

خرید کتاب های کنکور

با تخفیف ویژه

و

ارسال رایگان

Medabook.com

+



مدابوک



یک جله تماس تلفنی رایگان

با مشاوران رتبه برتر

برای انتخاب بهترین منابع

دبیرستان و کنکور

۰۲۱ ۲۸۴۲۵۲۱۰





Rene Descartes
1596-1650

Drawings Geometric

CHAPTER 1

ترسیم‌های هندسی

درس اول



ص ۱۰ تا ۱۶ هندسه دهم



مکان هندسی

خرید آنلاین در gajmarket.com



10

فصل ۱

ترسیم‌های هندسی و استدلال • ترسیم‌های هندسی

در این درس با انواع **ترسیم‌های هندسی** سروکار داریم و منظور از ترسیم‌های هندسی رسم سه دسته مهم از اشکال هندسه است:

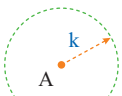
۱) اشکالی مانند پاره خط، نیم خط و خط راست

۲) اشکالی مانند دایره یا کمانی از یک دایره

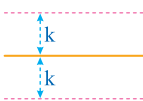
۳) اشکالی مانند مثلث، چهارضلعی و... که با ترکیبی از دو ترسیم قبلی حاصل می‌شوند.

برای رسم این اشکال از دو وسیله مهم به نام **خط‌کش** و **پرگار** استفاده می‌شود که خط‌کش فقط برای ترسیم خط راست مورد استفاده قرار می‌گیرد [نه برای اندازه‌گیری] و پرگار وسیله‌ای است که با آن می‌توان دایره یا کمانی از دایره را رسم کرد و دهانه آن به اندازه دلخواه باز می‌شود.

بسیاری از اشکالی که رسم می‌کنیم مجموعه نقاطی هستند که ویژگی مشترکی دارند، این مجموعه نقاط را **مکان هندسی** می‌نامیم. [گاهی به آن **مکان نقطه** نیز گفته می‌شود]. از طرفی مهم‌ترین اشکال هندسی **نقطه**، **خط** و **صفحه** هستند، بنابراین مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک نقطه و یک خط به فاصله ثابتی هستند، اهمیت ویژه‌ای دارد:



۱) مکان هندسی نقاطی از صفحه که به فاصله k واحد از نقطه A قرار دارند، دایره‌ای به مرکز A و به شعاع k است.

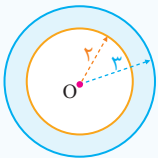


۲) مکان هندسی نقاطی از صفحه که به فاصله k واحد از خط d قرار دارند، دو خط به موازات خط d و به فاصله k واحد از آن هستند.

Test همه نقاطی از صفحه که فاصله آن‌ها از نقطه ثابت O در این صفحه بیشتر از ۲ و کمتر از ۳ واحد است، تشکیل یک شکل هندسی می‌دهند.

مساحت این شکل چقدر است؟

- ۱) 5π ۲) 9π ۳) 4π ۴) 7π



۱) نقاطی که فاصله آن‌ها از O بیشتر از ۲ واحد باشد، بیرون دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۲ واحد هستند، همچنین نقاطی که فاصله آن‌ها از O کمتر از ۳ واحد باشد، داخل دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۳ واحد قرار می‌گیرند. پس شکل هندسی مورد نظر ناحیه بین دو دایره (قسمت رنگی) است و مساحت آن برابر است با:

$$\text{مساحت ناحیه رنگی} = \text{مساحت دایره کوچک} - \text{مساحت دایره بزرگ} = \pi(2)^2 - \pi(3)^2 = 4\pi - 9\pi = -5\pi$$

۱. خط d در صفحه مفروض است. چند نقطه در صفحه وجود دارد که فاصله آن‌ها از خط d برابر ۳ واحد باشد؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بیشمار

۲. سکه‌ای به شعاع ۲ را روی یک صفحه مستطیلی به اضلاع ۶ و ۸ پرتاب می‌کنیم. در صورتی که مرکز سکه داخل مستطیل باشد، مساحت محدود به مکان هندسی مرکز سکه برای این که سکه کاملاً داخل مستطیل قرار بگیرد، کدام است؟

- ۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

۳. مربع $ABCD$ به ضلع ۲ مفروض است. مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله آن از تمام رئوس بزرگتر از ۱ است، دارای کدام مساحت است؟

- ۱) π ۲) $4 - \pi$ ۳) $4 - \frac{\pi}{2}$ ۴) $4 - 2\pi$

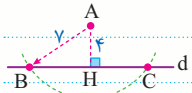


اشتراک یک مکان هندسی و یک شکل هندسی

در برخی از سوالات هندسه از ما می پرسند «چند نقطه روی یک شکل وجود دارد که دارای ویژگی به خصوصی باشد». در این موارد ابتدا مکان هندسی نقاطی که آن ویژگی به خصوص دارند را پیدا می کنیم و سپس به بررسی تعداد نقاط تقاطع آن مکان هندسی و شکل گفته شده می پردازیم.

نقطه A به فاصله ۴ واحد از خط d واقع است. چند نقطه روی خط d به فاصله ۷ واحد از نقطه A وجود دارد؟

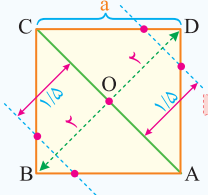
نقاطی که به فاصله ۷ واحد از نقطه A قرار دارند روی دایره ای به مرکز A و به شعاع ۷ قرار دارند و چون $7 > 4$ است، پس این دایره [به عنوان یک مکان هندسی] خط d را در ۲ نقطه قطع می کند و همین نقاط، جواب های مورد نظر هستند.



Test در مربع ABCD به ضلع $2\sqrt{2}$ چند نقطه روی محیط مربع وجود دارد که فاصله آن ها از قطر AC برابر $1/5$ واحد باشد؟

- هیچ (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۴ (۴) بیشتر

نقاطی که به فاصله $1/5$ واحد از قطر AC قرار دارند، روی دو خط به موازات AC و به فاصله $1/5$ واحد از آن واقع اند. حال باید بررسی کنیم که آیا این دو خط نقطه تقاطعی با اضلاع مربع دارند یا نه؟ این نقاط در صورت وجود جواب های تست هستند:



$$a = 2\sqrt{2} \Rightarrow BD = a\sqrt{2} = \sqrt{2} \times (2\sqrt{2}) = 4 \Rightarrow OB = OD = 2$$

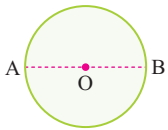
چون $1/5 < OD$ ، پس این دو خط، اضلاع مربع را در ۴ نقطه قطع می کنند.

۴. در لوزی به اقطار ۶ و ۸ چند نقطه روی محیط لوزی وجود دارد که به فاصله $2/5$ واحد از مرکز لوزی باشد؟

- هیچ (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۴ (۴) بیشتر

۵. در دایره $C(O, R)$ اگر اندازه قطر AB برابر ۸ باشد، چند نقطه روی محیط دایره به فاصله ۵ واحد از قطر AB وجود دارد؟

- هیچ (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۴ (۴) بیشتر

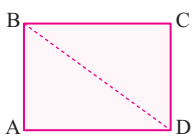


۶. در مثلث ABC اگر $BC = 8$ و مساحت مثلث ۳۶ باشد، چند نقطه روی دو ضلع دیگر مثلث وجود دارد که فاصله آن ها از قاعده BC برابر ۶ باشد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۲ (۳) ۲ یا ۱ (۴) ۲ (۴) بیشتر

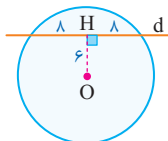
۷. در مستطیل ABCD به اضلاع $AB = 3$ و $BC = 4$ چند نقطه روی اضلاع مستطیل وجود دارد که فاصله آنها از قطر BD برابر $2/4$ باشد؟

- هیچ (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) بیشتر



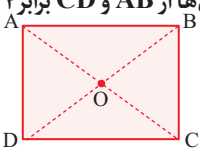
۸. در شکل زیر فاصله مرکز دایره از خط d برابر ۶ است، چند نقطه روی محیط دایره به فاصله ۱۰ واحد از خط d وجود دارد؟

- ۲ (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) بیشتر



۹. مستطیل ABCD به اضلاع $AB = 8$ و $AD = 6$ مفروض است. چند نقطه روی قطرهای مستطیل وجود دارد که اختلاف فاصله آن ها از AB و CD برابر ۴ واحد باشد؟

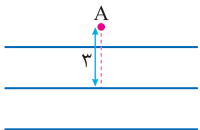
- هیچ (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۴ (۴) بیشتر



۱۰. نقطه A به فاصله ۵ واحد از خط d واقع است. چند نقطه روی خط d به فاصله $6/5$ واحد از نقطه A وجود دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۴ (۴) بیشتر

۱۱. سه خط موازی با فاصله ۲ واحد از هم واقع اند. اگر فاصله نقطه A از خط وسط برابر ۳ واحد باشد، چند نقطه روی این خطوط به فاصله ۵ واحد از نقطه A وجود دارد؟



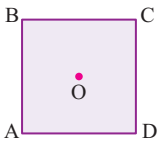
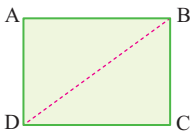
- ۳ (۱) ۲ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) بیشتر

۱۲. در مثلث ABC اگر $BC = 6$ و مساحت برابر ۱۲ باشد. چند نقطه روی قاعده BC به فاصله ۳ واحد از رأس A وجود دارد؟

- (۱) هیچ
(۲) یک
(۳) دو
(۴) چهار

۱۳. در مستطیل $ABCD$ به اضلاع ۳ و ۴ چند نقطه روی قطر BD وجود دارد که فاصله آن‌ها از رأس A کمتر از $2/5$ باشد؟

- (۱) هیچ
(۲) یک
(۳) دو
(۴) بیشمار



۱۴. در مربع $ABCD$ به ضلع ۴ چند نقطه روی محیط آن یافت می‌شود که فاصله آن‌ها از مرکز مربع $\sqrt{2}$ واحد باشد؟

- (۱) ۲
(۲) ۴
(۳) ۸
(۴) هیچ

۱۵. در مربع $ABCD$ به ضلع ۸ چند نقطه روی محیط آن یافت می‌شود که به فاصله ۵ واحد از مرکز مربع باشد؟

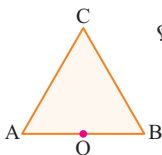
- (۱) ۲
(۲) ۴
(۳) هیچ
(۴) ۸

۱۶. در مستطیل $ABCD$ به اضلاع ۶ و ۸ چند نقطه روی اضلاع وجود دارد که به فاصله ۴ واحد از محل تلاقی قطرهای مستطیل باشد؟

- (۱) ۲
(۲) ۴
(۳) ۶
(۴) ۸

۱۷. در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۴ واحد چند نقطه روی محیط مثلث وجود دارد که فاصله آن‌ها از وسط ضلع AB برابر ۲ باشد؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۶



۱۸. در مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین ABC اندازه ضلع قائم $2\sqrt{2}$ است. چند نقطه روی محیط مثلث وجود دارد که فاصله آن‌ها از وسط وتر مثلث برابر ۲ باشد؟

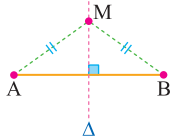
- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۱۹. در دوزنقه متساوی‌الساقین $ABCD$ به مساحت ۹۰ و اندازه قاعده‌ها ۱۸ و ۱۲ است چند نقطه روی قاعده‌های دوزنقه یافت می‌شود که به فاصله ۳ واحد از محل تلاقی قطرهای دوزنقه باشد؟

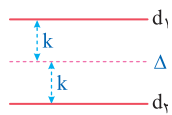
- (۱) هیچ
(۲) ۳
(۳) ۴



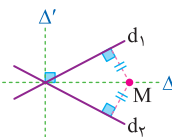
یکی از مهم‌ترین مکان‌های هندسی در صفحه، مکان هندسی نقاط هم فاصله از دو چیز است که مهم‌ترین آن‌ها عبارتند از:



۱) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو نقطه A و B به یک فاصله هستند، عمود منصف پاره خط AB است.



۲) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط موازی d_1 و d_2 به یک فاصله هستند، خطی موازی آن دو خط و بین آن‌هاست.

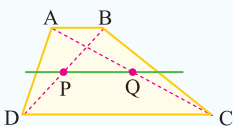


۳) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d_1 و d_2 به یک فاصله هستند، نیمسازهای آن دو خط متقاطع است [این نیمسازها همواره برهم عمودند].

Test چند نقطه روی قطرهای دوزنقه $ABCD$ وجود دارد که فاصله آن از دو قاعده یکسان باشد؟

- (۱) نامشخص
(۲) ۲
(۳) ۴
(۴) بیشمار

۲) نقاطی که به فاصله یکسان از دو قاعده دوزنقه قرار دارند، روی خطی موازی دو قاعده هستند که فاصله آن از هر کدام از قاعده‌ها نصف ارتفاع دوزنقه است. این خط قطعاً قطرهای دوزنقه را در دو نقطه P و Q قطع می‌کند. [این خط را خط میانگین دوزنقه می‌نامند].



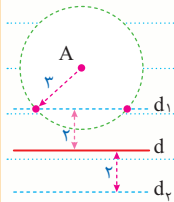
۲۰. چند نقطه روی محیط یک مستطیل وجود دارد، که از قطرهای آن به یک فاصله باشد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) بیشمار



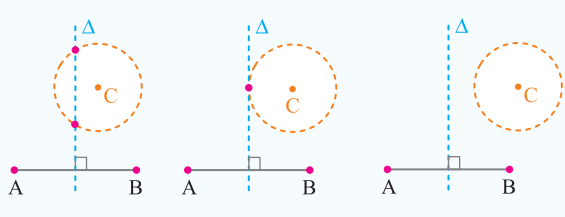
اشتراک دو مکان هندسی

در بعضی سؤال‌ها از ما می‌پرسند «چند نقطه وجود دارد که هم این ویژگی را داشته باشد و هم آن ویژگی را». در این موارد ابتدا مکان هندسی نقطاتی که این ویژگی و نیز مکان هندسی نقطاتی که آن ویژگی را دارند پیدا می‌کنیم، سپس به بررسی تعداد نقاط اشتراک (تقاطع) این دو مکان هندسی می‌پردازیم. ... نقطه A به فاصله ۴ واحد از خط d واقع است. چند نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصله ۳ واحد از نقطه A و به فاصله ۲ واحد از خط d باشد؟ ... نقطه‌ای که به فاصله ۳ واحد از نقطه A قرار دارند، روی دایره‌ای به شعاع ۳ و به مرکز A واقع‌اند [این ویژگی]. همچنین نقطاتی که به فاصله ۲ واحد از خط d قرار دارند، روی دو خط به موازات d و به فاصله ۲ واحد از آن قرار دارند [آن ویژگی]. حال باید تعداد نقاط اشتراک این دو مکان هندسی را بررسی کنیم. همان‌طور که در شکل مشخص است این دو مکان هندسی همدیگر را در ۲ نقطه قطع می‌کنند، بنابراین ۲ نقطه با شرایط گفته شده وجود دارد.



Test نقاط A, B, C در صفحه مفروض‌اند. چند نقطه وجود دارد که از A و B به یک فاصله و از C به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد؟

- ۱) حداکثر یک نقطه ۲) حداکثر ۲ نقطه ۳) دقیقاً ۲ نقطه ۴) هیچ نقطه‌ای وجود ندارد.



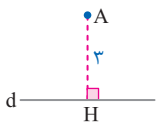
۲) مکان هندسی نقطاتی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمود منصف AB است. مکان هندسی نقطاتی که از C به فاصله ۳ سانتی‌متر هستند، دایره‌ای به مرکز C و به شعاع ۳ است. نقاط تلاقی عمود منصف AB با این دایره، جواب این مسئله است. با توجه به شکل‌های مقابل مسئله دو جواب یا یک جواب یا بدون جواب است. پس حداکثر ۲ نقطه وجود دارد. (Δ عمود منصف پاره خط AB است.)

۲۱. چند نقطه در صفحه دوزنقه ABCD وجود دارد که از دو رأس مقابل A و C و همچنین از دو قاعده به یک فاصله باشد؟

- ۱) هیچ ۲) دقیقاً یک ۳) حداکثر دو ۴) نامشخص

۲۲. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از A به فاصله ۲ سانتی‌متر و از d به فاصله ۱/۵ سانتی‌متر باشد؟

- ۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) بیشمار



۲۳. نقاط A, B, C, D رئوس دوزنقه قائم‌الزاویه ABCD به قاعده‌های AB و CD هستند، چند نقطه در صفحه می‌توان یافت که از نقاط A و B و همچنین از نقاط D و C به یک فاصله باشند؟

- ۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) بیشمار

۲۴. نقاط A, B, C در صفحه مفروض‌اند، تعداد نقاط هم‌فاصله از B و C که به فاصله ۳ سانتی‌متر از C باشد، کدام نمی‌تواند باشد؟

- ۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) چهار

۲۵. دو نقطه A و B و خط d که شامل هیچ‌یک از نقاط نیست در صفحه مفروض‌اند، تعداد نقطاتی از صفحه که از A و B به یک فاصله و از d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد، کدام نمی‌تواند باشد؟

- ۱) هیچ ۲) بیشمار ۳) دو ۴) یک

۲۶. دو خط متقاطع d1 و d2 و نقطه A در صفحه آن‌ها مفروض است، حداکثر چند نقطه در صفحه یافت می‌شود که از d1 و d2 به یک فاصله و از A به فاصله ۲ باشد؟

- ۱) یک ۲) دو ۳) چهار ۴) هشت

۲۷. دو خط d1 و d2 در نقطه A متقاطع‌اند، چند نقطه در صفحه وجود دارد که از A به فاصله ۳ و از d1 و d2 به یک فاصله باشد؟

- ۱) دو ۲) چهار ۳) بیشمار ۴) هیچ

۲۸. در چهارضلعی ABCD اضلاع AB و CD غیرموازی‌اند، چند نقطه در صفحه یافت می‌شود که از رئوس A و B و همچنین از رئوس C و D به یک فاصله باشند؟

- ۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) بیشمار

۲۹. چند نقطه در صفحه مختصات وجود دارد که از محور X ها و محور Y ها هم فاصله بوده و در ضمن فاصله آن از دو نقطه A(۳, ۰) و B(۰, -۱) با هم برابر باشد؟

- ۱) یک ۲) هیچ ۳) دو ۴) بیشمار

۳۰. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از محور X ها و محور Y ها هم فاصله بوده و به فاصله ۲ واحد از محور X ها باشند؟

(۱) دو (۲) چهار

(۳) هیچ (۴) بیشمار

۳۱. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقاط $A(3, 0)$ و $B(0, -1)$ به یک فاصله بوده و فاصله آن‌ها از نیمساز ربع اول و سوم برابر ۲ باشد؟

(۱) یک (۲) دو

(۳) هیچ (۴) چهار



اشتراک دو مکان هندسی مشهور

خرید آنلاین در gajmarket.com



14

فصل ۱ | ترسیم‌های هندسی و استدلال • ترسیم‌های هندسی

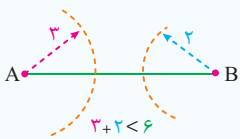
یکی از مشهورترین حالاتی که مربوط به تقاطع دو مکان هندسی است، حالتی است که پرسیده می‌شود «چند نقطه در صفحه وجود دارد. که به فاصله k_1 از نقطه A و به فاصله k_2 از نقطه B باشد»، در این حالت باید وضعیت دایره به مرکز A و به شعاع k_1 و دایره به مرکز B و به شعاع k_2 را بررسی کنیم که سه حالت عمده رخ می‌دهد:

	<p>۱] اگر این دو دایره متقاطع باشند، دو نقطه با شرایط فوق وجود دارد. [نقاط M_1 و M_2]</p>
	<p>۲] اگر این دو دایره مماس باشند، فقط یک نقطه با شرایط فوق وجود دارد. [نقطه M_1]</p>
<p>چون دو دایره همدیگر را قطع نکرده‌اند، نقطه‌ای دیده نمی‌شود.</p>	<p>۳] اگر این دو دایره همدیگر را قطع نکنند، هیچ نقطه‌ای با شرایط فوق وجود ندارد.</p>

Test دو نقطه A و B به فاصله ۶ واحد از هم قرار دارند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصله ۳ واحد از A و به فاصله ۲ واحد از B باشد؟

(۱) یک (۲) دو

(۳) چهار (۴) هیچ



۴] با توجه به این که فاصله A و B از هم ۶ واحد است، دایره به مرکز A و به شعاع ۳ و دایره به مرکز B و به شعاع ۲ همدیگر را قطع نمی‌کنند، پس گزینه ۴ صحیح است.

برای تشخیص وضعیت دو دایره به شعاع‌های R_1 و R_2 و طول خط‌المركزین d، نسبت به هم، d را با $R_1 + R_2$ و $|R_1 - R_2|$ مقایسه می‌کنیم:

وضعیت رابطه	متخارج	مماس خارج	متقاطع	مماس داخل	متداخل
	$d > R_1 + R_2$	$d = R_1 + R_2$	$ R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2$	$d = R_1 - R_2 $	$d < R_1 - R_2 $
شکل					

۳۲. دو نقطه A و B به فاصله ۷/۵ واحد از هم قرار دارند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصله ۵/۱ واحد از A و به فاصله ۲/۶ واحد از B باشد؟
 (۱) یک (۲) دو

(۳) چهار (۴) هیچ

۳۳. مربع ABCD به ضلع ۴ مفروض است. چند نقطه در صفحه مربع وجود دارد که فاصله آن‌ها از رأس‌های متقابل A و C برابر ۲ باشد؟
 (۱) صفر (۲) ۲

(۳) ۴ (۴) ۳

ترسیم‌های مورد بحث در کتاب درسی را می‌توان به ۴ دسته عمده تقسیم کرد که هر کدام دارای نتایج خاص خود هستند:

انواع ترسیم‌ها

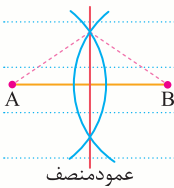
- رسم عمود منصف
- رسم نیمساز
- رسم مثلث
- رسم چهار ضلعی



رسم عمود منصف و خط موازی و عمود

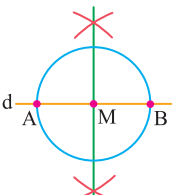


اولین و مهم‌ترین ترسیم مورد بحث در کتاب درسی، رسم عمود منصف است.

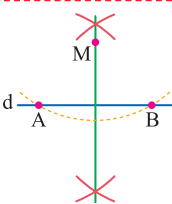


برای رسم خط عمود منصف پاره خط AB، دهانه پرگار را به اندازه مناسب (بیش از نصف طول AB) باز می‌کنیم و یک بار به مرکز A و یک بار به مرکز B. کمان‌هایی رسم می‌کنیم. سپس به کمک خط‌کش خطی رسم می‌کنیم که از محل تقاطع دو کمان بگذرد، این خط همان عمود منصف AB است. [در این ترسیم ۱ بار از پرگار و یک بار از خط‌کش استفاده می‌شود].

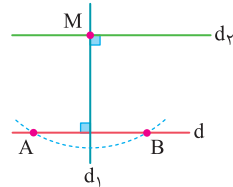
از رسم عمود منصف، در سه ترسیم بسیار مهم دیگر نیز استفاده می‌شود:



۱] برای رسم خط عمود بر خط d از نقطه M واقع بر آن، ابتدا به کمک پرگار دو نقطه مانند A و B روی خط d طوری پیدا می‌کنیم که $MA = MB$. [یعنی به مرکز M و به شعاع دلخواه دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط d را در A و B قطع کند]. سپس عمود منصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم. [در این ترسیم ۳ بار از پرگار و یک بار از خط‌کش استفاده می‌شود].
STOP از یک نقطه مانند A روی خط d فقط یک عمود می‌توان بر خط d رسم کرد.



۲] برای رسم خط عمود بر خط d از نقطه M غیر واقع بر خط d، ابتدا به کمک پرگار نقاطی مانند A و B بر خط d طوری پیدا می‌کنیم که $MA = MB$ باشد [برای این کار به مرکز M و شعاع دلخواه کمان می‌زنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند]. سپس عمود منصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم. [در این ترسیم ۳ بار از پرگار و یک بار از خط‌کش استفاده می‌شود].
STOP از یک نقطه مانند A خارج خط d فقط یک عمود می‌توان بر خط d رسم کرد.



۳] برای رسم خط موازی خط d از نقطه M خارج آن، ابتدا خط d_1 را به گونه‌ای رسم می‌کنیم که از M بگذرد و بر d عمود باشد، سپس خط d_2 را به گونه‌ای رسم می‌کنیم که از M بگذرد و بر d_1 عمود باشد [در این ترسیم ۶ بار از پرگار و ۱ بار از خط‌کش استفاده می‌شود].
STOP دو خط عمود بر یک خط با هم موازی اند.

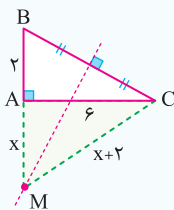
Test در مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع ۶ و ۲ عمود منصف وتر امتداد ضلع کوچکتر را در M قطع می‌کند. فاصله M از نزدیک‌ترین رأس مثلث کدام است؟

- (۱) ۷/۵
- (۲) ۸
- (۳) $\sqrt{10}$
- (۴) $\frac{25}{3}$

۲] می‌دانیم هر نقطه روی عمود منصف از دو سر پاره خط به یک فاصله است.

بنابراین از نقطه M به سر دیگر پاره خط یعنی C وصل می‌کنیم. در این صورت $MB = MC = x + 2$ خواهد بود.

حال در مثلث AMC به کمک فیثاغورس X به دست می‌آید:



$$(x+2)^2 = x^2 + 6^2 \xrightarrow{\text{حذف } 6, 8, 10} x = 8$$

۳۴. پاره خط AB به طول ۸ واحد مفروض است. برای رسم عمود منصف پاره خط AB طبق روش بیان شده در کتاب درسی نیاز به رسم چند کمان با مراکز مختلف است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲)
۳ (۳) ۴ (۴)

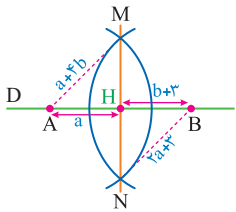
۳۵. پاره خط AB به طول ۱۰ مفروض است. در رسم عمود منصف AB دهانه پراگرا را به اندازه $1 - 3a$ باز کرده ایم تا به مراکز A و B کمان هایی رسم کنیم. برای این که ترسیم به درستی انجام گیرد. حدود a کدام باید باشد؟

- ۱ (۱) $0 < a < 2$
۲ (۲) $\frac{1}{3} < a < 2$
۳ (۳) $a > 2$
۴ (۴) $a > \frac{11}{3}$

۳۶. اگر خط d و پاره خط AB غیر موازی و غیر عمود باشند، تعداد نقاط واقع بر d که از نقطه های A و B به یک فاصله باشند، کدام است؟

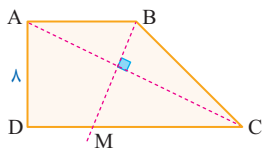
- ۱ (۱) دقیقاً دو نقطه
۲ (۲) حداقل دو نقطه
۳ (۳) دقیقاً یک نقطه
۴ (۴) بیشمار نقطه

۳۷. دو نقطه A و B مطابق شکل روی خط D مفروض اند. شکل زیر ترسیم عمود منصف پاره خط AB را نشان می دهد که در رسم آن، به مراکز A و B کمان هایی رسم شده، در صورتی که $AH = a$ و $BH = b + 3$ باشد، فاصله دو نقطه M و N از هم کدام است؟



- ۱ (۱) ۲۶
۲ (۲) ۱۲
۳ (۳) ۱۸
۴ (۴) ۲۴

۳۸. در دوزنقه ABCD مطابق شکل $AD = 8$ و $CD = 16$ است. عمود منصف قطر AC قاعده CD را در M قطع می کند، فاصله M از رأس C کدام است؟



- ۱ (۱) ۱۰
۲ (۲) ۶
۳ (۳) ۹
۴ (۴) ۷

۳۹. نقطه M روی خط d قرار دارد، برای رسم خط عمود بر d و گذرا از M کدام روش درست است؟

- ۱ (۱) پیدا کردن دو نقطه A و B با فاصله مساوی از M و سپس رسم عمود منصف AB
۲ (۲) رسم دایره ای گذرا از M و مماس بر d و سپس رسم شعاع گذرا از M
۳ (۳) در نظر گرفتن دو نقطه دلخواه مانند A و B و رسم منصف AB
۴ (۴) از نقطه دلخواه A روی خط d دایره ای به شعاع AM رسم کرده، سپس مماس بر دایره در M را رسم می کنیم.

۴۰. در رسم خط عمود بر خط d از نقطه M خارج خط d طبق روش بیان شده در کتاب درسی اولین گام کدام است؟

- ۱ (۱) رسم دو خط غیر عمود بر خط d
۲ (۲) در نظر گرفتن دو نقطه دلخواه روی خط d
۳ (۳) رسم دایره ای به مرکز M که خط را در دو نقطه قطع کند.
۴ (۴) پیدا کردن پای عمود روی خط d

۴۱. در رسم کدام یک از موارد زیر طبق روش های کتاب درسی نیاز به ترسیم کمان های بیشتری داریم؟

- ۱ (۱) رسم خط عمود بر یک خط از نقطه ای واقع بر آن
۲ (۲) رسم خط عمود بر یک خط از نقطه ای غیر واقع بر آن
۳ (۳) رسم خط موازی یک خط از نقطه ای خارج آن
۴ (۴) هر سه یکسان هستند.

۴۲. در ترسیم خط عمود بر یک خط از نقطه ای خارج خط از کدام ترسیم استفاده می شود؟

- ۱ (۱) ترسیم خطی موازی یک خط
۲ (۲) ترسیم خط عمود بر یک خط از نقطه ای واقع بر آن
۳ (۳) ترسیم عمود منصف یک پاره خط
۴ (۴) ترسیم خطی که از دو خط متقاطع به یک فاصله است.

۴۳. در ترسیم ارتفاع AH از مثلث ABC طبق روش بیان شده در کتاب درسی کدام ترسیم در صورت نیاز متقدم بر سایرین است؟

- ۱ (۱) ترسیم عمود منصف ضلع BC
۲ (۲) ترسیم کمانی به مرکز A و متقاطع با BC
۳ (۳) ترسیم خط گذرا از A و عمود بر BC
۴ (۴) رسم کمان هایی به مراکز B و C و به شعاع بزرگتر از نصف BC

Lesson.2

قضیه تالس

درس دوم



ص ۳۴ تا ۳۷ هفدهم



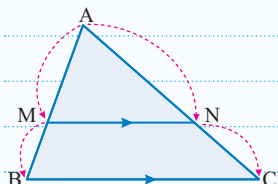
قضیه تالس [جزء به جزء]

خرید آنلاین در gajmarket.com



46

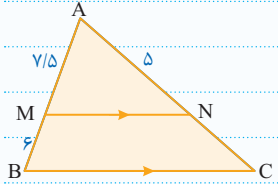
فصل ۲ | قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن • قضیه تالس



$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

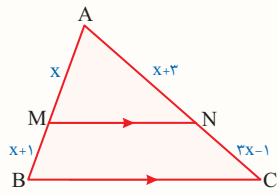
هرگاه در یک مثلث، خطی راست موازی یکی از اضلاع، دو ضلع دیگر مثلث را در دو نقطه قطع کند، روی آن دو ضلع، ۴. پاره خط جدا می کند که اندازه آن ها تشکیل یک تناسب می دهد [این قضیه را تالس جزء به جزء می نامند].

در شکل مقابل MN و BC موازی اند. طول پاره خط NC کدام است؟



$$\frac{7/5}{6} = \frac{5}{NC} \Rightarrow NC = \frac{6 \times 5}{7/5} = 4$$

معمولاً در مواردی که اندازه پاره خط MN نه داده شده بود و نه خواسته شده بود، بهتر است از تالس جزء به جزء استفاده کنیم.



Test در شکل مقابل MN موازی قاعده BC است، مقدار x کدام است؟

- ۲ (۱)
- ۳ (۲)
- ۴ (۳)
- ۵ (۴)

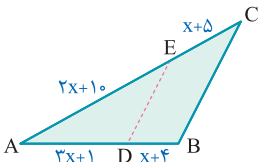
چون در این تست اندازه پاره خط MN نه داده شده و نه خواسته شده، بهتر است از تالس جزء به جزء استفاده کنیم:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{x+2}{3x-1} \Rightarrow 3x^2 - x = x^2 + 4x + 2 \Rightarrow 2x^2 - 5x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(2x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

غرق غرق

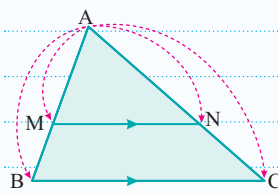
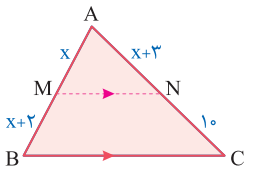
۱۶۸. در شکل مقابل DE || BC است. مقدار x کدام است؟

- ۵ (۱)
- ۷ (۲)
- ۳ (۳)
- ۵ (۴)



۱۶۹. در شکل مقابل MN و BC موازی اند. بزرگ ترین مقدار x کدام است؟

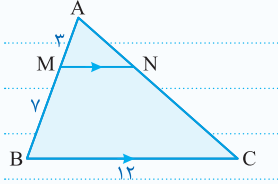
- ۲ (۱)
- ۱/۵ (۴)
- ۳ (۲)
- ۴ (۳)



$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

اگر خطی دو ضلع از اضلاع مثلثی را قطع کند و با ضلع سوم موازی باشد، مثلثی را از مثلث اصلی جدا می کند که اندازه ضلع های آن، با اندازه ضلع های مثلث اصلی متناسب است این قضیه را [تالس جزء به کل] می نامند.

در شکل زیر اندازه پاره خط MN کدام است؟



$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{3}{10} = \frac{MN}{12} \Rightarrow MN = 3.6$$

به طور کلی زمانی از تالس جزء به کل استفاده می کنیم که پاره خط NM داده یا خواسته شده باشد.



قضیه تالس [جزء به کل]



تالس جزء به کل را از سمت قاعده به سمت رأس ها نیز می توان نوشت، اما در این حالت MN را نمی توان در نسبت دخالت داد.

مقدار x در شکل مقابل کدام است؟

تالس جزء به کل را از قاعده به سمت رأس می نویسیم:

$$\frac{x}{x + (\Delta - x)} = \frac{3}{3 + 4} \Rightarrow \frac{x}{\Delta} = \frac{3}{7} \Rightarrow 7x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{7}$$

Test در مثلث ABC، اضلاع AB=4 و AC=6 و BC=7 است. از رأس C خطی موازی میانه AM رسم شده و امتداد BA را در نقطه D قطع کرده است. اندازه BD کدام است؟

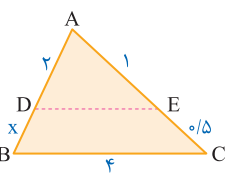
(خارج - 98)

۱) 7/5 ۲) 8 ۳) 8/5 ۴) 9

چون صحبت از دو خط موازی است به سراغ تالس می رویم و چون BD را می خواهد باید از تالس جزء به کل استفاده کنیم:

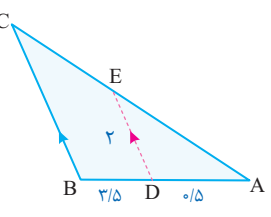
$$\frac{BA}{BD} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow \frac{4}{BD} = \frac{\frac{y}{2}}{7} \Rightarrow BD = 8$$

۱۷۰. در شکل مقابل DE || BC است. اندازه پاره خط DE کدام است؟



- ۱) 3/4 ۲) 3 ۳) 1/5 ۴) 8/3

۱۷۱. در شکل مقابل اندازه BC کدام است؟



- ۱) 16 ۲) 14 ۳) 12 ۴) 18

اگر خطی روی دو ضلع مثلثی چهار پاره خط با اندازه های متناسب جدا کند، آنگاه با ضلع سوم مثلث موازی است. [عکس قضیه تالس]

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{t} \Rightarrow MN \parallel BC$$

در سؤال هایی که به کمک عکس تالس حل می شوند، معمولاً اشاره ای به خط موازی قاعده نمی شود و یا حتی گاهی اصلاً چنین خطی وجود ندارد؛ اما در این حالت طول هر ۴ قطعه روی ساق های مثلث معلوم است و اعداد طوری هستند که نسبت آن ها یک تناسب تشکیل می دهد.



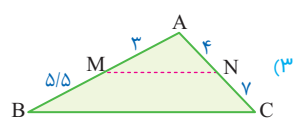
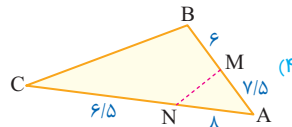
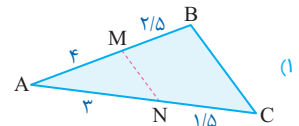
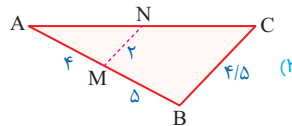
Test با توجه به شکل مقابل، x کدام است؟

۱) 5 ۲) 6 ۳) 7/5 ۴) 6/5

۱. در این مسئله، اشاره ای به موازی بودن DE و BC نشده است، پس ابتدا نسبت اندازه های پاره خط های ایجاد شده بر اضلاع AB و AC را با هم مقایسه می کنیم:

$$\frac{12}{15} = \frac{8}{10} \Rightarrow DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{12}{27} = \frac{x+2}{3x+\frac{3}{4}} \Rightarrow 36x+9 = 27x+54 \Rightarrow 9x = 45 \Rightarrow x = 5$$

۱۷۲. در کدام یک از شکل های زیر، پاره خط MN موازی قاعده BC است؟



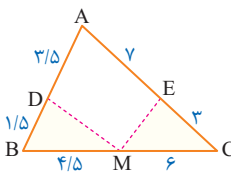
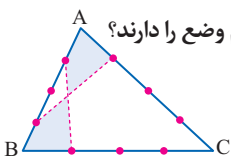
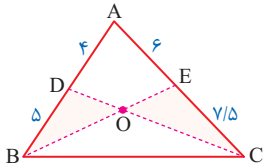
۱۷۳. در شکل زیر نسبت مساحت مثلث OBD به مساحت مثلث OCE کدام است؟

۴/۵ (۲)

۲/۳ (۱)

۱/۴ (۴)

۵/۶ (۳)



هم محیط (۲)

هم مساحت (۱)

متشابه (۴)

هم نهشت (۳)

۱۷۵. در شکل داده شده مساحت مثلث BDM چند درصد مساحت مثلث EMC است؟

۷۵ (۲)

۵۰ (۱)

۴۸ (۴)

۶۰ (۳)



بیان غیر مستقیم واژه موازی در تالس

گاهی اوقات به جای این که به طور مستقیم بگویند دو خط d و d' موازی اند، می گویند فلان چهارضلعی، دوزنقه است. در دوزنقه مقابل، اضلاع AD و BC را امتداد می دهیم تا یکدیگر را در نقطه M قطع کنند. فاصله M از D چقدر است؟

چون AB || CD است می توانیم از تالس استفاده کنیم؛ از طرف دیگر چون AB جزء داده های مسئله است باید از تالس جزء به کل استفاده کنیم:

$$\frac{MA}{MD} = \frac{AB}{DC} \Rightarrow \frac{x}{x+5} = \frac{4}{7} \Rightarrow 7x = 4x + 20 \Rightarrow 3x = 20 \Rightarrow x = \frac{20}{3}$$

حال با معلوم شدن x فاصله M از D قابل محاسبه است:

$$MD = MA + AD = \frac{20}{3} + 5 = \frac{35}{3}$$

گاهی اوقات نه از کلمه موازی استفاده می شود و نه نامی از دوزنقه است، بلکه از عکس قضیه خطوط موازی و مورب استفاده می کنند و به این وسیله، به بیان موازی بودن دو خط می پردازند.

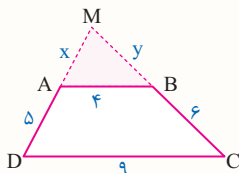
Test در دوزنقه ای اندازه قاعده ها ۴ و ۹ و طول ساق ها ۶ و ۵ است. محیط مثلثی که از امتداد ساق ها در بیرون دوزنقه تشکیل می شود، کدام است؟

۱۲/۸ (۴)

۱۲/۲ (۳)

۱۱/۶ (۲)

۱۱/۴ (۱)



$$\triangle MDC: AB \parallel DC \Rightarrow \frac{x}{x+5} = \frac{y}{y+6} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{6} = \frac{4}{9} \Rightarrow x = 4, y = \frac{24}{3} = 8$$

بنابراین محیط مثلث MAB برابر است با: $x + y + 4 = 12/8$

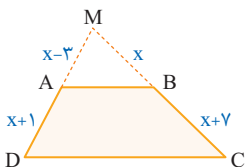
۱۷۶. در دوزنقه ABCD امتداد ساق های آن در نقطه M متقاطع اند. مقدار x کدام است؟

۶ (۲)

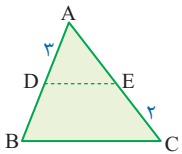
۵/۵ (۱)

۶/۵ (۴)

۷ (۳)

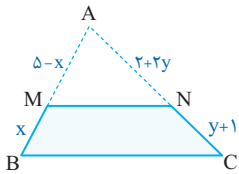


۱۷۷. در شکل زیر DECB دوزنقه است و ساق BD یک واحد کوچکتر از AE است. اندازه AC کدام است؟



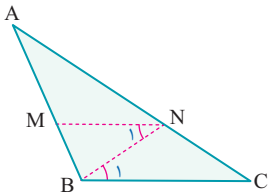
- (۱) ۳
(۲) ۵
(۳) ۶
(۴) ۷

۱۷۸. در شکل مقابل MNCB دوزنقه است. مقدار x کدام است؟



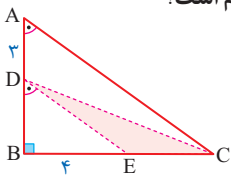
- (۱) $\frac{5}{2}$
(۲) $\frac{2}{5}$
(۳) $\frac{3}{5}$
(۴) $\frac{5}{3}$

۱۷۹. در شکل مقابل $AM = 3MB$ و $\hat{N}_1 = \hat{B}_1$ می‌باشد. حاصل $\frac{CN}{AC}$ کدام است؟



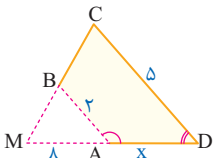
- (۱) $\frac{2}{4}$
(۲) $\frac{1}{3}$
(۳) $\frac{1}{4}$
(۴) $\frac{2}{3}$

۱۸۰. در مثلث قائم‌الزاویه ABC مطابق شکل $\hat{A} = \hat{D}$ می‌باشد. اگر $AD = 3$ و $BE = 4$ باشد، مساحت قسمت رنگ شده کدام است؟



- (۱) ۶
(۲) ۸
(۳) ۱۲
(۴) ۲۴

۱۸۱. در چهارضلعی ABCD اگر زوایای \hat{A} و \hat{D} مکمل هم باشند و امتداد اضلاع BC و AD در نقطه M به فاصله ۸ واحد از رأس A متقاطع باشند. اندازه ضلع AD کدام است؟



- (۱) ۴
(۲) ۵
(۳) ۱۸
(۴) ۱۲

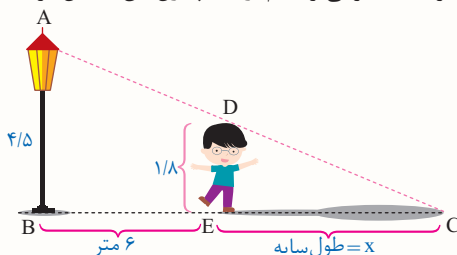
منظور از تالس کاربردی مجموعه مسائلی است که طول سایه، بلندی یک درخت یا ارتفاع یک سازه و نظایر آن را از ما می‌خواهند و به طور مستقیم صحبت از یک مثلث در هندسه نیست! ...
 ۱) تیپ اول این مسائل حالتی است که اطلاعات داده شده و خواسته شده در مسئله، درون یک مثلث قائم‌الزاویه قرار دارد. در این حالت باید به پاره‌خطی که موازی ضلع عمودی قرار دارد توجه و با استفاده از تالس جزء به کل خواسته مسئله را پیدا کنیم.
 ۲) در تیپ دوم اطلاعات داده شده در مسئله روی اضلاع یک دوزنقه قائم‌الزاویه قرار دارد که ساق قائم آن سطح زمین است. در این حالت با رسم یک خط به موازات ساق قائم، یک مثلث قائم‌الزاویه درون دوزنقه ایجاد و اطلاعات مسئله را به این مثلث منتقل می‌کنیم و در انتها قضیه تالس را روی این مثلث می‌نویسیم.

تالس جزء به کل کاربردی

Test شخصی با قد ۱۸۰ سانتی‌متر در فاصله ۶ متری از تیر چراغ برق به ارتفاع ۴/۵ متر ایستاده است. طول سایه این شخص روی زمین چند متر است؟

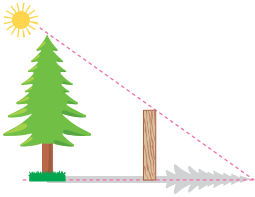
- (۱) ۳
(۲) ۴/۵
(۳) ۳/۵
(۴) ۵/۵

چون هیچ شکلی داده نشده است، باید شکل فرض خودمان را رسم کنیم. حال همه اندازه‌ها را بر حسب متری می‌نویسیم، و با تیپ اول این مسائل مواجه هستیم:



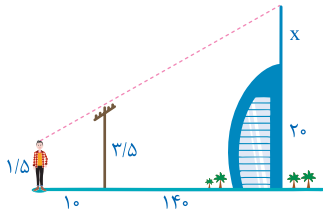
$$\frac{DE}{AB} = \frac{CE}{BC} \Rightarrow \frac{1/8}{4/5} = \frac{x}{x+6} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{x}{x+6} \xrightarrow{\text{تفصیل درمخرج}} \frac{2}{3} = \frac{x}{6} \Rightarrow x = 4$$

۱۸۲. در شکل زیر اگر نوک سایه چوب $1/5$ متری بر نوک سایه درخت منطبق باشد و طول سایه چوب و درخت ۶ و ۱۲۰ متر باشد، ارتفاع درخت چند متر است؟



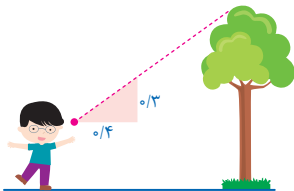
- ۳۶ (۱)
- ۲۴ (۲)
- ۳۰ (۳)
- ۲۵ (۴)

۱۸۳. در شکل زیر، دکلی روی یک ساختمان به ارتفاع ۲۰ متر نصب شده است. دید چشم ناظری با قد $1/5$ متر از نوک دکل و تیرک $3/5$ متری بین آن‌ها، در یک راستا است. ارتفاع دکل چقدر است؟



- ۱۱/۸ (۱)
- ۱۲/۲ (۲)
- ۱۲/۸ (۳)
- ۱۱/۵ (۴)

۱۸۴. شخصی برای پیدا کردن ارتفاع یک درخت، یک تکه مقوا به شکل زیر ساخت. اگر او در فاصله $8/8$ متری از درخت بایستد، می‌تواند با نگاه کردن در امتداد وتر مثلث نوک درخت را ببیند، فاصله تقریبی چشم او از زمین $1/6$ متر است. ارتفاع تقریبی درخت کدام است؟



- ۷/۸ (۱)
- ۸ (۲)
- ۸/۲ (۳)
- ۸/۴ (۴)



ترکیب تالس جزء به جزء تالس جزء به کل

اگر در مسائل مربوط به تالس، هم اعداد روی ساق‌های مثلث و هم اعداد مربوط به قاعده‌ها [لا اقل یکی از دو قاعده] مجهول بودند، اما بر حسب یک متغیر نبودند مجبوریم دو بار از تالس استفاده کنیم. یک بار جزء به جزء روی ساق‌ها و دیگری جزء به کل روی قاعده و خط موازی آن.

در شکل زیر MN موازی BC است. x و y را بیابید.

ابتدا مقدار x را به کمک تالس جزء به جزء به دست می‌آوریم:

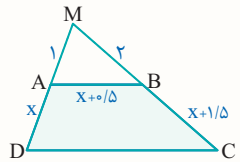
$$\frac{16}{x} = \frac{x}{4} \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = 8$$

$$\begin{cases} AB = 16 + 8 = 24 \\ BC = (2 \times 8) + 9 = 25 \end{cases}$$

حال می‌توانیم y را به کمک تالس جزء به کل به دست آوریم:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{16}{24} = \frac{3y+2}{25} \Rightarrow 72y+48 = 400 \Rightarrow y = \frac{352}{72} \Rightarrow y = \frac{44}{9}$$

Test از امتداد ساق‌های دوزنقه ABCD، مثلثی با اضلاع ۱ و ۲ پدید آمده است. اندازه قاعده بزرگ دوزنقه چقدر است؟



- ۷/۵ (۱)
- ۸ (۲)
- ۷ (۳)
- ۶/۵ (۴)

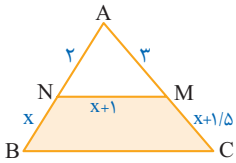
۱ ابتدا به کمک تالس جزء به جزء، x را به دست می‌آوریم:

$$\frac{MA}{AD} = \frac{MB}{BC} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{2}{x+2} \Rightarrow x+2 = 2x \Rightarrow x = 2$$

حال با استفاده از تالس جزء به کل، ضلع DC را به دست می‌آوریم:

$$\frac{MA}{MD} = \frac{AB}{DC} \Rightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{x+0.5}{DC} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{2.5}{DC} \Rightarrow DC = 7.5$$

۱۸۵. در شکل زیر NMCB دوزنقه است. اندازه پاره خط BC کدام است؟



۸/۵ (۱)

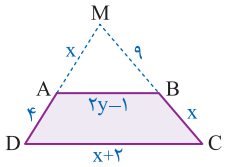
۷/۵ (۲)

۹ (۳)

۱۰ (۴)

(تمرین کتاب درسی)

۱۸۶. در شکل زیر دوزنقه ABCD مفروض است و امتداد ساق‌های آن در M متقاطع‌اند. محیط دوزنقه کدام است؟



۲۰/۴ (۱)

۲۰/۸ (۲)

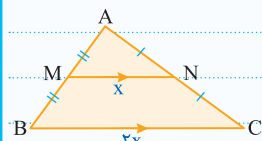
۲۲/۶ (۳)

۲۲/۸ (۴)



حالت خاص قضیه تالس

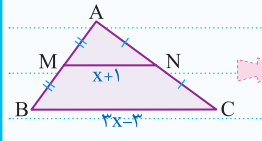
پاره خطی که وسط‌های دو ضلع مثلثی را به هم وصل می‌کند، طبق قضیه تالس، نصف ضلع سوم و طبق عکس قضیه تالس، موازی ضلع سوم است.



مطابق شکل، مقدار x کدام است؟

نقاط M و N وسط اضلاع AB و AC هستند، پس باید $x+1$ نصف $3x-3$ باشد، یعنی:

$$x+1 = \frac{3x-3}{2} \Rightarrow 2(x+1) = 3x-3 \Rightarrow 2x+2 = 3x-3 \Rightarrow x=5$$



Test اگر وسط‌های اضلاع مثلثی را به هم وصل کنیم، محیط هرکدام از ۴ مثلث به دست آمده چه کسری از محیط مثلث اصلی است؟

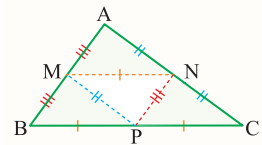
$\frac{1}{2}$ (۱)

$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۳)

$\frac{1}{6}$ (۴)

۱ اگر اضلاع مثلث را a, b, c فرض کنیم، در این صورت بنا بر حالت خاص قضیه تالس $MP = \frac{b}{4}$, $NP = \frac{c}{4}$, $MN = \frac{a}{4}$ خواهد بود. بنابراین اضلاع هر یک از ۴ مثلث کوچک $\frac{a}{4}$, $\frac{b}{4}$, $\frac{c}{4}$ است و در نتیجه محیط هرکدام، نصف محیط مثلث اصلی خواهد شد.



۱۸۷. در یک مثلث قائم‌الزاویه، اندازه اضلاع قائم $1/5$ و 2 می‌باشد. از رأس‌های مثلث خطی به موازات اضلاع می‌گذرانیم تا همدیگر را قطع کنند. محیط مثلث به دست آمده کدام است؟

۱۰ (۱)

۸ (۲)

۱۲ (۳)

۲۴ (۴)

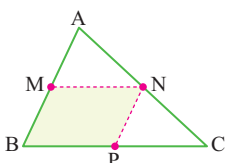
۱۸۸. در شکل داده شده نقطه M وسط ضلع AB از مثلث ABC می‌باشد. اگر ضلع $AC = 7$ و محیط متوازی‌الاضلاع MNPB برابر ۱۳ می‌باشد، محیط مثلث ABC کدام است؟

۱۳/۵ (۱)

۲۰ (۲)

۲۸ (۳)

۲۰/۵ (۴)





گج

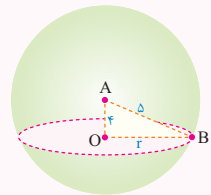
منظور از **برش**، تقاطع دادن یک صفحه با یک جسم هندسی توپر مانند کره توپر، مخروط توپر، استوانه توپر و... است و شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی توپر حاصل می‌شود، **سطح مقطع** آن نامیده می‌شود. سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک کره، همواره یک **دایره** است.

نوع برش	برش قائم	برش مایل	برش افقی
نمایش برش			
شکل حاصل از برش	دایره	دایره	دایره

هرچه صفحه به مرکز نزدیکتر شود، دایره ایجاد شده نیز بزرگتر می‌شود. در حالتی که صفحه از مرکز کره بگذرد، دایره‌ای با بیشترین مساحت ایجاد می‌شود که آن را **دایره عظیمه کره** می‌نامند.

Test یک کره چوبی توپر به شعاع ۵ واحد را با یک صفحه، به فاصله ۴ واحد از مرکز برش زده‌ایم. سطح مقطع حاصل چقدر است؟

- ۴π (۱)
- ۷π (۳)
- ۶π (۲)
- ۹π (۴)



$$\Delta^2 = 4^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3$$

۴ در مثلث قائم الزاویه مشخص شده، طبق رابطه فیثاغورس داریم:

$$S = \pi r^2 = 9\pi$$

بنابراین مساحت دایره ایجاد شده برابر است با:

۶۳۵ یک کره چوبی توپر به شعاع ۱۳ را با یک صفحه برش زده‌ایم، سطح مقطع حاصل 25π است، فاصله مرکز کره از صفحه برش کدام است؟

- ۹ (۱)
- ۸ (۳)
- ۱۲ (۲)
- ۱۰ (۴)



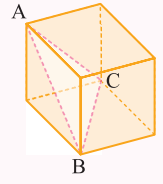
برش مکعب

نمونه‌هایی از برش **افقی**، **قائم** و **مایل** یک مکعب مستطیل به قاعده مربع که در کتاب درسی بحث شده به صورت جدول زیر است:

نوع برش	برش قائم	برش افقی	برش مایل
نمایش برش			
شکل حاصل از برش	مستطیل	مستطیل	مستطیل، مثلث، دوزنقه، پنج ضلعی، شش ضلعی

Test مکعب شکل مقابل توسط صفحه ABC برش خورده است. اگر ضلع مکعب ۲ باشد، سطح مثلث برش خورده کدام است؟

- √۵ (۱)
- √۳ (۳)
- ۲√۳ (۲)
- √۳ (۴)



۲ هر کدام از اضلاع مثلث ایجاد شده. قطر وجه‌های مکعب هستند که قطر مربع هم $\sqrt{2}$ برابر ضلع است، بنابراین:

$$a = \sqrt{2} \times 2 \Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{4} (2\sqrt{2})^2 = 2\sqrt{3}$$

خرید آنلاین در gajmarket.com



۶۳۶. از برش افقی یک مکعب مستطیل به قاعده ۲, ۴ و ارتفاع ۳ کدام شکل حاصل می‌شود؟

- (۱) مربع به مساحت ۱۶
(۲) مستطیل به مساحت ۸
(۳) مستطیل به محیط ۱۰
(۴) مربع به محیط ۱۶

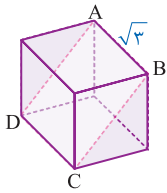
۶۳۷. از برش قائم یک مکعب مستطیل به ابعاد ۲, ۳, ۵ کدام شکل حاصل می‌شود؟

- (۱) مربع
(۲) مستطیل
(۳) دوزنقه
(۴) مثلث

۶۳۸. از برخورد یک صفحه با یک مکعب کدام شکل ممکن نیست حاصل شود؟

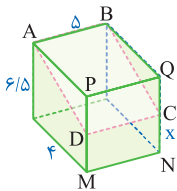
- (۱) دوزنقه
(۲) مستطیل
(۳) شش ضلعی
(۴) کایت

۶۳۹. مکعب شکل مقابل به ضلع $\sqrt{3}$ توسط صفحه ABCD برش خورده است. مساحت صفحه حاصل از برش کدام است؟



- (۱) $3\sqrt{2}$
(۲) $\sqrt{6}$
(۳) $2\sqrt{3}$
(۴) ۳

۶۴۰. در مکعب مستطیلی به ابعاد ۴, ۵, ۶ / ۵ / ۵ صفحه ABCD طوری یال‌های PM و QN را برش زده است که سطح مقطع حاصل مربع شده است. فاصله نقاط C و D از صفحه قاعده پایین مکعب مستطیل کدام است؟



- (۱) ۱/۵
(۲) ۲
(۳) ۲/۵
(۴) ۳/۵

۶۴۱. در یک مکعب، صفحه گذرا بر یک یال و وسط یال دیگر، آن را به دو قطعه نابرابر تقسیم می‌کند. نسبت حجم‌های این دو قطعه، کدام است؟

(داخل - ۹۸)

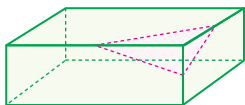
- (۱) $\frac{1}{4}$
(۲) $\frac{1}{3}$
(۳) $\frac{1}{\sqrt{5}}$
(۴) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

۶۴۲. در مکعب مفروض، صفحه‌ای بر یک یال و وسط یال دیگر گذشته است. مساحت مقطع حاصل، چند برابر مساحت یکی از وجوه مکعب است؟

(خارج - ۹۸)

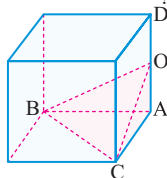
- (۱) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
(۲) $\frac{\sqrt{6}}{2}$
(۳) $\frac{3}{2}$
(۴) $\sqrt{2}$

۶۴۳. در یک مکعب مستطیل به ابعاد ۲, ۴, ۶ صفحات گذرا بر وسط یال‌های مکعب، هشت هرم را از مکعب جدا می‌کند که رأس هر یک از هرم‌ها بر رأس مکعب مستطیل واقع است، حجم چندوجهی باقی‌مانده کدام است؟



- (۱) ۳۶
(۲) ۴۲
(۳) ۴۰
(۴) ۳۳

۶۴۴. در شکل زیر، صفحه گذرا بر قطر BC و نقطه O وسط یال AD حجم OACB را از مکعب جدا می‌کند، این حجم چند برابر حجم مکعب است؟



- (۱) $\frac{1}{16}$
(۲) $\frac{1}{12}$
(۳) $\frac{1}{9}$
(۴) $\frac{1}{8}$

۶۴۵. صفحه گذرنده بر انتهای سه یال گذرا بر یک رأس از مکعب، آن را به دو جزء تقسیم می‌کند. حجم جزء بزرگتر چند برابر حجم جزء کوچکتر است؟

(خارج - ۹۱)

- (۱) ۵
(۲) $3\sqrt{3}$
(۳) $4\sqrt{2}$
(۴) ۶



سطح مقطع استوانه در برخورد با صفحه‌های افقی، قائم و مایل به صورت زیر است:

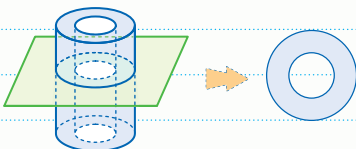
نوع برش	مایل [هر دو قاعده را قطع نکند]	قائم	افقی
نمایش برش			
شکل حاصل از برش	بیضی	مستطیل	دایره

در برش قائم، در حالتی که صفحه از وسط استوانه بگذرد، مستطیلی با بیشترین مساحت ایجاد می‌شود.

سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک نیم استوانه، به صورت شکل‌های زیر است:

نوع برش	مایل [هر دو قاعده را قطع نکند]	قائم	افقی
نمایش برش			
شکل حاصل از برش	نیم بیضی	مستطیل	نیم دایره

در اثر برخورد صفحه‌ای موازی با استوانه توخالی [لوله] شکل مقابل، یک دایره توخالی [رینگ] پدید می‌آید:



Test یک استوانه چوبی به ارتفاع ۵ و شعاع قاعده ۴ واحد را توسط صفحه‌ای عمود بر سطح قاعده و گذرا از مرکز دایره قاعده، برش می‌زنیم. مساحت سطح مقطع حاصل از برش کدام است؟

- ۲۰ (۱)
- ۳۰ (۲)
- ۴۰ (۳)
- ۸۰ (۴)

۳ سطح مقطع حاصل از برش، یک مستطیل به طول ۸ و عرض ۵ است و مساحت آن برابر است با:



۶۴۶. از برش قائم یک استوانه قائم کدام شکل حاصل می‌شود؟

- ۱ مربع
- ۲ مستطیل
- ۳ لوزی
- ۴ بیضی

۶۴۷. از برش افقی یک استوانه به ارتفاع ۳ و حجم 48π یک به مساحت حاصل می‌شود.

- ۱ دایره - 4π
- ۲ بیضی - 16π
- ۳ مستطیل - ۱۶
- ۴ دایره - 16π

۶۴۸. از برش یک استوانه، یک بیضی حاصل شده است. نوع برش کدام است؟

- (۱) افقی
(۲) قائم
(۳) مایل
(۴) نامشخص

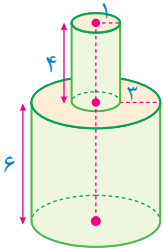
۶۴۹. از برش قائم یک نیم استوانه همواره کدام شکل حاصل می شود؟

- (۱) دوزنقه متساوی الساقین
(۲) مستطیل
(۳) مربع
(۴) لوزی

۶۵۰. از برش افقی یک نیم استوانه به حجم ۶۴π و ارتفاع ۲ یک به مساحت حاصل می شود.

- (۱) دایره - ۱۶π
(۲) نیم دایره - ۱۶π
(۳) دایره - ۸π
(۴) نیم دایره - ۳۲π

۶۵۱. دو استوانه چوبی توپُر به ارتفاع های ۶ و ۴ روی هم قرار گرفته اند. اگر فاصله نقاط محیط سطح تماس قاعده دو استوانه ۳ و شعاع قاعده استوانه کوچک ۱ باشد، سطح حاصل از برش صفحه عمود و گذرا از مرکز دایره سطح مقطع [مورهای] [استوانه ها] چقدر است؟



- (۱) ۳۴
(۲) ۶۴
(۳) ۳۸
(۴) ۵۶



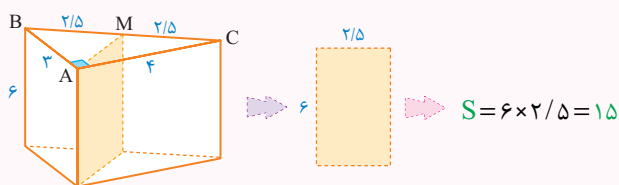
برش منشور مثلث القاعده

نوع برش	مایل	قائم	افقی	
نمایش برش				
شکل حاصل از برش	دوزنقه	مستطیل	مثلث	

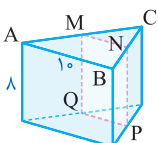
Test در یک منشور مثلث القاعده چوبی توپُر، قاعده یک مثلث قائم الزاویه به اضلاع ۳، ۴، ۵ و ارتفاع منشور ۶ است. صفحه برش شامل یکی از یال های منشور است و از وسط ضلع بزرگ قاعده عبور می کند. مساحت سطح مقطع برش کدام است؟

- (۱) $۱۶/۵$
(۲) $۱۳/۵$
(۳) ۱۲
(۴) ۱۵

F طول مستطیل حاصل شده همان ارتفاع منشور یعنی ۶ است و عرض مستطیل حاصل، میانه وارد بر وتر در مثلث ABC است که اندازه آن $۲/۵$ است [نصف وتر]، بنابراین مساحت مستطیل حاصل برابر است با:

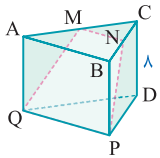


۶۵۲. در یک منشور مثلث القاعده توپُر، مطابق شکل $AB = ۱۰$ و ارتفاع منشور ۸ است. صفحه برش قائم بر سطح قاعده منشور از وسط اضلاع AC و BC گذشته است. مساحت سطح مقطع حاصل شده کدام است؟



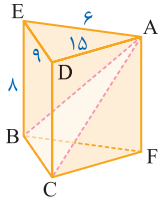
- (۱) ۴۰
(۲) ۳۶
(۳) ۲۰
(۴) ۳۲

۶۵۳. در یک منشور مثلث القاعده توپر، اضلاع قاعده $AC = 30$ ، $AB = 20$ و $BC = 12$ است. اگر ارتفاع منشور ۸ باشد و مطابق شکل، صفحه برش از وسط اضلاع BC و AC گذشته باشد و یک سطح مقطع چهارضلعی روی منشور ایجاد کرده باشد، محیط این چهارضلعی چقدر خواهد بود؟



- (۱) ۴۸
(۲) ۶۷
(۳) ۵۷
(۴) ۵۶

۶۵۴. در یک منشور مثلث القاعده توپر، اضلاع قاعده مطابق شکل ۹، ۶، ۱۵ و ارتفاع منشور ۸ است. صفحه برش مایل، یک سطح مقطع مثلثی از منشور ایجاد کرده است. مساحت این سطح مقطع چقدر است؟



- (۱) ۴۰
(۲) ۱۸
(۳) ۳۲
(۴) ۳۶

اگر یک هرم قائم با قاعده مستطیل داشته باشیم، از برش افقی آن یک مستطیل و از برش های قائم، مثلث متساوی الساقین یا دوزنقه متساوی الساقین حاصل می شود [صفحه برش ممکن است از رأس هرم عبور کند یا عبور نکند] و از برش مایل نیز باز هم مثلث یا دوزنقه حاصل می شود و آن هم بستگی دارد به این که صفحه از رأس هرم عبور کند یا نکند.

نوع برش	مایل	قائم	افقی
نمایش برش			
شکل حاصل از برش	دوزنقه	مثلث	مستطیل

هرم های مربع القاعده نیز دقیقاً همین وضعیت را دارند، با این تفاوت که از برش افقی آن ها مربع حاصل می شود.

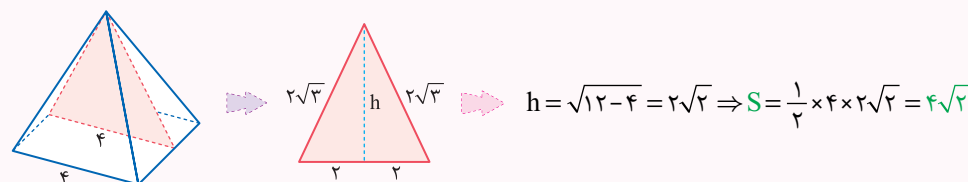


برش هرم مربع القاعده

Test همه وجه یک هرم چوبی مربع القاعده، مثلث های متساوی الاضلاع به ضلع ۴ هستند. این هرم توسط یک صفحه قائم و گذرا از رأس هرم برش خورده است. مساحت سطح مقطع حاصل کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{2}$
(۲) ۴
(۳) $8\sqrt{2}$
(۴) ۸

11 سطح مقطع حاصل، یک مثلث متساوی الساقین است که ساق های آن ارتفاع وجه های هرم، یعنی برابر $2\sqrt{3}$ است. بنابراین داریم:



۶۵۵. اگر یک هرم با قاعده مربع توسط صفحه ای غیر گذرا بر رأس برش بخورد، سطح مقطع حاصل کدام نمی تواند باشد؟

- (۱) مثلث
(۲) دوزنقه
(۳) مربع
(۴) پنج ضلعی منتظم



من در رقابت با هیچ کس جز خودم نیستم. هدف من مغلوب نمودن آخرین کاریست که انجام داده‌ام !!!

بیل گیتسر

پاسخنامه
تمام تشریحی
و تمام رنگی

ANSWERS

Password

سُو گند به قَلَم و آن چه می نویسند



www.gaj.ir



Other user

ENG





ترسیم های هندسی و استدلال **Geometric Drawings**

1 4 نقاط مورد نظر روی خطوط d_1 , d_2 قرار d_1 دارند و از آن جایی که هر خط شامل بی شمار نقطه است، بنابراین گزینه **F** جواب است.

2 1 برای این که یک سکه کاملاً درون یک منحنی بسته قرار بگیرد باید فاصله مرکز سکه از تمام نقاط منحنی از شعاع سکه بزرگتر باشد، بنابراین باید فاصله مرکز سکه از تمام اضلاع مستطیل بیشتر از ۲ باشد:

$$S = 4 \times 2 = 8$$

3 2 مکان هندسی نقاطی که فاصله آن ها از رأس A بزرگتر از ۱ است، بیرون دایره به مرکز A و به شعاع ۱ است و به طریق مشابه در سایر رؤس نیز این داستان برقرار است. بنابراین مکان هندسی مورد نظر مطابق شکل است و مساحت آن برابر است با:

$$S = 2^2 - 4 \left(\frac{1}{4} \pi \times 1^2 \right) = 4 - \pi$$

4 3 در این لوزی فاصله مرکز تا هر کدام از اضلاع را پیدا می کنیم:

$$h \times 5 = 3 \times 4 \Rightarrow h = \frac{12}{5} = 2 \frac{2}{5}$$

از آنجایی که $2/5 < 2/4 < 3/5$ است، دایره به مرکز O و به شعاع $2/5$ هر ضلع لوزی را در دو نقطه قطع می کند، یعنی کلاً ۸ نقطه وجود دارد.

5 1 نقاطی که به فاصله ۵ واحد از قطر AB قرار دارند روی دو خط به موازات AB و به فاصله ۵ واحد از آن قرار دارند که این دو خط دایره را قطع نمی کنند.

6 3 ابتدا از روی قاعده و مساحت مثلث ارتفاع آن را به دست می آوریم.

$$S = \frac{1}{2} AH \times BC \Rightarrow AH = 9$$

چون $6 < 9$ است، مطابق شکل دو نقطه وجود دارد.

7 3 نقاطی که به فاصله $2/4$ از قطر BD قرار دارند، روی دو خط به موازات BD و به فاصله $2/4$ از آن قرار دارند، حال ارتفاع CH از مثلث BCD را پیدا می کنیم:

$$CH \times 5 = 3 \times 4 \Rightarrow CH = \frac{12}{5} = 2 \frac{2}{5}$$

چون $CH = 2/4$ است، بنابراین دو خط d_1 و d_2 دقیقاً از نقاط A و C می گذرند، یعنی دو نقطه روی محیط مستطیل وجود دارد.

8 1 نقاطی که به فاصله ۱۰ واحد از خط d قرار دارند روی دو خط d_1 و d_2 به فاصله ۱۰ واحد از d واقع اند، حال به کمک فیثاغورس شعاع دایره هم ۱۰ به دست می آید؛ بنابراین یکی از این دو خط دایره را در دو نقطه قطع می کند.

9 3 می دانیم هر نقطه درون مستطیل مجموع فاصله هایش از AB و CD برابر عرض مستطیل است. حال قرار است که اختلاف فاصله هایش نیز ۴ باشد، بنابراین:

$$\begin{cases} h_1 + h_2 = 6 \\ h_1 - h_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow h_1 = 5, h_2 = 1$$

همان طور که می بینید دو خط با شرایط فوق وجود دارد که در مجموع در ۴ نقطه قطرها را قطع می کند.

10 2 نقاطی که به فاصله $6/5$ از نقطه A قرار دارند روی دایره ای به مرکز A و به شعاع $6/5$ قرار دارند که چون $6/5 > 5$ است این دایره خط d را در ۲ نقطه قطع می کند و همین نقاط جواب های تست هستند.

11 4 نقاطی که به فاصله ۵ واحد از A قرار دارند، روی دایره ای به مرکز A و به شعاع ۵ واحد قرار دارند که این دایره با این خطوط برخورد می کند.

12 1 نقاطی که به فاصله ۳ واحد از رأس A قرار دارند، روی دایره ای به مرکز A و به شعاع ۳ واحد قرار دارند. حال برای این که ببینیم آیا این دایره قاعده BC را قطع می کند یا نه باید ارتفاع مثلث را بدانیم:

$$S = \frac{1}{2} AH \times BC \Rightarrow 12 = \frac{1}{2} \times AH \times 6 \Rightarrow AH = 4$$

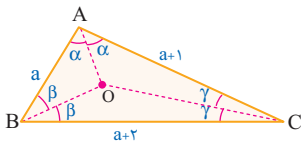
بنابراین دایره فوق قاعده BC را قطع نمی کند، یعنی هیچ نقطه ای وجود ندارد.

13 4 نقاطی که فاصله آن از نقطه A کمتر از $2/5$ است درون دایره ای به مرکز A و به شعاع $2/5$ قرار دارند، حالا باید ببینیم که وضع این دایره نسبت به قطر BD چگونه است؟

$$AH \times 5 = 3 \times 4 \Rightarrow AH = \frac{12}{5} = 2 \frac{2}{5}$$

بنابراین این دایره قطر را در دو نقطه M و N قطع می کند و تمام نقاط روی MN فاصله آن ها از A کمتر از $2/5$ است، یعنی بی شمار نقطه وجود دارد.

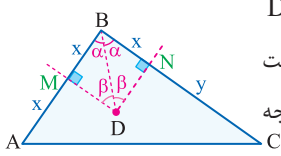
14 4 نقاطی که به فاصله $\sqrt{2}$ واحد از مرکز مربع قرار دارند، روی دایره به مرکز O و به شعاع $\sqrt{2}$ واحد قرار دارند. حال باید دید این دایره در چند نقطه محیط را قطع می کند که مطابق شکل مقابل این دایره هرگز با اضلاع مربع نقطه تقاطعی ندارد.



136 چون $BC > AC > AB$ است، بنابراین $2\gamma > 2\beta > 2\alpha$ و در نتیجه $\alpha > \beta > \gamma$ می‌باشد، حال:

$\triangle OAB: \alpha > \beta \Rightarrow OB > OA$
 $\triangle OBC: \beta > \gamma \Rightarrow OC > OB$

137 MD عمود منصف AB است، پس: $MA = MB = x$ همچنین BD نیمساز است، پس: $\hat{D}BN = \hat{M}BD = \alpha$



بنابراین دو مثلث MBD و BDN هم‌نهشت هستند، بنابراین $BN = x = BM$ می‌باشد، در نتیجه اگر فرض کنیم $NC = y$ باشد، خواهیم داشت:

$\hat{A} > \hat{C} \Rightarrow x + y > x + x \Rightarrow y > x \Rightarrow NC > NB$

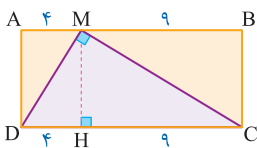
Th قضیه تالس، تشابه و کاربردها

138 $12^2 = 8 \times a \Rightarrow a = \frac{12 \times 12}{8} = 18$

139 باید مربع عدد 6 با حاصل ضرب اعداد X و $13 - X$ برابر باشد:

$6^2 = x(13 - x) \Rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0 \Rightarrow (x - 9)(x - 4) = 0$
 بنابراین برای X دو مقدار 4 و 9 به دست می‌آید در نتیجه طول پاره خط بزرگتر برابر 9 است.

140 در مثلث MDC ارتفاع MH را رسم می‌کنیم در نتیجه $HD = 4$ و $HC = 9$ خواهد شد، حال ارتفاع مثلث



بنفش واسطه هندسی بین 9 و 4 است بنابراین داریم:

$MH^2 = 4 \times 9 \Rightarrow MH = 2 \times 3 \Rightarrow$ عرض مستطیل $= 6$
 بنابراین محیط مستطیل برابر است با: $2(6 + 13) = 38$

141 فرض کنیم وتر a و اضلاع دیگر b و c باشند در این صورت خواهیم داشت:

$a^2 = (2b)(c) \Rightarrow a^2 = 2bc \xrightarrow{a^2 = b^2 + c^2} b^2 + c^2 = 2bc$
 $b^2 + c^2 - 2bc = 0 \Rightarrow (b - c)^2 = 0 \Rightarrow b = c$

بنابراین مثلث مورد نظر قائم الزاویه متساوی الساقین است، در نتیجه زاویه‌های آن $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$ است. بنابراین زاویه‌ها متناسب با اعداد 1, 1, 2 هستند.

142 ابتدا ارتفاع ذوزنقه را به کمک دو قاعده پیدا می‌کنیم و سپس به سراغ

محاسبه مساحت می‌رویم:

$AD^2 = 8 \times 18 = 2^4 \times 3^2 \Rightarrow AD = 12 \Rightarrow S = \frac{1}{2}(8 + 18) \times 12 = 156$

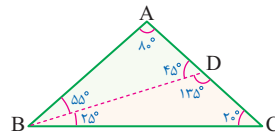
143 فعلاً که راه‌های حرفه‌ای‌تر را نخوانده‌ایم به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$\frac{b}{a} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{3a}{3b} = \frac{4 \times 5}{4 \times 3} \Rightarrow \frac{3a}{3b} = \frac{20}{12} \Rightarrow \frac{3a + 20}{3b + 12} = \frac{5}{3}$

132 بر اساس نامساوی مثلثی باید $9 - 6 < BC < 9 + 6$ باشد. در ضمن چون $\hat{A} > \hat{C}$ است؛ پس باید $BC > 9$ باشد و در نتیجه:

$9 < BC < 15 \Rightarrow BC = 10, 11, 12, 13, 14$
 5 مقدار

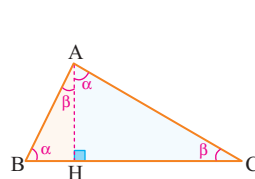
133 از زاویه‌های داده شده به راحتی بقیه زاویه‌ها معلوم است، حال سه



مثلث داریم با زاویه‌های معلوم در هر کدام می‌توانیم اضلاع را با هم مقایسه کنیم، بنابراین به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

$\triangle ABD: 55^\circ > 45^\circ \Rightarrow AD > AB$ (3)
 $\triangle BDC: \begin{cases} 135^\circ > 20^\circ \Rightarrow BC > BD & (4) \\ 25^\circ > 20^\circ \Rightarrow DC > BD & (1) \end{cases}$
 $\triangle ABC: 80^\circ > 20^\circ \Rightarrow BC > AB$ (2)

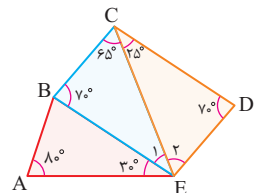
134 چون $\hat{B} > \hat{C}$ است، بنابراین $\alpha > \beta$ است و در نتیجه خواهیم داشت:



$\triangle ABH: \alpha > \beta \Rightarrow AH > BH$ (1)
 $\triangle AHC: \alpha > \beta \Rightarrow HC > AH$ (2)
 $\triangle AHC: 90^\circ > \alpha \Rightarrow AC > HC$

حال باتوجه به (1), (2) داریم: $AC > HC > AH > BH \Rightarrow AC > BH$
 بنابراین گزینه (4) الزاماً درست نیست.

135 ابتدا زاویه‌های نامعلوم را مشخص می‌کنیم:



$\triangle ABE: \hat{B} + 80^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = 70^\circ$
 $\triangle BCE: \hat{E}_1 + 70^\circ + 65^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{E}_1 = 45^\circ$
 $\triangle CDE: \hat{E}_2 + 25^\circ + 70^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{E}_2 = 85^\circ$

حال در هر کدام از مثلث‌ها می‌توان اضلاع را مقایسه کنیم:

$\triangle ABE: 80^\circ > 70^\circ > 30^\circ \Rightarrow BE > AE > AB$
 $\triangle BCE: 70^\circ > 65^\circ > 45^\circ \Rightarrow CE > BE > BC$
 $\triangle CDE: 85^\circ > 70^\circ > 25^\circ \Rightarrow CD > CE > DE$

حال به بررسی سایر گزینه‌ها می‌پردازیم:

(1) $\begin{cases} CE > BE \\ BE > AE \end{cases} \Rightarrow CE > AE$
 (3) $\begin{cases} CD > CE \\ CE > BE \end{cases} \Rightarrow CD > BE$ (گزینه 2 نادرست است)
 (4) $\begin{cases} CD > CE \\ CE > BE > BC \end{cases} \Rightarrow CD > BC$

144 زاویا را ΔX , ΔX , ΔX فرض می‌کنیم و در نتیجه داریم:

$$2X + \Delta X + \Delta X = 180^\circ \Rightarrow 15X = 180^\circ \Rightarrow X = 12^\circ$$

حال تفاضل دو زاویه نابزرگتر [یعنی ΔX , ΔX] برابر است با:

$$\Delta X - 2X = 3X = 3 \times 12^\circ = 36^\circ$$

145 تناسب داده شده را برابر k قرار می‌دهیم و X , Y , Z را بر حسب k پیدا کرده و در تساوی داده شده قرار می‌دهیم:

$$\frac{X}{3} = Y = Z + 1 = k \Rightarrow X = 3k, Y = k, Z = k - 1$$

حال به جای X, Y, Z در رابطه $X + 3Y + Z = 20$ مقادیرشان را جایگذاری می‌کنیم:

$$(3k) + 3(k) + (k-1) = 20 \Rightarrow 7k = 21 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow Z = k - 1 = 2$$

146 باید نسبت‌ها را برابر k قرار دهیم:

$$\frac{X}{2} = \frac{Y}{5} = \frac{Z}{3} = k \Rightarrow X = 2k, Y = 5k, Z = 3k$$

حال به جای X, Y, Z در رابطه $X + Y - 2Z = 7$ مقادیرشان را جایگذاری می‌کنیم:

$$(2k) + (5k) - 2(3k) = 7 \Rightarrow k = 7 \Rightarrow \frac{Y+1}{X+1} = \frac{5k+1}{2k+1} = \frac{36}{15} = \frac{2}{4}$$

147 چون یک نسبت بر حسب a و b داده شده و یک نسبت دیگر بر حسب

همان a و b را می‌خواهد، می‌توان فرض کرد $a = 2$ و $b = 3$ و حال حاصل عبارت

$$\frac{a^2 + 2b^2}{b^2 - a^2} = \frac{4 + 18}{9 - 4} = \frac{22}{5}$$

خواسته شده به راحتی به دست می‌آید:

148 فرض کنیم $X = 3$ و $2X + Y = 7$ یعنی $Y = 1$ آنگاه:

$$\frac{X - 2Y}{X + Y} = \frac{3 - 2}{3 + 1} = \frac{1}{4}$$

149 چون نسبتی داده و نسبتی را می‌خواهد فرض کنیم $X = 3$ و $Y = 4$ باشد، در این صورت داریم:

$$\frac{\Delta XY}{X^2 + Y^2} = \frac{5 \times 4 \times 3}{16 + 9} = \frac{12 \times 5}{25} = \frac{12}{5} = \frac{2}{4}$$

150 ابتدا تناسب داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{X}{X+3} = \frac{Y}{Y+2} \xrightarrow{\text{تفضیل درمخرج}} \frac{X}{3} = \frac{Y}{2} \xrightarrow{\text{فرض}} X = 3, Y = 2$$

$$\frac{2X - Y}{X + 3Y} = \frac{6 - 2}{3 + 6} = \frac{4}{9}$$

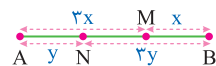
151 فرض کنیم $AM = 3k$ و $MB = 5k$

باشد، در این صورت داریم:

$$5k + 3k = 24 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow MB - MA = 2k = 6$$

152 فرض می‌کنیم $MA = 3X$ و $MB = X$ و همچنین $AN = Y$

$BN = 3Y$ باشد در این صورت یک شکل رسم می‌کنیم:



$$\begin{cases} 3x + x = 12 \Rightarrow x = 3 \\ 3y + y = 12 \Rightarrow y = 3 \end{cases} \Rightarrow MN = AB - x - y = 6$$

153 می‌دانیم که کوتاه‌ترین ارتفاع بر بلندترین ضلع فرود می‌آید، بنابراین

ارتفاع ۸ بر ضلع ۲۱ و بلندترین ارتفاع بر ضلع ۱۰ فرود می‌آید، بنابراین:

$$ah_a = bh_b \Rightarrow 21 \times 8 = 10 \times h_b \Rightarrow h_b = 16/5$$

154 ارتفاع‌ها به نسبت $1, 1, 2/3$ هستند، پس اضلاع به نسبت $2, 1, 3/4$ هستند بنابراین اضلاع را $2X, X, 1/5X$ فرض می‌کنیم و در نتیجه داریم:

$$2X + 1/5X + X = 18 \Rightarrow 4/5X = 18 \Rightarrow X = \frac{18 \times 5}{4} = 22.5$$

بنابراین اندازه بزرگ‌ترین ضلع برابر است با: $2X = 45$

155 بزرگ‌ترین ارتفاع‌ها به کوچک‌ترین اضلاع فرود می‌آید؛ یعنی ارتفاع به

طول ۸ بر ضلع a و ارتفاع به طول $7/2$ بر ضلع $a+1$ فرود می‌آید، در نتیجه:

$$8 \times a = 7/2 \times (a+1) \Rightarrow 8a = 7/2 a + 7/2 \Rightarrow a = \frac{7 \times 2}{8 - 7} = 14$$

حال کوتاه‌ترین ارتفاع بر بلندترین ضلع فرود می‌آید؛ یعنی بر ضلع $a+8$ ،

$$h \times (a+8) = 8 \times a \Rightarrow h \times (14+8) = 8 \times 14 \Rightarrow h = \frac{7 \times 2}{17}$$

156 چون $a/b = 3/4$ است پس $a = 3$ و $b = 4$ خواهد شد و حال چون نسبتی را

داریم و نسبتی را می‌خواهیم، می‌توان فرض کرد $h_a = 4$ و $h_b = 3$ و در نتیجه:

$$\frac{h_b + h_a}{h_a - h_b} = \frac{4 + 3}{4 - 3} = 7$$

157 می‌دانیم نسبت ارتفاع‌ها متناسب با عکس نسبت اضلاع است. بنابراین:

$$\frac{h_a}{h_c} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{a}{c} \Rightarrow a^2 = c^2 \Rightarrow a = c \Rightarrow \text{متساوی الساقین}$$

158 فرض کنیم $a = 10$ و $b = 15$ باشد، در این صورت:

$$h_a + h_b = h_c \Rightarrow \frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} = \frac{2S}{c} \Rightarrow \frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{c}$$

$$\Rightarrow c = \frac{10 \times 15}{10 + 15} = \frac{150}{25} = 6$$

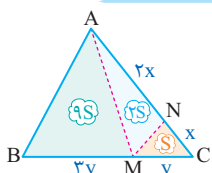
159 اگر رابطه‌ای هم درجه بین اضلاع برقرار باشد، همان رابطه بین عکس

$$\hat{A} = 90^\circ \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2}$$

160 مثلث‌های AMB و ABC هم ارتفاع هستند، بنابراین نسبت

مساحت‌های آن‌ها با نسبت قاعده‌های آن‌ها برابر است، یعنی:

$$\frac{S_{ABM}}{S_{ABC}} = \frac{1/5}{5} = \frac{15}{50} = 0.3$$



161 فرض کنیم $S_{MNC} = S$ باشد، در

این صورت چون $AN = 2NC$ است، پس

$S_{AMN} = 2S$ و از طرفی در قیاس دو مثلث

AMB و AMC داریم:

$$\frac{MC}{MB} = \frac{y}{3y} \Rightarrow \frac{S_{AMC}}{S_{AMB}} = \frac{1}{3} \Rightarrow S_{AMB} = 3(2S) = 6S$$

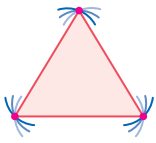
حال مساحت مثلث رنگ شده $\frac{2S}{12S} = \frac{1}{6}$ کل است.

306 ابتدا تعداد اضلاع n ضلعی را پیدا می‌کنیم تا ببینیم از هر رأس چند قطر می‌گذرد:

$$\frac{n(n-3)}{2} = 44 \Rightarrow n(n-3) = 88 \Rightarrow n = 11$$

بنابراین از هر رأس $8 = 11 - 3$ قطر می‌گذرد و از سه رأس $24 = 3 \times 8$ قطر می‌گذرد.

اما چون این رأس‌ها دوه‌دو غیر مجاورند، ۳ تا از این قطرهای دو سر مشترک دارند و تکراری هستند؛ یعنی دوبار شمرده شده‌اند. پس در مجموع $21 = 24 - 3$ قطراز میان آن‌ها می‌گذرد.



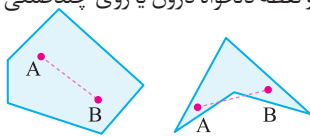
307 وقتی گفته می‌شود $n+1$ ضلعی در فرمول $\frac{n(n-3)}{2}$ باید به جای n از $n+1$ استفاده کنیم:

$$\frac{(n+1)(n-2)}{2} + (n+1) = \frac{1}{2}(\frac{2n(2n-3)}{2})$$
 حال طرفین معادله را در ۴ ضرب می‌کنیم:

$$2n^2 - 2n - 4 + 4(n+1) = 2n(2n-3) \Rightarrow 2n^2 - 2n - 4 + 4n + 4 = 4n^2 - 6n \Rightarrow 2n^2 + 2n = 4n^2 - 6n \Rightarrow 2n^2 - 8n = 0 \Rightarrow 2n^2 = 8n \Rightarrow n = 4$$

308 بررسی گزینه‌ها:

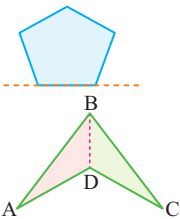
1 در چندضلعی‌های محدب اگر هر دو نقطه دلخواه درون یا روی چندضلعی را به هم وصل کنیم، پاره خط حاصل به تمامی درون چندضلعی قرار می‌گیرد، در حالی که در چندضلعی‌های مقعر این‌طور نیست.



2 در چندضلعی‌های محدب، هر زاویه داخلی کمتر از 180° است.

3 در چندضلعی‌های محدب، سایر رأس‌ها در یک طرف خطی قرار دارند که بر ضلع آن منطبق است.

4 اگر یک قطر، چندضلعی را به دو چندضلعی محدب تقسیم کند، چندضلعی می‌تواند مقعر باشد.



309 تعداد اضلاع را دو برابر می‌کنیم یعنی به جای n باید از $2n$ در فرمول تعداد قطرهای استفاده کنیم:

$$\frac{2n(2n-3)}{2} = \frac{n(n-3)}{2} + 18 \Rightarrow 4n^2 - 6n = n^2 - 3n + 36 \Rightarrow 3n^2 - 3n = 36 \Rightarrow n^2 - n = 12 \Rightarrow n(n-1) = 4 \times 3 \Rightarrow n = 4$$

بنابراین مجموع زوایای داخلی ۴ ضلعی 360° است.

310 ابتدا تعداد اضلاع را به دست می‌آوریم:

$$n \times \frac{n(n-3)}{2} = 54 \Rightarrow n^2(n-3) = 108 = 6^2 \times 3 \Rightarrow n = 6$$

یک عدد مربع کامل از ۱۰۸ بیرون می‌کشیم

بنابراین مجموع زوایای داخلی ۶ ضلعی برابر $720^\circ = 6 \times 180^\circ$ است.

311 می‌دانیم که مجموع زوایای n ضلعی باید مضرب صحیحی از 180° باشد، حال عدد 2570 را بر 180 تقسیم می‌کنیم و باقی‌مانده 50 می‌شود، بنابراین می‌گوییم برای این که باقی‌مانده صفر شود، باید 130° به مجموع زاویه‌ها اضافه شود، یعنی آن زاویه گم شده 130° است. بنابراین مجموع کل زاویه‌های 270° است، در نتیجه:

$$270^\circ = (n-2) \times 180^\circ \Rightarrow n = 17 \Rightarrow \text{تعداد قطرهای} = \frac{17 \times 14}{2} = 119$$

299 در مثلث قائم‌الزاویه ABD داریم:

$$AB^2 = BH \times BD \Rightarrow 17^2 = 15 \times BD \Rightarrow BD = \frac{289}{15}$$

بنابراین اختلاف طول قطر مستطیل با عدد ۱۹ برابر است با: $\frac{289}{15} - 19 = \frac{4}{15}$

روش دوم:

$$\triangle AHB: AH = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$$

$$\triangle ABD: AH^2 = DH \times HB \Rightarrow 8^2 = DH \times 15 \Rightarrow DH = \frac{64}{15}$$

$$\Rightarrow DB = 15 + \frac{64}{15} = \frac{289}{15} \Rightarrow \frac{289}{15} - 19 = \frac{4}{15}$$

چند ضلعی‌ها

300 می‌دانیم تعداد قطرهای یک n ضلعی برابر $\frac{n(n-3)}{2}$ است و از هر رأس $n-3$ قطر می‌گذرد؛ بنابراین:

$$\frac{n(n-3)}{2} = 20 \Rightarrow n(n-3) = 40 \Rightarrow n(n-3) = 8 \times 5 \Rightarrow n = 8$$

بنابراین از هر رأس $5 = 8 - 3$ قطر می‌گذرد.

301 کافیسیت فرمول تعداد قطرهای را برابر با تعداد اضلاع قرار دهیم تا ببینیم معادله چند ریشه دارد:

$$\frac{n(n-3)}{2} = n - 3 = 2 \Rightarrow n = 5$$

همان‌طور که معلوم شد، معادله فوق تنها یک ریشه دارد، بنابراین تنها n ضلعی با این ویژگی ۵ ضلعی است.

302 ابتدا باید از رابطه داده شده تعداد اضلاع را به دست آوریم:

$$\frac{n(n-3)}{3} - n = 33 \Rightarrow \frac{n^2 - 5n}{3} = 33 \Rightarrow n(n-5) = 99 \Rightarrow n = 11$$

بنابراین از هر رأس این ۱۱ ضلعی $8 = 11 - 3$ قطر می‌گذرد.

303 ابتدا باید از رابطه داده شده تعداد اضلاع را به دست آوریم:

$$\frac{n(n-3)}{2} + n = 91 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 91 \Rightarrow n(n-1) = 182 \Rightarrow n = 14$$

۱۴×۱۳ ضرب دو عدد متوالی

بنابراین از هر رأس ۱۴ ضلعی $11 = 14 - 3$ قطر می‌گذرد.

304 اگر یک رأس از یک n ضلعی کم کنید، تبدیل به $n-1$ ضلعی خواهد شد، بنابراین داریم:

$$\frac{(n-1)(n-4)}{2} = \frac{n(n-3)}{2} - 7 \Rightarrow (n-1)(n-4) = n(n-3) - 14$$

$$\Rightarrow n^2 - 5n + 4 = n^2 - 3n - 14 \Rightarrow 2n - 4 = 14 \Rightarrow 2n = 18 \Rightarrow n = 9$$

305 باید از روش تجزیه برای پیدا کردن n استفاده کنیم:

$$\frac{n(n-3)}{2} \times n = 160 \Rightarrow n^2(n-3) = 320 = 2^6 \times 5 = 8^2 \times 5 \Rightarrow n = 8$$

باید 320 را به شکل طرف اول در آوریم

بنابراین مجموع تعداد اضلاع و اقطار برابر است با:

$$\frac{8(8-3)}{2} + 8 = 20 + 8 = 28$$



312 ابتدا داده‌ها را به زبان ریاضی می‌نویسیم و معادله را تشکیل می‌دهیم تا n به دست آید:

$$(n-2) \times 180^\circ + (n-1) \times 180^\circ = 1260^\circ \Rightarrow 2n - 3 = 7 \Rightarrow n = 5$$

حال $n+1$ ضلعی یعنی ۶ ضلعی، در نتیجه مجموع اضلاع و اقطار آن برابر است با:

$$\frac{6 \times 3}{2} + 6 = 15$$



313 یک چهارضلعی که دو ضلع موازی و دو ضلع مساوی دارد، می‌تواند دوزنقه متساوی الساقین باشد.

314 این چهارضلعی قطعاً متوازی‌الاضلاع است اما می‌تواند لوزی، مستطیل یا مربع نباشد. یعنی الزامی نیست مربع یا مستطیل یا لوزی باشد.

315 هر متوازی‌الاضلاع با دو قطر برابر یک مستطیل است.

316 بررسی گزینه‌ها:

1 یک چهارضلعی که قطرها برابر دارد، می‌تواند به عنوان مثال دوزنقه متساوی الساقین باشد. آوردن نام چهارضلعی در این گزینه درست نبود؛ باید گفته می‌شد «متوازی‌الاضلاع که ...»

2 متوازی‌الاضلاعی که یک زاویه قائمه دارد، هر ۴ زاویه آن قائمه خواهد شد و مستطیل خواهد شد. [پون در هر متوازی‌الاضلاع زوایای مجاور مکمل هستند.]

3 یک چهارضلعی که ۳ زاویه قائمه دارد [پون مجموع زاویه‌ها ۳۶۰ است]، زاویه چهارم هم ۹۰ می‌شود و در تعریف مستطیل صدق می‌کند.

4 متوازی‌الاضلاعی که قطرها برابر دارد قطعاً مستطیل است.

317 اگر قطرها یک چهارضلعی منصف هم باشند، آن چهار ضلعی متوازی‌الاضلاع است و اگر قطرها برابر هم باشند آن متوازی‌الاضلاع تبدیل به مستطیل خواهد شد. بنابراین گزینه **3** الزاماً یک مستطیل است.

318 چهارضلعی که قطرها منصف هم باشند قطعاً متوازی‌الاضلاع است و در یک متوازی‌الاضلاع، اگر دو ضلع مجاور با هم برابر باشند، متوازی‌الاضلاع تبدیل به یک لوزی خواهد شد.

319 بررسی گزینه‌ها:

1 یک چهارضلعی که اضلاع عمود دارد، می‌تواند مستطیل هم باشد.

2 می‌توان کایت را به عنوان مثال نقض ارائه کرد.

3 لوزی که قطرها برابر داشته باشد [ژن مستطیل را دارد] الزاماً مربع است.

4 مستطیلی که قطرها منصف هم دیگر را نصف کنند، هیچ صفتی بر مستطیل اضافه نکرده، چون نصف کردن قطرها در همه مستطیل‌ها برقرار است [و آن هم ژن متوازی‌الاضلاع است که به آن‌ها رسیده].

320 بررسی گزینه‌ها:

1 تعریف داده شده، تعریف مستطیل است.

2 چهار ضلعی که قطرها منصف هم هستند، متوازی‌الاضلاع است. حال اگر اضلاع متوازی‌الاضلاع بر هم عمود باشند، متوازی‌الاضلاع تبدیل به مستطیل می‌شود و الزاماً مربع نخواهد شد.

3 مستطیلی که قطرهای آن نیمساز زوایا هستند [ژن لوزی را دارد]، قطعاً مربع است.

4 در همه لوزی‌ها هر قطر لوزی را به دو مثلث همنهشت تقسیم می‌کند، [این ژن از پدر لوزی یعنی متوازی‌الاضلاع به آن ارث رسیده است]. بنابراین تعریف ارائه شده هیچ صفتی بر لوزی بودن اضافه نمی‌کند.

321 بررسی گزینه‌ها:

1 متوازی‌الاضلاعی که قطرهای آن عمود منصف هم باشند، لوزی است.

2 متوازی‌الاضلاعی که اضلاع آن بر هم عمود باشند، مستطیل است.

3 متوازی‌الاضلاعی که قطرهای برابر [ژن مستطیل] و عمود بر هم [ژن لوزی] دارد، الزاماً مربع است.

4 فقط صفت برابر بودن قطرها را به متوازی‌الاضلاع اضافه کرده که آن را تبدیل به مستطیل می‌کند.

322 بررسی گزینه‌ها:

1 می‌تواند متوازی‌الاضلاع هم باشد.

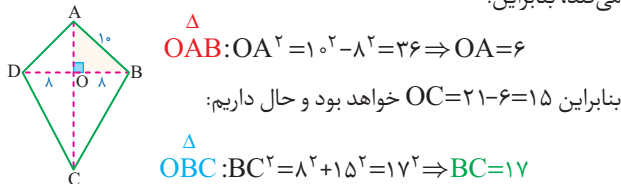
2 می‌تواند مستطیل هم باشد.

3 هم می‌تواند مستطیل باشد.

4 چهار ضلعی که دو ضلع مقابل آن موازی است دوزنقه است، حال اگر دو ضلع دیگر مساوی و غیر موازی باشد، الزاماً دوزنقه متساوی الساقین خواهد بود.

323 در دوزنقه قطرها می‌توانند برابر هم باشند، مانند دوزنقه متساوی الساقین.

324 می‌دانیم قطر بزرگ [یعنی قطر AC] قطر کوچک کایت را نصف می‌کند، بنابراین:



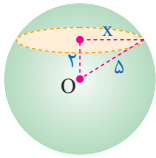
325 برای یافتن مساحت متوازی‌الاضلاع مورد نظر باید مساحت چهارضلعی ABCD را به دست آوریم. برای این کار ابتدا قطر AC را رسم می‌کنیم. مثلث ABC مثلثی قائم‌الزاویه است پس اندازه قطر AC برابر با ۵ است، در ضمن از



$$\begin{cases} S_1 = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6 \\ S_2 = \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 30 \end{cases} \Rightarrow S = 6 + 30 = 36$$

حال مساحت متوازی‌الاضلاعی که از وصل کردن وسط‌های هر چهارضلعی محدب به دست می‌آید، نصف مساحت چهارضلعی ABCD است پس:

$$S' = \frac{S}{2} = \frac{36}{2} = 18$$



682 | از دوران دایره حول یکی از قطرهای کره حاصل می‌شود، حال از برش این کره مجدداً یک دایره به دست می‌آید که با رنگ نارنجی در شکل مشخص شده است:
 $x = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21} \Rightarrow S = 21\pi$

NOTE

کودک گرسنه بود، شیر می‌خواست.

اما مادر خودش هم گرسنه بود.

شیر نبود و نوزاد گریه می‌کرد.

دشمن نزدیک بود با سگ‌ها

اگر سگ‌ها صدایی می‌شنیدن همه می‌مردیم

گروهمان حدوداً ۳۰ نفر بود، می‌فهمید؟

بالاخره تصمیم گرفتیم.

هیچ‌کس جرأت نکرد دستور فرمانده را منتقل کند.

اما مادر خودش قضیه را حدس زد!

قنداق نوزاد را در آب فرو برد و مدت زیادی همانجا نگه داشت

هیچ صدایی نمی‌آمد.

از شرمساری نمی‌توانستیم سرمان را بالا بگیریم.

نمی‌توانستیم در چشمان مادر نگاه کنیم.

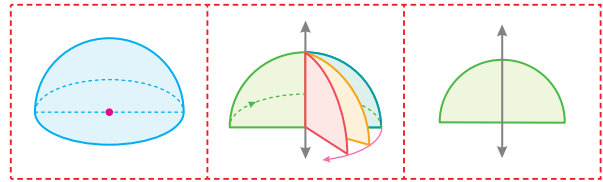
نه می‌توانستیم به چشمان همدیگر نگاه کنیم

«سوتلانا آلکساندرنا آلکسیویچ»

جنگ چهره زنانه ندارد.

676 | حجم حاصل یک نیم‌کره به شعاع ۳ است. بنابراین:

$$V = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi \times 3^3 \right) = 18\pi$$



677 | ابتدا شعاع دایره را با استفاده از تشابه

به دست می‌آوریم:

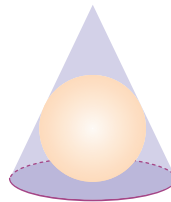
$$\triangle OAH' \sim \triangle AHC \Rightarrow \frac{r}{3} = \frac{4-r}{5}$$

$$\Rightarrow 5r = 12 - 3r \Rightarrow r = \frac{3}{2}$$

حال باید حجم کره را از حجم مخروط کم کنیم.

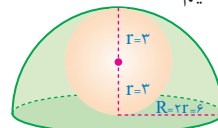
$$\Delta V = V_1 - V_2 = \frac{1}{3} \pi r^2 h - \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\Delta V = \frac{1}{3} (\pi \times 3^2) \times 4 - \frac{4}{3} \times \pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{15\pi}{2}$$



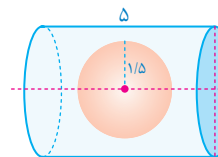
678 | باید حجم کره میانی را از حجم نیم کره کم کنیم:

$$\Delta V = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi \times 6^2 \right) - \frac{4}{3} \pi \times 3^3 = 10.8\pi$$



679 | حجم حاصل یک استوانه به شعاع

قاعده ۲ و به ارتفاع ۵ است که از داخل آن کره‌ای به شعاع ۱/۵ برداشته شده است بنابراین:



$$\Delta V = \pi \times 2^2 \times 5 - \frac{4}{3} \times \pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{31\pi}{2} = 15.5\pi$$

680 | ابتدا به کمک تالس ارتفاع مخروط را پیدا می‌کنیم:

$$\triangle ODC: \frac{x}{x+3} = \frac{2}{5} \text{ (تفضیل درمخرج)} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow x=2$$

بنابراین ارتفاع مخروط اصلی برابر OD=۵ است. حال حجم

مخروط ناقص ایجاد شده برابر است با:

$$V = \frac{1}{3} \pi \times 5^2 \times 5 - \frac{1}{3} \pi \times 2^2 \times 2 = \frac{125\pi}{3} - \frac{8\pi}{3} = 39\pi$$

681 | ابتدا به کمک حجم استوانه شعاع قاعده آن را پیدا می‌کنیم:

$$V = \pi R^2 h = 36\pi \xrightarrow{h=4} \pi \times R^2 \times 4 = 36\pi \Rightarrow R^2 = 9 \Rightarrow R = 3$$

حال از دوران دایره به شعاع ۳ حول بزرگ‌ترین وتر یک کره به شعاع ۳ پدید

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \times 3^3 = 36\pi \text{ می‌آید که حجم آن برابر است با:}$$