
خرید کتاب های کنکور
با تخفیف ویژه
و
ارسال رایگان
Medabook.com
مدابوک
یک جلسه تماس تلفنی رایگان
با مشاوران رتبه برتر
برای انتخاب بهترین منابع
دبیرستان و کنکور
۰۲۱ ۲۸۴۲۵۲۱۰

درسنامه ۱

مجموعهٔ اعداد ـ بازه‌ها

مجموعهٔ اعداد: برخی از مجموعه‌های خاص اعداد به‌صورت زیر است:

مجموعهٔ اعداد طبیعی : $\mathbb{N}=\{۱،۲،۳،...\}$ ، مجموعهٔ اعداد حسابی : $\mathbb{W}=\{۰،۱،۲،۳،...\}$

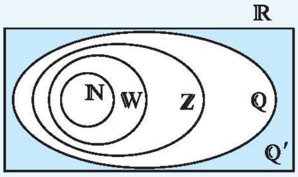
مجموعهٔ اعداد صحیح : $\mathbb{Z}=\{...،-۲،-۱،۰،۱،۲،...\}$ ، مجموعهٔ اعداد گویا : $\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n}\,|\,m،n\in\mathbb{Z}،n\neq ۰\}$

مجموعهٔ اعداد گنگ : $\mathbb{Q}'=$ مجموعهٔ اعدادی که نتوان عضوهای آن را به‌صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد. $=\{x\,|\,x\notin\mathbb{Q}\}$

مجموعهٔ اعداد حقیقی : $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$

نکته

۱- رابطهٔ زیرمجموعه بودن بین این مجموعه‌ها به‌صورت $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}'\subseteq\mathbb{R}$ است.

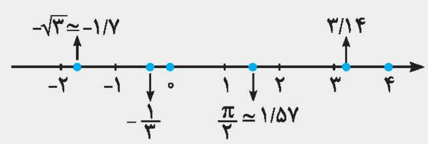


۲- هر عدد دلخواه را می‌توان روی محور اعداد نمایش داد و هم‌چنین هر نقطه روی محور اعداد نشان‌دهندهٔ یک عدد حقیقی مشخص است.

مثال **کدام‌یک از اعداد زیر گویا و کدام‌یک گنگ می‌باشند؟ مکان تقریبی هر یک از آن‌ها را روی محور مشخص کنید.**

$-\frac{۱}{۳}،۳/۱۴،\frac{\pi}{۲}،-\sqrt{۳}،۴،۰$

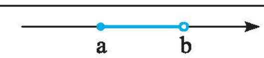
پاسخ:



اعداد گویا : $-\frac{۱}{۳}،۳/۱۴،۴،۰$ ، اعداد گنگ : $\frac{\pi}{۲}،-\sqrt{۳}$

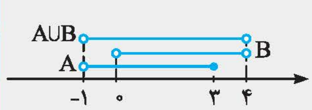
بازه (فاصله): زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ مانند A را که مشخص‌کنندهٔ یک قطعه از محور اعداد حقیقی باشد، بازه یا فاصله می‌نامیم.

اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند، به طوری که $a<b$ ، آن‌گاه:

نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
	$\{x\in\mathbb{R}\,|\,a<x<b\}$	$(a،b)$	باز
	$\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\le x\le b\}$	$[a،b]$	بسته
	$\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\le x<b\}$	$[a،b)$	نیم‌باز (نیم‌بسته)
	$\{x\in\mathbb{R}\,|\,a<x\le b\}$	$(a،b]$	نیم‌باز (نیم‌بسته)

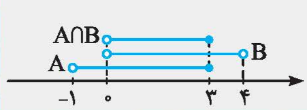
مثال **اگر $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-۱<x\le ۳\}$ و $B=(۰،۴)$ باشند، $A\cup B$ و $A\cap B$ را به‌صورت بازه نوشته و روی محور اعداد مشخص کنید.**

پاسخ: ابتدا مجموعه‌های A و B را روی محور اعداد مشخص می‌کنیم. $A\cup B$ مجموعه‌ای است که اعضای آن یا در A یا در B و یا در هر دو باشند:



$\Rightarrow A\cup B=(-۱،۴)$

اعضای مشترک دو مجموعهٔ A و B، مجموعهٔ $A\cap B$ است:



$\Rightarrow A\cap B=(۰،۳]$

درسنامه ۱

از دو نماد $+\infty$ (مثبت بی‌نهایت) و $-\infty$ (منفی بی‌نهایت) برای نمایش بازه‌هایی که از یک طرف نامحدود هستند، استفاده می‌کنیم. فرض کنیم a یک عدد حقیقی باشد، در این‌صورت داریم:

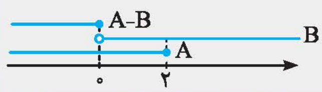
نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	$[a,+\infty)$	نیم‌باز
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	$(-\infty,a]$	نیم‌باز
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	$(a,+\infty)$	باز
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	$(-\infty,a)$	باز

توجه: $+\infty$ و $-\infty$ عدد حقیقی نیستند.

مثال

اگر $A=\{x \in \mathbb{R} \mid 2x+1 \leq 5\}$ و $B=\{x \in \mathbb{R} \mid x>0\}$ باشد، $A-B$ را به‌صورت بازه نوشته و روی محور اعداد مشخص کنید.

پاسخ: با حل نامعادلهٔ $2x+1 \leq 5$، داریم $2x \leq 4 \Rightarrow x \leq 2$. اگر عضوهای مشترک B و A را از مجموعهٔ A حذف کنیم، مجموعهٔ $A-B$ به‌دست می‌آید:



$$\Rightarrow A-B=(-\infty,0]$$

نکته

بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ شامل تمام اعداد حقیقی است، به عبارت دیگر: $(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

۱. **درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.**

آ) $-1 \in (-1,2]$ ب) $4 \in (3,4]$ پ) $0 \in \{-1,1\}$

ت) $\frac{5}{6} \in (0,1)$ ث) $\sqrt{3} \in (1,2)$ ج) $[-1,1)=(-1,1]$

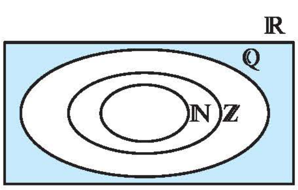
چ) $\varnothing \subseteq [-1,+\infty)$ ح) $\{-1,0,2\} \subseteq [-1,3)$ خ) $(-1,1) \subseteq [-1,1)$

د) $0 \in (-2,0) \cup (0,1)$ ذ) $\{0\}=\mathbb{W}-\mathbb{N}$ ر) $\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}$

ز) $(1,2) \subseteq \mathbb{Q}$ ژ) $\mathbb{R}-\mathbb{Q}'=\mathbb{Q}$ س) $\{x \in \mathbb{Q} \mid -1 \leq x < 1\}=[-1,1)$

ش) $-6 \times 10^{23} \in (-\infty,1]$ ص) $6 \times 10^{-4} \in [2,+\infty)$

۲. **اعداد زیر را روی شکل و در محل مناسب قرار دهید.**



10° ، -2 ، $-\frac{\pi}{2}$ ، $\sqrt{5}$ ، $\frac{1}{4}$ ، ۳/۱۲۱۲۰۰۰...

۳. **هر یک از اعداد $-\frac{2}{3}$، $\frac{\pi}{4}$، $\sqrt{3}+\sqrt{2}$، ۲/۴ و -2° را روی محور مشخص کنید و بگویید کدام‌یک از آن‌ها گنگ هستند.**

۴. **هر یک از بازه‌های زیر را به‌صورت مجموعه نمایش دهید و نمایش هندسی آن‌ها را مشخص کنید.**

آ) $(-2,2)$ ب) $[0,2)$ پ) $[-4,-1]$ ت) $(1,\sqrt{5}]$

ث) $(3,+\infty)$ ج) $(-\infty,-2)$ چ) $[\sqrt{2},+\infty)$ ح) $(-\infty,\frac{1}{2}]$

۵. **نمایش هندسی دو بازهٔ $A=[-1,5)$ و $B=(-3,2)$ را روی محور رسم کنید و سپس حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.**

آ) $A \cap B$ ب) $A \cup B$ پ) $A-B$ ت) $B-A$

۶. حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آن‌ها روی یک محور به‌دست آورید.

آ) $(-۲,۵]\cap(-۱,۷)$ ب) $[-۴,۰]\cap[-۱,+\infty)$ پ) $[-۲,۴)\cup(۰,۵]$ ت) $(-\infty,-۱)\cup[-۱,+\infty)$

ث) $(-\infty,۲)-(۰,۳)$ ج) $(۰,۵]-[۲,+\infty)$ چ) $(-۱,۰]\cap[۰,۲)$ ح) $(-\infty,-۱)\cup(-\infty,۳)$

۷. اگر $A=\{x\in\mathbb{R}\mid -۱\le x+۱\le ۲\}$ و $B=\{x\in\mathbb{R}\mid -۳<x\le ۰\}$ باشند، مجموعه‌های زیر را به کمک بازه نمایش دهید.

آ) A ب) B پ) $A-B$ ت) $A\cup B$

۸. اگر $A=\{x\mid x\in\mathbb{R}, -۱<x<۳\}$ ، $B=\{x\mid x\in\mathbb{R}, x\le ۱\}$ و $C=\{x\mid x\in\mathbb{R}, x\ge ۰\}$ باشند، حاصل $(A\cap B)\cup C$ و $B-(A\cap C)$ را به‌صورت بازه نوشته و روی محور نشان دهید.

۹. مجموعه‌های $\mathbb{R}-\{۰\}$ ، $\mathbb{R}-\{-۳,۴\}$ ، $[۳,۷]-\{۴,۶\}$ و $[-۲,۴]-(۰,۱]$ را روی محور نشان دهید و سپس هر یک از آن‌ها را به‌صورت اجتماع چند بازه بنویسید.

۱۰. اگر $\frac{m+۱}{۲}\in[-۱,۴)$ باشد، حدود m را مشخص کنید.

پاسخ‌های تشریحی

۱ آ) نادرست است، زیرا بازهٔ $(-۱,۲]$ شامل تمام xهایی است که $-۱<x\le ۲$ باشد، لذا $x=-۱\notin(-۱,۲]$

ب) درست است، زیرا انتهای بازه بسته است و در نتیجه عدد ۴ عضو این بازه است.

پ) نادرست است، زیرا مجموعهٔ $\{-۱,۱\}$ (نه بازهٔ $(-۱,۱)$)، شامل فقط دو عضو -۱ و ۱ می‌باشد، بنابراین $۰\notin\{-۱,۱\}$

ت) درست است، زیرا $۱>\frac{۵}{۶}>۰$ و در نتیجه $\frac{۵}{۶}\in(۰,۱)$

ث) درست است، زیرا مقدار تقریبی $\sqrt{۳}$ برابر ۱/۷ است و در نتیجه $۲>\sqrt{۳}>۱$، پس $\sqrt{۳}\in(۱,۲)$

ج) نادرست است، زیرا مثلاً $-۱\in[-۱,۱)$ ولی $-۱\notin(-۱,۱]$، بنابراین دو بازهٔ $(-۱,۱]$ و $[-۱,۱)$ با هم برابر نمی‌باشند.

چ) درست است، زیرا $\varnothing$ زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای است.

ح) درست است، زیرا اعداد -۱، ۰ و ۲ عضو بازهٔ $[-۱,۳)$ می‌باشند و در نتیجه مجموعهٔ شامل این ۳ عدد، زیرمجموعه‌ای از بازهٔ $[-۱,۳)$ است.

خ) درست است، زیرا تمام اعضای بازهٔ $(-۱,۱)$ عضوی از بازهٔ $[-۱,۱]$ می‌باشند.

د) نادرست است، زیرا عدد صفر در هیچ یک از دو بازهٔ $(-۲,۰)$ و $(۰,۱)$ قرار ندارد.

ذ) درست است، زیرا: $W-\mathbb{N}=\{۰,۱,۲,۳,\ldots\}-\{۱,۲,۳,\ldots\}=\{۰\}$

ر) درست است، زیرا تمام اعداد گنگ (اصم) در مجموعهٔ اعداد حقیقی قرار دارند.

ز) نادرست است، زیرا در بازهٔ $(۱,۲)$ بی‌شمار عدد گنگ مثل $\sqrt{۲}\simeq ۱/۴$ وجود دارد که در مجموعهٔ اعداد گویا قرار ندارند.

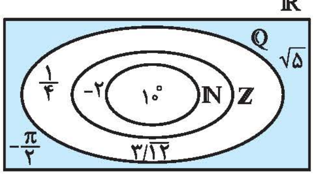
ژ) درست است، زیرا $\mathbb{R}$ از اجتماع $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}'$ تشکیل شده است.

س) نادرست است، زیرا بازه‌ها شامل تمام اعداد حقیقی (گویا و گنگ) هستند و فقط شامل اعداد گویای بین دو عدد نمی‌باشند.

ش) درست است، زیرا عدد -۶×۱۰^{۲۳} عددی منفی است و در نتیجه از یک کوچک‌تر است. بنابراین: $-۶\times۱۰^{۲۳}\in(-\infty,۱]$

ص) نادرست است، زیرا نمایش اعشاری عدد ۶×۱۰^{-۴} به‌صورت ۰/۰۰۰۶ می‌باشد که عددی کوچک‌تر از ۲ می‌باشد، پس: $۶\times۱۰^{-۴}\notin[۲,+\infty)$

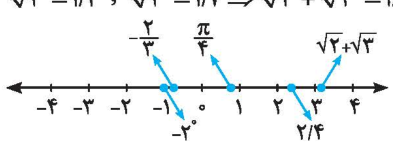
۲ عدد $۱=۱۰^{۰}$ یک عدد طبیعی، عدد -۲ یک عدد صحیح منفی، اعداد $\frac{۱}{۴}$ و $۳/\overline{۱۲}=۳/۱۲۱۲\cdots$ اعدادی گویا و اعداد $\sqrt{۵}$ و $-\frac{\pi}{۲}$ نیز اعدادی گنگ هستند، بنابراین:

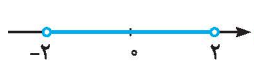


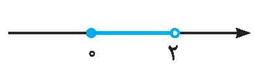
۳ $\frac{\pi}{۴}$ و $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ اعداد گنگ هستند و با توجه به مقدار تقریبی آن‌ها داریم:

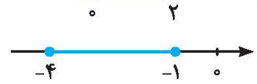
$$\pi\simeq ۳/۱۴\Rightarrow\frac{\pi}{۴}\simeq ۰/۷۸۵$$

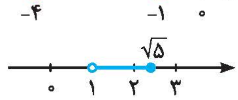
$$\sqrt{۲}\simeq ۱/۴\ ,\ \sqrt{۳}\simeq ۱/۷\Rightarrow\sqrt{۲}+\sqrt{۳}\simeq ۱/۴+۱/۷=۳/۱$$



۴ آ)  $(-۲,۲)=\{x\in\mathbb{R}\mid -۲<x<۲\}$

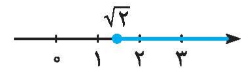
ب)  $[۰,۲)=\{x\in\mathbb{R}\mid ۰\le x<۲\}$

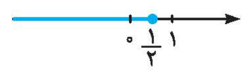
پ)  $[-۴,-۱]=\{x\in\mathbb{R}\mid -۴\le x\le -۱\}$

ت)  $(۱,\sqrt{۵}]=\{x\in\mathbb{R}\mid ۱<x\le\sqrt{۵}\}$

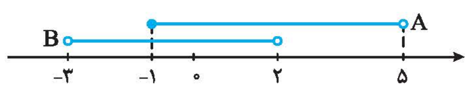
ث) 
$(۳,+\infty)=\{x\in\mathbb{R} \mid x>۳\}$

ج) 
$(-\infty,-۲)=\{x\in\mathbb{R} \mid x<-۲\}$

چ) 
$[\sqrt{۲},+\infty)=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq\sqrt{۲}\}$

ح) 
$(-\infty,\frac{۱}{۲}]=\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq\frac{۱}{۲}\}$

۵ نمایش هندسی دو بازهٔ A و B به‌صورت زیر است:

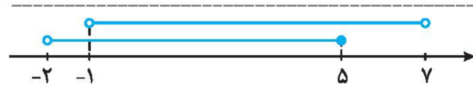


آ) قسمت‌های مشترک دو مجموعهٔ A و B، یعنی بازهٔ $[-۱,۲)$ جواب است: $A\cap B=[-۱,۲)$

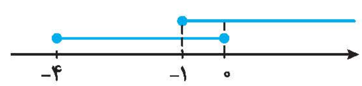
ب) تمام قسمت‌هایی که در A یا در B یا در هر دو وجود دارند، در مجموعهٔ $A\cup B$ قرار می‌گیرند، بنابراین: $A\cup B=(-۳,۵)$

پ) اگر قسمت‌های مشترک دو مجموعهٔ A و B را از A حذف کنیم، مجموعهٔ $A-B$ به‌دست می‌آید: $A-B=[۲,۵)$

ت) اگر قسمت‌های مشترک دو مجموعهٔ A و B را از B حذف کنیم، مجموعهٔ $B-A$ به‌دست می‌آید: $B-A=(-۳,-۱)$

۶ آ) 

$(-۲,۵]\cap(-۱,۷)=(-۱,۵]$

ب) 

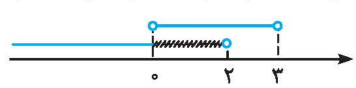
$[-۴,۰]\cap[-۱,+\infty)=[-۱,۰]$

پ) 

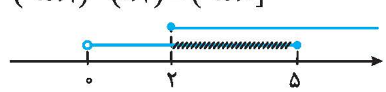
$[-۲,۴)\cup(۰,۵]=[-۲,۵]$

ت) 

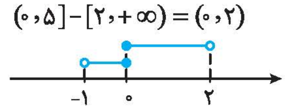
$(-\infty,-۱)\cup[-۱,+\infty)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

ث) 

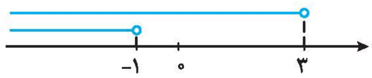
$(-\infty,۲)-(۰,۳)=(-\infty,۰]$

ج) 

$(۰,۵]-[۲,+\infty)=(۰,۲)$

چ) 

$(-۱,۰]\cap[۰,۲)=\{۰\}$

ح) 

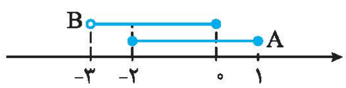
$(-\infty,-۱)\cup(-\infty,۳)=(-\infty,۳)$

۷ آ) با حل نامعادله‌های $-۱\leq x+۱\leq ۲$ ، مجموعهٔ A را مشخص می‌کنیم:

$$-۱\leq x+۱\leq ۲ \xrightarrow{-۱} -۲\leq x\leq ۱ \Rightarrow A=[-۲,۱]$$

ب) $B=(-۳,۰]$

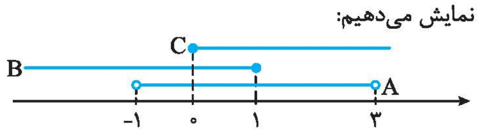
پ و ت) با نمایش مجموعه‌های A و B روی محور، مجموعه‌های $A-B$ و $A\cup B$ را مشخص می‌کنیم:



$A-B=(۰,۱]$

$A\cup B=(-۳,۱]$

۸ برای مشخص‌کردن هریک از مجموعه‌ها، ابتدا مجموعه‌های A، B و C را روی محور نمایش می‌دهیم:



$$A\cap B=(-۱,۳)\cap(-\infty,۱]=(-۱,۱]$$
$$\Rightarrow (A\cap B)\cup C=(-۱,۱]\cup[۰,+\infty)=(-۱,+\infty)$$

$$A\cap C=(-۱,۳)\cap[۰,+\infty)=[۰,۳)$$
$$\Rightarrow B-(A\cap C)=(-\infty,۱]-[۰,۳)=(-\infty,۰)$$

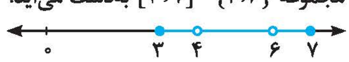
۹ در نمایش هندسی مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{۰\}$ باید عدد صفر را از روی محور حذف کنیم:

$\mathbb{R}-\{۰\}=(-\infty,۰)\cup(۰,+\infty)$

با حذف اعداد ۳- و ۴ از روی محور، مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{-۳,۴\}$ به‌دست می‌آید:

$\mathbb{R}-\{-۳,۴\}=(-\infty,-۳)\cup(-۳,۴)\cup(۴,+\infty)$

با حذف اعداد ۴ و ۶ از بازهٔ $[۳,۷]$، مجموعهٔ $[۳,۷]-\{۴,۶\}$ به‌دست می‌آید:



$[۳,۷]-\{۴,۶\}=[۳,۴)\cup(۴,۶)\cup(۶,۷]$

با حذف بازهٔ $(۰,۱]$ از بازهٔ $[-۲,۴]$ ، مجموعهٔ $[-۲,۴]-(۰,۱]$ به‌دست می‌آید:

$[-۲,۴]-(۰,۱]=[-۲,۰]\cup(۱,۴]$

۱۰
$$\frac{m+۱}{۲}\in[-۱,۴)\Rightarrow -۱\leq\frac{m+۱}{۲}<۴$$
$$\xrightarrow{\times ۲} -۲\leq m+۱<۸ \xrightarrow{-۱} -۳\leq m<۷$$

درسنامه ۲

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی ـ متمم یک مجموعه

مجموعه‌های متناهی: مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آن‌ها یک عدد حسابی می‌باشد، مجموعه‌های متناهی (با پایان) می‌نامیم.

مجموعه‌های نامتناهی: مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آن‌ها را نتوان با یک عدد حسابی بیان کرد، مجموعه‌های نامتناهی می‌گوییم. در واقع مجموعه‌ای که متناهی نباشد را مجموعه‌ی نامتناهی می‌نامیم.

به عنوان مثال، مجموعهٔ اعداد اول یک رقمی یک مجموعهٔ متناهی است، زیرا یک مجموعهٔ ۴ عضوی می‌باشد:

$A=\{۲,۳,۵,۷\}$: مجموعهٔ اعداد اول یک رقمی

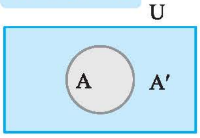
توجه: تعداد اعضای بعضی مجموعه‌های متناهی ممکن است بسیار زیاد باشد که با صرف وقت کافی و گاهی با بعضی امکانات می‌توان تعداد آن‌ها را به‌دست آورد، مثل تعداد سواری‌های شهر تهران.

مجموعهٔ مرجع: در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همهٔ مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعهٔ آن باشند، مجموعهٔ مرجع می‌نامیم و آن را با U نشان می‌دهیم.

متمم یک مجموعه: هرگاه U مجموعهٔ مرجع باشد و $A\subseteq U$، آن‌گاه مجموعهٔ $U-A$ را متمم A می‌نامیم و آن را با نماد A' نشان می‌دهیم.

$$A'=U-A$$

به عبارت دیگر A' شامل عضوهایی از U می‌باشد که در A نیستند. در واقع:
نمودار وِن مجموعهٔ A با مجموعهٔ مرجع U به‌صورت مقابل است:



مثال فرض کنید $U=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$ مجموعهٔ مرجع، $A=\{۱,۲,۴\}$ و $B=\{۳,۴,۵,۷\}$ باشند. مجموعه‌های $A'-B$ و $A'\cup B'$ را با اعضا مشخص کنید.

پاسخ: ابتدا هر یک از مجموعه‌های A' و B' را با اعضا مشخص می‌کنیم:

$$A'=U-A=\{\cancel{۱},\cancel{۲},۳,\cancel{۴},۵,۶,۷\}-\{۱,۲,۴\}=\{۳,۵,۶,۷\}\ ,\ B'=U-B=\{۱,۲,\cancel{۳},\cancel{۴},\cancel{۵},۶,\cancel{۷}\}-\{۳,۴,۵,۷\}=\{۱,۲,۶\}$$

$$\Rightarrow A'-B=\{\cancel{۳},\cancel{۵},۶,\cancel{۷}\}-\{۳,۴,۵,۷\}=\{۶\}\quad,\quad A'\cup B'=\{۳,۵,۶,۷\}\cup\{۱,۲,۶\}=\{۱,۲,۳,۵,۶,۷\}$$

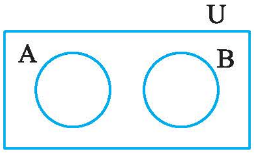
نکته

اگر A و B دو مجموعه از مجموعهٔ مرجع U باشند، آن‌گاه:

۳) $A\cup A'=U$	۲) $A\cap A'=\varnothing$	۱) $(A')'=A$
۶) $A-B=A\cap B'$	۵) $U'=\varnothing$	۴) $\varnothing'=U$
۹) $(A\cap B)'=A'\cup B'$	۸) $(A\cup B)'=A'\cap B'$	۷) $A-B=A-(A\cap B)$

تذکر: روابط (۸) و (۹)، **قوانین دمورگان** نام دارند.

دو مجموعهٔ جدا از هم: به هر دو مجموعه مثل A و B که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعهٔ جدا از هم یا مجزا می‌گوییم. نمودار وِن دو مجموعهٔ جدا از هم به‌صورت مقابل است:



$\Rightarrow A\cap B=\varnothing$

به عنوان مثال، مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد و مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج، دو مجموعهٔ جدا از هم هستند:

$O=\{۱,۳,۵,...\}$: مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد
$E=\{۲,۴,۶,...\}$: مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج
$\Rightarrow O\cap E=\varnothing \Rightarrow$ O و E دو مجموعهٔ جدا از هم هستند.

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

قرارداد: تعداد عضوهای مجموعهٔ متناهی A را با $n(A)$ نمایش می‌دهیم.

نکته

۱- اگر A و B دو مجموعهٔ متناهی باشند، آن‌گاه تعداد عضوهای مجموعهٔ $A\cup B$ برابر است با: $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

۲- اگر U یک مجموعهٔ متناهی باشد، آن‌گاه: $n(A')=n(U)-n(A)$

درسنامه ۲

مثال

در یک کلاس ۳۰ نفره، ۱۷ نفر عضو تیم فوتبال، ۱۵ نفر عضو تیم والیبال و ۷ نفر عضو هر دو تیم هستند.

آ) چند نفر عضو حداقل یکی از این دو تیم هستند؟ ب) چند نفر عضو هیچ یک از این دو تیم نمی‌باشند؟

پاسخ: مجموعهٔ شامل تمام دانش‌آموزان را با U، مجموعهٔ دانش‌آموزان عضو تیم فوتبال را با A و مجموعهٔ دانش‌آموزان عضو تیم والیبال را با B نشان می‌دهیم.

آ) باید تعداد عضوهای مجموعهٔ $A\cup B$ را به‌دست آوریم:

$$n(A)=۱۷\ ,\ n(B)=۱۵\ ,\ n(A\cap B)=۷ \Rightarrow n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۱۷+۱۵-۷=۲۵$$

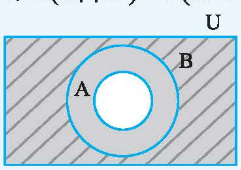
ب) باید تعداد عضوهای مجموعهٔ $(A\cup B)'$ را به‌دست آوریم:

$$n(U)=۳۰\ ,\ n(A\cup B)=۲۵ \Rightarrow n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)=۳۰-۲۵=۵$$

نکته

۱- اگر A و B دو مجموعهٔ متناهی و U مجموعهٔ مرجع باشد، آن‌گاه:

$$۱)\ n(A\cap B')=n(A-B)=n(A)-n(A\cap B) \qquad ۲)\ n(A'\cap B')=n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)$$



در فرمول شمارهٔ (۲)، U باید مجموعه‌ای متناهی باشد.

۲- اگر $A\subseteq B\subseteq U$، آن‌گاه $B'\subseteq A'$

۱۱. در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.

آ) مجموعهٔ اعداد صحیح کوچک‌تر از -۵ یک مجموعهٔ .... است. (متناهی ـ نامتناهی)

ب) مجموعهٔ اعداد طبیعی چهاررقمی یک مجموعهٔ .... است. (متناهی ـ نامتناهی)

پ) $A\cap A'=$ .... ، $\varnothing'=$ .... ، $A'\cap B'=$ ....

ت) اگر A و B دو مجموعه و $A\cap B=\varnothing$ باشد، دو مجموعهٔ A و B را دو مجموعهٔ .... می‌نامیم.

ث) اگر A یک مجموعهٔ نامتناهی و B یک مجموعهٔ متناهی باشد، آن‌گاه $A-B$ یک مجموعهٔ .... است.

۱۲. کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

آ) مجموعهٔ اعداد گویای بین ۰ و ۲ یک مجموعهٔ متناهی است.

ب) مجموعهٔ اعداد صحیح بین -۲ و -۱ یک مجموعهٔ متناهی است.

پ) اگر A یک مجموعهٔ متناهی و B یک مجموعهٔ نامتناهی باشد، آن‌گاه مجموعهٔ $A\cap B$ یک مجموعهٔ نامتناهی است.

ت) اگر A دارای یک زیرمجموعهٔ متناهی باشد، آن‌گاه A یک مجموعهٔ متناهی است.

ث) اگر همهٔ زیرمجموعه‌های A متناهی باشند، آن‌گاه A یک مجموعهٔ متناهی است.

ج) اگر A دارای یک زیرمجموعهٔ نامتناهی باشد، آن‌گاه A یک مجموعهٔ نامتناهی است.

چ) اگر A و B دو مجموعهٔ نامتناهی باشند، آن‌گاه $A-B$ مجموعه‌ای متناهی است.

ح) اگر A و B دو مجموعهٔ جدا از هم باشند، آن‌گاه: $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$

خ) متمم مجموعهٔ اعداد طبیعی نسبت به مجموعهٔ اعداد صحیح، مجموعهٔ اعداد صحیح منفی است.

۱۳. متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

آ) مجموعهٔ اعداد طبیعی اول و دورقمی

ب) مجموعهٔ اعداد صحیح فرد

پ) مجموعهٔ تمام مربع‌ها

ت) مجموعهٔ خیابان‌های ایران

ث) مجموعهٔ اعداد گویای بین ۰ و ۱

ج) مجموعهٔ اعداد گنگ بین ۰ و ۱

چ) $\{x\in\mathbb{N}\mid x\leq ۰\}$

ح) مجموعهٔ مضرب‌های صحیح ۴

خ) $(-۱,\frac{۱}{۲})$

د) مجموعهٔ کسرهایی با صورت و مخرج عدد طبیعی

ذ) مجموعهٔ شمارنده‌های عدد ۲۴

ر) $\mathbb{W}-\mathbb{N}$

ز) $\mathbb{N}\cap\mathbb{Q}$

ژ) $\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$

۱۴. به سؤالات زیر پاسخ دهید:

آ) دو مجموعهٔ نامتناهی متمایز مثال بزنید که یکی از آن‌ها زیرمجموعهٔ دیگری باشد.

ب) دو مجموعهٔ نامتناهی متمایز مثال بزنید که اشتراک آن‌ها متناهی باشد.

پ) دو مجموعهٔ نامتناهی متمایز مثال بزنید که تفاضل آن‌ها نامتناهی باشد.

ت) دو مجموعهٔ نامتناهی متمایز مثال بزنید که تفاضل آن‌ها متناهی باشد.

۱۵. فرض کنید U مجموعهٔ تمام مضرب‌های طبیعی عدد ۶ باشد.

آ) U را با نمایش اعضای آن بنویسید.

ب) U متناهی است یا نامتناهی؟

پ) یک زیرمجموعهٔ متناهی از U بنویسید.

ت) دو زیرمجموعهٔ نامتناهی مانند C و D از U بنویسید که $C \subseteq D$

ث) دو زیرمجموعهٔ نامتناهی و مجزا مانند A و B از U بنویسید که $A \cup B = U$

۱۶. مجموعهٔ اعداد صحیح را به عنوان مجموعهٔ مرجع در نظر بگیرید:

آ) مجموعهٔ نامتناهی A را طوری بنویسید که A' نامتناهی باشد.

ب) مجموعهٔ نامتناهی A را طوری بنویسید که A' متناهی باشد.

پ) مجموعهٔ متناهی A را درنظر بگیرید. A' متناهی است یا نامتناهی؟

ت) مجموعهٔ متناهی A و مجموعهٔ نامتناهی B را طوری بنویسید که A و B مجزا بوده و $\mathbb{Z} = A \cup B$

۱۷. $\mathbb{R}$ را به عنوان مجموعهٔ مرجع در نظر بگیرید و متمم هر یک از مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید، سپس آن‌ها را به‌صورت بازه یا اجتماعی از بازه‌ها بنویسید.

آ) $A = (-۱,۵]$ ب) $\mathbb{Z}$ پ) $B = (۲,+\infty)$

ت) $C = (-\infty,۱]$ ث) $(-\infty,۱) \cap (۰,+\infty)$ ج) $(-۴,۱) \cup (۲,۷)$

۱۸. اگر مجموعهٔ اعداد طبیعی یک رقمی مجموعهٔ مرجع، $A = \{۱,۲,۳,۴\}$، $B = \{۲,۴,۶,۸\}$ و $C = \{۳,۴,۵,۶\}$ باشند، هر یک از مجموعه‌های زیر را با اعضا بنویسید.

آ) A' ب) $(A \cap B)'$ پ) $B \cup C'$

ت) $(A \cup B)'$ ث) $(A \cup B') \cap C$ ج) $(A - B) \cup C'$

۱۹. اگر $U = \{x \in \mathbb{Z} \mid -۵ \leq x \leq ۴\}$، $A = \{x \in U \mid x \leq ۰\}$، $B = \{x \in U \mid$ مضرب ۴ است $x\}$ و $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid -۱ \leq x \leq ۲\}$ باشند، هریک از مجموعه‌های زیر را با اعضا بنویسید.

آ) B' ب) $C' \cup B$ پ) $(A \cap C') - B$ ت) $(A' \cup B) \cap C'$

۲۰. اگر مجموعهٔ اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۱۵ مجموعهٔ مرجع، مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۱۲ را با A و مجموعهٔ مضرب‌های کوچک‌تر از ۱۴ عدد ۳ را با B نمایش دهیم، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را نشان دهید.

آ) $(A')' = A$ ب) $A - B = A - (A \cap B)$ پ) $B - A = B \cap A'$

ت) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ ث) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ ج) $A \cup (A' \cap B) = A \cup B$

۲۱. آ) فرض کنیم $U = \{۲,۴,۶,۸,۱۰,۱۲\}$ (مجموعهٔ مرجع)، $A = \{۲,۶,۱۰\}$ و $B = \{۲,۴,۶,۱۰\}$ باشند. آیا $A \subseteq B$؟ آیا $B' \subseteq A'$؟

ب) فرض کنیم $A \subseteq B \subseteq U$ که درآن U مجموعهٔ مرجع می‌باشد. با استفاده از نمودار وِن نشان دهید $B' \subseteq A'$

۲۲. فرض کنیم U مجموعهٔ مرجع و A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند. عبارت‌های زیر را ساده کنید.

آ) $(A \cap A') \cup B$ ب) $(((A \cup A') \cap A) \cup (A' \cap U)) \cap B$

۲۳. فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ مرجع U هستند، به‌طوری که $n(U) = ۵۰$، $n(A) = ۳۵$، $n(B) = ۲۰$ و $n(A \cap B) = ۱۲$ مطلوب است:

آ) $n(A')$ ب) $n(A \cup B)$ پ) $n(A \cap B')$

ت) $n(A' \cap B')$ ث) $n(A' \cup B')$ ج) $n(A \cup B')$

۲۴. یک باشگاه ورزشی ۷۰ عضو دارد. ۴۰ نفر عضو تیم فوتبال، ۲۵ نفر عضو تیم والیبال و ۵۵ نفر حداقل در یکی از این دو رشته فعالیت می‌کنند.

آ) چند نفر در هر دو رشتهٔ فوتبال و والیبال فعالیت می‌کنند؟

ب) چند نفر در هیچ یک از این دو رشته فعالیت نمی‌کنند؟

پ) چند نفر فقط فوتبال بازی می‌کنند؟

۲۵. از ۳۰ دانش‌آموز یک کلاس، ۱۷ نفر در المپیاد ریاضی و ۱۵ نفر در المپیاد فیزیک شرکت کرده‌اند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس در هیچ یک از این دو المپیاد شرکت نکرده باشند:

آ) چند نفر در هر دو المپیاد ریاضی و فیزیک شرکت کرده‌اند؟

ب) چند نفر در المپیاد ریاضی شرکت کرده‌اند ولی در المپیاد فیزیک شرکت نکرده‌اند؟

۲۶. در یک نظرسنجی از ۲۰۰ نفر که از اصفهان دیدن کرده‌اند، معلوم شد ۱۲۰ نفر از عالی‌قاپو و ۱۵۰ نفر از بازار اصفهان بازدید کرده‌اند. اگر ۴۰ نفر از عالی‌قاپو بازدید کرده باشند ولی از بازار اصفهان بازدید نکرده باشند:

آ) چند نفر از هر دو مکان بازدید کرده‌اند؟

ب) چند نفر دست‌کم از یکی از این دو مکان بازدید کرده‌اند؟

پ) چند نفر از بازار اصفهان و از عالی‌قاپو بازدید نکرده‌اند؟

ت) چند نفر دقیقاً از یکی از این دو مکان بازدید کرده‌اند؟

۲۷. اگر $n(A)+n(B)=5n(A\cap B)$ باشد، حاصل $\dfrac{n(A\cup B)}{n(A\cap B)}$ را به‌دست آورید.

پاسخ‌های تشریحی

۱۱ آ) نامتناهی ـ چون مجموعهٔ اعداد صحیح کوچک‌تر از -5 به‌صورت $\{-6,-7,-8,\dots\}$ است که یک مجموعهٔ نامتناهی می‌باشد.

ب) متناهی ـ چون مجموعهٔ اعداد طبیعی چهاررقمی به‌صورت $\{1000,1001,\dots,9999\}$ است که یک مجموعهٔ متناهی ۹۰۰۰ عضوی می‌باشد.

پ) $A\cap A'=\varnothing$ ، $\varnothing'=U$ ، $A'\cap B'=(A\cup B)'$

ت) جدا از هم

ث) نامتناهی ـ چون اگر از یک مجموعه با بی‌شمار عضو، تعداد محدودی عضو حذف کنیم، آن‌گاه بی‌شمار عضو برای آن باقی می‌ماند.

---

۱۲ آ) نادرست است، زیرا بی‌شمار عدد گویا مانند $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{5}{4}$ و ... در بازهٔ $(0,2)$ وجود دارد.

ب) درست است، زیرا مجموعهٔ اعداد صحیح بین -2 و -1 ، مجموعهٔ تهی است که یک مجموعهٔ متناهی با صفر عضو می‌باشد.

پ) نادرست است، زیرا $A\cap B$ زیرمجموعهٔ مجموعهٔ A است و چون A یک مجموعهٔ متناهی می‌باشد، پس هر زیرمجموعهٔ آن نیز یک مجموعهٔ متناهی می‌باشد، بنابراین $A\cap B$ یک مجموعهٔ متناهی است.

ت) نادرست است، به عنوان مثال، مجموعهٔ نامتناهی $\mathbb{N}$ دارای زیرمجموعهٔ متناهی $\{1,2\}$ است.

ث) درست است، زیرا اگر A یک مجموعهٔ متناهی باشد، چون $A\subseteq A$ و هر زیرمجموعهٔ A متناهی است، بنابراین A متناهی می‌باشد.

ج) درست است، زیرا اگر $B\subseteq A$ و B نامتناهی باشد، آن‌گاه تمام عضوهای مجموعهٔ B در مجموعهٔ A قرار دارند و در نتیجه A نامتناهی است.

چ) نادرست است، $\mathbb{N}$ (مجموعهٔ اعداد طبیعی) و O (مجموعهٔ اعداد فرد طبیعی) مجموعه‌هایی نامتناهی‌اند و $\mathbb{N}-O=\{2,4,6,\dots\}=E$ نیز مجموعه‌ای نامتناهی است.

ح) درست است، زیرا:

A و B دو مجموعهٔ جدا از هم‌اند. $\Rightarrow A\cap B=\varnothing \Rightarrow n(A\cap B)=0$

$$\Rightarrow n(A\cup B)=n(A)+n(B)-\cancel{n(A\cap B)}=n(A)+n(B)$$

خ) نادرست است، متمم مجموعهٔ $\mathbb{N}$ نسبت به اعداد صحیح شامل تمام اعداد صحیح منفی و عدد صفر می‌باشد.

$$\mathbb{Z}=\{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\} \quad , \quad \mathbb{N}=\{1,2,\dots\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{N}'=\mathbb{Z}-\mathbb{N}=\{\dots,-2,-1,0\}$$

---

۱۳ آ) متناهی، این مجموعه به‌صورت $\{11,13,\dots,97\}$ است که یک مجموعهٔ متناهی می‌باشد.

ب) نامتناهی، این مجموعه به‌صورت $\{\dots,-3,-1,1,3,\dots\}$ است که یک مجموعهٔ نامتناهی می‌باشد.

پ) نامتناهی، می‌توان هر تعداد دلخواه مربع با طول ضلع‌های مختلف رسم کرد. پس این مجموعه، نامتناهی است.

ت) متناهی، تعداد خیابان‌های ایران ممکن است زیاد باشد، ولی بالاخره می‌توان تعداد آن‌ها را مشخص کرد. بنابراین یک مجموعهٔ متناهی است.

ث) نامتناهی، بین هر دو عدد می‌توان به هر تعداد دلخواه عدد گویا مشخص کرد: اعداد گویای بین ۰ و ۱ : $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\dots$

ج) نامتناهی، بین هر دو عدد می‌توان به هر تعداد دلخواه عدد گنگ مشخص کرد: اعداد گنگ بین ۰ و ۱ : $\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{2}}{4},\dots$

چ) متناهی، هیچ عدد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی صفر وجود ندارد، لذا مجموعهٔ $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 0\} = \varnothing$ یک مجموعهٔ متناهی است.

ح) نامتناهی، مجموعهٔ مضرب‌های صحیح عدد ۴ به‌صورت $\{\dots,8,4,0,-4,-8,\dots\}$ است که یک مجموعهٔ نامتناهی می‌باشد.

خ) نامتناهی، بی‌شمار عدد (گویا و گنگ) بین دو عدد ۱- و $\frac{1}{2}$ وجود دارد. بنابراین مجموعهٔ $(-1,\frac{1}{2})$ نامتناهی است.

د) نامتناهی، بی‌شمار عدد کسری با صورت و مخرج عدد طبیعی وجود دارد، بنابراین مجموعهٔ نامتناهی است. $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{4},\dots$

ذ) متناهی، مجموعهٔ شمارنده‌های عدد ۲۴ به‌صورت $\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$ است که یک مجموعهٔ متناهی ۸ عضوی می‌باشد.

ر) متناهی، زیرا: $\mathbb{W}-\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}-\{1,2,\cdots\}=\{0\}$

ز) نامتناهی، زیرا $\mathbb{N} \cap Q = \mathbb{N}$ و $\mathbb{N}$ یک مجموعهٔ نامتناهی است.

ژ) نامتناهی، زیرا $Q \cup Q' = \mathbb{R}$ و $\mathbb{R}$ یک مجموعهٔ نامتناهی است.

---

۱۴ **آ)** $\mathbb{N}$ و $\mathbb{W}$ دو مجموعهٔ نامتناهی‌اند و $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W}$

ب) $A=\{\dots,-3,-2,-1,0,1,2\}$ ، $B=\{-1,0,1,2,3,\dots\}$

$\Rightarrow A \cap B=\{-1,0,1,2\}$

پ) Q و $\mathbb{Z}$ دو مجموعهٔ نامتناهی‌اند و $Q-\mathbb{Z}$ نیز مجموعه‌ای نامتناهی است.

ت) $\mathbb{N}$ و $\mathbb{W}$ دو مجموعهٔ نامتناهی‌اند و $\mathbb{W}-\mathbb{N}=\{0\}$ یک مجموعهٔ متناهی است.

---

۱۵ **آ)** $U=\{6,12,18,24,\dots\}$

ب) U مجموعه‌ای نامتناهی است.

پ) $A=\{12,18,24\} \subseteq U$ مجموعه‌ای متناهی است.

ت) اگر C مجموعهٔ مضرب‌های ۲۴ و D مجموعهٔ مضرب‌های ۱۲ باشد، آن‌گاه $C \subseteq D$

$D=\{12,24,36,48,\dots\}$ ، $C=\{24,48,\dots\}$

ث) A را مضرب‌های فرد ۶ و B را مضرب‌های زوج عدد ۶ در نظر می‌گیریم:

$A=\{6,18,30,42,\dots\}$ ، $B=\{12,24,36,\dots\} \Rightarrow A \cup B=U$

---

۱۶ **آ)** $A=\mathbb{N} \Rightarrow A'=\mathbb{Z}-\mathbb{N}=\{\dots,-2,-1,0\}$ (نامتناهی)

ب) $A=\mathbb{Z}-\{0\} \Rightarrow A'=\{0\}$

پ) A' نامتناهی است. اگر تعداد محدودی از عضوهای مجموعهٔ نامتناهی $\mathbb{Z}$ را از مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ حذف کنیم، آن‌گاه مجموعهٔ باقی‌مانده نیز دارای بی‌شمار عضو است.

ت) $A=\{0,1,2\}$ ، $B=\{\cdots,-2,-1,3,4,\cdots\}$

$\Rightarrow A \cap B=\varnothing$ ، $A \cup B=\mathbb{Z}$

---

۱۷ **آ)** $A'=\mathbb{R}-(-1,5]=(-\infty,-1] \cup (5,+\infty)$

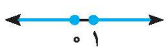
ب) $\mathbb{Z}'=\mathbb{R}-\mathbb{Z}=\dots \cup (-2,-1) \cup (-1,0) \cup (0,1) \cup (1,2) \cup \dots$

پ) $B'=\mathbb{R}-(2,+\infty)=(-\infty,2]$

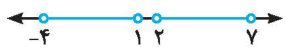
ت) $C'=\mathbb{R}-(-\infty,1]=(1,+\infty)$

ث) $(-\infty,1) \cap (0,+\infty)=(0,1)$

$\Rightarrow (0,1)'=\mathbb{R}-(0,1)=(-\infty,0] \cup [1,+\infty)$

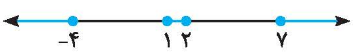


ج) مجموعهٔ $(-4,1) \cup (2,7)$ روی محور به‌صورت



می‌باشد، بنابراین:

$((-4,1) \cup (2,7))'=(-\infty,-4] \cup [1,2] \cup [7,+\infty)$



---

۱۸ مجموعهٔ مرجع $U=\{1,2,\dots,9\}$ می‌باشد.

آ) $A'=U-A=\{\cancel{1},\cancel{2},\cancel{3},\cancel{4},5,\dots,9\}-\{1,2,3,4\}$

$=\{5,6,7,8,9\}$

ب) $A \cap B=\{1,2,3,4\} \cap \{2,4,6,8\}=\{2,4\}$

$\Rightarrow (A \cap B)'=\{1,\cancel{2},3,\cancel{4},5,\dots,9\}-\{2,4\}=\{1,3,5,6,7,8,9\}$

پ) $C'=U-C=\{1,2,7,8,9\}$

$\Rightarrow B \cup C'=\{2,4,6,8\} \cup \{1,2,7,8,9\}=\{1,2,4,6,7,8,9\}$

ت) $A \cup B=\{1,2,3,4,6,8\}$

$\Rightarrow (A \cup B)'=U-(A \cup B)=\{5,7,9\}$

ث) $B'=U-B=\{1,3,5,7,9\}$

$\Rightarrow A \cup B'=\{1,2,3,4\} \cup \{1,3,5,7,9\}=\{1,2,3,4,5,7,9\}$

$\Rightarrow (A \cup B') \cap C=\{1,2,3,4,5,7,9\} \cap \{3,4,5,6\}=\{3,4,5\}$

ج) $A-B=\{1,3\} \Rightarrow (A-B) \cup C'$

$=\{1,3\} \cup \{1,2,7,8,9\}=\{1,2,3,7,8,9\}$

---

۱۹ مجموعه‌های U، A، B و C با اعضا به‌صورت زیر می‌باشند:

$U=\{-5,-4,\dots,3,4\}$ ، $A=\{-5,-4,-3,-2,-1,0\}$

$B=\{-4,0,4\}$ ، $C=\{-1,0,1,2\}$

آ) $B'=U-B=\{-5,-3,-2,-1,1,2,3\}$

ب) $C'=\{-5,-4,-3,-2,3,4\}$

$\Rightarrow C' \cup B=\{-5,-4,-3,-2,0,3,4\}$

پ) $A \cap C'=\{-5,-4,-3,-2\}$

$\Rightarrow (A \cap C')-B=\{-5,-3,-2\}$

ت) $A'=\{1,2,3,4\} \Rightarrow A' \cup B=\{-4,0,1,2,3,4\}$

$\Rightarrow (A' \cup B) \cap C'=\{-4,3,4\}$

۲۰ مجموعه‌های U، A و B را با اعضا مشخص می‌کنیم:

$$U=\{۱،۲،۳،...،۱۵\}\ ,\ A=\{۱،۲،۳،۴،۶،۱۲\}\ ,\ B=\{۳،۶،۹،۱۲\}$$

آ) $A'=U-A=\{۵،۷،۸،۹،۱۰،۱۱،۱۳،۱۴،۱۵\}$

$\Rightarrow (A')'=U-A'=\{۱،۲،۳،۴،۶،۱۲\}=A$

ب) $A-B=\{۱،۲،۴\}\quad (۱)$

$A\cap B=\{۳،۶،۱۲\}\Rightarrow A-(A\cap B)=\{۱،۲،۴\}\quad (۲)$

$(۱)،(۲)\Rightarrow A-B=A-(A\cap B)$

پ) $B-A=\{۹\}\quad (۱)$

$B\cap A'=\{۳،۶،۹،۱۲\}\cap\{۵،۷،۸،۹،۱۰،۱۱،۱۳،۱۴،۱۵\}=\{۹\}\quad (۲)$

$(۱)\ ،\ (۲)\Rightarrow B-A=B\cap A'$

ت) $A\cup B=\{۱،۲،۳،۴،۶،۹،۱۲\}\Rightarrow (A\cup B)'=U-(A\cup B)$

$=\{۵،۷،۸،۱۰،۱۱،۱۳،۱۴،۱۵\}\quad (۱)$

$A'\cap B'=\{۵،۷،۸،۹،۱۰،۱۱،۱۳،۱۴،۱۵\}$

$\cap\{۱،۲،۴،۵،۷،۸،۱۰،۱۱،۱۳،۱۴،۱۵\}$

$=\{۵،۷،۸،۱۰،۱۱،۱۳،۱۴،۱۵\}\quad (۲)$

$(۱)\ ،\ (۲)\Rightarrow (A\cup B)'=A'\cap B'$

ث) $A\cap B=\{۳،۶،۱۲\}\Rightarrow (A\cap B)'=U-(A\cap B)$

$=\{۱،۲،۴،۵،۷،۸،۹،۱۰،۱۱،۱۳،۱۴،۱۵\}\quad (۱)$

$A'\cup B'=\{۵،۷،۸،۹،۱۰،۱۱،۱۳،۱۴،۱۵\}$

$\cup\{۱،۲،۴،۵،۷،۸،۱۰،۱۱،۱۳،۱۴،۱۵\}$

$=\{۱،۲،۴،۵،۷،۸،۹،۱۰،۱۱،۱۳،۱۴،۱۵\}\quad (۲)$

$(۱)،(۲)\Rightarrow (A\cap B)'=A'\cup B'$

ج) طبق قسمت (پ)، داریم: $A'\cap B=B\cap A'=\{۹\}$

$\Rightarrow A\cup(A'\cap B)=\{۱،۲،۳،۴،۶،۹،۱۲\}\quad (۱)$

$A\cup B=\{۱،۲،۳،۴،۶،۹،۱۲\}\quad (۲)$

$(۱)،(۲)\Rightarrow A\cup(A'\cap B)=A\cup B$

---

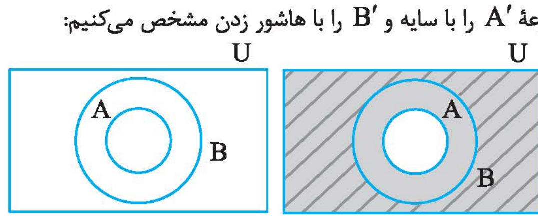
۲۱ آ) تمام اعضای مجموعهٔ A در مجموعهٔ B قرار دارند، بنابراین:

$A\subseteq B$

$A'=\{۴،۸،۱۲\}\quad ,\ B'=\{۸،۱۲\}\Rightarrow B'\subseteq A'$

ب) نمودار وِن $A\subseteq B$ به‌صورت زیر است.

مجموعهٔ A' را با سایه و B' را با هاشور زدن مشخص می‌کنیم:



تمام قسمت‌های B' کـه به‌صورت هاشـورخورده اسـت، در مجموعهٔ A' (سایه‌زده شده) نیز هست، لذا: $B'\subseteq A'$

۲۲ آ) $A\cap A'=\varnothing\Rightarrow (A\cap A')\cup B=\varnothing\cup B=B$

ب) $(A\cup A')\cap A=U\cap A=A\ ,\ A'\cap U=A'$

$\Rightarrow (((A\cup A')\cap A)\cup(A'\cap U))\cap B$

$=(A\cup A')\cap B=U\cap B=B$

---

۲۳ آ) $n(A')=n(U)-n(A)=۵۰-۳۵=۱۵$

ب) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۳۵+۲۰-۱۲=۴۳$

پ) $n(A\cap B')=n(A)-n(A\cap B)=۳۵-۱۲=۲۳$

ت) $n(A'\cap B')=n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)$

$\overset{(ب)}{=\!=}۵۰-۴۳=۷$

ث) $n(A'\cup B')=n((A\cap B)')=n(U)-n(A\cap B)$

$=۵۰-۱۲=۳۸$

ج) $n(A\cup B')=n(A)+n(B')-n(A\cap B')$

طبق قسمت (پ)، $n(A\cap B')=۲۳$ می‌باشد، بنابراین:

$n(A\cup B')=۳۵+۳۰-۲۳=۴۲$

---

۲۴ طبق فرض داریم:

مجموعه مرجع : $U\Rightarrow n(U)=۷۰$

مجموعه اعضای تیم فوتبال : $A\Rightarrow n(A)=۴۰$

مجموعه اعضای تیم والیبال : $B\Rightarrow n(B)=۲۵$

طبق فرض ۵۵ نفر در حداقل یکی از این دو رشته فعالیت می‌کنند، پس:

$n(A\cup B)=۵۵$

آ) باید $n(A\cap B)$ را به‌دست آوریم:

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$\Rightarrow ۵۵=۴۰+۲۵-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=۱۰$

ب) باید تعداد اعضای مجموعهٔ $(A\cup B)'$ را به‌دست آوریم:

$n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)=۷۰-۵۵=۱۵$

پ) باید تعداد اعضای مجموعهٔ $A-B$ را به‌دست آوریم:

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=۴۰-۱۰=۳۰$

---

۲۵ مجموعهٔ شامل تمام دانش‌آموزان را U ، دانش‌آمـوزان شـرکت‌کننده در المپیاد ریاضی را A و دانش‌آموزان شرکت کننده در المپیـاد فیزیـک را با B نشان می‌دهیم.

روش اول: $(A\cup B)'$ مجموعهٔ دانش‌آموزانی است که در هیچ‌یـک از ایـن دو رشتهٔ المپیاد شرکت نکرده‌اند. داریم:

$n(U)=۳۰\ ,\ n(A)=۱۷\ ,\ n(B)=۱۵\ ,\ n((A\cup B)')=۵$

$\Rightarrow n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)=۵$

$\Rightarrow n(A\cup B)=۳۰-۵=۲۵$