

خرید کتاب های کنکور

با تخفیف ویژه

و

ارسال رایگان

Medabook.com

+



مدابوک



یک جله تماس تلفنی رایگان

با مشاوران رتبه برتر

برای انتخاب بهترین منابع

دبیرستان و کنکور

۰۲۱ ۲۸۴۲۵۲۱۰



درسنامه ۱

اتحادهای جبری و مثلث خیام

یادآوری اتحادهای سال قبل: به دلیل اهمیت اتحادهای خوانده شده، مجدداً آن‌ها را مرور می‌کنیم:

اتحاد مربع مجموع دوجمله‌ای $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

اتحاد مربع تفاضل دوجمله‌ای $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

اتحاد مزدوج $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

اتحاد جمله مشترک $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

مثال حاصل عبارات زیر را به کمک اتحادها به دست آورید:

ت) $(10x + 1)(10x + 6)$ پ) $(x - 3)(x + 8)$ ب) $(\frac{\sqrt{y}}{2} - 4)(\frac{\sqrt{y}}{2} + 4)$ آ) $(\sqrt{5x} - \frac{3}{\sqrt{5}}y)^2$ پاسخ: آ)

$$(\sqrt{5x} - \frac{3}{\sqrt{5}}y)^2 = (\sqrt{5x})^2 - 2(\sqrt{5x})(\frac{3}{\sqrt{5}}y) + (\frac{3}{\sqrt{5}}y)^2 = 5x^2 - 6xy + \frac{9}{5}y^2$$

ب) $(\frac{\sqrt{y}}{2} - 4)(\frac{\sqrt{y}}{2} + 4) = (\frac{\sqrt{y}}{2})^2 - 4^2 = \frac{y}{4} - 16 = \frac{-5y}{4}$

پ) $(x - 3)(x + 8) = x^2 + (-3 + 8)x + (-3)(8) = x^2 + 5x - 24$

ت) $(10x + 1)(10x + 6) = (10x)^2 + (1 + 6)(10x) + (1)(6) = 100x^2 + 70x + 6$

مثال حاصل عبارت $(1000/05)^2 - (999/95)^2$ را به کمک اتحادها به دست آورید.

پاسخ: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
 $\Rightarrow (1000/05)^2 - (999/95)^2 = \underbrace{(1000/05 - 999/95)}_{0/1} \underbrace{(1000/05 + 999/95)}_{2000} = 0/1 \times 2000 = 200$

مثلث خیام و کاربرد آن در اتحادها و الگوها

با اتحادهای $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ در سال گذشته آشنا شدید. حال می‌خواهیم حاصل عبارتهایی مثل $(a \pm b)^3$ ، $(a \pm b)^4$ ، $(a \pm b)^5$ و ... را به کمک مثلث خیام به دست آوریم. مثلث خیام در واقع از یک سری اعداد تشکیل شده که با نظم خاصی به دست می‌آیند. به کمک این اعداد است که حاصل عبارتهای ذکر شده را محاسبه می‌کنیم. (این اعداد ضرایب جملات خواهند بود).

| | | | |
|-----------------------|---------------|---------------|---|
| ردیف اول مثلث خیام: | 1 | \Rightarrow | $(a + b)^0 = 1$ |
| ردیف دوم مثلث خیام: | 1 1 | \Rightarrow | $(a + b)^1 = 1a + 1b$ |
| ردیف سوم مثلث خیام: | 1 2 1 | \Rightarrow | $(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$ |
| ردیف چهارم مثلث خیام: | 1 3 3 1 | \Rightarrow | $(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$ |
| ردیف پنجم مثلث خیام: | 1 4 6 4 1 | \Rightarrow | $(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$ |
| ردیف ششم مثلث خیام: | 1 5 10 10 5 1 | \Rightarrow | $(a + b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$ |

درستنامه ۱

مثلاً به ردیف ششم مثلث خیام دقت کنید. برای محاسبه $(a+b)^5$ چون توان پُرانتز ۵ است، برای باز کردن این اتحاد از a^5 شروع کرده و مرتباً یکی از توان a کم کرده و یک واحد به توان b اضافه می‌کنیم تا در نهایت a حذف شده و به b^5 برسیم.

$$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + 1b^5$$

ضمناً در باز شده عبارت $(a+b)^5$ ضرایب جملات یعنی ۱، ۵، ۱۰، ۱۰، ۵، ۱ و همان اعداد ردیف ششم مثلث خیام هستند. حال اگر حاصل $(a-b)^5$ را بخواهیم، کافی است در جوابی که برای $(a+b)^5$ به دست آوردیم، همه جا b را به $-b$ تبدیل کنیم:

$$(a-b)^5 = 1a^5 + 5a^4(-b)^1 + 10a^3(-b)^2 + 10a^2(-b)^3 + 5a^1(-b)^4 + 1(-b)^5$$

$$\Rightarrow (a-b)^5 = 1a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5a^1b^4 - 1b^5$$

به عبارت ساده‌تر می‌توان گفت حاصل $(a-b)^5$ همان حاصل $(a+b)^5$ است که علامت جملات آن یکی در میان \oplus و \ominus شده‌اند.

اتحادهای مکعب دوجمله‌ای

می‌خواهیم به کمک روش گفته شده حاصل عبارت‌های $(a+b)^3$ و $(a-b)^3$ را به دست آوریم:

$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1b^3$$

اعداد ردیف چهارم مثلث خیام

اتحاد مکعب مجموع دوجمله‌ای:

اتحاد مکعب تفاضل دوجمله‌ای:

بها را به $-b$ تبدیل می‌کنیم.

$$(a-b)^3 = 1a^3 + 3a^2(-b)^1 + 3a^1(-b)^2 + (-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3a^1b^2 - b^3$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

البته در اتحادهای بالا می‌توانیم عدد ۱ را ننویسیم. مثلاً:

مثال حاصل $(10/1)^3$ را به کمک اتحاد مکعب دوجمله‌ای به دست آورید.

پاسخ:

$$(10/1)^3 = (10 + 0/1)^3 = 10^3 + 3(10)^2(0/1) + 3(10)(0/1)^2 + (0/1)^3 = 1000 + 30 + 0/3 + 0/1001 = 1030/301$$

مثال در حاصل عبارت $(3x^2 - x)^3$ ، ضریب x^5 کدام است؟

پاسخ:

$$\text{عبارت} = (3x^2 - x)^3 \xrightarrow{\text{اتحاد مکعب تفاضل دوجمله‌ای}} \text{عبارت} = (3x^2)^3 - 3(3x^2)^2(x) + 3(3x^2)(x^2) - (x)^3 = 27x^6 - 27x^5 + 9x^4 - x^3$$

بنابراین ضریب x^5 برابر -27 می‌باشد.

اتحادهای مجموع و تفاضل مکعب دوجمله‌ای (اتحادهای چاق و لاغر)

اتحاد مجموع مکعب دوجمله‌ای از ضرب دوجمله‌ای $(a+b)$ در سه‌جمله‌ای $(a^2 - ab + b^2)$ تشکیل می‌شود که حاصل آن برابر است با $a^3 + b^3$. اتحاد تفاضل مکعب دوجمله‌ای هم از ضرب دوجمله‌ای $(a-b)$ در سه‌جمله‌ای $(a^2 + ab + b^2)$ تشکیل شده و جواب آن برابر است با $a^3 - b^3$. بنابراین:

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3 \quad , \quad (a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

(۱) مثال: $(x+2)(x^2 - 2x + 4) = x^3 + 2^3 = x^3 + 8$

(۲) مثال: $(3x-1)(9x^2 + 3x + 1) = (3x)^3 - 1^3 = 27x^3 - 1$

(۳) مثال: $(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}) = (\sqrt[3]{x})^3 + (\sqrt[3]{y})^3 = x + y$

درستنامه ۱

مثال

حاصل عبارت $(x - 4y)(x^2 + 4xy + 16y^2) + 63y^3$ را به ازای $x = \frac{1}{3}$ و $y = \sqrt[3]{3}$ به دست آورید.

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

پاسخ:

$$\Rightarrow (x - 4y)(x^2 + 4xy + 16y^2) = x^3 - (4y)^3 = x^3 - 64y^3$$

$$\text{عبارت مطلوب} = x^3 - 64y^3 + 63y^3 = x^3 - y^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - (\sqrt[3]{3})^3 = \frac{1}{27} - 3 = \frac{1-81}{27} = \frac{-80}{27}$$

نکات مهم در مورد مثلث خیام

نکته

به الگوی زیر دقت کنید:

$$1 = 2^0 \text{ : سطر اول مثلث خیام}$$

$$1 + 1 = 2^1 \text{ : مجموع اعداد سطر دوم مثلث خیام}$$

$$1 + 2 + 1 = 2^2 \text{ : مجموع اعداد سطر سوم مثلث خیام}$$

$$1 + 3 + 3 + 1 = 2^3 \text{ : مجموع اعداد سطر چهارم مثلث خیام}$$

طبق روندی که در بالا مشاهده می‌کنیم، می‌توانیم حدس بزنیم که مجموع اعداد سطر n ام مثلث خیام برابر است با $2^{(n-1)}$ که n عددی طبیعی است.

مثال

به کمک الگوی زیر، مجموع اعداد سطر ششم مثلث خیام را حدس بزنید. سپس مقدار واقعی این مجموع را به کمک مثلث خیام به دست آورید. آیا حدس شما درست بوده است؟

$$1 = 2^0 \text{ : سطر اول مثلث خیام}$$

$$1 + 1 = 2^1 \text{ : سطر دوم مثلث خیام}$$

$$1 + 2 + 1 = 2^2 \text{ : سطر سوم مثلث خیام}$$

$$1 + 3 + 3 + 1 = 2^3 \text{ : سطر چهارم مثلث خیام}$$

$$2^{n-1} = 2^{6-1} = 2^5 = 32$$

پاسخ: طبق الگویی که کمی قبل با هم بررسی کردیم حاصل جمع اعداد سطر ششم مثلث خیام برابر است با: $2^{n-1} = 2^{6-1} = 2^5 = 32$

البته این جواب، حدسی است. حال جواب واقعی حاصل جمع را محاسبه می‌کنیم:

$$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 \text{ : مجموع اعداد سطر ششم مثلث خیام}$$

ملاحظه می‌کنید که مقدار حدسی با مقدار واقعی برابر است.

نکته

به الگوی زیر که مربوط به توان‌های مختلف عدد ۱۱ است دقت کنید:

$$11^0 = 1 \rightarrow \text{عدد سطر اول مثلث خیام}$$

$$11^1 = 11 \rightarrow \text{اعداد سطر دوم مثلث خیام}$$

$$11^2 = 121 \rightarrow \text{اعداد سطر سوم مثلث خیام}$$

$$11^3 = 1331 \rightarrow \text{اعداد سطر چهارم مثلث خیام}$$

طبق الگوی بالا می‌توان نتیجه گرفت که حاصل 11^n برابر است با اعداد سطر $(n+1)$ ام مثلث خیام (البته دقت کنید که اگر n برابر ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ باشد، حاصل 11^n برابر با اعداد سطر $(n+1)$ ام مثلث خیام است. یعنی برای n های بزرگ‌تر از ۴ رابطه ذکر شده صحیح نیست).

مثال

به کمک الگوی بالا حاصل 11^4 و 11^5 را حدس زده، سپس مقدار واقعی آن‌ها را نیز حساب کنید. آیا حدس شما درست بوده است؟

پاسخ: جواب‌های حدسی برای 11^4 و 11^5 طبق الگوی بالا عبارتند از:

$$\text{اعداد سطر ششم مثلث خیام } 11^5 = 15101051 \text{ ، اعداد سطر پنجم مثلث خیام } 11^4 = 14641$$

مقدار واقعی 11^4 برابر با ۱۴۶۴۱ و مقدار واقعی 11^5 برابر با ۱۶۱۰۵۱ است. پس مقداری که برای 11^4 حدس زدیم درست و مقدار حدسی برای 11^5 نادرست بوده است.

(مشابه کار در کلاس صفحه ۱۰ کتاب‌درسی)

(ب) $(2a - 1)^2 = \dots - 4a + \dots$
 (ت) $(\sqrt{5} + \dots)(\sqrt{5} - \dots) = \dots - 2 = \dots$

۱. با استفاده از اتحادها، تساوی‌های زیر را کامل کنید.

(آ) $(a + 6)^2 = a^2 + \dots + \dots$
 (ب) $(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}b)^2 = 3 + \dots + \dots$
 (ث) $(5x + 1)(5x + 6) = \dots + (1 + 6)(5x) + \dots$

(مشابه تمرین ۴ صفحه ۱۶ کتاب‌درسی)

(ب) $(3x + 4)(9x^2 - 12x + 16)$
 (ت) $(\frac{x}{2} - \frac{y}{5})(\frac{x^2}{4} + \frac{xy}{10} + \frac{y^2}{25})$

۲. حاصل عبارات‌های زیر را به کمک اتحادها به دست آورید.

(آ) $(x - 1)(x^2 + x + 1)$
 (ب) $(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)$

(مشابه کار در کلاس صفحه ۱۳ کتاب‌درسی)

(ب) $(\frac{1}{y}a - b)^3 = \frac{1}{y^3}a^3 - \dots + \frac{3}{y}ab^2 - \dots$
 (ت) $(\dots - 2y)(9x^2 + 6xy + 4y^2) = 27x^3 - \dots$
 (ث) $(\sqrt{2}x + \sqrt{3}y)(2x^2 - \dots + \dots) = \sqrt{2}x^3 + \sqrt{27}y^3$

۳. جاهای خالی را با عبارات‌های مناسب پر کنید.

(آ) $(4a + 1)^3 = 64a^3 + \dots + 12a + \dots$
 (ب) $8x^3 + \dots + \dots + 125y^3 = (\dots + \dots)^3$
 (ث) $(\sqrt{2}x + \sqrt{3}y)(2x^2 - \dots + \dots) = \sqrt{2}x^3 + \sqrt{27}y^3$

۴. حاصل عبارت $(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$ را به ازای $x = \sqrt[3]{-5}$ به دست آورید.

(کار در کلاس صفحه ۱۱ کتاب‌درسی)

(ب) 10^3 (پ) 97×10^3 (آ) $(999)^2$
 (ت) $(10/2)^2$

۵. حاصل عبارات زیر را به کمک اتحادها به دست آورید.

۶. حاصل عبارات‌های زیر را به کمک اتحادها به دست آورید.

(آ) $(\frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{3})(\frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{3})$
 (ب) $(500/01)^2 - (499/99)^2$
 (ت) $(x - 3)(x + 3)(x^6 + 9x^2 + 81)$
 (پ) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

۷. ضریب عددی x^7y^2 در حاصل عبارت $(xy^2 - 5x^3)^3$ را تعیین کنید.

۸. حاصل عبارت $A = (\sqrt{x} - 1)(x + 1)(\sqrt{x} + 1)$ به ازای $x = \sqrt{3}$ چقدر است؟

۹. مربع مقابل را که اندازه ضلع آن a است در نظر بگیرید و فرض کنید مساحت آن برابر با S باشد.

ضلع‌های آن را به دو پاره‌خط تقسیم می‌کنیم و طول یکی را b در نظر می‌گیریم:

(تمرین ۵ صفحه ۱۵ کتاب‌درسی)

(آ) مساحت‌های S_1, S_2, S_3, S_4 را به دست آورید.
 (ب) مساحت S را برحسب مساحت‌های S_1, S_2, S_3, S_4 به دست آورید.
 (پ) اتحاد مربع دو جمله‌ای را از قسمت (ب) نتیجه بگیرید.

۱۰. حاصل عبارت $(\sqrt{6x} - 1)(\sqrt{6x} + 1) + (x - 2)^3$ را به ساده‌ترین شکل ممکن، بنویسید.

۱۱. با توجه به الگوی زیر، حاصل جمع اعداد سطر بیست و یکم در مثلث خیام به صورت حدسی کدام است؟

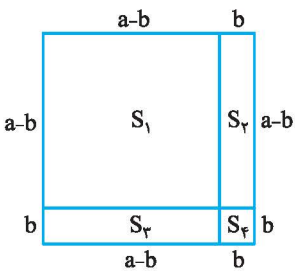
سطر اول : $1 = 2^0$
 سطر دوم : $1 + 1 = 2^1$
 سطر سوم : $1 + 2 + 1 = 2^2$
 سطر چهارم : $1 + 3 + 3 + 1 = 2^3$

۱۲. با توجه به الگوی مقابل، حاصل 11^6 و 11^7 را فقط حدس بزنید. (بدون محاسبه)

آیا حدسی که زده‌اید درست است؟

۱۳. به کمک مثلث خیام حاصل عبارات $(x + 5y)^4$ و $(\sqrt{6} - \frac{3}{x})^5$ را به دست آورید. (نیازی به ساده کردن جواب‌ها نیست).

۱۴. اگر $(a - b)^2 = 625$ و $a^2 + b^2 = 857$ باشند، مقدار ab را به دست آورید.



پاسخ‌های تشریحی

$$\begin{aligned} \text{عبارت} &= (\underbrace{2x}_{a} - \underbrace{3}_{b})(\underbrace{4x^2}_{a^2} + \underbrace{6x}_{ab} + \underbrace{9}_{b^2}) = (2x)^2 - 3^2 = 4x^2 - 9 \\ x = \sqrt{-5} &\Rightarrow \text{جواب نهایی} = 4(\sqrt{-5})^2 - 9 = 4 \times (-5) - 9 = -20 - 9 = -29 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ \Rightarrow (999)^2 &= (1000 - 1)^2 = (1000)^2 - 2(1000)(1) + 1^2 \\ &= 1,000,000 - 2000 + 1 = 998,001 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a-b)(a+b) &= a^2 - b^2 \\ 97 \times 103 &= (100 - 3)(100 + 3) = (100)^2 - 3^2 = 10000 - 9 = 9991 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ \Rightarrow 103^2 &= (100 + 3)^2 = (100)^2 + 2(100)(3) + 3^2 \\ &= 10000 + 600 + 9 = 10609 \\ (10/2)^2 &= (10 + 0/2)^2 = 10^2 + 2(10)(0/2) + (0/2)^2 \\ &= 100 + 0 + 0 = 100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underbrace{\left(\frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{3}\right)}_{\text{اتحاد مزدوج}} &= \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 \\ &= \frac{7}{4} - \frac{5}{9} = \frac{27}{36} - \frac{20}{36} = \frac{7}{36} \\ \underbrace{(500/01)^2 - (499/99)^2}_{\text{اتحاد مزدوج}} &= (500/01 + 499/99)(500/01 - 499/99) = 0/02 \times 1000 = 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underbrace{(x+2)(x^2-2x+4)}_{\text{اتحاد چاق و لاغر}} &= x^3 + 2^3 = x^3 + 8 \\ \underbrace{(x-2)(x^2+2x+4)}_{\text{اتحاد چاق و لاغر}} &= x^3 - 2^3 = x^3 - 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{جواب کلی} &= x^3 + 8 - x^3 + 8 = 16 \\ \underbrace{(x-3)(x+3)(x^2+9x^2+81)}_{\text{اتحاد مزدوج}} &= (x^2-9)(x^2+9x^2+81) = (x^2)^3 - 9^3 = x^6 - 729 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \Rightarrow (xy^2 - \Delta x^3)^3 \\ &= (xy^2)^3 - 3(xy^2)^2(\Delta x^3) + 3(xy^2)(\Delta x^3)^2 - (\Delta x^3)^3 \\ &= x^3y^6 - 15x^4y^4 + 75x^5y^2 - 125x^9 \Rightarrow \text{ضریب } x^5y^2 = 75 \end{aligned}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (1)$$

$$\Rightarrow (a+6)^2 = a^2 + 2(a)(6) + 6^2 = a^2 + 12a + 36$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (ب)$$

$$\Rightarrow (2a-1)^2 = (2a)^2 - 2(2a)(1) + 1^2 = 4a^2 - 4a + 1$$

$$\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}b\right)^2 = (\sqrt{3})^2 + 2(\sqrt{3})\left(\frac{1}{\sqrt{3}}b\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}b\right)^2 \quad (پ)$$

$$= 3 + 2b + \frac{b^2}{3}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \quad (ت)$$

$$\Rightarrow (\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2 = 5 - 2 = 3$$

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab \quad (ث)$$

$$(\Delta x + 1)(\Delta x + 6) = (\Delta x)^2 + (1+6)(\Delta x) + 1 \times 6 = 25x^2 + 25x + 6$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3 \quad (2)$$

$$\Rightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1^3 = x^3 - 1$$

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3 \quad (ب)$$

$$\Rightarrow (3x+4)(9x^2 - 12x + 16) = (3x)^3 + (4)^3 = 27x^3 + 64$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3 \quad (پ)$$

$$\Rightarrow (2x-y)(4x^2 + 2xy + y^2) = (2x)^3 - y^3 = 8x^3 - y^3$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3 \quad (ت)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{5}\right)\left(\frac{x^2}{4} + \frac{xy}{10} + \frac{y^2}{25}\right) = \left(\frac{x}{2}\right)^3 - \left(\frac{y}{5}\right)^3 = \frac{x^3}{8} - \frac{y^3}{125}$$

$$(fa+1)^3 = (fa)^3 + 3(fa)^2(1) + 3(fa)(1)^2 + 1^3 \quad (3)$$

$$= 6fa^3 + 48a^2 + 12a + 1$$

$$\left(\frac{1}{3}a - b\right)^3 = \left(\frac{1}{3}a\right)^3 - 3\left(\frac{1}{3}a\right)^2(b) + 3\left(\frac{1}{3}a\right)(b)^2 - b^3 \quad (ب)$$

$$= \frac{1}{27}a^3 - \frac{2}{9}a^2b + \frac{2}{3}ab^2 - b^3$$

(پ) می‌دانیم $8x^3 = (2x)^3$ و $125y^3 = (\Delta y)^3$ پس در اتحاد مکعب مجموع دو جمله $a = 2x$ و $b = \Delta y$ است، لذا:

$$\underbrace{(2x + \Delta y)^3}_{\substack{a \\ b}} = (2x)^3 + 3(2x)^2(\Delta y) + 3(2x)(\Delta y)^2 + (\Delta y)^3$$

$$= 8x^3 + 6x^2\Delta y + 15x\Delta y^2 + 125\Delta y^3$$

(ت) از $27x^3$ که در سمت راست داده شده، می‌فهمیم که a برابر $3x$ است، زیرا:

$$27x^3 = (3x)^3$$

$$\Rightarrow (3x - 2y)(9x^2 + 6xy + 4y^2) = 27x^3 - (2y)^3 = 27x^3 - 8y^3$$

$$\underbrace{(\sqrt{2}x + \sqrt{3}y)^3}_{\substack{a \\ b}} = (\sqrt{2}x)^3 + 3(\sqrt{2}x)^2(\sqrt{3}y) + 3(\sqrt{2}x)(\sqrt{3}y)^2 + (\sqrt{3}y)^3$$

$$= 2\sqrt{2}x^3 + 6\sqrt{6}x^2y + 6\sqrt{6}xy^2 + 3\sqrt{3}y^3$$

راه‌حل: $ab = (\sqrt{2}x)(\sqrt{3}y) = \sqrt{6}xy \Rightarrow b^2 = (\sqrt{3}y)^2 = 3y^2$

حال مثلث خیام را رسم کرده تا به سطرهای هفتم و هشتم آن برسیم:

| | | | | | | | | |
|----------|---|---|----|----|----|----|---|---|
| | | ۱ | | | | | | |
| | | ۱ | ۱ | | | | | |
| | | ۱ | ۲ | ۱ | | | | |
| | | ۱ | ۳ | ۳ | ۱ | | | |
| | | ۱ | ۴ | ۶ | ۴ | ۱ | | |
| | | ۱ | ۵ | ۱۰ | ۱۰ | ۵ | ۱ | |
| سطر هفتم | ۱ | ۶ | ۱۵ | ۲۰ | ۱۵ | ۶ | ۱ | |
| سطر هشتم | ۱ | ۷ | ۲۱ | ۳۵ | ۳۵ | ۲۱ | ۷ | ۱ |

(مقدار حدسی) $11^6 = 1615201561$

(مقدار حدسی) $11^7 = 1721335352171$

خیر، زیرا گفتیم که در این گونه سوالات، فقط حدس هایی که برای جواب های $11^1, 11^2, 11^3, 11^4$ و 11^4 می زنیم با مقدار واقعی، مطابقت دارند و جواب های حدسی برای $11^5, 11^6, 11^7, 11^8$ و ... همگی نادرست هستند.

طبق مطالب گفته شده در درسنامه خواهیم داشت: ۱۳

$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4 \Rightarrow \begin{matrix} (x+y) \\ \downarrow \quad \downarrow \\ a \quad b \end{matrix}$$

$$= 1(x)^4 + 4(x)^3(\Delta y) + 6(x)^2(\Delta y)^2 + 4(x)(\Delta y)^3 + (\Delta y)^4$$

$$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$$

بها را به $-b$ تبدیل می کنیم:

$$(a-b)^5 = 1a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - 1b^5$$

$$\Rightarrow (\sqrt{6} - \frac{3}{x})^5 = 1(\sqrt{6})^5 - 5(\sqrt{6})^4(\frac{3}{x}) + 10(\sqrt{6})^3(\frac{3}{x})^2 - 10(\sqrt{6})^2(\frac{3}{x})^3 + 5(\sqrt{6})(\frac{3}{x})^4 - 1(\frac{3}{x})^5$$

۱۴

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \Rightarrow 625 = 857 - 2ab$$

$$\Rightarrow 2ab = 857 - 625 \Rightarrow 2ab = 232 \Rightarrow ab = \frac{232}{2} = 116$$

۸ $A = (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x+1)$

اتحاد مزدوج

$$= (\sqrt{x}^2 - 1^2)(x+1) = (x-1)(x+1) = x^2 - 1$$

اتحاد مزدوج

$x=\sqrt{3} \rightarrow$ جواب نهایی $= (\sqrt{3})^2 - 1 = 3 - 1 = 2$

۹ $S_1 = (a-b)(a-b) = (a-b)^2$

$S_2 = (a-b)b = ab - b^2$

$S_3 = (a-b)b = ab - b^2$

$S_4 = b \times b = b^2$

$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$

(ب و پ)

$\Rightarrow a^2 = (a-b)^2 + \underbrace{ab - b^2 + ab - b^2}_{\text{به چپ می بریم}} + b^2$

$\Rightarrow a^2 - ab + b^2 - ab = (a-b)^2 \Rightarrow (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

اتحاد مکعب تفاضل دو جمله ای: ۱۰

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$\Rightarrow (\frac{x}{a} - \frac{2}{b})^3 = x^3 - 3x^2(\frac{2}{b}) + 3(x)(\frac{2}{b})^2 - 2^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ اتحاد مزدوج

$\Rightarrow (\sqrt{6x}-1)(\sqrt{6x}+1) = (\sqrt{6x})^2 - 1^2 = 6x^2 - 1$

عبارت $= x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + 6x^2 - 1 = x^3 + 12x - 9$

۱۱ در درسنامه گفتیم که اگر n عددی طبیعی باشد، آنگاه مجموع

اعداد سطر n ام مثلث خیام به صورت حدسی برابر با $2^{(n-1)}$ است، لذا:

جمع اعداد سطر ۲۱ ام $= 2^{(21-1)} = 2^{20}$

۱۲ از الگوی داده شده نتیجه می گیریم که اگر n عددی حسابی باشد

(۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ...)، آنگاه:

اعداد سطر $(n+1)$ ام مثلث خیام $= 11^n$

اعداد سطر هفتم مثلث خیام $= 11^6$

اعداد سطر هشتم مثلث خیام $= 11^7$

درسنامه ۲

تجزیه عبارتهای جبری

مفهوم تجزیه: منظور از تجزیه یک عبارت جبری این است که آن عبارت را به حاصل ضرب دو یا چند عبارت دیگر با درجه کم تر تبدیل کنیم. این کار را به کمک فاکتورگیری، اتحادها و ... انجام می دهیم. به هر یک از جملات حاصل از تجزیه، یک عامل یا مقسوم علیه عبارت اصلی می گوییم. مثلاً وقتی می نویسیم $x^2 - 5x = x(x - 5)$ به $x - 5$ و x عوامل (مقسوم علیه های) $x^2 - 5x$ می گوییم. یعنی $(x^2 - 5x)$ هم بر x و هم بر $x - 5$ بخش پذیر است. به کمک روش های زیر، عبارتهای جبری را تجزیه می کنیم:

روش فاکتورگیری

اگر دو یا چند جمله که بین آنها علامت جمع یا تفریق وجود دارد دارای عامل مشترکی باشند، آن عامل را از دل آن جملات بیرون می کشیم. به مثال های زیر دقت کنید:

(۱) مثال: $4ab^5 - 18a^2b = 2ab(2b^4 - 9a)$

$\frac{4ab^5}{2ab} = 2b^4$ $\frac{18a^2b}{2ab} = 9a$

عامل مشترک

(۲) مثال: $(x - 6y)^2 - 7(x - 6y) = (x - 6y)[(x - 6y) - 7]$

عامل مشترک

(۳) مثال: $12x^4(x^2 - 5)^2 + 3x^3(x^2 - 5)^2 = 3x^3(x^2 - 5)^2[4x + (x^2 - 5)]$

عامل مشترک

تجزیه به کمک اتحاد مزدوج

اگر بین دو جمله (که معمولاً مربع کامل هستند) علامت منفی وجود داشته باشد، از رابطه $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ برای تجزیه عبارت استفاده می کنیم:

(۱) مثال: $x^2 - 100 = (x - 10)(x + 10)$

چندر چندر
↓ ↓
x 10

(۲) مثال: $25x^2 - 3 = (5x - \sqrt{3})(5x + \sqrt{3})$

چندر چندر
↓ ↓
5x $\sqrt{3}$

(۳) مثال: $(x - 3)^2 - 64 = [(x - 3) - 8][(x - 3) + 8] = (x - 11)(x + 5)$

چندر چندر
↓ ↓
x - 3 8

عبارت $x^5 - 81x$ به کدام عبارت زیر بخش پذیر نیست؟

ت) $x^2 - 3$

پ) $x - 3$

ب) $x^2 + 9$

آ) x

پاسخ: $x^5 - 81x = x(x^4 - 81) = x(x^2 - 9)(x^2 + 9) = x(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$

فاکتور از x اتحاد مزدوج اتحاد مزدوج

پس از بین عبارتهای داده شده، جواب مورد نظر، عبارت $(x^2 - 3)$ است، چون در عوامل تجزیه $(x^5 - 81x)$ عامل $(x^2 - 3)$ مشاهده نمی شود.

تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک

از این اتحاد وقتی استفاده می کنیم که ۳ جمله داشته باشیم و حداقل یکی از آنها مربع کامل باشد. این اتحاد به صورت زیر است:

$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

شکل کلی تر این اتحاد $\rightarrow (b + \text{جمله مشترک})(a + \text{جمله مشترک}) + a \times b = (a + \text{جمله مشترک})(b + \text{جمله مشترک})$

درستنامه ۲

به عنوان مثال می‌خواهیم $(x^2 + 2x - 35)$ را تجزیه کنیم. جمله مشترک x است چون دو بار تکرار شده، حال به دنبال دو عدد a و b می‌گردیم به طوری که ضربشان ۳۵ و جمع یا تفریقشان ۲ شود (فعلاً به علامت‌ها فکر نکنید)، دو عدد موردنظر عبارتند از ۷ و ۵ چون ضربشان ۳۵ و تفریقشان ۲ می‌شود:

$$x^2 + 2x - 35 = (x + 7)(x - 5)$$

جمله مشترک ← ← جمله مشترک

تذکره: همیشه حواستان باشد که عدد بزرگ‌تر را در پرانتز اول قرار دهید.

(۱) مثال: $x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2)^2 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 4)(x^2 - 1)$ هر پرانتز، خودش اتحاد مزدوج است. → عبارت $= (x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 1)$

جمله مشترک x^2 است، چون دو بار تکرار شده

(۲) مثال: $x^3 - 10x^2 + 24x = x(x^2 - 10x + 24) = x(x - 6)(x - 4)$

فاکتور از x اتحاد جمله مشترک

نکته

گاهی اوقات یک سه‌جمله‌ای به ما داده می‌شود که در آن ضریب x^2 عددی مربع کامل است (به‌جز ۱)، در این موارد برای تجزیه این سه‌جمله‌ای، کافی است از جمله شامل x^2 جذر گرفته تا جمله مشترک معلوم شود، سپس این جمله مشترک را از درون جمله دیگر که شامل x است بیرون می‌کشیم. به عنوان مثال می‌خواهیم عبارت $9x^2 + 18x + 8$ را تجزیه کنیم ۹ مربع کامل است، حال می‌گوییم جذر $9x^2$ می‌شود $3x$ ، پس $3x$ جمله مشترک است و باید $18x$ را نیز طوری بنویسیم که شامل $3x$ شود، یعنی $18x = 6(3x)$ ، حال به کمک اتحاد جمله مشترک خواهیم داشت:

$$9x^2 + 18x + 8 = (3x)^2 + 6(3x) + 8 = (3x + 4)(3x + 2)$$

مثال

عبارت $25x^2 + 30x - 7$ را تجزیه کنید.

پاسخ: ضریب x^2 یعنی ۲۵ مربع کامل است پس $25x^2$ را به صورت $(5x)^2$ می‌نویسیم، پس می‌فهمیم $5x$ باید جمله مشترک باشد، لذا $30x$ را به صورت $6(5x)$ می‌نویسیم تا $5x$ را ۲ بار تکرار کرده باشیم:

$$25x^2 + 30x - 7 = (5x)^2 + 6(5x) - 7 = (5x + 7)(5x - 1)$$

ملاحظه می‌کنید که ضرب $+7$ و -1 می‌شود -7 و جمع $+7$ و -1 می‌شود 6

تجزیه به کمک اتحادهای مربع دو جمله‌ای

اگر سه‌جمله‌ای ما به شکل $a^2 + 2ab + b^2$ بود، تجزیه‌شده‌اش برابر با $(a + b)^2$ و اگر به شکل $a^2 - 2ab + b^2$ بود، تجزیه‌شده‌اش به صورت $(a - b)^2$ خواهد بود. به عبارت دیگر اگر سه جمله داشتیم که دو تای آن‌ها مربع کامل بودند و سومی، ۲ برابر ضرب جذرهای دو جمله مربع کامل بود از اتحادهای مربع دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم. البته گاهی اوقات فقط یکی از جملات مربع کامل است (مثال ۳).

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2, \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

(۱) مثال: $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$

(جذر آخری) = $2 \times x \times 5 = 10x$ (جذر اولی) ۲

جذر جذر
↓ ↓
 x ۵

(۲) مثال: $4t^2 + 4\sqrt{3}tz + 3z^2 = (2t + \sqrt{3}z)^2$

(جذر آخری) = $2(2t)(\sqrt{3}z) = 4\sqrt{3}tz$ (جذر اولی) ۲

جذر جذر
↓ ↓
 $2t$ $\sqrt{3}z$

(۳) مثال: $x^2 - 2\sqrt{5}x + 5 = (x - \sqrt{5})^2$

(جذر آخری) = $2(x)\sqrt{5} = 2\sqrt{5}x$ (جذر اولی) ۲

جذر جذر
↓ ↓
 x $\sqrt{5}$

درستنامه ۲

مثال عبارت $x^2 + 6x^3 + 9x^4$ پس از تجزیه به شکل $x^k(mx-n)^f$ تبدیل شده است، مقادیر f, n, m, k را به دست آورید.

پاسخ:

$$\underbrace{9x^4 - 6x^3 + x^2}_{\text{فاکتور از } x^2} = x^2 \underbrace{(9x^2 - 6x + 1)}_{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}} = x^2 (3x-1)^2 = x^k(mx-n)^f \Rightarrow k=2, m=3, n=1, f=2$$

دو طرف را مقایسه می‌کنیم.

محاسبهٔ ک.م.م عبارتهای جبری

برای این منظور ابتدا عبارتهای را تا حد امکان تجزیه می‌کنیم. ک.م.م آنها عبارت است از حاصل ضرب عوامل مشترک با توان بیش‌تر در عامل‌های غیرمشترک. به عنوان مثال می‌خواهیم ک.م.م عبارتهای $x^3 + 8x^2 + 15x$ و $x^4 + 2x^3 - 3x^2$ را به دست آوریم:

$$\left. \begin{aligned} x^4 + 2x^3 - 3x^2 &= x^2(x^2 + 2x - 3) = x^2(x+3)(x-1) \\ x^3 + 8x^2 + 15x &= x(x^2 + 8x + 15) = x(x+5)(x+3) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{ک.م.م} = \underbrace{x^2}_{\text{عوامل مشترک}} \underbrace{(x+3)}_{\text{عوامل مشترک}} \underbrace{(x-1)(x+5)}_{\text{عوامل غیرمشترک با توان بزرگ‌تر}}$$

مثال ک.م.م دو عبارت $x^4 - 7x^3 + 10x^2$ و $20x^4(x^2 - 25)$ را به دست آورید.

پاسخ: همان‌طور که گفتیم ابتدا دو عبارت را تا حد امکان تجزیه می‌کنیم، سپس عوامل مشترک با توان بزرگ‌تر را در عوامل غیرمشترک ضرب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} x^4 - 7x^3 + 10x^2 &= x^2(x^2 - 7x + 10) = x^2(x-5)(x-2) \\ 20x^4(x^2 - 25) &= 20x^4(x-5)(x+5) \\ \Rightarrow \text{ک.م.م} &= 20x^4(x-5)(x+5)(x-2) \end{aligned}$$

(مشابه کار در کلاس صفحه ۱۰ و ۱۱ کتاب‌درسی)

۱۵. عبارتهای زیر را تا حد امکان تجزیه کنید.

(ب) $x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{25}$ (آ) $25x^2 - 36$

(ت) $y^2 + 4y - 21$ (پ) $4x^2 - 4x + 1$

(ج) $20x^5(x^2 + 3)^3 - 10x^3(x^2 + 3)^4$ (ث) $x^6 - 64x^4$

(چ) $25x^2 + 25x + 6$

(تمرین ۳ صفحه ۱۶ کتاب‌درسی)

۱۶. به کمک اتحادها، عبارتهای زیر را تجزیه کنید.

(ب) $x^2 - 1$ (آ) $1 + z^3$

(ت) $9x^2 - 12x + 4$ (پ) $27 - t^6$

(ث) $4x^2 + 14x + 12$

۱۷. عبارتهای زیر را تا حد امکان تجزیه کنید.

(ب) $25x^4 + 30x^3 + 9x^2$ (آ) $4x^2 - 4x - 24$

(پ) $bx^2 - 5bx - 50b$

۱۸. کوچک‌ترین مضرب مشترک عبارتهای زیر را به دست آورید.

(ب) $a^3 - b^3$ ، $a^4 - b^4$ (آ) $x^3 - x^2 - 6x$ ، $x^6 - 81x^2$

۱۹. به کمک تجزیه، حاصل عبارت $(\frac{48}{8})^2 - (\frac{51}{2})^2$ را به دست آورید.

۲۰. عبارت $x^{14} - 64x^{10}$ را تجزیه کرده‌ایم. جاهای خالی را پر کنید:

$$x^{14} - 64x^{10} = x^{10}(x^4 - \dots) = x^{10}(\dots - \dots)(\dots + \dots) = x^{10}(\dots - \dots)(x + \sqrt{8})(\dots + \dots)$$

۲۱. عبارات‌های زیر را تا حد امکان تجزیه کنید.

(ب) $(x-4)(x+6) + xy + 6y$ (آ) $(x+4)^2 - (\Delta x - 1)^2$
 (ت) $a^6 - b^6$ (پ) $\frac{1}{125} + m^3$

۲۲. اگر $9a^2 - b^2 = 100$ و $3a - b = 5$ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

۲۳. در تجزیه عبارت $(x^2 - 6x - 4)^2 - 144$ کدام عامل زیر، وجود ندارد؟

(آ) $x - 2$ (ب) $x - 8$ (پ) $x - 4$ (ت) $x + 8$

۲۴. در تجزیه شده عبارت‌های $x^3 + 6x^2 + 8x$ و $x^2 - 2x - 8$ چه عامل مشترکی وجود دارد؟ ک.م.م این دو عبارت را نیز به دست آورید.

۲۵. کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م) عبارت‌های $3x^2 - 3$ ، $3x^2 + 2$ ، $3x^2 - 3$ و $(x-1)^3$ را به دست آورید.

۲۶. عبارات‌های زیر را تا حد امکان تجزیه کنید:

(آ) $2x^3 + 2x^2 - 4x$ (ب) $x^4 + 3x^3 - x - 3$ (پ) $x^2 - x + (x-1)(y+1)$ (ت) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

پاسخ‌های تشریحی

(پ) $27 - t^6 = 3^3 - (t^2)^3 = (3 - t^2)(9 + 3t^2 + t^4)$

$= (\sqrt{3} - t)(\sqrt{3} + t)(9 + 3t^2 + t^4)$

(ت) $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$2(3x)(2) = 12x$ (جذر آخری) (جذر اولی)

$\Rightarrow 9x^2 - 12x + 4 = (3x - 2)^2$

(ث) $4x^2 + 14x + 12 = (2x)^2 + 7(2x) + 12 = (2x + 4)(2x + 3)$
 اتحاد جمله مشترک

(آ) $4x^2 - 4x - 24 = 4(x^2 - x - 6) = 4(x - 3)(x + 2)$

فاکتور از ۴ اتحاد جمله مشترک

$2(\Delta x)(3) = 3 \cdot 0x$ (جذر آخری) (جذر اولی)

(ب) $25x^4 + 30x^3 + 9x^2 = x^2(25x^2 + 30x + 9) = x^2(\Delta x + 3)^2$

(پ) $bx^2 - \Delta bx - \Delta \cdot b = b(x^2 - \Delta x - \Delta) = b(x - 1)(x + \Delta)$

اتحاد جمله مشترک

(آ) $x^6 - 81x^2 = x^2(x^4 - 81)$

فاکتور از x^2 اتحاد مزدوج

$= x^2(x^2 - 9)(x^2 + 9) = x^2(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$
 اتحاد مزدوج

$x^3 - x^2 - 6x = x(x^2 - x - 6) = x(x - 3)(x + 2)$

فاکتور از x اتحاد جمله مشترک

\Rightarrow ک.م.م $= x^2(x - 3)(x + 3)(x + 2)(x^2 + 9)$

(آ) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$\Rightarrow 25x^2 - 36 = (\Delta x - 6)(\Delta x + 6)$

$2(x)(\frac{1}{\Delta}) = \frac{2}{\Delta}x$ (جذر آخری) (جذر اولی)

(ب) $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \Rightarrow x^2 + \frac{2}{\Delta}x + \frac{1}{\Delta^2} = (x + \frac{1}{\Delta})^2$

(پ) $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$2(2x)(1) = 4x$ (جذر آخری) (جذر اولی)

$\Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$

(ت) $y^2 + 4y - 21 = (y + 7)(y - 3)$

اتحاد جمله مشترک

(ث) $x^6 - 64x^4 = x^4(x^2 - 64) = x^4(x - 8)(x + 8)$

اتحاد مزدوج

(ج) $20x^5(x^2 + 3)^3 - 10x^3(x^2 + 3)^4$

$= 10x^3(x^2 + 3)^3(2x^2 - (x^2 + 3)) = 10x^3(x^2 + 3)^3(x^2 - 3)$

(چ) $25x^2 + 25x + 6 = (\Delta x)^2 + \Delta(\Delta x) + 6 = (\Delta x + 3)(\Delta x + 2)$

اتحاد جمله مشترک

(آ) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$\Rightarrow 1 + z^3 = 1^3 + z^3 = (1 + z)(1^2 - 1 \cdot z + z^2) = (1 + z)(1 - z + z^2)$

(ب) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$\Rightarrow x^6 - 1 = (x^2)^3 - 1^3 = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)$

$= (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

۲۳

$$\underbrace{(x^2 - 6x - 4)^2 - 12^2}_{\text{اتحاد مزدوج}} = (x^2 - 6x - 4 - 12)(x^2 - 6x - 4 + 12)$$

$$= \underbrace{(x^2 - 6x - 16)}_{\text{اتحاد جمله مشترک}} \underbrace{(x^2 - 6x + 8)}_{\text{اتحاد جمله مشترک}} = (x-8)(x+2)(x-4)(x-2)$$

پس در تجزیه عبارت مذکور، عامل $x+8$ وجود ندارد.

۲۴

$$\underbrace{x^3 + 6x^2 + 8x}_{\text{فاکتور از } x} = x \underbrace{(x^2 + 6x + 8)}_{\text{اتحاد جمله مشترک}} = x(x+4)(x+2)$$

$$\underbrace{x^2 - 2x - 8}_{\text{اتحاد جمله مشترک}} = (x-4)(x+2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{عامل مشترک} = x+2 \\ \text{م.م.ک} = x(x+2)(x+4)(x-4) \end{cases}$$

۲۵

$$3x^2 - 3 = 3 \underbrace{(x^2 - 1)}_{\text{اتحاد مزدوج}} = 3(x-1)(x+1)$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$$

دیگر قابل تجزیه نیست. $\Rightarrow (x-1)^3$

$$\Rightarrow \text{م.م.ک} = 3(x-1)^3(x+1)(x-2)$$

۲۶

$$2x^3 + 2x^2 - 4x = 2x \underbrace{(x^2 + x - 2)}_{\text{اتحاد جمله مشترک}} = 2x(x+2)(x-1)$$

$$\underbrace{x^4 + 3x^3 - x - 3}_{\text{فاکتور از منفی}} = \underbrace{x^3(x+3) - (x+3)}_{\text{فاکتور از } (x+3)} = (x+3) \underbrace{(x^3 - 1)}_{\text{اتحاد چاق و لاغر}}$$

$$= (x+3)(x-1)(x^2 + x + 1)$$

$$\underbrace{x^2 - x + (x-1)(y+1)}_{\text{فاکتور از } x} = \underbrace{x(x-1) + (x-1)(y+1)}_{\text{فاکتور از } (x-1)}$$

$$= (x-1)(x+y+1)$$

ت

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$$

البته تشخیص تجزیه به کمک اتحاد مکعب دو جمله‌ای کمی دشوار است ولی این تمرین خیلی مهم است حتماً آن را حفظ کنید.

$$\underbrace{a^4 - b^4}_{\text{اتحاد مزدوج}} = \underbrace{(a^2 - b^2)}_{\text{اتحاد مزدوج}} (a^2 + b^2) = (a-b)(a+b)(a^2 + b^2) \quad \text{ب}$$

$$\underbrace{a^3 - b^3}_{\text{اتحاد چاق و لاغر}} = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\Rightarrow \text{م.م.ک} = (a-b)(a+b)(a^2 + b^2)(a^2 + ab + b^2)$$

۱۹

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$\Rightarrow (51/2)^2 - (48/8)^2 = \underbrace{(51/2 - 48/8)}_{2/4} \underbrace{(51/2 + 48/8)}_{100} = 240$$

۲۰

$$x^{14} - 64x^{10} = x^{10} \underbrace{(x^4 - 64)}_{\text{اتحاد مزدوج}} = x^{10} \underbrace{(x^2 - 8)}_{\text{دوباره مزدوج}} \underbrace{(x^2 + 8)}_{\text{دوباره مزدوج}}$$

$$= x^{10} (x - \sqrt{8})(x + \sqrt{8})(x^2 + 8)$$

۲۱

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \quad \text{آ}$$

$$\underbrace{(x+4)^2}_{a} - \underbrace{(\Delta x - 1)^2}_{b} = [(x+4) - (\Delta x - 1)][(x+4) + (\Delta x - 1)]$$

$$= (-4x + 5) \underbrace{(6x + 3)}_{\text{فاکتور از } 3} = 3(-4x + 5)(2x + 1)$$

$$\underbrace{(x-4)(x+6) + xy + 6y}_{\text{فاکتور از } y} = \underbrace{(x-4)(x+6) + y(x+6)}_{\text{فاکتور از } (x+6)}$$

$$= (x+6)(x-4+y)$$

ب

$$\frac{1}{125} + m^3 = \left(\frac{1}{5}\right)^3 + m^3 = \left(\frac{1}{5} + m\right) \left[\left(\frac{1}{5}\right)^2 - \frac{1}{5}m + m^2\right]$$

$$= \left(\frac{1}{5} + m\right) \left(\frac{1}{25} - \frac{m}{5} + m^2\right)$$

ت

$$a^6 - b^6 = \underbrace{(a^2)^3 - (b^2)^3}_{\text{اتحاد مزدوج}} = \underbrace{(a^2 - b^2)}_{\text{اتحاد چاق و لاغر}} ((a^2)^2 + a^2 b^2 + (b^2)^2)$$

$$= (a-b)(a+b)(a^4 + a^2 b^2 + b^4)$$

۲۲

$$\underbrace{9a^2 - b^2}_{\text{اتحاد مزدوج}} = 100 \Rightarrow \underbrace{(3a-b)}_{5} (3a+b) = 100 \Rightarrow 3a+b = \frac{100}{5}$$

$$\Rightarrow 3a+b = 20$$

اکنون با حل یک دستگاه مقادیر a و b را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 3a - b = 5 \\ 3a + b = 20 \end{cases}$$

$$6a = 25 \Rightarrow a = \frac{25}{6} \xrightarrow{\text{در یکی از روابط قرار می‌دهیم}} b = \frac{15}{2}$$