینه کردن نمودار تابع نمایی $y = a^x$ نسبت به نیمساز نواحی اول و سوم رسم کردیم. یکبار دیگر آن‌ها را مرور می‌کنیم و نتایجی را به دست می‌آوریم.

نتیجه ۱ مبنا یا پایه لگاریتم (یعنی a) باید همیشه بزرگ‌تر از صفر و مخالف یک باشد ($a \neq 1, a > 0$).

نتیجه ۲ عبارت جلوی لگاریتم، همواره مثبت است ($x > 0$).

نتیجه ۳ اگر $a > 1$ باشد، آن‌گاه در تابع لگاریتمی $y = \log_a x$ با افزایش مقدار x ، مقدار y هم افزایش می‌یابد و اگر $0 < a < 1$ باشد، آن‌گاه با افزایش مقدار x ، مقدار y کاهش می‌یابد.

مثال نمودار تابع $f(x) = -\log_6 x$ را رسم کنید.



پاسخ: ابتدا نمودار تابع $y = \log_6 x$ را رسم می‌کنیم، سپس آن را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $f(x) = -\log_6 x$ به دست آید (یعنی قرینه نسبت به محور x ها)، به این صورت:

مثال نمودار توابع زیر را رسم کنید.

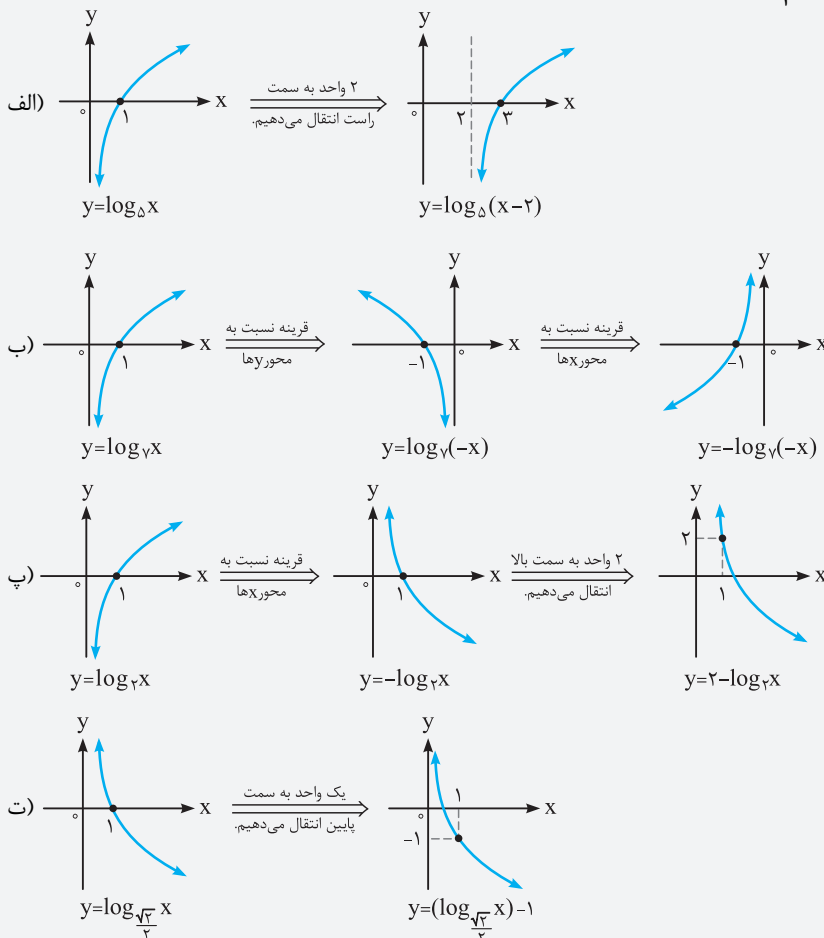
الف) $y = \log_6(x - 2)$

ب) $y = -\log_6(-x)$

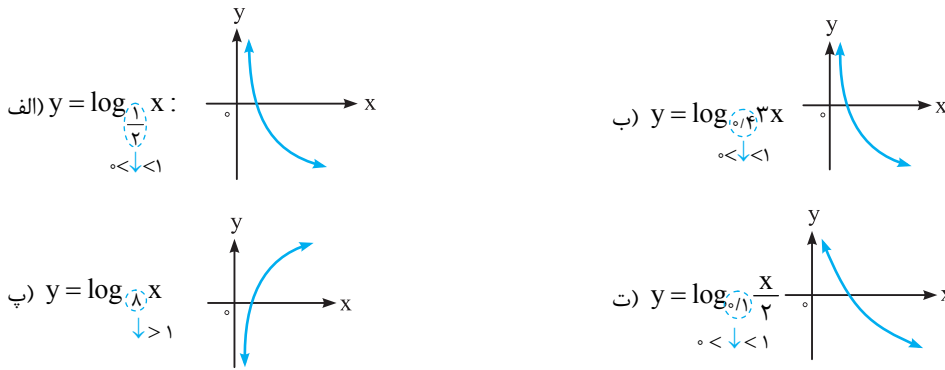
پ) $y = 2 - \log_6 x$

ت) $y = (\log_{\sqrt{2}} x) - 1$

پاسخ:



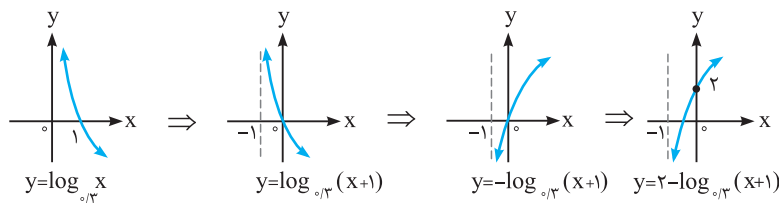
نمودار همه توابع داده شده را رسم می‌کنیم:



باید مبنای لگاریتم بین صفر و یک باشد، بنابراین: **۳ ۴۳**

$$0 < 3 - \frac{a^2}{2} < 1 \Rightarrow -3 < -\frac{a^2}{2} < -2 \xrightarrow{\times(-2)} 4 < a^2 < 6 \xrightarrow{\text{جذر}} 2 < |a| < \sqrt{6}$$

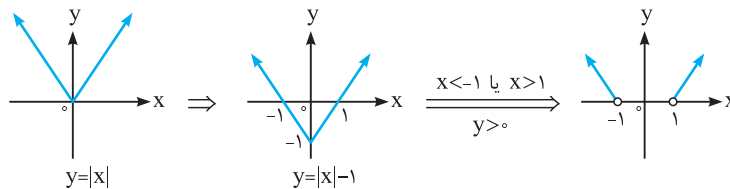
مرحله به مرحله نمودارها را رسم می‌کنیم تا به جواب برسیم: **۲ ۴۴**



عبارت جلوی لگاریتم باید همواره مثبت باشد، پس: **۲ ۴۵**

$$\begin{cases} y > 0 \\ |x| - 1 > 0 \Rightarrow |x| > 1 \Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 1 \end{cases}$$

حال با توجه به تساوی $\log_2 y = \log_2 (|x| - 1)$ ، نتیجه می‌گیریم $y = |x| - 1$ است، در نتیجه نمودار آن به این صورت درمی‌آید:



ابتدا درسنامه زیر را بخوانید. **۲ ۴۶**

دامنه تابع لگاریتمی

برای تعیین دامنه توابع لگاریتمی به فرم $y = \log_v u$ ، باید عبارت جلوی لگاریتم (یعنی u) را بزرگ‌تر از صفر و مبنای لگاریتم (یعنی v) را بزرگ‌تر از صفر و مخالف یک قرار دهید. به صورت زیر:

$$y = \log_v u \Rightarrow D_y = \{x \mid \underbrace{u > 0}_{(1)}, \underbrace{v > 0}_{(2)}, \underbrace{v \neq 1}_{(3)}\}$$

در نهایت با اشتراک گرفتن از (۱)، (۲) و (۳)، دامنه تابع لگاریتمی به دست می‌آید.

مثال دامنه تابع $f(x) = \log_2(mx + n)$ ، بازه $(\frac{1}{2}, +\infty)$ است. اگر $f(1) = 0$ باشد، مقدار n کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۳ (۳) -۱ (۴) -۳

پاسخ: ابتدا دامنه تابع $f(x) = \log_2(mx + n)$ را به دست می‌آوریم:

$$mx + n > 0 \Rightarrow mx > -n \Rightarrow x > -\frac{n}{m} \Rightarrow x \in \left(-\frac{n}{m}, +\infty\right) \xrightarrow{x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)} -\frac{n}{m} = \frac{1}{2} \Rightarrow m = -2n \quad (*)$$

از طرفی $f(1) = 0$ است، پس:

$$f(1) = \log_2(m + n) = 0 \xrightarrow{\log_a 1 = 0} m + n = 1 \xrightarrow{(*)} -2n + n = 1 \Rightarrow -n = 1 \Rightarrow n = -1 \Rightarrow \text{گزینه } (۳)$$

با چیزهایی که گفتیم، این طوری می‌شود:

$$\begin{cases} x^2 - 9 > 0 \\ x - 4 > 0 \\ x - 4 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 > 9 \\ x > 4 \\ x \neq 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{جذر}} \begin{cases} |x| > 3 \\ x > 4 \\ x \neq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -3 \text{ یا } x > 3 \\ x > 4 \\ x \neq 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x > 4, x \neq 5 \Rightarrow D_y = (4, +\infty) - \{5\}$$

۴۷ ۴ باید دامنه صورت و مخرج کسر را تعیین کنیم و بین مجموعه جواب‌های آن‌ها اشتراک بگیریم. در آخر، ریشه‌های مخرج را از مجموعه جواب به دست آمده، کم کنیم:

$$\begin{cases} \log_2(16 - x^2) : 16 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 16 \xrightarrow{\text{جذر}} |x| < 4 \Rightarrow -4 < x < 4 \\ \log_2(x - 2) : x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \\ \log_2(x - 2) = 0 \xrightarrow{\text{می‌دانیم } \log_a 1 = 0} x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3 \end{cases} \Rightarrow D_y = (-4, 4) \cap (2, +\infty) - \{3\} = (2, 4) - \{3\}$$

بنابراین دامنه تابع، شامل هیچ عدد صحیحی نمی‌باشد.

۴۸ ۳ در مورد دامنه تابع $y = \log_{g(x)} f(x)$ داریم:

$$f(x) > 0 \xrightarrow{\text{طبق نمودار}} x < 3, \quad g(x) > 0 \xrightarrow{\text{طبق نمودار}} x > -1, \quad g(x) \neq 1 \xrightarrow{\text{طبق نمودار}} x \neq 0$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} D_y = (-1, 3) - \{0\}$$

در نتیجه اعداد صحیح موجود در دامنه تابع عبارت‌اند از ۱ و ۲.

۴۹ ۱ ابتدا درسنامه زیر را بخوانید.

ارتباط بین تساوی نمایی و لگاریتمی

اگر $a = b^c$ باشد، به طوری که a و b مثبت و $b \neq 1$ ، در این صورت c را لگاریتم a در مبنای b می‌نامیم و داریم:

$$a = b^c \Leftrightarrow \log_b a = c$$

مثلاً $\log_3 9 = 2$ است، زیرا $3^2 = 9$ می‌باشد و یا $\log_{10} 1000 = 3$ است، زیرا $10^3 = 1000$ می‌باشد.

از روی معادلاتی که در اختیار داریم، مقادیر α و β را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2 \log_{10} \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \log_{10} \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = (10^{\frac{1}{2}})^2 = \sqrt{10} = \sqrt{2 \times 5} = \sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10} \\ \log_{12} \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = (12)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{\alpha}{\alpha - \beta} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10} - 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{10} \times \sqrt{3}}{\sqrt{30} - 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{3}(\sqrt{10} - 2)} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10} - 2} = \frac{3}{2}$$

۵۰ ۳ براساس تعریف لگاریتم، از تساوی‌های $\log_4 \alpha = \alpha$ و $\log_5 \beta = \beta$ ، نتیجه می‌گیریم $3^\alpha = 4$ و $2^\beta = 5$ است، بنابراین:

$$3^\alpha \beta = (3^\alpha)^\beta = 4^\beta = (2^2)^\beta = (2^\beta)^2 = 5^2 = 25$$

۵۱ ۳ از تساوی $\log_2 12 = \alpha$ نتیجه می‌گیریم $2^\alpha = 12$ است. حالا برویم سراغ $4^{\alpha-2}$:

$$4^{\alpha-2} = (2^2)^{\alpha-2} = 2^{2\alpha-4} = \frac{2^{2\alpha}}{2^4} = \frac{(2^\alpha)^2}{16} = \frac{(12)^2}{16} = \frac{144}{16} = 9$$

۵۲ ۱ ابتدا درسنامه زیر را بخوانید.

ویژگی‌های لگاریتم (بخش اول)

در این جا با بخش اول ویژگی‌های لگاریتم آشنا می‌شوید.

ویژگی ۱: اگر $a > 0$ و $a \neq 1$ باشد، آن‌گاه:

$$\log_a a = 1 \text{ و } \log_a 1 = 0$$

مثال $\log_{10} 10 = 1, \log_5 1 = 0$

* اگر مبنای لگاریتم، ۱۰ باشد، آن را لگاریتم اعشاری می‌نامیم و اغلب مبنای ۱۰ را نمی‌نویسیم.

ویژگی ۲: اگر $a, b, c > 0$ و $a \neq 1, c \neq 1$ باشد، آن‌گاه:

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

اثبات: فرض کنید $\log_c a = m$ ، در این صورت $c^m = a$ می‌باشد و اگر $\log_c b = n$ ، آن‌گاه $c^n = b$ خواهد بود و می‌توان نوشت:

$$c^m \times c^n = c^{m+n} = ab \quad (*)$$

از طرفی اگر $\log_c ab = t$ باشد، آن‌گاه $c^t = ab$ است و با توجه به (*) خواهیم داشت:

$$c^t = c^{m+n} \Rightarrow t = m + n \Rightarrow \log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

ویژگی ۳: اگر $a, b, c > 0$ و $c \neq 1$ باشد، آن‌گاه:

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

اثبات: با توجه به ویژگی ۲ می‌توان نوشت:

$$\log_c \left(\frac{a}{b}\right) + \log_c b = \log_c \left(\frac{a}{b} \times b\right) = \log_c a \Rightarrow \log_c \left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$$

ویژگی ۴: اگر $a, b > 0$ و $b \neq 1$ باشد، آن‌گاه:

$$\log_b a^m = m \log_b a$$

اثبات:

$$\log_b a^m = \log_b \underbrace{(a \times a \times \dots \times a)}_{m \text{ بار}} = \underbrace{\log_b a + \log_b a + \dots + \log_b a}_{m \text{ بار}} = m \log_b a$$

و به‌طور کلی می‌توان نوشت:

$$\log_{b^n} a^m = \frac{m}{n} \log_b a$$

مثال $\log 100 = \log 10^2 = 2 \log 10 = 2(1) = 2$

مثال $\log 0.001 = \log 10^{-3} = -3 \log 10 = -3(1) = -3$

مثال اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ باشد، حاصل هر یک از موارد زیر را بر حسب a و b به دست آورید.

- | | | |
|------------------------|--------------------------|---------------------------------------------|
| الف) $\log 72$ | ب) $\log \frac{27}{125}$ | پ) $\log 0.75$ |
| ت) $\log \sqrt[5]{36}$ | ث) $\log \sqrt[3]{25}$ | ج) $\log \frac{\sqrt[6]{81}}{\sqrt[3]{25}}$ |

پاسخ:

الف) $\log 72 = \log(2^3 \times 3^2) = \log 2^3 + \log 3^2 = 3 \log 2 + 2 \log 3 = 3a + 2b$

ب) $\log \frac{27}{125} = \log 27 - \log 125 = \log 3^3 - \log 5^3 = 3 \log 3 - 3 \log 5 = 3 \log 3 - 3 \log \frac{10}{2} = 3 \log 3 - 3(\log 10 - \log 2)$
 $= 3b - 3(1 - a) = 3b - 3 + 3a$

پ) $\log 0.75 = \log \frac{75}{100} = \log \frac{3}{4} = \log 3 - \log 4 = \log 3 - \log 2^2 = \log 3 - 2 \log 2 = b - 2a$

ت) $\log \sqrt[5]{36} = \log(36)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \log 36 = \frac{1}{5} \log 6^2 = \frac{2}{5} \log 6 = \frac{2}{5} \log(2 \times 3) = \frac{2}{5} (\log 2 + \log 3) = \frac{2}{5} (a + b)$

ث) $\log \sqrt[3]{25} = \log(25)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log 25 = \frac{1}{3} \log(5^2) = \frac{2}{3} \log 5 = \frac{2}{3} \log \frac{10}{2} = \frac{2}{3} (\log 10 - \log 2) = \frac{2}{3} (1 - a)$

ج) $\log \frac{\sqrt[6]{81}}{\sqrt[3]{25}} = \log \sqrt[6]{81} - \log \sqrt[3]{25} = \log(81)^{\frac{1}{6}} - \log(25)^{\frac{1}{3}} = \log(3^4)^{\frac{1}{6}} - \log(5^2)^{\frac{1}{3}} = \log 3^{\frac{2}{3}} - \log 5^{\frac{2}{3}}$

$= \frac{2}{3} \log 3 - \frac{2}{3} \log 5 = \frac{2}{3} \log 3 - \frac{2}{3} (\log 10 - \log 2) = \frac{2}{3} b - \frac{2}{3} (1 - a) = \frac{2b}{3} + \frac{2a}{3} - \frac{2}{3}$

مثال حاصل $\log_{\frac{1}{4}} 8\sqrt[3]{2}$ را به دست آورید.

پاسخ:

$\log_{\frac{1}{4}} (2^3 \times 2^{\frac{1}{3}}) = \log_{\frac{1}{4}} 2^{(\frac{10}{3})} = \log_{\frac{1}{4}} 2^{\frac{10}{3}} = \frac{\frac{10}{3} \log 2}{\log \frac{1}{4}} = \frac{\frac{10}{3} \log 2}{-2 \log 2} = -\frac{5}{3} (1) = -\frac{5}{3}$

مثال حاصل $\log_6 2\sqrt{3} + \log_6 3\sqrt{2}$ را به دست آورید.

پاسخ:

$\log_6 2\sqrt{3} + \log_6 3\sqrt{2} = \log_6 (2\sqrt{3} \times 3\sqrt{2}) = \log_6 6\sqrt{6} = \log_6 6^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log_6 6 = \frac{3}{2} (1) = \frac{3}{2}$

* در هر یک از موارد زیر، لگاریتم‌های داده‌شده را بر حسب $\log 2$ نوشته‌ایم:

- ۱ $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2 \Rightarrow \log 5 = 1 - \log 2$
- ۲ $\log 0.25 = \log \frac{1}{4} = \log 2^{-2} = -2 \log 2 \Rightarrow \log 0.25 = -2 \log 2$
- ۳ $\log 1/25 = \log \frac{5}{25} = \log 5 - \log 5^2 = (1 - \log 2) - 2 \log 2 = 1 - 3 \log 2 \Rightarrow \log 1/25 = 1 - 3 \log 2$
- ۴ $\log 2/5 = \log \frac{2}{5} = \log 2 - \log 5 = (\log 2) - (1 - \log 2) = 2 \log 2 - 1 \Rightarrow \log 2/5 = 2 \log 2 - 1$
- ۵ $\log 6/25 = \log (2/5)^2 = 2 \log 2/5 = 2(2 \log 2 - 1) = 4 \log 2 - 2 \Rightarrow \log 6/25 = 4 \log 2 - 2$

مثال اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \log_a x$ از نقطه $(\frac{1}{3}, -9)$ عبور کند، مقدار a چه قدر است؟

پاسخ: با توجه به داده‌های مسأله، مختصات نقطه $(\frac{1}{3}, -9)$ در ضابطه تابع صدق می‌کند، پس می‌توان نوشت:

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = -9 \Rightarrow -9 = \log_a \frac{1}{3} \Rightarrow -9 = \log_a 3^{-1} \Rightarrow -9 = -\log_a 3 \Rightarrow 9 = \log_a 3 \Rightarrow a^9 = 3 \Rightarrow (a^9)^{\frac{1}{9}} = 3^{\frac{1}{9}} \Rightarrow a = \sqrt[9]{3}$$

با توجه به شکل داده شده، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} a = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = \log_{3^{-1}} 3^{-2} = \frac{-2}{-1} \times \log_3 3 = 2 \\ b = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} = \log_{3^{-1}} 3^{-3} = \frac{-3}{-1} \times \log_3 3 = 3 \Rightarrow a - b - c = 2 - 3 - 9 = -10 \\ \log_{\frac{1}{3}} c = -2 \Rightarrow c = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9 \end{cases}$$

۴۵۳ همه گزینه‌ها را با توجه به ویژگی‌های لگاریتم به شکل ساده‌تری نوشته و با هم مقایسه می‌کنیم:

(۱) گزینه $\log_3 \frac{1}{27} = \log_3 3^{-3} = -3 \log_3 3 = -3(1) = -3$

(۲) گزینه $\log_{\frac{1}{3}} 81 = \log_{3^{-1}} 3^4 = \frac{4}{-1} \times \log_3 3 = -4(1) = -4$

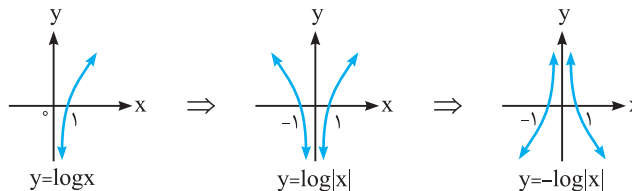
(۳) گزینه $\log_{\frac{1}{5}} 625 = \log_{5^{-1}} 5^4 = \frac{4}{-1} \times \log_5 5 = -4(1) = -4$

(۴) گزینه $\log_{1/6} 64 = \log_{6^{-1}} 2^6 = \frac{6}{-1} \times \log_2 2 = \frac{6}{-1}(1) = -6$

۴۵۴ ابتدا ضابطه تابع را به صورت زیر تغییر می‌دهیم:

$$y = \log \left| \frac{1}{x} \right| = \log \frac{1}{|x|} = \log(|x|)^{-1} = -\log |x|$$

و حالا مراحل زیر را دنبال می‌کنیم:



۴۵۵ با توجه به ضابطه $f(x)$ ، مقدار $f(63)$ را به صورت زیر حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f(63) &= 4 - 5 \log_9 \left(\frac{63}{3} + 6 \right) = 4 - 5 \log_9 (21 + 6) = 4 - 5 \log_9 27 = 4 - 5 \log_{3^2} 3^3 = 4 - 5 \times \frac{3}{2} \log_3 3 \\ &= 4 - \frac{15}{2} = \frac{8-15}{2} = -\frac{7}{2} = -3.5 \end{aligned}$$

۴۵۶ نمودار تابع، محور x ها را در $x = -1$ قطع می‌کند، پس مختصات نقطه $(-1, 0)$ در ضابطه تابع صدق می‌کند. هم‌چنین نمودار، نیمساز ناحیه

چهارم $(y = -x)$ را در نقطه‌ای به عرض -1 قطع کرده است، پس مختصات نقطه $(1, -1)$ هم در ضابطه تابع صدق می‌کند:

$$\begin{cases} x = -1, y = 0 \Rightarrow 0 = \log_{\frac{1}{2}} (-a + b) \Rightarrow -a + b = 1 \\ x = 1, y = -1 \Rightarrow -1 = \log_{\frac{1}{2}} (a + b) \Rightarrow a + b = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + b = 1 \\ a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow 2b = 3 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

۳ ۵۷ داریم $x = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{-2}$ ، پس:

$$x = \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{16}{2} = 8 \Rightarrow \log_2(x+1) \stackrel{x=8}{=} \log_2 9 = \log_2 3^2 = 2 \log_2 3 = 2(1) = 2$$

۳ ۵۸ ابتدا مقدار x را پیدا می‌کنیم، سپس آن را در $\log_x 4(x+3)$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x = 8 \log_2 2\sqrt{2} = 8 \times \log_2 2^{\frac{3}{2}} = 8 \times \frac{3}{2} \times \log_2 2 = 8 \times \frac{3}{2} = 12$$

$$\Rightarrow \log_x 4(x+3) \stackrel{x=12}{=} \log_{12} 4(12+3) = \log_{12} 52 = \log_{12} 4 \times 13 = \log_{12} 4 = 2 \log_{12} 2 = 2$$

۱ ۵۹ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{16}} 8\sqrt[3]{2} = \log_{2^{-4}} (2^3 \times 2^{\frac{1}{3}}) = \log_{2^{-4}} 2^{\frac{10}{3}} = \frac{10}{-4} \times \log_2 2 = \frac{10}{-4} = -\frac{5}{2} \\ \log_{27} \frac{1}{9} = \log_{3^3} 3^{-2} = -\frac{2}{3} \log_3 3 = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{16}} 8\sqrt[3]{2} + \left| \log_{27} \frac{1}{9} \right| = -\frac{5}{2} + \left| -\frac{2}{3} \right| = -\frac{5}{2} + \frac{2}{3} = \frac{-15+4}{6} = -\frac{11}{6}$$

۳ ۶۰ با توجه به داده‌های مسأله، می‌توان نوشت:

$$\sqrt{a} = x^3 \xrightarrow{\text{توان } 2} a = x^6 \quad \text{و} \quad b^2 = x^3 \xrightarrow{\text{جذر}} b = x^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow \log_x a - 2 \log_x b = \log_x x^6 - 2 \log_x x^{\frac{3}{2}} = 6 \log_x x - 2 \times \frac{3}{2} \log_x x = 6 - 3 = 3$$

۳ ۶۱ ابتدا کمی روی $27\sqrt[3]{81}$ و $2\sqrt{2}$ کار می‌کنیم، سپس می‌رویم سراغ حل مسأله:

$$27\sqrt[3]{81} = 3^3 \times \sqrt[3]{3^4} = 3^3 \times 3^{\frac{4}{3}} = 3^{\frac{13}{3}} \quad \text{و} \quad 2\sqrt{2} = 2^1 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$$

حالا خوب شده! بنابراین داریم:

$$\log_{\sqrt{9}} 27\sqrt[3]{81} + \log_9 \frac{1}{49} + \log_{\frac{4}{9}} 2\sqrt{2} = \log_3 3^{\frac{13}{3}} + \log_9 7^{-2} + \log_{\frac{1}{24}} 2^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{13}{3} \log_3 3 - 2 \log_9 7 + \frac{3}{4} \log_{\frac{1}{24}} 2 = \frac{13}{3} - 2 + \frac{3}{4} = \frac{25}{4}$$

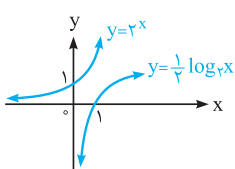
۱ ۶۲ برای تعیین دامنه تابع $f(x) = \log_p(ax+b)$ ، باید نامعادله $ax+b > 0$ را حل کنیم:

$$ax+b > 0 \Rightarrow x > -\frac{b}{a} \Rightarrow D_f = \left(-\frac{b}{a}, +\infty\right) \xrightarrow{x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)} -\frac{b}{a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = 2b \quad (*)$$

از طرفی $f(4) = 2$ است، بنابراین:

$$f(4) = \log_p(4a+b) = 2 \Rightarrow 4a+b = 3^2 = 9 \xrightarrow{(*)} 4(2b)+b = 9 \Rightarrow 9b = 9 \Rightarrow b = 1 \xrightarrow{(*)} a = 2 \Rightarrow f(x) = \log_3(2x+1)$$

$$\Rightarrow f\left(-\frac{4}{9}\right) = \log_3\left(2\left(-\frac{4}{9}\right)+1\right) = \log_3\left(-\frac{8}{9}+1\right) = \log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2 \log_3 3 = -2$$



۴ ۶۳ با رسم نمودار توابع $y = 2^x$ و $y = \log_3 \sqrt{x} = \log_3 x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_3 x$ در شکل مقابل، متوجه می‌شویم که این دو تابع با هم برخورد ندارند.

۳ ۶۴ دامنه این دو تابع با هم برابر است (در هر دوی آنها $x > 0$ می‌باشد، یعنی $D_f = D_g = (0, +\infty)$). حال از ویژگی $\log_{b^n} a^m = \frac{m}{n} \log_b a$ استفاده می‌کنیم:

$$f(x) = \log_2 \frac{1}{x} = \log_2 x^{-1} = -\log_2 x \quad \text{و} \quad g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x = \log_{2^{-1}} x = -\log_2 x$$

با توجه به این‌که دامنه دو تابع با هم برابر شده و ضابطه آن‌ها نیز یکسان می‌باشد، نتیجه می‌گیریم دو تابع با هم برابر هستند و نمودارهایشان برهم منطبق است.

۳ ۶۵ با توجه به معلومات مسأله، می توان نوشت:

$$\begin{cases} f(2) = 6 \Rightarrow a + \log_7(2b - 4) = 6 \\ f(12) = 10 \Rightarrow a + \log_7(12b - 4) = 10 \end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} (a + \log_7(12b - 4)) - (a + \log_7(2b - 4)) &= 10 - 6 \Rightarrow \log_7(12b - 4) - \log_7(2b - 4) = 4 \\ \Rightarrow \log_7 \frac{12b - 4}{2b - 4} &= 4 \Rightarrow \frac{12b - 4}{2b - 4} = 7^4 = 2401 \Rightarrow 12b - 4 = 2401(2b - 4) \Rightarrow 20b = 60 \Rightarrow b = 3 \end{aligned}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$a + \log_7(12b - 4) = 10 \xrightarrow{b=3} a + \log_7 32 = 10 \Rightarrow a + \log_7 2^5 = 10 \Rightarrow a + 5 \log_7 2 = 10 \Rightarrow a + 5 = 10 \Rightarrow a = 5$$

۱ ۶۶ به جای A، معادل آن یعنی 3^a را می گذاریم:

$$\log_3 9A^2 = \log_3(9 \times (3^a)^2) = \log_3(3^2 \times 3^{2a}) = \log_3 3^{(2+2a)} = (2+2a) \log_3 3 = 2+2a$$

۱ ۶۷ از تساوی $8^k = 4\sqrt{2}$ نتیجه می گیریم:

$$(2^3)^k = 2^2 \times 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2^{3k} = 2^{\frac{5}{2}} \Rightarrow 3k = \frac{5}{2} \Rightarrow k = \frac{5}{6}$$

حال برویم سراغ $\log_{36}(6k+1)$:

$$\log_{36}(6k+1) \stackrel{k=\frac{5}{6}}{=} \log_{36}\left(6 \times \frac{5}{6} + 1\right) = \log_{36} 6 = \log_{6^2} 6 = \frac{1}{2} \log_6 6 = \frac{1}{2}$$

۲ ۶۸ از تساوی $\log_y x = 2$ نتیجه می گیریم $x = y^2$ ، بنابراین در مورد $\log_{y\sqrt{y}} x\sqrt[3]{y}$ می توان نوشت:

$$\log_{\frac{1}{y \times y^{\frac{1}{2}}}} (y^2 \times y^{\frac{1}{3}}) = \log_{\frac{1}{y^{\frac{3}{2}}}} y^{\frac{7}{3}} = \frac{\frac{7}{3}}{\frac{3}{2}} \times \log_y y = \frac{14}{9}$$

۳ ۶۹ گفته شده $\log 4 = k$ ، پس می توان نوشت:

$$\log 2^2 = k \Rightarrow 2 \log 2 = k \Rightarrow \log 2 = \frac{k}{2} \quad (*)$$

حال می خواهیم حاصل $\log^{0.125} 8$ را بر حسب k به دست آوریم:

$$\log^{0.125} 8 = \log_{\frac{1}{8}} 8 = \log_{\frac{1}{2^3}} 2^3 = \log 2^{-3} = -3 \log 2 \stackrel{(*)}{=} -3 \left(\frac{k}{2}\right) = -\frac{3k}{2}$$

۴ ۷۰ با توجه به ویژگی های لگاریتم، داریم:

$$\log_{\sqrt{b}} ab^2 = \log_{\frac{1}{b^{\frac{1}{2}}}} a + \log_{\frac{1}{b^{\frac{1}{2}}}} b^2 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \log_b a + \frac{2}{\frac{1}{2}} \log_b b = 2 \log_b a + 4 = 2 \left(\frac{3}{2}\right) + 4 = 7$$

۳ ۷۱ به محاسبات زیر توجه کنید:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x^2 \sqrt{x}} = \sqrt[3]{x^2 \times x^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{x^{\frac{5}{2}}} = (x^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{5}{6}} \\ x \sqrt[3]{x} = x \times x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{4}{3}} \end{cases} \Rightarrow \log_{\frac{4}{x^{\frac{1}{3}}}} x^{\frac{5}{6}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{3}{1}} \log_x x = \frac{5}{8}$$

۲ ۷۲ اول این که حواستان باشد $\log \frac{4}{3}$ برابر $-\log \frac{3}{4}$ است، زیرا:

$$\log \frac{4}{3} = \log \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = -\log \frac{3}{4}$$

حالا $\log \frac{3}{4}$ را مساوی α می گیریم، پس:

$$\log \frac{4}{3} = -\log \frac{3}{4} = -\alpha \Rightarrow f\left(\log \frac{3}{4}\right) + f\left(\log \frac{4}{3}\right) = f(\alpha) + f(-\alpha) = (4^\alpha - 4^{-\alpha}) + (4^{-\alpha} - 4^\alpha) = 0$$

۴ ۷۳ ابتدا مقدار عبارت $x^2 + 3x + 1$ را به ازای x داده شده، به دست می آوریم:

$$x^2 + 3x + 1 = x(x+3) + 1 \stackrel{x=\frac{1}{2}(-3+\sqrt{37})}{=} \frac{\sqrt{37}-3}{2} \left(\frac{\sqrt{37}-3}{2} + 3\right) + 1 = \frac{\sqrt{37}-3}{2} \times \frac{\sqrt{37}+3}{2} + 1 = \frac{37-9}{4} + 1 = 8$$

در نتیجه:

$$\log_4(x^2 + 3x + 1) = \log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \frac{3}{2} \log_2 2 = \frac{3}{2}$$

۴ ۷۴ طبق ویژگی $\log a + \log b = \log ab$ ، می توان نوشت:

$$\log x + \log(x^2 - 3) = \log x(x^2 - 3) = \log(x^3 - 3x)$$