
خرید کتاب های کنکور
با تخفیف ویژه
و
ارسال رایگان
Medabook.com
مدابوک
یک جلسه تماس تلفنی رایگان
با مشاوران رتبه برتر
برای انتخاب بهترین منابع
دبیرستان و کنکور
۰۲۱ ۲۸۴۲۵۲۱۰

آزمـــــــون (۲) نـوبت اول

۱ تابع $f(x)=|x+۲|-۱$ را رسم کنید و مشخص کنید این تابع در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است؟ **(هماهنگ استانی)** ۱/۵

---

۲ با توجه به جدول زیر، مقادیر خواسته شده را در صورت امکان به دست آورید: **(مشابه کار در کلاس ۱۴ کتاب درسی)** ۱/۵

x	۲	۱	۰	-۱	-۲
f(x)	۵	-۲	۱	-۴	۰
g(x)	۱	-۲	۳	۰	۵

$fog(-۲)=$

$gof(-۲)=$

$fof(۰)=$

$gog(۱)=$

---

۳ دو تابع $f(x)=\dfrac{x-۱}{x}$ و $g(x)=\sqrt{x-۱}$ داده شده‌اند: **(هماهنگ استانی)** ۱/۵

الف) دامنهٔ تابع fog را با استفاده از تعریف محاسبه کنید.

ب) ضابطهٔ تابع fog را تشکیل دهید.

---

۴ نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=۳\sin x$ را در بازهٔ $[\pi\,,\,\pi]$ رسم کنید. سپس دامنه و برد هر کدام را مشخص کنید. ۲

---

۵ می‌دانیم تابع $x\geq ۵$ ، $f(x)=(x-۵)^۲$ یک به یک است. ضابطهٔ تابع وارون آن‌را به‌دست آورید. ۱

---

۶ مجموعه‌ای از داده‌های مربوط به موضوعی متناوب با دورهٔ تناوب ۲۰ داده شده است، به‌طوری که بیش‌ترین و کم‌ترین آن‌ها به ترتیب ۲۴ و ۷/۵ است. اگر تابع $y=a\cos(bx)+c$ برای این داده‌ها مناسب باشد، این تابع را به‌دست آورید. ۱/۵

---

۷ معادلات زیر را حل کنید. ۱/۵

الف) $۲\sin x-\sqrt{۳}=۰$

ب) $\sin ۴x=\sin ۵x$

---

۸ اندازهٔ دو ضلع مثلث ۴ و ۵ سانتی‌متر است. اگر مساحت این مثلث $۵\sqrt{۲}$ سانتی‌مترمربع باشد، چند مثلث با این ویژگی‌ها وجود دارد؟ ۱/۵

(مشابه تمرین ۴ صفحه ۴۸ کتاب درسی)

---

۹ حاصل حدهای زیر را به دست آورید. ۲

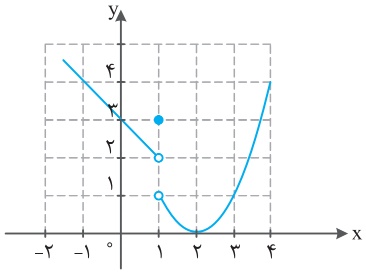
الف) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{۱-۴x^۲}{x^۲-۴x}=$

ب) $\lim\limits_{x\to۱}\dfrac{x^۲+۲x-۳}{\sqrt[۳]{x}-۱}=$

---

۱۰ با استفاده از نمودار روبه‌رو، عبارت خواسته‌شده را (در صورت وجود) محاسبه کنید. ۱

$\lim\limits_{x\to۱^-}f(x)-\lim\limits_{x\to۱^+}f(x)+۲f(۱)=$



آزمـــون (۴) نـوبت اول (هماهنگ کشوری دی ماه سال ۱۳۹۷)

۱ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. ۰/۵

الف) تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود. درست ☐ نادرست ☐

ب) تابع $f(x)=\sqrt{x}$ در نقطهٔ $x=0$ مشتق‌پذیر است. درست ☐ نادرست ☐

---

۲ در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید. ۱

الف) تابع $h(x)=(2x^2-5x+1)^3$ به صورت ترکیب دو تابع $f(x)=2x^2-5x+1$ و $g(x)=\dots$ است.

ب) حد تابع $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x>0\\ \dfrac{5x^2-3x}{-x^2+1} & x\le 0\end{cases}$ وقتی $x\to -\infty$ برابر .... است.

پ) اگر $f'(2)=3$ و $g'(2)=5$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $(2g-f)'(2)$ برابر .... است.

ت) شکل حاصل از دوران یک دایره حول یکی از قطرهای آن برابر .... است.

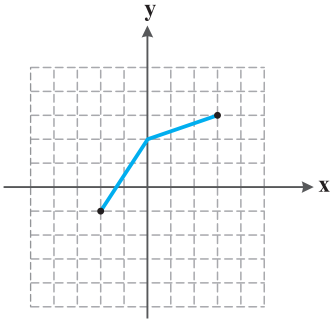
---

۳ الف) توابع $f(x)=\dfrac{x+3}{2x}$ و $g(x)=3x-1$ را درنظر بگیرید. دامنهٔ fog را با استفاده از تعریف به دست آورید. ۱/۷۵

ب) اگر $f(x)=\dfrac{1}{8}x-3$ و $g(x)=x^3$ باشد، مقدار $g^{-1}of^{-1}(5)$ را به دست آورید.

---

۴ با استفاده از نمودار تابع f نمودار تابع $y=f(\frac{x}{2})-2$ را رسم کنید. ۰/۷۵



---

۵ الف) دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=2-3\sin 4x$ را به دست آورید. ۱

ب) دامنهٔ تابع $f(x)=\tan(2x)$ را به دست آورید. ۰/۵

---

۶ معادلهٔ مثلثاتی $\sin x-\cos 2x=0$ را حل کنید. ۱/۵

---

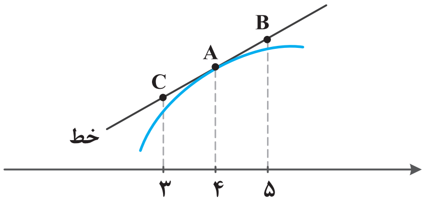
۷ حد توابع زیر را به دست آورید. ۱/۷۵

الف) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{[x]-3}{x-3}$

ب) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$

---

۸ برای تابع f در شکل زیر داریم $f'(4)=1/5$ و $f(4)=24$ با توجه به شکل، مختصات نقاط A، B و C را بیابید. ۰/۷۵



آزمـــــــون (۸) نـوبت دوم

۱ نمودار تابع $y=\cos x$ را در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ رسم کنید. سپس مشخص کنید در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است؟ ۰/۵

۲ با توجه به $f(x)=\sqrt{x+1}$ و $g(x)=\sqrt{x^2-5}$: ۱

الف) ضابطه‌های $(fog)(x)$ و $(gof)(x)$ را بیابید.

ب) مقدار $(fog)(-3)$ را به دست آورید.

پ) نشان دهید $(gof)(10)=f(5)$

۳ دامنه و برد توابع زیر را به دست آورید. ۰/۷۵

الف) $y=3\sin(\pi x)-2$

ب) $y=-2\cos(4\pi x)+3$

۴ معادلات زیر را حل کنید. (مشابه تمرین ۳ صفحه ۴۸ کتاب درسی) ۰/۷۵

الف) $2\sin^2 x-3\sin x+1=0$

ب) $\cos 2x-\sin x=0$

۵ چند جمله‌ای $f(x)=x^3+3x^2-4x-12$ را در نظر بگیرید. ۰/۵

الف) آیا $f(x)$ بر $(x+2)$ بخش‌پذیر است؟ چرا؟

ب) با انجام تقسیم، درستی ادعای خود را بررسی کنید.

۶ حدهای زیر را محاسبه کنید. (هماهنگ استانی) ۰/۵

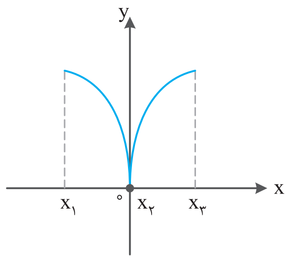
الف) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

ب) $\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{x}{x-5}$

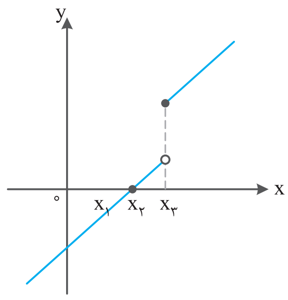
۷ مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ را در $x=2$ بررسی کنید، سپس معادلهٔ خط مماس بر منحنی را در نقطه $x=2$ بنویسید. ۱

۸ در شکل‌های زیر، با ذکر دلیل مشخص کنید که هر تابع در کدام نقطه یا نقاط مشخص شده مشتق‌پذیر نیست؟ ۱/۵

الف)



ب)



۹ اگر f و g توابع مشتق‌پذیر باشند و $f(1)=4$، $f'(1)=-1$، $g(1)=2$ و $g'(1)=7$، مقدار $(g-f)'(1)$ و $(fg)'(1)$ را به دست آورید. ۲

۱۰ معادلهٔ حرکت یک متحرک روی یک خط مستقیم به بصورت $f(t)=2t^2-5t+1$ است. سرعت متوسط این متحرک را در فاصلهٔ زمانی $t_1=0$ و $t_2=3$ تعیین کنید. (هماهنگ استانی) ۱

۱۱ الف) طول نقاط بحرانی تابع $f(x)=x^2-4x+1$ را به‌دست آورید. ۲

ب) تابعی مثال بزنید که حداقل یک نقطهٔ بحرانی داشته باشد که نقطهٔ اکسترمم آن تابع نباشد.

آزمــــــون (۱۱) نــوبت دوم (هماهنگ کشوری خردادماه سال ۱۳۹۸)

۱ در جاهای خالی گزینه مناسب داخل پرانتز را انتخاب کنید. ۰/۷۵

الف) تابع $y=(x+1)^{3}$ در دامنهٔ تعریف خود .... (صعودی، نزولی) است.

ب) هرچه خروج از مرکز بیضی .... (کوچکتر، بزرگتر) شود شکل بیضی به دایره نزدیکتر خواهد شد.

پ) دو پیشامدی که با هم رخ ندهند، دو پیشامد .... (مستقل، ناسازگار) هستند.

---

۲ درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید. ۰/۷۵

الف) دو تابع $f(x)=-\dfrac{2x+6}{7}$ و $g(x)=\dfrac{-7}{2}x-3$ وارون یکدیگرند. ☐ درست ☐ نادرست

ب) دورهٔ تناوب تابع $y=\tan x$ برابر 2π است. ☐ درست ☐ نادرست

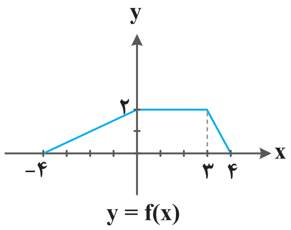
پ) شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه به صورت مخلوط توپر می‌باشد. ☐ درست ☐ نادرست

---

۳ دو تابع $f(x)=\sqrt{x-4}$ و $g(x)=\dfrac{1}{x^{2}-1}$ را درنظر بگیرید. دامنهٔ تابع gof را با استفاده از تعریف به دست آورید. ۱

---

۴ با استفاده از نمودار تابع $y=f(x)$، نمودار $y=\dfrac{1}{2}f(4x)$ را رسم کنید. ۰/۵



---

۵ الف) مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=1-2\sin\left(\dfrac{-\pi}{3}x\right)$ را به دست آورید. ۰/۵

ب) معادلهٔ مثلثاتی $\cos 2\alpha-\sin\alpha+1=1$ را حل کرده، جواب‌های کلی آن را بنویسید. ۱/۲۵

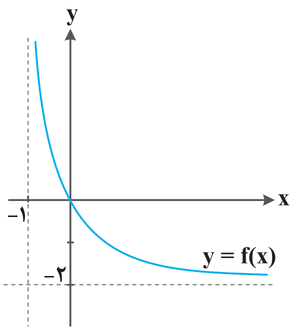
---

۶ الف) حد توابع زیر را در صورت وجود بیابید. ۱/۵

الف) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{\sin x}=$

ب) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{(x-1)(x+2)}=$

ب) با استفاده از نمودار تابع $y=f(x)$، حدهای خواسته شده را بنویسید. ۰/۵



الف) $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=$

ب) $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=$

---

۷ مشتق تابع $f(x)=x^{3}-2$ را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه‌ای به طول $x=-1$ به دست آورید. ۱

آزمـــــــون (۱۲) نـوبت دوم (هماهنگ کشوری شهریور ماه سال ۱۳۹۸)

۹ مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^{2}+x & x\geq 1 \\ 3x-1 & x<1 \end{cases}$ را در نقطهٔ $x=1$ بررسی کنید. ۱/۵

۱۰ مشتق تابع $y=\frac{1}{x}(2\sqrt{x}-1)^{4}$ را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست) ۱/۵

۱۱ آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\sqrt{x+2}$ را وقتی متغیر از $x_1=2$ به $x_2=7$ تغییر می‌کند به دست آورید. ۱

۱۲ الف) جدول تغییرات تابع $f(x)=x^{3}-3x+4$ را رسم کنید و نقاط اکسترمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید. ۱

ب) اکسترمم‌های مطلق تابع $g(x)=x^{3}+2x-5$ را در بازهٔ $[-2,1]$ در صورت وجود تعیین کنید. ۱

۱۳ دو عدد حقیقی a و b را طوری بیابید که داشته باشیم $2a+b=60$ و حاصل ضرب آن‌ها بیشترین مقدار ممکن گردد. ۱

۱۴ وضعیت خط $x+y=3$ را نسبت به دایره $x^{2}+y^{2}-2x-3=0$ مشخص کنید. ۱/۲۵

۱۵ اگر در یک بیضی داشته باشیم $a=5$ و $b=3$ در این صورت اندازه فاصله کنونی این بیضی را محاسبه کنید. ۰/۷۵

۱۶ دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۷ مهره آبی و ۵ مهره قرمز است و ظرف دوم شامل ۶ مهره آبی و ۸ مهره قرمز است. از ظرف اول به تصادف یک مهره انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی این مهره آبی است؟ ۱/۵

ریاضی (۳) — پاسخ‌نامهٔ آزمون (۱) نوبت اول

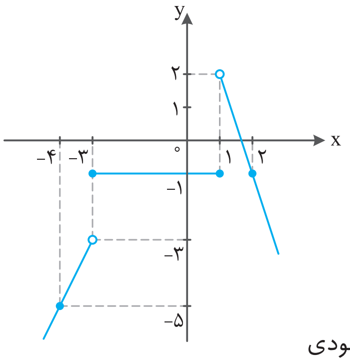
۱

الف) نادرست   ب) نادرست

$$-1\le \sin x\le 1 \xrightarrow{\times 2} -2\le 2\sin x\le 2 \xrightarrow{-1} -3\le 2\sin x-1\le 1$$

۲

الف) در هر بازه با داشتن دو نقطه، نمودار آن قسمت رسم می‌شود.



ب) تابع در بازهٔ $(-\infty, +1]$: صعودی

تابع در بازهٔ $(1, +\infty)$: نزولی

تابع در بازهٔ $[-3, 1]$: ثابت

۳

الف) به ازای هر کدام از دامنه‌های ۱ و ۳ از تابع g، بررسی می‌کنیم، آیا $fog(x)$ وجود دارد؟

$$\left.\begin{array}{l} x=1\Rightarrow fog(1)=f(g(1))=f(2)=2\\ x=3\Rightarrow fog(3)=f(g(3))=f(5)=5\end{array}\right\}\Rightarrow fog=\{(1,2),(3,5)\}$$

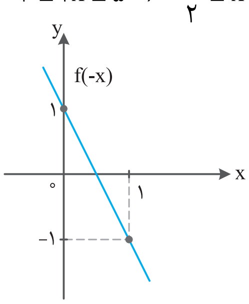
ب) $gof(3)=g(f(3))=g(3)=5$

۴

الف) با توجه به دامنهٔ تابع $f(x)$، عددی که وارد تابع f می‌شود، باید در بازهٔ $[-3,5]$ باشد؛ پس $2x$ نیز باید این‌گونه باشد:

$$-3\le 2x\le 5\Rightarrow -\frac{3}{2}\le x\le \frac{5}{2}$$

ب) $f(-x)=2(-x)+1=-2x+1$



۵

تابع تخفیف نقدی به‌صورت $f(x)=x-250000$ و تابع کارت تخفیف ۱۵ درصدی به صورت $g(x)=\frac{85}{100}x$ است.

اگر از راه (الف) استفاده کند، تابع خرید محمد به صورت زیر است:

$$f(g(x))=f(\frac{85}{100}x)=\frac{85}{100}x-250000$$

$$=\frac{85}{100}x-\frac{85}{100}\times 250000=\frac{85}{100}x-212500$$

و اگر از راه (ب) استفاده کند، تابع خرید محمد به صورت زیر است:

$$g(f(x))=g(x-250000)=\frac{85}{100}(x-250000)$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، راه (الف) به نفع محمد است؛ زیرا از $\frac{85}{100}$ قیمت خرید گوشی، مقدار بیش‌تری را کم می‌کند.

۶

باید ثابت کنیم ترکیب دو تابع f و g برابر تابع همانی است:

$$fog(x)=f(g(x))=f(\frac{x-5}{2})=2(\frac{x-5}{2})+5=x\quad (x\in D_g)$$

$$gof(x)=g(f(x))=g(2x+5)=\frac{(2x+5)-5}{2}=x\quad (x\in D_f)$$

بنابراین دو تابع f, g وارون یکدیگرند.

۷

می‌دانیم توابع $y=a\sin bx+c$ ، $y=a\cos bx+c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a|+c$ و مقدار مینیمم $-|a|+c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

الف) دوره تناوب $=\frac{2\pi}{|\frac{\pi}{4}|}=8$، مینیمم $=-|2|+5=3$، ماکزیمم $=|2|+5=7$

ب) مینیمم $=-|3|+(-1)=-4$، ماکزیمم $=|3|+(-1)=2$، دوره‌تناوب $=\frac{2\pi}{|-\frac{1}{2}|}=4\pi$

۸

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow (\frac{3}{5})^2+\cos^2\alpha=1$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}\Rightarrow \cos\alpha=\pm\frac{4}{5}$$

با توجه به این‌که α زاویهٔ تند است؛ نتیجه می‌گیریم $\cos\alpha=+\frac{4}{5}$ است.

حال کافی است در روابط زیر، مقادیر $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ را جای‌گذاری کنیم:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2(\frac{3}{5})(\frac{4}{5})=\frac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=(\frac{4}{5})^2-(\frac{3}{5})^2=\frac{7}{25}$$

۹

الف) $4\sin^2x-1=0\Rightarrow 4\sin^2 x=1\Rightarrow \sin^2x=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \sin x=+\frac{1}{2}$ یا $-\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x=\sin(\frac{\pi}{6})$ یا $\sin(-\frac{\pi}{6})$

جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin x=\sin\alpha$ به‌صورت $x=2k\pi+\alpha$ و $x=(2k+1)\pi-\alpha$ که $k\in\mathbb{Z}$ است بنابراین:

جواب‌های کلی $=2k\pi+\frac{\pi}{6},(2k+1)\pi-\frac{\pi}{6},2k\pi-\frac{\pi}{6},(2k+1)\pi+\frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow 2k\pi\pm\frac{\pi}{6},(2k+1)\pi\pm\frac{\pi}{6}$$

ب) جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos x=\cos\alpha$ به‌صورت $x=2k\pi\pm\alpha$ که $k\in\mathbb{Z}$ است بنابراین:

$$\cos 3x=\cos 2x\Rightarrow \begin{cases}3x=2k\pi+2x\\3x=2k\pi-2x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2k\pi\\5x=2k\pi\end{cases}\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{5}$$

۱۰

الف) می‌دانیم اگر $f(a)=۰$ باشد؛ آن‌گاه $f(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر است.

$f(۱)=۳(۱)^۳+۵(۱)^۲-۸=۰ \Rightarrow$ $f(x)$ بر $(x-۱)$ بخش‌پذیر است.

ب)

$$\begin{array}{l|l} ۳x^۳+۵x^۲-۸ & x-۱ \\ \hline -(۳x^۳-۳x^۲) & ۳x^۲+۸x+۸ \\ ۸x^۲-۸ & \\ -(۸x^۲-۸x) & \\ ۸x-۸ & \\ -(۸x-۸) & \\ ۰ & \end{array}$$

پ) $f(x)=۳x^۳+۵x^۲-۸=(x-۱)(۳x^۲+۸x+۸)$

۱۱

الف) چون مقدار صورت و مخرج به ازای $x=۲$ برابر صفرند، باید عامل $(x-۲)$ را در صورت و مخرج ظاهر کرد:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-۴}{x^۲+x-۶}=\lim_{x\to ۲}\frac{\cancel{(x-۲)}(x+۲)}{\cancel{(x-۲)}(x+۳)}=\lim_{x\to ۲}\frac{x+۲}{x+۳}=\frac{۴}{۵}$$

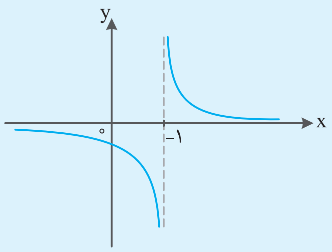
ب) در حد $+\infty$، مقادیر $\frac{۱}{\sqrt{x}}$ و $\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}$ به صفر نزدیک می‌شوند:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{۱-\frac{۱}{\sqrt{x}}}{۲+\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}}=\frac{۱-۰}{۲+۰}=\frac{۱}{۲}$$

۱۲

الف) عبارت $\lim_{x\to ۱^-} f(x)=-\infty$ به این معناست که می‌توان مقدارهای $f(x)$ را از هر عدد منفی دلخواهی کوچک‌تر کرد، به شرطی که x با مقادیر کوچک‌تر از ۱ به قدر کافی به ۱ نزدیک شود.

و عبارت $\lim_{x\to ۱^+} f(x)=+\infty$ به این معناست که می‌توان مقدارهای $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ‌تر کرد، به شرطی که x با مقادیر بزرگ‌تر از ۱ به اندازه کافی به ۱ نزدیک شود.



ب) مسئله بی‌شمار جواب دارد.

۱۳

شیب	-۴	-۲	۰	۱	۲
نقطه	E	A	D	C	B

خط مماس بر منحنی در نقطه D، موازی محور xها است؛ بنابراین شیب آن صفر است.

شیب خط مماس بر منحنی در نقاط B و C مثبت است که با توجه به این‌که زاویهٔ خط مماس در نقطهٔ B با جهت مثبت محور xها از زاویه در نقطه C بیش‌تر است، پس شیب خط B از C بیش‌تر است.

شیب خط مماس بر منحنی در نقاط A و E منفی است؛ زیرا از چپ به راست به صورت سرازیری است زاویهٔ خط مماس در نقطهٔ A با جهت مثبت محور xها از زاویهٔ خط مماس در نقطه E با جهت مثبت محور xها بیش‌تر است، پس مقدار شیب خط A از E بیش‌تر است.

۱۴

الف) $f(x)=۴x^۲-x+۲ \Rightarrow f(۳)=۳۵$

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۴(۳+h)^۲-(۳+h)+۲-۳۵}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{۳۶+۲۴h+۴h^۲-۳-h+۲-۳۵}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۲۳h+۴h^۲}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}(۲۳+۴h)=۲۳$$

شیب خط در نقطه‌ای به طول ۳ $=f'(۳)=۲۳$

ب) معادله: $y-۳۵=۲۳(x-۳)\Rightarrow y=۲۳x-۳۴$

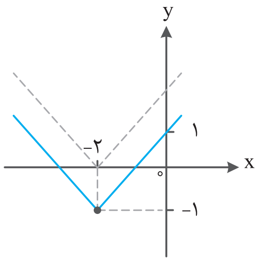
ریاضی (۳) — پاسخ‌نامه آزمون (۲) نوبت اول

۱

ابتدا نمودار $|x+۲|$ را رسم کرده و سپس نمودار را ۱ واحد به سمت پایین می‌آوریم:

تابع در بازهٔ $(-\infty,-۲]$: نزولی

تابع در بازهٔ $[-۲,+\infty)$: صعودی



۲

$fog(-۲)=f(g(-۲))=f(۵)=$ تعریف نشده

$gof(-۲)=g(f(-۲))=g(۰)=۳$

$fof(۰)=f(f(۰))=f(۱)=-۲$

$gog(۱)=g(g(۱))=g(-۲)=۵$

۳

الف) $D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$ ، $D_g=[۱,+\infty)$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

$$=\{x\in[۱,+\infty) \mid \sqrt{x-۱}\in\mathbb{R}-\{۰\}\}=(۱,+\infty)$$

توجه: عبارت $\sqrt{x-۱}\in\mathbb{R}-\{۰\}$ یعنی $\sqrt{x-۱}\neq ۰$ باشد، $\Leftarrow x\neq ۱$.

ب) $(fog)(x)=f(g(x))=\frac{g(x)-۱}{g(x)}=\frac{\sqrt{x-۱}-۱}{\sqrt{x-۱}}$

۱۴

فاصلهٔ نقطهٔ $C(-۱,۳)$ تا خط مماس $-۳x+۴y-۱۰=۰$، همان طول شعاع دایره است.

$$\text{شعاع دایره}=\frac{|-۳(-۱)+۴(۳)-۱۰|}{\sqrt{(-۳)^۲+۴^۲}}=\frac{۵}{۵}=۱$$

معادلهٔ دایره: $(x-(-۱))^۲+(y-۳)^۲=۱^۲ \Rightarrow (x+۱)^۲+(y-۳)^۲=۱$

۱۵

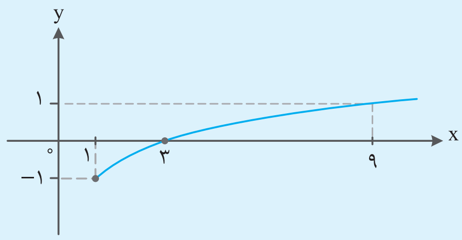
$$P(\text{قهرمانی})=P(\text{فوتبال}).P(\text{قهرمانی}|\text{فوتبال})$$
$$+P(\text{بسکتبال}).P(\text{قهرمانی}|\text{بسکتبال})+P(\text{کشتی}).P(\text{قهرمانی}|\text{کشتی})$$
$$=(۰/۲)(۰/۳)+(۰/۳)(۰/۶)+(۰/۵)(۰/۴۵)=۰/۴۶۵$$

پویا به احتمال ۰/۴۶۵ در این دوره مسابقات قهرمان می‌شود.

ریاضی (۳) — پاسخ‌نامهٔ آزمون (۶) نوبت دوم

۱

تابع لگاریتمی $y=\log_۳ x-۱$ مطابق شکل، یکنوا و صعودی است:



۲

$$(fog)(-۲)=f(g(-۲))=f(۲)=۰$$
$$(gof)(۰)=g(f(۰))=g(۰)=۴$$

۳

$$y=\frac{x-۵}{۲x+۳}\Rightarrow y(۲x+۳)=x-۵\Rightarrow ۲xy+۳y=x-۵$$
$$\Rightarrow ۲xy-x=-۵-۳y\Rightarrow x(۲y-۱)=-۵-۳y$$
$$\Rightarrow x=\frac{-۵-۳y}{۲y-۱}=\frac{۵+۳y}{۱-۲y}\Rightarrow f^{-۱}(y)=\frac{۵+۳y}{۱-۲y}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۵+۳x}{۱-۲x}$$

۴

$$\text{دوره تناوب}=\frac{۲\pi}{b}=\pi\Rightarrow b=۲$$

مقدار ماکزیمم $=a+c=-۱$ ، مقدار مینیمم $=-a+c=-۵$

$$\Rightarrow a=\frac{(-۱)-(-۵)}{۲}=۲\ ,\ c=\frac{(-۱)+(-۵)}{۲}=-۳$$

تابع مثلثاتی: $y=۲\sin(۲x)-۳$

۵

$$\cos ۲x-۳\cos x+۲=۰\Rightarrow ۲\cos^۲ x-۱-۳\cos x+۲=۰$$
$$\Rightarrow ۲\cos^۲ x-۳\cos x+۱=۰\Rightarrow (۲\cos x-۱)(\cos x-۱)=۰$$
$$\Rightarrow \cos x=\frac{۱}{۲}\ \text{یا}\ \cos x=۱$$

$$\cos x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \cos x=\cos\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\ \text{و}\ k\in\mathbb{Z}$$
$$\cos x=۱\Rightarrow \cos x=\cos ۰\Rightarrow x=۲k\pi\ \text{و}\ k\in\mathbb{Z}$$

۶

الف) $\lim_{x\to ۱^+} f(x)=۲$ ب) $\lim_{x\to ۱^-} f(x)=۱$

پ) با توجه به مقادیر متفاوت حدهای چپ و راست در نقطهٔ $x=۱$، نتیجه می‌گیریم که $\lim_{x\to ۱} f(x)$ وجود ندارد.

۷

الف) $$\lim_{x\to ۱}\frac{۲-\sqrt{x+۳}}{x^۲-۱}\times\frac{۲+\sqrt{x+۳}}{۲+\sqrt{x+۳}}=\lim_{x\to ۱}\frac{۴-(x+۳)}{(x^۲-۱)(۲+\sqrt{x+۳})}$$
$$=\lim_{x\to ۱}\frac{۱-x}{(x-۱)(x+۱)(۲+\sqrt{x+۳})}=\lim_{x\to ۱}\frac{-۱}{(x+۱)(۲+\sqrt{x+۳})}$$
$$=\frac{-۱}{(۲)(۲+\sqrt{۴})}=-\frac{۱}{۸}$$

ب) $$\lim_{x\to -\infty}\frac{۳}{۲-x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{۳}{x(\frac{۲}{x}-۱)}$$
$$=(\lim_{x\to -\infty}\frac{۳}{x})(\lim_{x\to -\infty}\frac{۱}{\frac{۲}{x}-۱})=۰\times\frac{۱}{۰-۱}=۰$$

۸

خط مماس بر منحنی در نقطهٔ E، موازی محور xها است؛ بنابراین شیب خط یا همان مشتق در نقطهٔ E صفر است.

شیب خط مماس بر منحنی در نقاط A، B و D، مثبت است که زاویهٔ این خط‌ها با جهت مثبت محور xها، به ترتیب از D، A و B از زیاد به کم تبدیل می‌شود؛ پس به ترتیب شیب خط مماس بر منحنی در این نقاط (یا همان مشتق) برابر ۴، ۳ و ۱ است.

شیب	-۵	-۳	۰	۱	۳	۴
نقطه	F	C	E	B	A	D

شیب خط مماس بر منحنی در نقاط C و F، منفی است که زاویهٔ این خط‌ها با جهت مثبت محور xها، به ترتیب از C و F از زیاد به کم تبدیل می‌شود؛ بنابراین به ترتیب شیب خط مماس بر منحنی در این نقاط (یا همان مشتق) برابر ۳- و ۵- است.

۹

الف) $$g(x)=\frac{۳}{x^۲+۴x}\Rightarrow g'(x)=\frac{(۳)'(x^۲+۴x)-(x^۲+۴x)'(۳)}{(x^۲+۴x)^۲}$$
$$\Rightarrow g'(x)=\frac{(۰)(x^۲+۴x)-(۲x+۴)(۳)}{(x^۲+۴x^۲)}=\frac{-۶x-۱۲}{(x^۲+۴x)^۲}$$

ب) $$k(x)=\sqrt{۳x+۲}\Rightarrow k'(x)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{\sqrt{۳x+۲}}$$

۱۶

پیشامد انتخاب ظرف‌های اول و دوم را به ترتیب با A_1 و A_2 و پیشامد خارج شدن مهره قرمز را با B نمایش می‌دهیم:

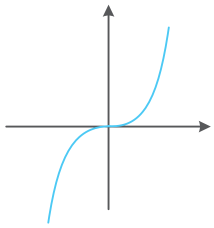
$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$$

$$P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{10}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{15}=\frac{11}{30}$$

ریاضی (۳) — پاسخ‌نامه آزمون (۱۰) نوبت دوم

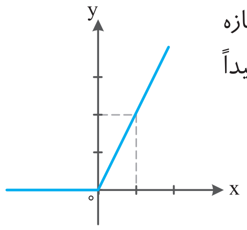
۱

الف) با توجه به تبدیل روبه‌رو و نمودار رسم شده، مشخص می‌شود که تابع در همهٔ بازه‌ها، اکیداً صعودی است.



$$g(x)=x|x|=\begin{cases}x^2 & x\geq 0\\ -x^2 & x<0\end{cases}$$

ب) با توجه به نمودار رسم شده، تابع در بازه $(-\infty,0]$، تابع ثابت و در بازه $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی است.



۲

الف) $D_f=\mathbb{R}$ ، $D_g=\mathbb{R}$

$$Dgof=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R}\mid (x+1)\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$$

ب) $(fog)(1)=f(g(1))=f(2\times 1^2-1=1)=1+1=2$

$(gof)(1)=g(f(1))=g(1+1=2)=2\times 2^2-1=7$

$\Rightarrow (fog)(1)\neq(gof)(1)$

۳

الف) $y=2x^2-1\Rightarrow y+1=2x^2\Rightarrow x^2=\frac{y+1}{2}\xrightarrow{x\geq}$

$x=\sqrt{\frac{y+1}{2}}\Rightarrow f^{-1}(y)=\sqrt{\frac{y+1}{2}}\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{\frac{x+1}{2}}$

ب) $y=1-\frac{x+1}{3}\Rightarrow\frac{x+1}{3}=1-y\Rightarrow x+1=3-3y\Rightarrow x=2-3y$

$\Rightarrow f^{-1}(y)=2-3y\Rightarrow f^{-1}(x)=2-3x$

۴

الف) دورهٔ تناوب $=T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{|\pi|}=2$

ماکزیمم $=|a|+c=\left|-\frac{\pi}{2}\right|+\frac{3\pi}{2}=2\pi$

مینیمم $=-|a|+c=-\left|-\frac{\pi}{2}\right|+\frac{3\pi}{2}=\pi$

ب) دورهٔ تناوب $=T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{|6|}=\frac{\pi}{3}$

ماکزیمم $=|a|+c=|4|+(-1)=3$

مینیمم $=-|a|+c=-|4|+(-1)=-5$

۵

$\sin 2x-\sqrt{3}\cos x=0\to 2\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos x=0$

$\Rightarrow \cos x(2\sin x-\sqrt{3})=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos x=0\Rightarrow\cos x=\cos\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}\ ,k\in\mathbb{Z}\\ \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\sin x=\sin\frac{\pi}{3}\\ \Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{3}\ ,k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

۶

راه اول برای محاسبهٔ مقدار m: باقی‌ماندهٔ تقسیم باید ۲ شود:

$$\begin{array}{l|l}2x^4+mx+2 & x+1\\ \hline -(2x^4+2x^3) & 2x^3-2x^2+2x+(m-2)\\ \hline -2x^3+mx+2 & \\ -(-2x^3-2x^2) & \\ \hline 2x^2+mx+2 & \\ -(2x^2+2x) & \\ \hline (m-2)x+2 & \\ -((m-2)x+m-2) & \\ \hline 4-m & \end{array}$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم $(4-m)$ شد که همان ۲ است، پس $m=2$ است.

راه دوم برای محاسبهٔ مقدار m: باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x+1$ برابر $P(-1)=2$ است: $P(-1)=2-m+2=2\Rightarrow m=2$

$$\begin{array}{l|l}2x^4+2x+2 & x-1\\ \hline -(2x^4-2x^3) & 2x^3+2x^2+2x+4\\ \hline 2x^3+2x+2 & \\ -(2x^3-2x^2) & \\ \hline 2x^2+2x+2 & \\ -(2x^2-2x) & \\ \hline 4x+2 & \\ -(4x-4) & \\ \hline 6 & \end{array}$$

یا $x-1=0\Rightarrow x=1\Rightarrow P(1)=6$

۷

الف) $\lim_{x\to+\infty}\left(7-\frac{3}{x^2}\right)=7-0=7$

ب) $\lim_{x\to-\infty}\frac{15x-9}{12x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}(15-\frac{9}{x})}{\cancel{x}(12+\frac{1}{x})}=\frac{15-0}{12+0}=\frac{15}{12}$

۸

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^۳-a^۳}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}(x^۲+ax+a^۲)}{\cancel{(x-a)}}\Rightarrow f'(a)=a^۲+a^۲+a^۲=۳a^۲$$

معادله خط قائم بر نمودار در نقطه $A(۱,۱)$: $y-۱=۳(x-۱)\Rightarrow y=۳x-۲$

۹

الف) $f(x)=\dfrac{۲x-۳}{x^۲-۶x+۵}$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{(۲x-۳)'(x^۲-۶x+۵)-(x^۲-۶x+۵)'(۲x-۳)}{(x^۲-۶x+۵)^۲}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{۲(x^۲-۶x+۵)-(۲x-۶)(۲x-۳)}{(x^۲-۶x+۵)^۲}$$

ب) $g(x)=\sqrt{x}(x-۱)^۲\Rightarrow g'(x)=(\sqrt{x})'(x-۱)^۲+((x-۱)^۲)'(\sqrt{x})$

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(x-۱)^۲+۲(x-۱)\sqrt{x}$$

۱۰

الف) $m(۳)-m(۲)=(۸۱+۲\sqrt{۳})-(۲۴+۲\sqrt{۲})=۵۷+۲\sqrt{۳}-۲\sqrt{۲}$

ب) $m(t)=۳t^۳+۲\sqrt{t}\Rightarrow m'(t)=۹t^۲+۲\times\dfrac{۱}{۲\sqrt{t}}=۹t^۲+\dfrac{۱}{\sqrt{t}}$

آهنگ لحظه‌ای رشد باکتری در $t=۴$: $m'(۴)=۹(۴)^۲+\dfrac{۱}{\sqrt{۴}}=۱۴۴/۵$

۱۱

$f(x)=-x^۳+۳x\Rightarrow f'(x)=-۳x^۲+۳$

نقاط بحرانی f: $f'(x)=۰\Rightarrow ۳x^۲=۳\Rightarrow x=\pm۱$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
علامت f'		$-$		$+$		$-$	
			مینیمم		ماکزیمم		

نقطه با طول $x=-۱$، مینیمم نسبی و نقطه با طول $x=۱$، ماکسیمم نسبی تابع f است.

۱۲

ارتفاع مکعب حاصل x و طول عرضش $۲۴-۲x$ خواهد بود، بنابراین حجم قوطی برابر است با: $V(x)=x(۲۴-۲x)^۲$

$$\Rightarrow x(۵۷۶-۹۶x+۴x^۲)=۴x^۳-۹۶x^۲+۵۷۶x\ ,\ x\in(۰,۱۲)$$

نقاط بحرانی $V(x)$ را مشخص می‌کنیم.

$$V'(x)=۰\Rightarrow ۱۲x^۲-۱۹۲x+۵۷۶=۰\Rightarrow ۱۲(x^۲-۱۶x+۴۸)=۰$$

$$\Rightarrow ۱۲(x-۴)(x-۱۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۴ & \text{نقطه بحرانی}\\ x=۱۲\notin(۰,۱۲)\end{cases}$$

با توجه به جدول تغییرات تابع V، مشخص می‌شود به ازای $x=۴$، حجم قوطی حداکثر مقدار ممکن می‌شود.

x	۰		۴		۱۲		$+\infty$
$V'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$V(x)$			ماکزیمم مطلق				

۱۳

الف) بیضی با نقاط کانونی $(۲,۵)$ و $(۲,۱۱)$ یک بیضی قائم است.

$$\text{مرکز بیضی}=(۲,\frac{۵+۱۱}{۲})=(۲,۸)$$

معادلهٔ قطر بزرگ بیضی به صورت $x=۲$ است؛ زیرا از دو نقطهٔ کانونی عبور می‌کند. معادله قطر کوچک بیضی که بر قطر بزرگ عمود است (یعنی معادله به صورت $y=k$ دارد) و از نقطهٔ مرکز $(۲,۸)$ عبور می‌کند به صورت $y=۸$ خواهد بود.

ب) فاصله کانونی $=۱۱-۵=۶\Rightarrow c=۶\div۲=۳$

قطر بزرگ $=۱۰\Rightarrow a=۱۰\div۲=۵$

$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow ۵^۲=b^۲+۳^۲\Rightarrow b=۴\Rightarrow$ قطر کوچک $=۲\times۴=۸$

خروج از مرکز بیضی $=\dfrac{c}{a}=\dfrac{۳}{۵}$

۱۴

خط مماس بر خطی که از نقاط $(۱,۵)$ و $(-۲,۴)$ عبور می‌کند عمود است؛ زیرا خط مماس در نقطه تماس بر شعاع دایره عمود است.

شیب خطی که از نقاط $(۱,۵)$ و $(-۲,۴)$ عبور می‌کند: $\dfrac{۵-۴}{۱-(-۲)}=\dfrac{۱}{۳}$

$\Rightarrow$ شیب خط مماس $=-۳$

معادله خطی که از نقطهٔ $(۱,۵)$ با شیب (-۳) عبور می‌کند برابر است با: $y-۵=-۳(x-۱)\Rightarrow y=-۳+۸$

۱۵

فرض کنید کودک و نوجوان را با k، میانسال را با M، سالمند را با S و به بیماری مبتلا بودن را با B، نمایش دهیم:

$$P(B)=P(K)P(B|K)+P(M).P(B|M)+P(S).P(B|S)$$

$$P(B)=(\frac{۳۰}{۱۰۰})(\frac{۴}{۱۰۰})+(\frac{۶۰}{۱۰۰})(\frac{۲}{۱۰۰})+(\frac{۱۰}{۱۰۰})(\frac{۵}{۱۰۰})$$

$$=\frac{۲۹۰}{۱۰۰۰۰}=۰/۰۲۹$$

۱۶

اگر B و R به‌ترتیب پیشامد آبی و قرمز بودن مهره خارج شده از ظرف اول باشد و پیشامد انتخاب مهرهٔ آبی از ظرف دوم A باشد، آن‌گاه داریم:

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(R)P(A|R)$$

$$\Rightarrow\frac{۶}{۱۴}\times\frac{۱۰}{۱۶}+\frac{۸}{۱۴}\times\frac{۹}{۱۶}=\frac{۱۳۲}{۲۲۴}$$

ریاضی (۳) — پاسخ‌نامه آزمون (۱۱) نوبت دوم

۱

الف) صعودی ب) کوچکتر

پ) ناسازگار

۲

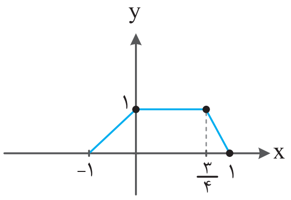
الف) درست   ب) نادرست

پ) درست

۳

$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\geq ۴ \mid \sqrt{x-۴}\neq \pm ۱\}=[۴,۵)\cup(۵,+\infty)$

۴



۵

الف) صفحات: ۴۰ و ۴۸

$\max=|-۲|+۱=۳ \quad , \quad \min=-|-۲|+۱=-۱$

ب)

$$۱-۲\sin^۲\alpha-\sin\alpha+۱=۱\Rightarrow ۲\sin^۲\alpha+\sin\alpha-۱=۰\Rightarrow \begin{cases}\sin\alpha=-۱\\ \sin\alpha=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}\\ \alpha=۲k\pi+\frac{\pi}{۶} \;,\; \alpha=(۲k+۱)\pi-\frac{\pi}{۶}\end{cases} \; ; k\in\mathbb{Z}$$

۶

الف)

آ) $\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$

ب) (ضرب صورت و مخرج در $x+\sqrt{x}$)

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-x}{(x+۲)(x-۱)(x+\sqrt{x})}=\lim_{x\to ۱}\frac{x\cancel{(x-۱)}}{(x+۲)\cancel{(x-۱)}(x+\sqrt{x})}=+\frac{۱}{۶}$$

ب) آ) -۲ ب) $+\infty$

۷

$$f'(-۱)=\lim_{x\to -۱}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{x^۳-۲+۳}{x+۱}$$

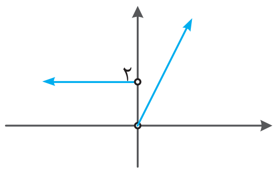
$$=\lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(x^۲-x+۱)}{x+۱}=۳$$

۸

الف) شکل تابع در $x=۰$ گوشه‌ای و مشتق‌ناپذیر است.

ب) $f'(x)=\begin{cases}۲ & ; \; x<۰\\ ۲x & ; \; x>۰\end{cases}$

ج)



۹

الف) $f'(x)=۵(x^۴-۳x)^۴(۴x^۳-۳)$

ب) $g'(x)=\dfrac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۱-x)-(-۱)\sqrt{x}}{(۱-x)^۲}$

۱۰

آهنگ توسط $=\frac{f(۴)-f(۰)}{۴-۰}=\frac{۲۸-۰}{۴}=۷ \;,\; f'(t)=۴t-۱$

$\Rightarrow ۴t-۱=۷\rightarrow t=۲$

۱۱

$f'(x)=۲ax+b\Rightarrow ۰=۲a+b\Rightarrow b=-۲a$

$f(۱)=۷\Rightarrow ۷=a+b\Rightarrow a=-۷, b=۱۴$

۱۲

$f'(x)=۶x^۲+۶x-۱۲\Rightarrow f'(x)=۶(x^۲+x-۲)=۰$

$\Rightarrow\begin{cases}x=-۲\notin[-۱,۳]\\ x=۱\end{cases}$

$f(۱)=-۷, f(-۱)=۱۳, f(۳)=۴۵$

$(۱,-۷)$ مینیمم مطلق و نقطه $(۳,۴۵)$ ماکزیمم مطلق

۱۳

جعبه‌ای به طول $۱-۲x$، عرض $۱-۲x$ و ارتفاع x ایجاد می‌شود:

$v(x)=(۱-۲x)^۲\times x=x-۴x^۲+۴x^۳$

$v'(x)=۱-۸x+۱۲x^۲=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}, x=\frac{۱}{۶}$

$x=\frac{۱}{۶}$ قابل قبول است.

(مقدار $x=\frac{۱}{۲}$ باعث می‌شود طول و عرض جعبه صفر شوند وحجم جعبه نیز صفر شود.)

۱۴

دو دایره متخارج هستند.

$O_۱=(-۱,۲) \;,\; r_۱=۱ \;,\; O_۲\begin{cases}-\frac{a}{۲}=۱\\ -\frac{b}{۲}=-۲\end{cases} \;,\; r_۲=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=۲$

$d=\sqrt{(-۱-۱)^۲+(۲+۲)^۲}=\sqrt{۲۰}\Rightarrow \sqrt{۲۰}>۱+۲=۳$

۱۵

$۲a=۸\Rightarrow a=۴ \;,\; ۲b=۶\Rightarrow b=۳$

$c^۲=a^۲-b^۲\Rightarrow c^۲=۱۶-۹=۷\Rightarrow c=\sqrt{۷}$

$۲c=۲\sqrt{۷}$ فاصله کانونی

۱۶

$p(A)=\frac{۱}{۳}\times\frac{۴}{۹}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۱۰}+\frac{۱}{۳}\times ۰=\frac{۶۷}{۲۷۰}$

ریاضی (۳) | پاسخ‌نامه آزمون (۱۲) نوبت دوم

۱

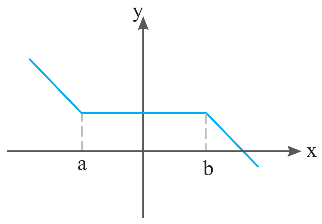
الف) نادرست   ب) درست

ج) نادرست

۲

الف) $-\infty$ ب) استوانه

نکته به نمودار شکل زیر دقت کنید.



این تابع در بازه‌های $(-\infty, a] \cup [b, +\infty)$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $[a, b]$ ثابت است و درجا می‌زند.

به این‌گونه توابع، نزولی می‌گوییم و به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$x_1, x_2 \in D_f, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$$

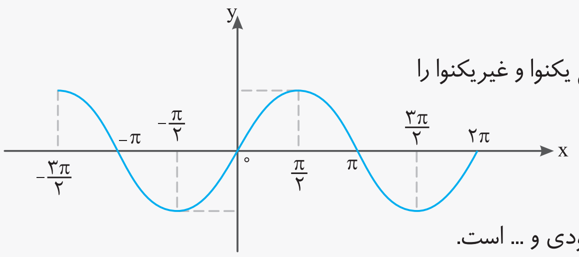
و اگر رابطه‌ای به‌صورت زیر تعریف شود به آن تابع صعودی می‌گوییم:

$$x_1, x_2 \in D_f, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$$

◆ تابع f را در یک بازه ثابت می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر x در این بازه، مقدار f ثابت باشد. باتوجه به تعاریف بالا، تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.

◆ **توابع یکنوا و غیریکنوا:**

ابتدا به نمودار زیر دقت کنید که بعد با توضیح کامل این نمودار مفهوم توابع یکنوا و غیریکنوا را درک می‌کنیم:



این تابع در بازهٔ $[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ اکیداً صعودی و ... است.

به این توابع که گاهی صعودی و گاهی نزولی‌اند، نه صعودی و نه نزولی یا غیریکنوا می‌گوییم.

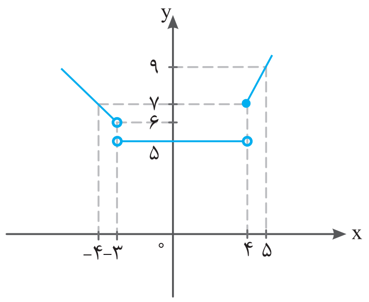
به توابعی که در دامنه‌شان همواره صعودی یا همواره نزولی باشند، یکنوا می‌گویند.

◆ برای تشخیص صعودی یا نزولی بودن یک تابع در بازه‌های مختلف، ساده‌ترین کار رسم شکل است.

مثال نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آن‌ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -x + 3 & x < -3 \\ 5 & -3 \le x < 4 \\ 2x - 1 & x \ge 4 \end{cases}$$

پاسخ: برای هر ضابطه، نمودار تابع را مطابق شکل می‌کشیم و مشخص می‌شود که:

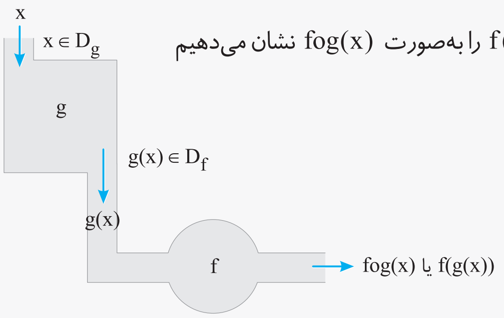


در بازهٔ $x < ۴$: تابع نزولی، در بازهٔ $-۳ \le x < ۴$ تابع ثابت و در بازهٔ $x \ge -۳$: تابع صعودی است.

درس دوم: ترکیب توابع

اگر f و g دو تابع باشند، به‌طوری که اشتراک برد g و دامنهٔ f غیرتهی باشد، تابع $f(g(x))$ را به‌صورت $fog(x)$ نشان می‌دهیم و آن را ترکیب f با g می‌نامیم.

مراحل ساخت تابع مرکب fog را می‌توان به‌صورت روبه‌رو نمایش داد:



مثال: اگر $g=\{(۲,۱),(۳,-۲),(۱,۰),(-۲,۵),(۴,-۶)\}$ و $f=\{(۰,-۲),(۳,۴),(۴,۱),(-۱,۵)\}$ باشند، تابع gof را در صورت امکان بنویسید.

پاسخ: به‌ازای هرکدام از مقادیر دامنهٔ f به جای x، تابع مرکب را می‌نویسیم:

$$\left.\begin{aligned} gof(۰)&=g(f(۰))=g(-۲)=۵\\ gof(۳)&=g(f(۳))=g(۴)=-۶\\ gof(۴)&=g(f(۴))=g(۱)=۰\\ gof(-۱)&=g(f(-۱))=g(-۱)=\text{تعریف نشده}\end{aligned}\right\}\Rightarrow gof=\{(۰,۵),(۳,-۶),(۴,۰)\}$$

دامنهٔ تابع مرکب: ۱- دامنهٔ تابع مرکب gof مجموعه xهایی است که در دامنهٔ f قرار داشته باشند، به شرطی که $f(x)$ در دامنهٔ g قرار داشته باشد؛ به بیان دیگر: $D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$

۲- دامنهٔ تابع مرکب fog مجموعه xهایی است که در دامنهٔ g قرار داشته باشند به شرطی که $g(x)$ در دامنهٔ f قرار داشته باشد؛ به بیان دیگر: $D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$

مثال: اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}$ و $g(x)=x^۲-۱$ باشد، دامنه و ضابطهٔ تابع gof را بنویسید.

پاسخ: ابتدا دامنهٔ f و g را به‌دست می‌آوریم تا بتوانیم دامنهٔ gof را بنویسیم.

$$D_f=[۱,+\infty),\ D_g=\mathbb{R}$$
$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in Dg\}$$
$$=\{x\in[۱,+\infty) \mid \sqrt{x-۱}\in R\}=[۱,+\infty)$$

دقت کنید که عبارت $\sqrt{x-۱}\in\mathbb{R}$ به‌ازای $x-۱\ge ۰$ یعنی $x\ge ۱$ درست است.

تذکر: دامنهٔ توابع مرکب را همیشه با توجه به تعاریف آن به‌دست می‌آوریم، (نه از روی ضابطه!) زیرا از روی ضابطه ممکن است دامنه نادرست به‌دست آید (مانند همین مثال!) اما محاسبهٔ ضابطه:

$$(gof)(x)=g(f(x))=(f(x))^۲-۱=(\sqrt{x-۱})^۲-۱=x-۱-۱=x-۲$$

دامنهٔ $\mathbb{R}$ به‌دست آمده که نادرست است.

نکته: اگر $(fog)(x)$ و $f(x)$ را بدهند و $g(x)$ را بخواهند، به‌ترتیب مراحل زیر را طی می‌کنیم.

۱) به‌جای x، عبارت $g(x)$ را در تابع f قرار می‌دهیم تا $fog(x)$ به‌دست آید.

۲) با مقایسهٔ $(fog)(x)$ به‌دست‌آمده با $(fog)(x)$ داده‌شده در مسئله، $g(x)$ مشخص می‌شود.

مثال: اگر $f(x)=\frac{x}{x+۱}$ و $(fog)(x)=\frac{۲}{x-۱}$ باشد، ضابطهٔ تابع $g(x)$ را بیابید.

پاسخ:

$$(fog)(x)=f(g(x))=\frac{g(x)}{g(x)+۱}\overset{\text{طبق فرض}}{=\!=}\frac{۲}{x-۱}\Rightarrow(x-۱)(g(x))=۲(g(x)+۱)$$

$$\Rightarrow xg(x)-g(x)=۲g(x)+۲\Rightarrow xg(x)-۳g(x)=۲\Rightarrow g(x)(x-۳)=۲\Rightarrow g(x)=\frac{۲}{x-۳}$$

نکته: اگر $(fog)(x)$ و $g(x)$ را بدهند و $f(x)$ را بخواهند، به‌ترتیب مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱) ضابطهٔ $g(x)$ را به‌جای آن در $f(g(x))$ را جایگذاری می‌کنیم.

۲) عبارت داخل پرانتز را t فرض می‌کنیم.

۳) x را برحسب t پیدا می‌کنیم.

۴) به‌جای همهٔ xها در عبارت مقدار آن برحسب t را جایگذاری می‌کنیم.

مثال ضابطهٔ تابع وارون توابع $y=-۲x+۱$ و $y=\sqrt{x-۱}$ را به‌دست آورید.

پاسخ:
$$y=-۲x+۱\to ۲x=۱-y\Rightarrow x=\frac{۱-y}{۲}\Rightarrow f^{-۱}(y)=\frac{۱-y}{۲}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۱-x}{۲}$$
$$y=\sqrt{x-۱}\Rightarrow y^{۲}=x-۱\Rightarrow x=y^{۲}-۱\Rightarrow f^{-۱}(y)=y^{۲}-۱\Rightarrow f^{-۱}(x)=x^{۲}-۱$$

نکته ۱) دامنهٔ تابع برابر برد تابع وارون و برد تابع، برابر دامنهٔ تابع وارون است:
$$D_f=R_{f^{-۱}}$$
$$R_f=D_{f^{-۱}}$$

۲) اگر f وارون‌پذیر باشد و $f^{-۱}$ وارون آن باشد، آن‌گاه: $(fof^{-۱})(x)=x$ ، $(f^{-۱}of)(x)=x$

هم‌چنین دامنهٔ $fof^{-۱}$ همان دامنهٔ $f^{-۱}$ و دامنهٔ $f^{-۱}of$ همان دامنهٔ f است.

۳) در توابع رابطهٔ زیر همواره برقرار است: $(fog)^{-۱}(x)=g^{-۱}of^{-۱}(x)$

مثال اگر $f=\{(۱،۲)،(۳،-۱)،(۴،۵)\}$ باشد، حاصل $fof^{-۱}(x)$ و $f^{-۱}of(x)$ را بیابید.

پاسخ: زوج‌های $f^{-۱}(x)$ را به‌دست می‌آوریم: $f^{-۱}=\{(۲،۱)،(-۱،۳)،(۵،۴)\}$

حالا به‌ترتیب xها را از این تابع به $fof^{-۱}(x)$ می‌دهیم و yها را پیدا می‌کنیم.

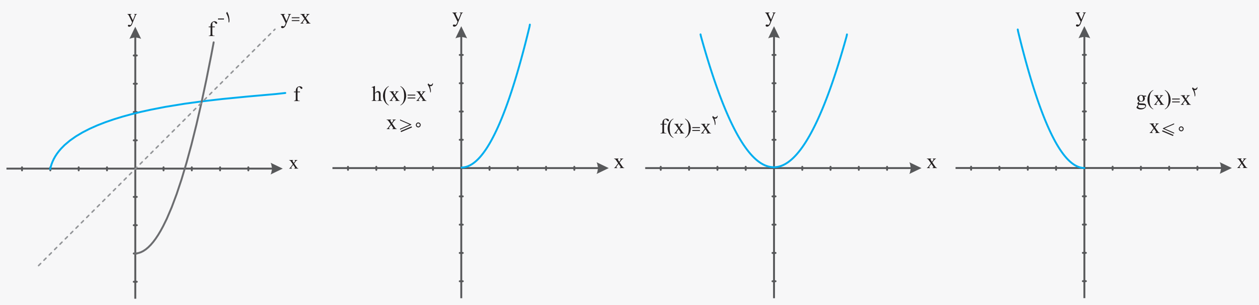
$$\begin{cases}f(f^{-۱}(۲))=f(۱)=۲\\ f(f^{-۱}(-۱))=f(۳)=-۱\Rightarrow fof^{-۱}=\{(۲،۲)،(-۱،-۱)،(۵،۵)\}\\ f(f^{-۱}(۵))=f(۴)=۵\end{cases}$$

$$\begin{cases}f^{-۱}(f(۱))=f^{-۱}(۲)=۱\\ f^{-۱}(f(۳))=f^{-۱}(-۱)=۳\Rightarrow f^{-۱}of=\{(۱،۱)،(۳،۳)،(۴،۴)\}\\ f^{-۱}(f(۴))=f^{-۱}(۵)=۴\end{cases}$$

◆ مرور کردن دامنهٔ تابع:

همان‌طور که گفتیم تابعی وارون‌پذیر است که یک‌به‌یک باشد. گاهی بعضی از توابع یک‌به‌یک نیستند، اما می‌توان با محدود کردن دامنهٔ آن‌ها، آن‌ها را به تابع یک‌به‌یک تبدیل کرد و سپس وارون آن‌ها را به‌دست آورد.

می‌دانیم که تابع $y=x^{۲}$ یک‌به‌یک نیست، زیرا شکل این تابع سهمی است و خط موازی محور xها این نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند. اما اگر دامنهٔ آن را به‌صورت $[۰,+\infty)$ و یا $(-\infty,۰]$ محدود کنیم، آن وقت تابع $y=x^{۲}$ یک تابع یک‌به‌یک می‌شود.



درس اول: آشنایی با مفهوم مشتق

شیب خط: شیب خطی که از نقاط $(A، f(A))$ و $(B، f(B))$ می‌گذرد برابر $m_{AB}=\frac{f(B)-f(A)}{B-A}$ است و شیب خط مماس بر منحنی f در نقطهٔ $A(a، f(a))$ برابر $f'(a)=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ و یا $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ است.

مثال باتوجه به تابع $f(x)=x^۲-۳x$:

الف) شیب خطی که از نقاط $A(۱، f(۱))$ و $B(۴، f(۴))$ عبور می‌کند چه‌قدر است؟

ب) معادله خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه‌ای به طول ۱ چه‌قدر است؟

پاسخ:

الف) $m_{AB}=\frac{f(۴)-f(۱)}{۴-۱}=\frac{(۴)-(-۲)}{۲}=۳$

ب) $f'(۱)=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{(۱+h)^۲-۳(۱+h)-(-۲)}{h}=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{h^۲-h}{h}=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{\cancel{h}(h-۱)}{\cancel{h}}=-۱$

و یا به طریق زیر $f'(۱)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۳x-(-۲)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۳x+۲}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\cancel{(x-۱)}(x-۲)}{\cancel{(x-۱)}}=-۱$$

شیب خط مماس در نقطه به طول ۱ : $f'(۱)-۱$

$$y-f(۱)=f'(۱)(x-۱)\Rightarrow y-(-۲)=(-۱)(x-۱)\Rightarrow y=-x-۱$$

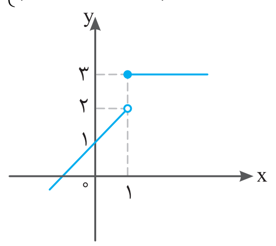
درس دوم: مشتق‌پذیری و پیوستگی

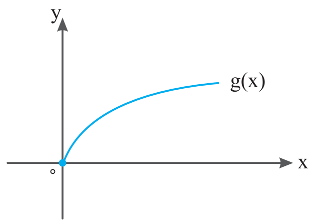
نکته ۱) مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول $x_۰$ به یکی از دو صورت $f'(x_۰)=\lim\limits_{x\to x_۰}\frac{f(x)-f(x_۰)}{x-x_۰}$ یا $f'(x_۰)=\lim\limits_{h\to ۰}=\frac{f(x_۰+h)-f(x_۰)}{h}$ است.

۲) اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه f در a پیوسته است، بنابراین اگر تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد، آن‌گاه f در a مشتق‌پذیر نیست.

مثال مشتق‌پذیری توابع $f(x)=|x^۲-۱|$، $g(x)\sqrt{x-۱}$ ، $h(x)=\begin{cases}x+۱ & x<۱\\ ۳ & x\ge ۱\end{cases}$ در $x=۱$ را بررسی کنید.

پاسخ: توابع $g(x)=\sqrt{x-۱}$ و $h(x)=\begin{cases}x+۱ & x<۱\\ ۳ & x\ge ۱\end{cases}$ در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته نیستند، زیرا کافی است به شکل آن‌ها توجه کنید:





توابع $g(x)$ و $h(x)$ در $x=۱$ پیوسته نیستند، بنابراین در این نقطه مشتق‌پذیر هم نیستند؛ اما برای تابع $f(x)$ که در $x=۱$ پیوسته است، مشتق چپ و راست در این نقطه را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{|x^۲-۱|-۰}{x-۱}\Rightarrow\begin{cases}f'_+(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{|x^۲-۱|}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{x^۲-۱}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{\cancel{(x-۱)}(x+۱)}{\cancel{(x-۱)}}=۲\\ f'_-(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{|x^۲-۱|}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{-(x^۲-۱)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{-\cancel{(x-۱)}(x+۱)}{\cancel{(x-۱)}}=-۲\end{cases}$$

چون مشتق چپ و راست تابع f در $x=۱$ مساوی نیستند، پس تابع f در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

درس اول: تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی

دوران

۱) از دوران یک مستطیل حول طولش، استوانه‌ای به ارتفاع مساوی با طول و شعاع قاعدهٔ مساوی با عرض مستطیل ایجاد می‌شود.

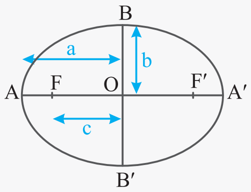
۲) از دوران مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع قائم b و c حول ضلع قائمهٔ b، مخروطی به ارتفاع b و شعاع قاعده c ایجاد می‌شود.

۳) از دوران یک دایره حول یکی از قطرهایش، کره‌ای به شعاع مساوی با شعاع دایره ایجاد می‌شود.

بیضی: مجموعه نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطه ثابت واقع در صفحه (یعنی کانون‌های بیضی)، برابر با مقداری ثابت است.

اگر قطر بزرگ بیضی افقی باشد، آن را بیضی افقی و اگر قطر بزرگ عمودی باشد، آن را بیضی قائم می‌نامند.

باتوجه به بیضی افقی روبه‌رو:



۱) مجموع فواصل هر نقطه از بیضی، از دو کانون F و F'، مقدار ثابتی است که برابر است با طول قطر بزرگ بیضی $(AA' = ۲a)$.

۲) رابطهٔ $a^۲ = b^۲ + c^۲$ در هر بیضی برقرار است. (a اندازه نیم‌قطر بزرگ، b اندازه نیم قطر کوچک و c نصف فاصله کانونی)

۳) مقدار $e = \frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌نامند.

مثال کانون‌های یک بیضی نقاط $(۲،۵)$ ، $(۲،-۳)$ است.

الف) فاصله کانونی، مختصات مرکز بیضی و معادله قطرهای بزرگ و کوچک بیضی را بنویسید.

ب) اگر اندازه قطر بزرگ بیضی ۱۲ باشد، اندازه قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

پاسخ:

الف) باتوجه به مؤلفه‌های طول یکسان کانون‌ها، نتیجه می‌گیریم، بیضی قائم است:
$$\text{فاصله کانونی} = ۵ - (-۳) = ۸$$

مرکز بیضی در وسط فاصلهٔ کانون‌ها قرار دارد:

$$O = \left(\frac{۲+۲}{۲}, \frac{۵+(-۳)}{۲}\right) = (۲،۱)$$

معادلهٔ قطر بزرگ همان معادلهٔ خطی است که از کانون‌های بیضی عبور می‌کند و چون معادلهٔ کانون‌ها $x = ۲$ می‌باشند، بنابراین معادلهٔ قطر بزرگ نیز $x = ۲$ است.

قطر کوچک بر قطر بزرگ عمود است، پس معادلهٔ آن باید به صورت $y = k$ باشد که چون $O(۲،۱)$ بر روی قطر کوچک قرار دارد، نتیجه می‌گیریم که معادلهٔ قطر کوچک $y = ۱$ است.

ب)
$$\text{اندازه قطر بزرگ} = ۱۲ \Rightarrow a = ۱۲ \div ۲ = ۶$$
$$\text{فاصله کانونی} = ۸ \Rightarrow c = ۸ \div ۲ = ۴$$
$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۶^۲ = b^۲ + ۴^۲ \Rightarrow b^۲ = ۲۰ \Rightarrow b = ۲\sqrt{۵} \Rightarrow \text{اندازه قطر کوچک} = ۲ \times ۲\sqrt{۵} = ۴\sqrt{۵}$$
$$\text{خروج از مرکز بیضی}: e = \frac{c}{a} = \frac{۴}{۶}$$

درس دوم: دایره

معادلهٔ استاندارد دایره‌ای به مرکز $O(\alpha، \beta)$ و شعاع r برابر $(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = r^۲$ است.

وضعیت نقطه و دایره:

الف) نقاطی که در معادله $(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = r^۲$ صدق می‌کنند، روی محیط دایره قرار دارند.

ب) نقاطی که در نامعادله $(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ < r^۲$ صدق می‌کنند، درون دایره قرار دارند.

پ) نقاطی که در نامعادله $(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ > r^۲$ صدق می‌کنند، خارج دایره قرار دارند.

معادله گسترده یک دایره به صورت $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ می‌باشد، مختصات مرکز این دایره $O(\frac{-a}{۲}, \frac{-b}{۲})$ و شعاع دایره $r = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c}$ است.

۳ رابطه مهم:

$$۱)P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\xrightarrow[\text{اگر A و B ناسازگار باشند}]{\text{اگر A و B ناسازگار باشند}}P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

۲) احتمال شرطی: $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}\quad (P(B)\neq ۰)$

۳) پیشامدهای A، B مستقل: $P(A\cap B)=P(A).P(B)$

قانون احتمال کل: اگر $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$ و... پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل‌دهنده و B یک پیشامد دلخواه باشد، رابطهٔ زیر برقرار خواهد بود.

$$P(B)=P(A_۱)P(B|A_۱)+P(A_۲)P(B|A_۲)+P(A_۳)P(B|A_۳)+...$$

مهم‌ترین رابطه‌ای که در این فصل با آن کار داریم همین «قانون احتمال کل» است که برای حل مسئله‌های مرتبط با آن؛ اولاً باید $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$، ... را به درستی تشخیص دهید (که معمولاً همان ظرف‌های مختلف مسئله یا همان کیسه‌های مختلف با همان جنسیت زن و مرد و ... هستند) و سپس B که خواستهٔ شرطی اصلی مسئله است.

با حل یک مثال، این روش را تمرین می‌کنیم.

مثال ۳ ظرف یکسان داریم. در اولین ظرف ۱۰ مهره قرار دارد که ۳ تای آن‌ها قرمز است. در دومین ظرف ۸ مهره قرار دارد که ۶ تای آن‌ها قرمز است و در سومین ظرف ۱۲ مهره قرار دارد که ۹ تای آن‌ها قرمز است. با چشم بسته یکی از ظرف‌ها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می‌آوریم. احتمال این که مهره انتخابی قرمز باشد چه‌قدر است؟

پاسخ: پیشامد انتخاب ظرف‌ها را به ترتیب با $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ و پیشامد خارج شدن مهره قرمز را با B نمایش می‌دهیم.

می‌دانیم احتمال انتخاب هر یک از ظرف‌های یکسان است:

$$P(A_۱)=P(A_۲)=P(A_۳)=\frac{۱}{۳}$$

و احتمال انتخاب مهره قرمز از هر ظرف برابر $\dfrac{\text{تعداد مهره‌های قرمز}}{\text{تعداد کل مهره‌ها}}$ در آن ظرف است:

$$P(B|A_۱)=\frac{۳}{۱۰},\ P(B|A_۲)=\frac{۶}{۸},\ P(B|A_۳)=\frac{۹}{۱۲}$$

بنابراین احتمال خارج شدن مهره قرمز یعنی $P(B)$ برابر است با:

$$P(B)=P(A_۱)P(B|A_۱)+P(A_۲)P(B|A_۲)+P(A_۳)P(B|A_۳)$$

$$P(B)=(\frac{۱}{۳})(\frac{۳}{۱۰})+(\frac{۱}{۳})(\frac{۶}{۸})+(\frac{۱}{۳})(\frac{۹}{۱۲})=\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}=۰/۶$$