

خرید کتاب های کنکور

با تخفیف ویژه

و

ارسال رایگان

Medabook.com

+



یک جلسه تماس تلفنی رایگان

با مشاوران رتبه برتر

برای انتخاب بهترین منابع

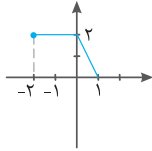
دبیرستان و کنکور

۰۲۱ ۲۸۴۲۵۲۱۰



آزمون نوبت اول (۴)

۱ اگر تابع $f(x)$ به صورت روبه‌رو باشد، نمودار تابع $y = -f(-x)$ را رسم کنید. (فصل ۱)



۱/۵ ۲ مقادیر a, b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $p(x) = x^3 + ax + b$ بر $(x-1)(x+2)$ بخش‌پذیر باشد. (فصل ۱)

۱ جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید. ۳

- الف) برای رسم نمودار $y = f(x+k)$ اگر $k < 0$ کفیفست تابع $f(x)$ را به اندازه k به سمت انتقال دهیم. (راست-چپ)
- ب) برای رسم نمودار $y = f(x) + k$ اگر $k < 0$ کفیفست تابع $f(x)$ را k واحد به سمت انتقال دهیم. (پایین-بالا)
- ج) اگر طول نقاط تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع به دست می‌آید. ($y = -f(x), y = f(-x)$)
- د) اگر تابع $f(x)$ در یک بازه نزولی باشد و a و b متعلق به این بازه باشند $f(a) \leq f(b)$ باشد، آن‌گاه ($a \leq b, a \geq b$)

۱ نمودار تابع مقابل را رسم کنید و مشخص کنید آیا این تابع در تمام دامنه خود اکیداً یکنوا است یا خیر. (فصل ۵)

$$y = 2^{-x}$$

۱/۵ ۵ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq -1 \\ 2, & x < -1 \end{cases}$ را رسم کنید و مشخص کنید در چه فاصله‌هایی این تابع صعودی و در چه فاصله‌هایی نزولی است. (فصل ۱)

۱ اگر چندجمله‌ای $x^2 + ax - 2$ بر $x - a$ بخش‌پذیر باشد، مقدار a را تعیین کنید. (فصل ۱)

۱ معادله مثلثاتی زیر را حل کنید. (فصل ۲)

$$\sin x + \sin 2x = 0$$

۱/۵ ۸ درستی رابطه زیر را بررسی کنید. (فصل ۲)

$$\frac{1 + \cos \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin \theta - \sin \theta \cos \theta}$$

۱/۵ ۹ اگر $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ باشد، حاصل $\cos 2\alpha$ را محاسبه کنید. (فصل ۲)

۱ ۱۰ مجانب‌های قائم تابع $f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 - x}$ را به دست آورید. (فصل ۳)

۱/۵ ۱۱ مجانب‌های افقی و قائم تابع $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ را به دست آورید. (فصل ۳)

۲ ۱۲ حدود زیر را به دست آورید. (فصل ۳)

الف) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + x - 12}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2}{x-2}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x] - 2}{x - 2}$

آزمون نوبت دوم (۵)

۰/۵

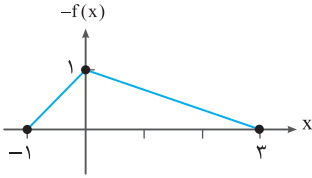
در چند جمله‌ای $P(x) = ax^3 + x^2 + x + b$ مقادیر a و b را طوری محاسبه کنید که چند جمله‌ای بر $x - 1$ بخش پذیر بوده و باقی مانده تقسیم آن بر $x + 1$ برابر -4 باشد. (فصل ۱)

۱

۰/۵

اگر نمودار $y = f(x)$ مطابق شکل زیر باشد، نمودار $y = -\frac{1}{2}f(2x)$ را رسم کنید. (فصل ۱)

۲



۰/۷۵

نمودار تابع $y = \log_2(x+1)$ را رسم کنید. (فصل ۱)

۳

۰/۷۵

دوره تناوب تابع $f(x) = \sin \frac{2}{3}x + \cos \frac{1}{6}x$ را محاسبه کنید. (فصل ۲)

۴

۰/۷۵

عبارت زیر را ساده کنید. (فصل ۲)

۵

$$A = \frac{1 + \cos x + \cos 2x}{\sin x + \sin 2x}$$

۱

معادله زیر را حل کنید. (فصل ۲)
 $\sin 2x = \tan x$

۶

۱/۵

حدود زیر را به دست آورید. (فصل ۳)

۷

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 5} - x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-3}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x-2}{x^2 - 2x - 8}$

د) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x+1}}{5x - 1}$

۰/۵

مجانب‌های تابع $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 3}{x^2 - 3x + 2}$ را به دست آورید. (فصل ۳)

۸

۱

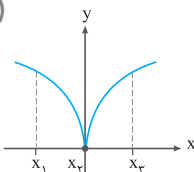
نشان دهید مبدأ مختصات یک گوشه برای تابع $f(x) = \begin{cases} x & , x < 0 \\ x^2 & , x \geq 0 \end{cases}$ می‌باشد. (فصل ۴)

۹

۱

با توجه به شکل زیر مشخص کنید که کدام یک از نقاط x_1 ، x_2 و x_3 جزو نقاط مشتق ناپذیر تابع است. (فصل ۴)

۱۰



آزمون نوبت دوم (۱۰)

۰/۵

(فصل ۱) مقادیر m و n را طوری محاسبه کنید که چند جمله‌ای $x^2 + mx + n$ بر $(x-2)(x+1)$ بخش پذیر باشد.

۱

۰/۵

(فصل ۱) نمودار تابع $y = \sqrt{1-x} + 1$ را رسم کنید.

۲

۰/۷۵

(فصل ۱) نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq -1 \\ 2 & x < -1 \end{cases}$ را رسم کنید. در چه فاصله‌ای این تابع صعودی و در چه فاصله‌ای نزولی است؟

۳

۰/۵

(فصل ۲) تابع با ضابطه $f(x) = \cos 3x$ متناوب است، دوره تناوب آن را محاسبه کنید.

۴

۰/۵

(فصل ۲) اگر $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ باشد مقدار $\cos \alpha$ را حساب کنید. (α در ناحیه اول)

۵

۰/۵

(فصل ۲) معادله زیر را حل کنید.

$$\cos 2x - 3 \cos x + 2 = 0$$

۶

۱/۵

(فصل ۳) حدود زیر را محاسبه کنید.

۷

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - \sqrt{x^2 + 1}}{2x - \sqrt{x^2 - 1}}$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - x + 1}{x^2 + x - 1}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$

۰/۵

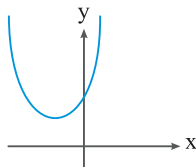
(فصل ۳) مجانب‌های قائم تابع $f(x) = \frac{x^2 - x}{|x| - 1}$ را تعیین کنید.

۸

۱

(فصل ۴) اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به شکل زیر باشد، نمودار مشتق آن را رسم کنید.

۹



۱/۲۵

(فصل ۴) ثابت کنید نقطه‌ای به طول $x = 1$ برای تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ نقطه گوشه‌ای است.

۱۰

۴

(فصل ۴) مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

۱۱

الف) $y = \sin^3 2x + \cot \sqrt{x}$

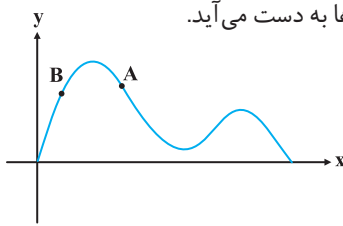
ب) $y = (x^2 + 1)^3 (5x - 1)$

ج) $y = \sqrt{3x + 2} (x^2 + 1)$

د) $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{-3x + 2}$

آزمون نوبت دوم (۱۱) هماهنگ کشوری خردادماه سال ۱۳۹۸

درست یا نادرست بودن عبارات زیر را تعیین کنید.



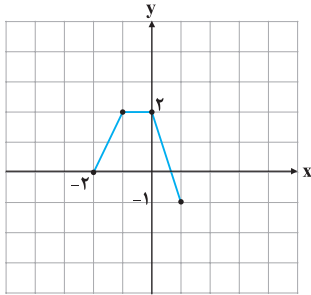
الف) اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور x ها به دست می‌آید.

ب) نقاطی به فرم $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ و $k \in \mathbb{Z}$ در دامنه تابع تنازنت قرار ندارند.

پ) حاصل $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{9-x^2}$ برابر با $-\infty$ است.

ت) در شکل روبه‌رو شیب خطوط مماس در نقاط A و B مثبت است.

نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار $g(x) = 2f(x-1)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.



اگر چندجمله‌ای $f(x) = x^2 + ax - 3$ بر $(x+1)$ بخش‌پذیر باشد، باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $(x-2)$ را به دست آورید.

چندجمله‌ای $x^6 - 1$ را بر حسب عامل $(x+1)$ تجزیه کنید.

جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

الف) دوره تناوب تابع $y = 3 \cos(-\frac{\pi}{4}x)$ برابر با است.

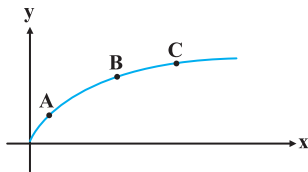
ب) حاصل حد $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+5}{x-2}$ برابر با است.

پ) با توجه به شکل روبه‌رو، شیب خط مماس بر منحنی در نقطه بزرگ‌تر از

شیب خط مماس بر منحنی در نقطه B است.

ت) نقطه‌ای از دامنه تابع که مشتق در آن وجود ندارد و یا وجود دارد و برابر صفر است،

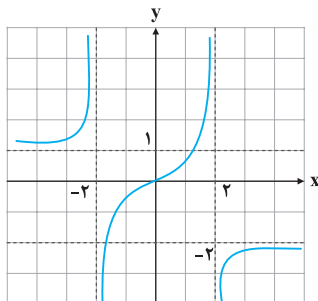
نقطه نام دارد.



معادله $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ را حل کنید.

کدام یک از خطوط $x = 3$ و $x = -1$ مجانب قائم تابع $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3}$ می‌باشد؟ دلیل ارائه کنید.

با توجه به نمودار تابع f که در زیر آمده است، مجانب‌های افقی تابع را بنویسید.





آزمون نوبت دوم (۱۱) هماهنگ کشوری خردادماه سال ۱۳۹۸

۱/۷۵

نشان دهید نقطه‌ای به طول $x = -1$ ، نقطه گوشه‌ای برای تابع $f(x) = |x^2 + x|$ می‌باشد.

۹

۱/۲۵

قضیه: ثابت کنید اگر تابع f در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه تابع f در $x = a$ پیوسته است.

۱۰

۱/۷۵

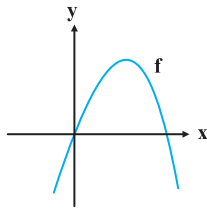
مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

۱۱

الف) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1}$

ب) $g(x) = \cos^3(2x)$

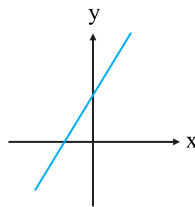
۰/۷۵



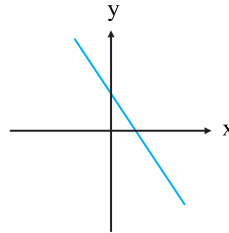
نمودار تابع f در شکل روبه‌رو آمده است.

۱۲

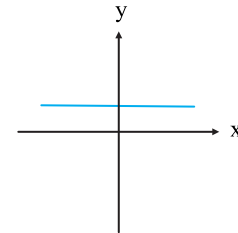
با بیان دلیل مشخص کنید کدام یک از نمودارهای زیر، نمودار مشتق تابع f است.



(پ)



(ب)



(الف)

۱

آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = x^3 - 2x$ را در بازه $[0, 2]$ و آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f را در $x = 1$ محاسبه کنید.

۱۳

۱/۵

مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$ را در بازه $[0, 2]$ تعیین کنید.

۱۴

۱/۲۵

تابع $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است.

۱۵

۱/۲۵

مقادیر a و b را در تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 - 1$ چنان بیابید که $A(1, 1)$ نقطه عطف منحنی باشد.

۱۶

۱/۷۵

جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ را رسم کنید.

۱۷

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ -2a + b = 8 \end{cases} \quad (o/25) \Rightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ 2a - b = -8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3a = -9 \Rightarrow a = -3 \quad (o/25)$$

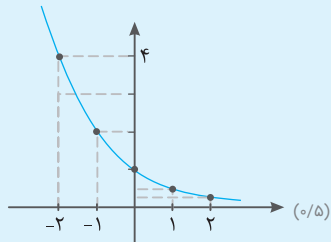
$$-3 + b = -1 \Rightarrow b = 3 - 1 \Rightarrow b = 2 \quad (o/25)$$

۳

(الف راست (o/25) (ب پایین (o/25)
(ج $y = f(-x)$ (o/25) (د $a \geq b$ (o/25)

$$y = 2^{-x} \rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 4 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array} \quad (o/25)$$

چون تابع در تمام دامنه خود اکیداً نزولی می باشد، پس اکیداً یکنوا می باشد. (o/25)



۴

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{2x + 1} \stackrel{\text{هم ارزی}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| - x}{2x + 1} \quad (o/25)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x - x}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{2x + 1} = -1 \quad (o/25)$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x + 2}{x^2 + 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(x + 2)}{(x + 2)^2} \quad (o/25)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{x + 2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad (o/25)$$

۱۳

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{5 - [x]}{x - 6} = \frac{5 - [6^-]}{6^- - 6} = \frac{5 - 5}{0^-} = \frac{0}{0^-} = 0 \quad (o/25)$$

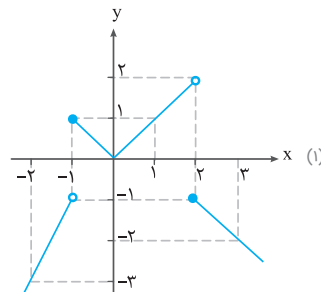
۱۴

به روش نقطه یابی رسم می کنیم.

$$y = 2x + 1 \quad \begin{array}{c|cc} x & -1 & -2 \\ \hline y & -1 & -3 \end{array}$$

$$y = |x| \quad \begin{array}{c|cc} x & -1 & 2 \\ \hline y & 1 & 2 \end{array}$$

$$y = 1 - x \quad \begin{array}{c|cc} x & 2 & 3 \\ \hline y & -1 & -2 \end{array}$$



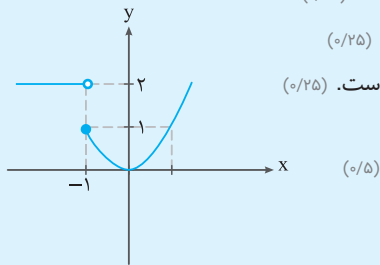
(-∞, -1) صعودی است. (o/25)
[-1, 0] نزولی است. (o/25)
[0, 2] صعودی است. (o/25)
[2, +∞) نزولی است. (o/25)

۵

به روش نقطه یابی نمودار تابع را رسم می کنیم. (o/25)
 $x \in (-\infty, -1)$ تابع ثابت است. (o/25)

$x \in [-1, 0]$ تابع نزولی است. (o/25)

$x \in [0, +\infty)$ تابع صعودی است. (o/25)



۶

اگر یک چندجمله ای بر چندجمله ای دیگر بخش پذیر باشد، باید ریشه آن در چندجمله ای صدق کند. لذا داریم: (o/25)

$$x - a = 0 \Rightarrow x = a \quad (o/25)$$

$$(a)^2 + a(a) - 2 = 0 \Rightarrow 2a^2 - 2 = 0 \quad (o/25)$$

$$\Rightarrow 2a^2 = 2 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \quad (o/25)$$

۷

$$\sin x + \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin x + 2 \sin x \cos x = 0 \quad (o/25)$$

$$\Rightarrow \sin x (1 + 2 \cos x) = 0 \quad (o/25)$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \quad (o/25)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{-1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \quad (o/25)$$

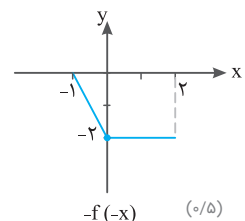
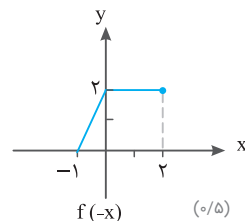
۸

$$\frac{1 + \cos \theta}{\sin^3 \theta} = \frac{(1 + \cos \theta)}{\sin \theta (\sin^2 \theta)} = \frac{(1 + \cos \theta)}{\sin \theta (1 - \cos^2 \theta)} \quad (o/25)$$

پاسخ نامه آزمون (۱)

حسابان (۲)

۱



۲

$$(x - 1)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases} \quad (o/25)$$

$$\begin{cases} p(1) = 0 \Rightarrow (1)^3 + a(1) + b = 0 \\ p(-2) = 0 \Rightarrow (-2)^3 + a(-2) + b = 0 \end{cases} \quad (o/25)$$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2}{x-2} = \frac{4}{0^-} = -\infty$ (o/25)

ج) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]-2}{x-2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$ (o/25)

۱۳

می‌دانیم که $45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$ ، بنابراین (o/25)
 $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$ (o/25)

$\sin(15^\circ) = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$ (o/25)

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (o/25)

۱۴

الف) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{3x^2 - 2x}{x^2 - 1} = \frac{5}{0^+} = +\infty$ (o/25)

ب) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x}{(x+1)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$ (o/25)

ج) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Delta x + \sqrt{x^2 + \gamma}}{2x + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Delta x + |x|}{2x}$ (o/25)

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Delta x}{2x} = \frac{1}{2}$ (o/25)

د) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 2}{4x^2 - \Delta x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2(1 + \frac{2}{3x^2})}{4x^2(1 - \frac{\Delta x}{4x^2})}$ (o/25)

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{4x^2} = \frac{3}{4}$ (o/25)

پاسخنامه آزمون (۵)

حسابان (۲)

۱

$x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow P(1)=0 \Rightarrow a(1)^2 + (1)^2 + (1) + b = 0$

$\Rightarrow a+1+1+b=0 \Rightarrow a+b=-2$ (o/25)

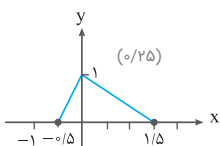
$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow P(-1)=-4$

$\Rightarrow a(-1)^2 + (-1)^2 + (-1) + b = -4 \Rightarrow -a+1-1+b=-4$

$\begin{cases} a+b=-2 \\ -a+b=-4 \end{cases} \Rightarrow b=-3, a=1$ (o/25)

۲

مرحله (۱): $y=f(2x)$



تغییرات روی محور افقی (1/2 برابر می‌شود)

$= \frac{(1+\cos\theta)^{o/25}}{\sin\theta(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)^{o/25}}$
 $= \frac{1^{o/25}}{\sin\theta(1-\cos\theta)} = \frac{1}{\sin\theta - \sin\theta\cos\theta}$ (o/25)

۹

$\sin\alpha = \frac{3}{5}$ (o/25)

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2\left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{9}{25}\right)$ (o/25)

$= 1 - \frac{18}{25} = \frac{25-18}{25} = \frac{7}{25}$ (o/25)

۱۰

ریشه‌های مخرج را به دست می‌آوریم:

$\Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$ (o/25)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+x}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{x(x-1)} = \frac{1}{-1} = -1$ (o/25)

پس $x=0$ مجانب نیست.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+x}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x+1)}{x(x-1)} = \frac{2}{0^+} = +\infty$ (o/25)

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+x}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(x+1)}{x(x-1)} = \frac{2}{0^-} = -\infty$

پس $x=1$ مجانب قائم است. (o/25)

۱۱

مجانب افقی تابع به صورت زیر به دست می‌آید.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$ (o/25)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x} = -1$ (o/25)

مجانب‌های افقی تابع برابر است با $y=-1$, $y=1$. (o/25)

برای مجانب‌های قائم ابتدا ریشه‌های مخرج را محاسبه می‌کنیم.

$\sqrt{x^2-1}=0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$ (o/25)

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ (o/25)

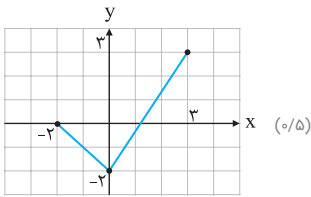
پس $x=1$ مجانب قائم است.

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$ (o/25)

پس $x=-1$ مجانب قائم است.

۱۲

الف) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2+2x-1}{x^2+x-12} = \frac{14}{0^-} = -\infty$ (o/25)



۲ $D_g = [-2, 3]$ (۰/۲۵)

۳ $\lambda + 4a + 2b + 1 = 0 \implies 4a + 2b = -9$ (۰/۲۵)
 $\implies a = -\frac{3}{2}$ (۰/۲۵)
 $b = -\frac{3}{2}$ (۰/۲۵)

$-1 + a - b + 1 = 0 \implies a - b = 0$ (۰/۲۵)

۴ $x + 1 \leq 2x - 3$ (۰/۲۵) $\implies x \geq 4$ (۰/۲۵)

۵ $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ (۰/۲۵) و $\max = |-3| + 1 = 4$ (۰/۲۵) و $\min = -|-3| + 1 = -2$ (۰/۲۵)

۶ (الف) درست (۰/۲۵) (ب) نادرست (۰/۲۵)

۷ $3x = 2k\pi + 2x$ (۰/۲۵) $\implies x = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) (۰/۲۵)

$3x = (2k+1)\pi - 2x$ (۰/۲۵) $\implies x = \frac{(2k+1)\pi}{5}$ ($k \in \mathbb{Z}$) (۰/۲۵)

۸ (الف) $+\infty$ (۰/۲۵) (ب) ۱ (۰/۲۵)

۹ (الف) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$ (۰/۲۵)

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2(-2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2) = +\infty$ (۰/۲۵)

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}$ (۰/۲۵)

۱۰ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+3}{2-x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{-x} = -1 \implies y = -1$ (۰/۲۵) (الف) مجانب افقی

(۰/۲۵) $x = 2$ مجانب قائم

۱۱ (I) ب (E) (۰/۲۵) (II) الف (مثبت) (۰/۲۵)

(III) ب (کمتر) (۰/۲۵)

۱۲ $f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x^2 - 4| - 0}{x - 2}$ (۰/۲۵)

۱۳

آهنگ تغییر متوسط $= \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{4}{2} = 2$ (۰/۲۵)

آهنگ تغییر لحظه‌ای $f'(x) = 3x^2 - 2 \implies f'(1) = 1$ (۰/۲۵)

۱۴

$f'(x) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+4}} \xrightarrow{f'=0} x = 1$ (۰/۲۵)

$f(0) = f(2) = 2$ (۰/۲۵) مقدار ماکزیمم مطلق

$f(1) = \sqrt{3}$ (۰/۲۵) مقدار مینیمم مطلق

۱۵

$f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2} \xrightarrow{f'(x)=0} x = 0$ (۰/۲۵)

نزولی $(-\infty, 0)$ (۰/۲۵)

صعودی $(0, +\infty)$ (۰/۲۵)

x	$-\infty$	۰	$+\infty$
f'	-	۰	+
f	\searrow	۰	\nearrow

۱۶

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx \implies f''=0 \implies 6a + 2b = 0$ (۰/۲۵)
 $f''(x) = 6ax + 2b$ (۰/۲۵)
 $f(1) = 1 \implies a + b - 1 = 1 \implies a + b = 2$ (۰/۲۵)
 $\implies a = -1$ (۰/۲۵)
 $b = 3$ (۰/۲۵)

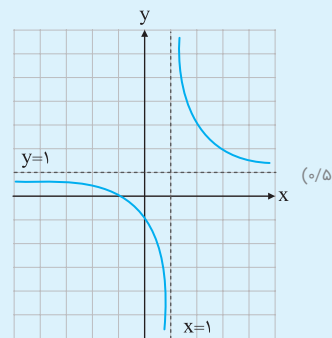
۱۷

$x = 1$ مجانب قائم (۰/۲۵)

$y = 1$ مجانب افقی (۰/۲۵)

$y' = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$ (۰/۲۵)

x	$-\infty$	۰	۱	۲	$+\infty$
f'	-	-	-	-	-
f	۱	\searrow	\searrow	\searrow	۱



پاسخنامه آزمون (۱۲)

حسابان (۲)

۱

(۰/۲۵) $g(x) = x^3$ (ب)

(۰/۲۵) y (الف)

(۰/۲۵) $(-2, +\infty)$ (ت)

(۰/۲۵) محور طولها (ب)



تقسیم و بخش پذیری

قضیه تقسیم: اگر $f(x)$ و $p(x)$ توابع چندجمله‌ای و درجه $p(x)$ از صفر بزرگ‌تر باشد، آن‌گاه توابع چندجمله‌ای منحصر به فرد $q(x)$ و $r(x)$ وجود دارند که:

$$f(x) = p(x)q(x) + r(x)$$

که در آن درجه $r(x)$ از درجه $p(x)$ کم‌تر است.

محاسبه باقی مانده تقسیم $p(x)$ بر $x - a$

اگر باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $p(x)$ صفر باشد، $f(x) = p(x)q(x)$ می‌شود که در این حالت می‌گوییم $f(x)$ بر $p(x)$ بخش پذیر است.

نکته اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای باشد، باقی مانده تقسیم آن بر $(x - a)$ برابر $f(a)$ است و آن را با $f(a) = r$ نمایش می‌دهند.

مثال باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x) = 2x^2 - 3x + 5$ بر $x - 1$ به دست آورید.

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$p(1) = 2(1)^2 - 3(1) + 5 = 7 - 3 = 4$$

توجه اتحادهای زیر همواره برقرار هستند.

$$1) x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$$

$$2) x^n + a^n = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots - a^{n-2}x + a^{n-1})$$

nهای فرد

$$3) x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + 1)$$

$$4) x^n - 1 = (x + 1)(x^{n-1} - x^{n-2} + x^{n-3} - \dots - 1)$$

nهای زوج

$$5) x^n + 1 = (x + 1)(x^{n-1} - x^{n-2} + x^{n-3} - \dots + 1)$$

nهای فرد

مثال به کمک تجزیه، کسر زیر را ساده کنید.

$$\frac{(x^5 + 1)(x - 1)}{x^2 - 1} = \frac{(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

فصل دوم مثلثات

تابع تناوب: تابع f در \mathbb{R} با دامنه D_f را یک تابع تناوب گویند، هرگاه عدد مثبتی مانند $T \neq 0$ وجود داشته باشد که:

$$1) \forall x \in D_f : (x + T) \in D_f$$

$$2) \forall x \in D_f : f(x + T) = f(x)$$

کوچک‌ترین T را دوره تناوب تابع می‌گویند.

مثال ثابت کنید $f(x) = \sin x$ دارای دوره تناوب $T = 2\pi$ می‌باشد.

$$1) D_f = \mathbb{R}, x \in D_f \Rightarrow (x + 2\pi) \in D_f$$

$$2) f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) = \sin x = f(x)$$

بین دوره‌ها تناوب $f(x)$ (مثلاً $4\pi, 6\pi, \dots$) از همه کوچک‌تر است. پس تابع فوق تناوب بوده و دوره تناوب آن $T = 2\pi$ است.

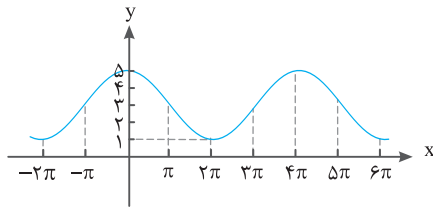
نکته توابع به شکل $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب

$$\frac{2\pi}{|b|} \text{ هستند.}$$

$$-|a| + c \leq a \sin bx + c \leq |a| + c$$

$$-|a| + c \leq a \cos bx + c \leq |a| + c$$

مثال نمودار زیر مربوط به تابع $y = a \cos bx + c$ است. با دقت در شکل نمودار و تشخیص دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم، ضابطه آن را مشخص کنید.



با توجه به شکل، ماکزیمم این تابع برابر ۵ و مینیمم آن برابر ۱ است، پس:

$$\begin{cases} |a| + c = 5 \\ -|a| + c = 1 \end{cases} \Rightarrow 2|a| = 4 \Rightarrow |a| = 2$$

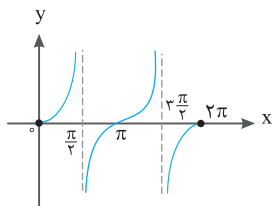
$$|a| + c = 5 \Rightarrow 2 + c = 5 \Rightarrow c = 3$$

با توجه به تأثیری که منفی بودن a بر قرینه شدن نمودار تابع نسبت به محور x ها دارد، باید a مثبت باشد.

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow 2\pi = 4\pi |b| \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow b = +\frac{1}{2}$$

$$y = 2 \cos\left(\frac{1}{2}x\right) + 3 = 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + 3$$

توجه دارید که برای \cos ، منفی بودن یا مثبت بودن b تأثیری ندارد.



نوع در مورد تابع $y = \tan x$ ، با توجه به نمودار آن، در بازه $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ تابعی صعودی است.

اتحادهای مثلثاتی

۱) $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$

۲) $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$$3) \cos 2a = \begin{cases} \cos^2 a - \sin^2 a \\ 2 \cos^2 a - 1 \\ 1 - 2 \sin^2 a \end{cases}$$

۴) $\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$

۵) $\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$

۶) $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$

۷) $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

۸) $\cot 2a = \frac{\cot^2 a - 1}{2 \cot a}$

۹) $\sin 2a = \frac{2 \tan a}{1 + \tan^2 a}$

۱۰) $\cos 2a = \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a}$

۱۱) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$

۱۲) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$

۱۳) $\tan\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\cot a$

۱۴) $\cot\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\tan a$

۱۵) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$

۱۶) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$

۱۷) $\tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cot a$

۱۸) $\cot\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \tan a$

۱۹) $\sin(\pi + a) = -\sin a$

۲۰) $\cos(\pi + a) = -\cos a$

۲۱) $\tan(\pi + a) = \tan a$

۲۲) $\cot(\pi + a) = \cot a$

۲۳) $\sin(\pi - a) = \sin a$

۲۴) $\cos(\pi - a) = -\cos a$

مثال معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$1) \sin^3 x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x (\sin^2 x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \sin x (\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \cos x = \cos 2x \Rightarrow \cos x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 8 = 9 \Rightarrow \cos x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{+1 \pm \sqrt{9}}{2(2)} = \frac{+1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow x = 2k\pi \pm \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right), k \in \mathbb{Z}$$

$$3) \tan 3x = \tan \pi x \Rightarrow 3x = k\pi + \pi x \Rightarrow (3 - \pi)x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{-2 + \pi}, k \in \mathbb{Z}$$

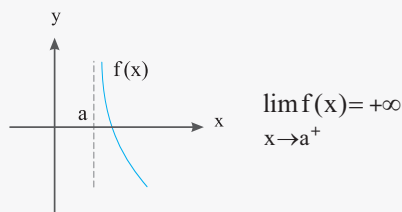
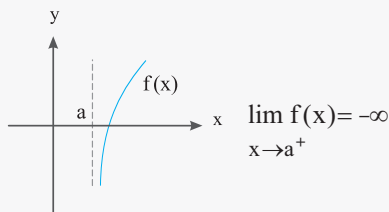
$$4) \sin 2x = \tan x \Rightarrow 2\sin x \cos x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow 2\sin x \cos^2 x = \sin x \Rightarrow 2\sin x \cos^2 x - \sin x = 0$$

$$\Rightarrow \sin x (2\cos^2 x - 1) = 0 \Rightarrow \sin x (\cos 2x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

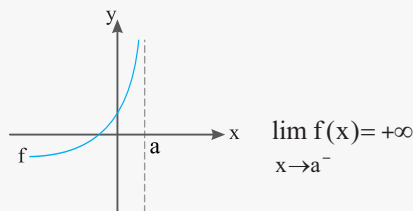
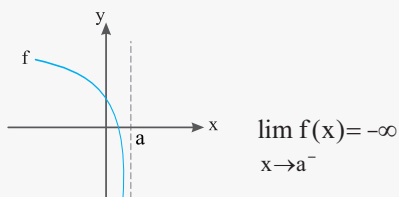
فصل سوم: حردهای نامتناهی - حد در بی نهایت

حردهای یک طرفه نامتناهی

فرض کنید تابع $f(x)$ در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد، در این صورت $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ بدین معنی است که می‌توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر بخواهیم از هر عدد مثبتی، بزرگ‌تر کنیم، به شرطی که x را از سمت راست به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.



هم‌چنین فرض کنیم تابع $f(x)$ در یک همسایگی چپ نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد، در این صورت $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ بدین معنی است که می‌توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر کنیم به شرطی که x را از سمت چپ به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.



فرض کنید تابع $f(x)$ در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد در این صورت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ یعنی اینکه می‌توانیم $f(x)$ را به میزان دلخواه از هر عدد مثبت بزرگ‌تر کنیم، به شرطی که x را به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.



فرض کنید تابع $f(x)$ در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. در این صورت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ، یعنی اینکه می‌توانیم $f(x)$ را به میزان دلخواه، از هر عدد منفی کوچک‌تر کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

مثال

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{|x|} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{|x|} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

قضیه (۱): اگر n یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه

الف) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{n زوج باشد} \\ -\infty & \text{n فرد باشد} \end{cases}$

قضیه (۲):

الف) اگر $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ آن‌گاه، $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و برعکس.

ب) اگر $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ آن‌گاه، $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ و برعکس.

قضیه (۳): اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ باشد، آن‌گاه:

الف) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

الف) اگر $L < 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، آن‌گاه:

ب) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

ب) اگر $L > 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، آن‌گاه:

پ) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

پ) اگر $L < 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد، آن‌گاه:

ت) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

ت) اگر $L > 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد، آن‌گاه:

نکته قضیه (۳) در حالتی که $x \rightarrow a^+$ یا $x \rightarrow a^-$ نیز برقرار است.

مثال حدود زیر را حساب کنید:

الف) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{1-x}{x+2} = \frac{1+2^+}{(-2)^++2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[2^-]-2}{2^- - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1-2}{2^- - 2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

قضیه (۴): اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ یا $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ آن‌گاه:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x-1}{\tan x} = \frac{\frac{\pi}{2}-1}{\pm\infty} = 0$$

مثال

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$

زیرا:

$$x \rightarrow \frac{\pi}{2}^- \quad x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+$$