

خرید کتاب های کنکور

با تخفیف ویژه

و

ارسال رایگان

Medabook.com



مدابوک



یک جله تماس تلفنی رایگان

با مشاوران رتبه برتر

برای انتخاب بهترین منابع

دبیرستان و کنکور

۰۲۱ ۲۸۴۲۵۲۱۰



درسنامه ۱

منطق ریاضی و گزاره‌ها

تعریف منطق ریاضی: از نظر دانشمندان علم منطق، منطق در واقع مجموعه‌ای از روش‌ها و قانون‌های درست فکر کردن و درست استدلال کردن می‌باشد و اولین دانشمند این علم، ارسطو بوده است. منطق ریاضی، شاخه‌ای از علم منطق است که به کمک یک سری از قانون‌ها و نمادها روش درست استدلال کردن در علم ریاضی را نشان می‌دهد؛ ضمناً به کمک منطق ریاضی، ارزش گزاره‌ها را نیز تعیین می‌کنیم.

تعریف گزاره: گزاره جمله‌ای خبری است که ارزش آن، می‌تواند درست یا نادرست باشد. مثلاً جمله «۳ عددی اول است.» یک گزاره با ارزش درست است؛ چون می‌دانیم عدد ۳ اول است.

تذکر مهم: جملات امری مانند «از عدد ۷۳ جذر بگیر.»، جملات پرسشی مثل «آیا عدد ۲ اول است؟» و جملات عاطفی مثل «چه دانشمند بزرگی!»، گزاره محسوب نمی‌شوند؛ ضمناً جملات خبری که نتوانیم اصلاً درستی یا نادرستی آن‌ها را بررسی کنیم هم، گزاره نیستند مانند جمله خبری «۱۰۰۰ عدد بزرگی است.» چون قانونی برای بزرگ یا کوچک بودن اعداد در ریاضی نداریم و امری سلیقه‌ای است.

مثال

مشخص کنید کدام یک از قسمت‌های زیر، گزاره هستند؟ سپس ارزش هر گزاره را تعیین کنید.

(آ) عدد $3/56$ عددی گنگ نیست. (ب) خودروهای فرانسوی زیباتر از خودروهای آمریکایی هستند.

(پ) آیا 120 بر 3 بخش پذیر است؟ (ت) عدد $(-5)^{2n}$ عددی منفی است. ($n \in \mathbb{N}$)

(ث) $5 + 2^3 > 4^2 - 3$ (ج) کوچک‌ترین عدد طبیعی 3 رقمی که مربع کامل باشد، عدد 100 است.

پاسخ: (آ) گزاره است و ارزش آن درست است.

(ب) گزاره نیست چون یک موضوع سلیقه‌ای است.

(پ) گزاره نیست چون جمله پرسشی است.

(ت) گزاره است و ارزش آن نادرست است، چون $2n$ زوج است، لذا حاصل $(-5)^{2n}$ عددی مثبت می‌شود.

(ث) گزاره است و ارزش آن نادرست است، زیرا $5 + 2^3 = 13$ و $4^2 - 3 = 13$ پس گزاره $13 > 13$ نادرست است.

(ج) گزاره است و ارزش آن درست است، چون 100 مربع کامل است و ضمناً کوچک‌ترین عدد 3 رقمی و طبیعی است که مربع کامل است.

جبر گزاره‌ها (حساب گزاره‌ها): به منظور کم کردن حجم محاسبات، معمولاً گزاره‌ها را با یکی از حروف لاتین کوچک مثل p, q, r, s و ... نمایش می‌دهند. به کمک جبر گزاره‌ها می‌توانیم گزاره‌های مرکبی بسازیم که از دو یا چند گزاره ساده تشکیل شده‌اند و سپس ارزش این گزاره‌های مرکب را تعیین می‌کنیم. بسیاری مواقع برای تعیین ارزش یک گزاره مرکب، باید نحوه قرار دادن گزاره‌های ساده تشکیل دهنده آن را در جدول ارزش‌گذاری بلد باشیم. به جدول‌های زیر دقت کنید:

در جدول‌های زیر، ارزش درست یک گزاره را با «د» و ارزش نادرست را با «ن» نمایش داده‌ایم.

p
د
ن

۱ = تعداد گزاره‌ها

۲ = تعداد حالت‌های جدول (ردیف‌های جدول)

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

۲ = تعداد گزاره‌ها

۴ = ۲² = تعداد حالت‌های جدول

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

۳ = تعداد گزاره‌ها

۸ = ۲³ = تعداد حالت‌های جدول

درسنامه ۱

از جدول‌های قبل نتیجه می‌گیریم که در حالت کلی اگر k گزاره داشته باشیم تعداد حالت‌های جدول (ردیف‌های جدول) برابر 2^k خواهد بود. مثلاً اگر ۵ گزاره داشته باشیم، در جدول ارزش‌گذاری آن‌ها به تعداد $2^5 = 32$ ردیف وجود خواهد داشت.

مثال یک جدول ارزش‌گذاری دارای ۶۴ ردیف می‌باشد. در این جدول، چند گزاره ساده وجود دارد؟

پاسخ: اگر n تعداد گزاره‌های ساده باشد خواهیم داشت:

$$n = 6 \Rightarrow 2^n = 2^6 = 64 = 2^n \Rightarrow \text{تعداد ردیف‌ها}$$

نقیض یک گزاره: نقیض گزاره‌ای مثل p ، گزاره‌ای است که ارزش آن، دقیقاً مخالف ارزش p باشد. نقیض p را با نماد $\sim p$ نمایش می‌دهیم. برای ساختن نقیض گزاره‌های فارسی، کافی است فعل جمله را نفی کنیم؛ یعنی مثلاً اگر فعل جمله «است» بود به «نیست» تبدیل می‌شود یا اگر فعل جمله «نیست» بود به «است» تبدیل خواهد شد. روش دیگر این است که عبارت «چنین نیست که» را به ابتدای گزاره اضافه کنیم.

مثال نقیض گزاره «۱۲ بر ۳ بخش‌پذیر است» را بنویسید.

پاسخ: نقیض این گزاره را به دو حالت می‌توان نوشت:

حالت اول: ۱۲ بر ۳ بخش‌پذیر نیست.

حالت دوم: چنین نیست که ۱۲ بر ۳ بخش‌پذیر است (البته به جای «است» از «باشد» هم می‌توان استفاده کرد).

تذکر مهم: اگر گزاره داده‌شده، شامل یک نماد ریاضی باشد، برای نقیض کردن آن به شکل زیر عمل می‌کنیم:

۱- نمادهای $<$ و $\geq$ نقیض هم هستند. **مثال:** گزاره‌های $x < y$ و $x \geq y$ نقیض هم هستند.

۲- نمادهای $>$ و $\leq$ نقیض هم هستند. **مثال:** گزاره‌های $x > y$ و $x \leq y$ نقیض هم هستند.

۳- نمادهای $=$ و $\neq$ نقیض هم هستند. **مثال:** گزاره‌های $x^2 = 4$ و $x^2 \neq 4$ نقیض هم هستند.

۴- نمادهای $\in$ و $\notin$ نقیض هم هستند. **مثال:** گزاره‌های $2 \in \mathbb{N}$ و $2 \notin \mathbb{N}$ نقیض هم هستند.

۵- نمادهای $\subseteq$ و $\not\subseteq$ نقیض هم هستند. **مثال:** گزاره‌های $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ و $\mathbb{N} \not\subseteq \mathbb{R}$ نقیض هم هستند.

مثال نقیض عبارات و گزاره‌های زیر را نوشته و سپس ارزش هر گزاره و ارزش نقیضش را مشخص کنید.

ب) $3^0 + 2^1 + 3^2 \neq 4^2$

آ) عددی مربع کامل است.

ت) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{N}$

پ) عددی منفی است.

پاسخ: آ) عددی مربع کامل است. (نادرست) $\xrightarrow{\text{نقیض}}$ عددی مربع کامل نیست. (درست)

ب) می‌دانیم که $3^0 = 1$ ، $2^1 = 2$ ، $3^2 = 9$ ، $4^2 = 16$ ، در نتیجه $3^0 + 2^1 + 3^2 = 1 + 2 + 9 = 12 \neq 16 = 4^2$ ، چون $12 \neq 16$ ، گزاره $3^0 + 2^1 + 3^2 \neq 4^2$ درست است.

(نادرست) $3^0 + 2^1 + 3^2 = 4^2 \xrightarrow{\text{نقیض}}$ (درست) $3^0 + 2^1 + 3^2 \neq 4^2$

پ) عددی منفی است.

$\downarrow$ نقیض

x عددی منفی نیست.

تذکر مهم: اگر کسی بگوید نقیض جمله « x عددی منفی است» می‌شود « x عددی مثبت است». اشتباه کرده؛ چون اگر x منفی نباشد ممکن است صفر یا مثبت باشد پس نمی‌توانیم بگوییم حتماً مثبت است.

(درست) $\mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{N} \xrightarrow{\text{نقیض}}$ (نادرست) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{N}$

(ت)

جدول نقیض

اگر p گزاره‌ای دلخواه و $\sim p$ نقیض آن باشد، آن‌گاه جدول مربوط به این دو گزاره به شکل زیر است:

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

درسنامه ۱

دو گزاره هم‌ارز: دو گزاره p و q را در صورتی هم‌ارز می‌گوییم که ارزش یکسان داشته باشند (هم‌ارزش باشند) یعنی هر دو «درست» یا هر دو «نادرست» باشند. نماد هم‌ارزی به شکل $\equiv$ می‌باشد، پس هم‌ارزی p و q را به صورت $p \equiv q$ نشان می‌دهیم. مثلاً گزاره‌های «همه اعداد منفی، از صفر کوچک‌ترند.» و «۲۵ مربع کامل است.» هم‌ارزند، چون هر دو ارزش درست دارند.

مثال

هم‌ارزی‌های زیر را مانند نمونه حل‌شده، کامل کنید.

نمونه: $\sim(3 \in \mathbb{N}) \equiv (3 \notin \mathbb{N})$

(ب) $\sim(x + y = z) \equiv ?$

(آ) $\sim\left(\frac{1}{4} < \frac{1}{3}\right) \equiv ?$

(پ) $\sim(W \subseteq Q) \equiv ?$

پاسخ: (آ)

$\sim\left(\frac{1}{4} < \frac{1}{3}\right) \equiv \left(\frac{1}{4} \geq \frac{1}{3}\right)$

$\sim(x + y = z) \equiv (x + y \neq z)$

(ب)

$\sim(W \subseteq Q) \equiv (W \not\subseteq Q)$

(پ)

تذکره: اگر از یک گزاره، دو بار نقیض بگیریم، خود آن گزاره به‌دست می‌آید؛ یعنی: $\sim(\sim p) \equiv p$

مثال: $\sim[\sim(3 \in \mathbb{N})] \equiv (3 \in \mathbb{N})$

مثال: $\sim[\sim(5 > 3)] \equiv (5 > 3)$

۱. جدول زیر را کامل کنید.

ارزش $\sim p$	گزاره $\sim p$	ارزش p	گزاره p
			$2^5 \times 2^8 = 2^{12}$
			$+120 \geq -1200$
			میانۀ داده‌های ۱۰۲، ۳، ۴، ۵، ۲ عدد ۲/۵ است.
			مربع هر عدد طبیعی دلخواه، از خود آن عدد، کوچک‌تر است.
			معادله $x^2 - 3x - 5 = 0$ دو ریشه حقیقی متمایز دارد.
			در مثلث خیام، اعداد سطر چهارم به شکل «۱۳۳۱» نیستند.

۲. کدام یک از جملات یا عبارات‌های زیر گزاره محسوب می‌شوند؟ ارزش هر گزاره را مشخص کنید. (مشابه کار در کلاس صفحه ۱۴ کتاب درسی)

(ب) عدد طبیعی x ، مربع کامل است.

(آ) کسر $\frac{2x+1}{\sqrt{x}-3}$ عبارتی گویا است.

(ت) دامنۀ تابع $f = \{(1,5), (6,2), (3,10)\}$ برابر است با $D_f = \{1,3,6\}$

(پ) رشته مورد علاقه شما در دانشگاه چیست؟

(ج) تعداد دندان‌های خراب هر فرد، متغیر کمی نسبتی است.

(ث) کوچک‌ترین عدد اول طبیعی عدد ۱ است.

(ح) عدد $(-2)^n$ همیشه عددی منفی است. ($n \in \mathbb{N}$)

(چ) رابطه $f = \{(5,6), (7,8), (9,10)\}$ تابع است.

(د) عدد 3^8 عدد بسیار بزرگی است.

(خ) روزی ۲ ساعت ریاضی بخوان.

(ر) رابطه $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ همواره درست است. ($a, b \in \mathbb{R}$)

(ذ) $-\frac{3}{5} > -\frac{1}{4}$



(ز) نمودار خط $y = 2x - 1$ از نواحی اول و سوم نمی‌گذرد.

هم‌ارزی‌های زیر را مانند نمونه کامل کنید:

(ب) $\sim(\sqrt{25+9} \neq 5+3) \equiv ?$

(ت) $\sim(\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}) \equiv ?$

(آ) $(24 \text{ عددی مرکب است.}) \equiv ?$

(پ) $\sim(-12 \leq -8) \equiv ?$

(ث) $\sim[\sim(2^4 \leq 4^2)] \equiv ?$

پاسخ‌های تشریحی

ارزش $\sim p$	گزاره $\sim p$	ارزش p	گزاره p
د	$2^5 \times 2^8 \neq 2^{12}$	ن چون $2^5 \times 2^8 = 2^{13}$	$2^5 \times 2^8 = 2^{12}$
د	$+120 \geq -1200$	ن	$120 < -1200$
ن	میانۀ داده‌های ۱۰۲، ۳، ۴ عدد ۲/۵ نیست.	د	میانۀ داده‌های ۱۰۲، ۳، ۴ عدد ۲/۵ است.
ن	مربع هر عدد طبیعی دلخواه، از خود آن عدد کوچک‌تر است.	د	مربع هر عدد طبیعی دلخواه، از خود آن عدد کوچک‌تر نیست.
ن	معادله $x^2 - 3x - 5 = 0$ دو ریشه حقیقی متمایز ندارد.	د چون دلتای معادله مثبت است.	معادله $x^2 - 3x - 5 = 0$ دو ریشه حقیقی متمایز دارد.
ن	در مثلث خیام، اعداد سطر چهارم به شکل «۱۳۳۱» نیستند.	د	در مثلث خیام، اعداد سطر چهارم به شکل «۱۳۳۱» هستند.

(۲) گزاره است و ارزش نادرست دارد؛ چون x زیر رادیکال است و لذا عبارت مذکور، گویا محسوب نمی‌شود.

(ب) گزاره نیست چون مقدار x را نمی‌دانیم پس نمی‌توانیم ارزش جمله داده‌شده را تعیین کنیم.

(پ) گزاره نیست (جمله پرسشی است).

(ت) گزاره درست است؛ زیرا می‌دانیم دامنه تابع، شامل عضوهای اول زوج‌مرتبه‌ها می‌باشد.

(ث) گزاره نادرست است کوچک‌ترین عدد اول طبیعی، عدد ۲ است نه ۱.

(ج) گزاره درست است (نسبت تعداد دندان‌های خراب هر دو نفر، با معنی است).

(چ) گزاره درست است (عضوهای اول زوج‌مرتبه‌ها متفاوت‌اند، پس f تابع است).

(ح) گزاره نادرست است؛ چون اگر n زوج باشد حاصل $(-2)^n$ عددی مثبت می‌شود. مثلاً $(-2)^2 = +4$

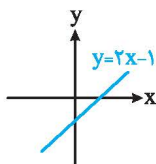
(خ) گزاره نیست (جمله امری است).

(د) گزاره نیست (جمله خبری است، ولی قابل ارزش‌گذاری نیست).

(ذ) گزاره نادرست است؛ زیرا می‌دانیم که $-\frac{1}{4} < -\frac{3}{5}$ است.

(ر) گزاره درست است (اتحاد مربع دوجمله‌ای است).

(ز) گزاره نادرست است؛ زیرا نمودار این خط از نواحی اول، سوم و چهارم می‌گذرد؛ پس فقط از ناحیه دوم نمی‌گذرد. (مطابق شکل)



(ژ) گزاره درست است؛ چون هر خط عمودی دلخواه، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

(۳) (۲۴ عددی مرکب نیست.) $\equiv (24 \text{ عددی مرکب است.}) \sim$

$\sim(\sqrt{25+9} \neq 5+3) \equiv (\sqrt{25+9} = 5+3)$

$\sim(-12 \leq -8) \equiv (-12 > -8)$

$\sim(\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}) \equiv (\sqrt{3} \in \mathbb{Q})$

$\sim[\sim(2^4 \leq 4^2)] \equiv (2^4 \leq 4^2)$

درسنامه ۲

گزاره‌های عطفی و فصلی

گزاره‌های مرکب (ترکیب گزاره‌ها با هم): به کمک منطق ریاضی و جبر گزاره‌ها، دو یا چند گزاره ساده را به ۴ حالت می‌توانیم با هم ترکیب کنیم تا گزاره‌های مرکب ساخته شوند. دو حالت از این ۴ حالت را در این درسنامه و ۲ حالت دیگر را در درسنامه (۳) بررسی می‌کنیم.

ترکیب عطفی دو گزاره: اگر دو گزاره ساده p و q را با حرف ربط «و» به هم اتصال دهیم، گزاره مرکب $p \wedge q$ حاصل می‌شود که آن را « p و q » می‌خوانیم. البته دقت کنید که گزاره‌های p و q ممکن است هیچ ارتباطی با هم نداشته باشند.

به عنوان مثال گزاره «۲ عددی اول است و تهران پایتخت ایران است.» یک ترکیب عطفی است. واضح است که ترکیب عطفی $p \wedge q$ فقط وقتی درست است که هم p درست باشد و هم q . پس گزاره بالا درست است، چون می‌دانیم ۲ عددی اول است و تهران پایتخت ایران است. جدول ارزش

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

درستی $p \wedge q$ در حالت کلی به شکل مقابل است:

ملاحظه می‌کنید که اگر حتی یکی از گزاره‌های p یا q نادرست باشد، $p \wedge q$ نادرست خواهد بود.

نتیجه بسیار مهم از جدول: اگر T گزاره‌ای همیشه درست و F گزاره‌ای همیشه نادرست باشد و p گزاره‌ای دلخواه باشد، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$(p \wedge T) \equiv (T \wedge p) \equiv p$$

$$(p \wedge F) \equiv (F \wedge p) \equiv F$$

$$(p \wedge \sim p) \equiv (\sim p \wedge p) \equiv F$$

ارزش گزاره‌های عطفی زیر را تعیین کنید.

(آ) $\frac{1}{3}$ عددی گویا است و انحراف معیار، جذر واریانس است.

(ب) $[-3 \notin \mathbb{Z}] \wedge [\frac{2}{5} \times \frac{1}{3} > (-\frac{1}{2})^2]$

(پ) a^2 عددی نامنفی است و ۱۲۱ عددی مربع کامل است.

(ت) $(\mathbb{N} \not\subset \mathbb{R}) \wedge \sqrt{2} \in \mathbb{Z}$

پاسخ: (آ) $\frac{1}{3}$ عددی گویا است و انحراف معیار، جذر واریانس است.

درست درست درست

$$\frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{15} = \frac{4}{30}, \quad (-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} = \frac{7.5}{30}$$

(ب) ابتدا حاصل $\frac{2}{5} \times \frac{1}{3}$ و $(-\frac{1}{2})^2$ را به دست می‌آوریم و سپس آن‌ها را مقایسه می‌کنیم:

می‌دانیم $\frac{4}{30}$ از $\frac{7.5}{30}$ بزرگ‌تر است، لذا گزاره $\frac{2}{5} \times \frac{1}{3} > (-\frac{1}{2})^2$ درست است.

$$[-3 \notin \mathbb{Z}] \wedge [\frac{2}{5} \times \frac{1}{3} > (-\frac{1}{2})^2]$$

درست نادرست نادرست

(پ) a^2 عددی نامنفی است و ۱۲۱ عددی مربع کامل است. (a هر عددی که باشد حاصل a^2 صفر یا مثبت است پس نامنفی است.)

درست درست درست

$$(\mathbb{N} \not\subset \mathbb{R}) \wedge (\sqrt{2} \in \mathbb{Z})$$

نادرست نادرست نادرست

(ت)

درسنامه ۲

ترکیب فصلی دو گزاره: اگر دو گزاره ساده p و q را با حرف ربط «یا» به هم اتصال دهیم، گزاره مرکب $p \vee q$ حاصل می‌شود که آن را « p یا q » می‌خوانیم. مثلاً گزاره « $\frac{5}{3}$ عددی طبیعی است یا 5^0 مضرب ۵ است.» یک ترکیب فصلی است.

واضح است که اگر هم p نادرست باشد و هم q ، گزاره $p \vee q$ نادرست است و در بقیه حالت‌ها درست است. پس گزاره اخیر درست است؛ چون p نادرست است ($\frac{5}{3}$ عدد طبیعی نیست) ولی q درست است. (5^0 بر ۵ بخش پذیر است).

جدول ارزش درستی $p \vee q$ به شکل زیر است:

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

نتیجه مهم از جدول: اگر T گزاره‌ای همیشه درست و F گزاره‌ای همیشه نادرست و p گزاره‌ای دلخواه باشد، آن‌گاه:

$$(p \vee T) \equiv (T \vee p) \equiv T$$

$$(p \vee F) \equiv (F \vee p) \equiv p$$

$$(p \vee \sim p) \equiv (\sim p \vee p) \equiv T$$

مثال

ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید. (در قسمت‌های پ و ت متغیر x عدد طبیعی است.)

(آ) 125 عددی فرد یا مربع کامل است.

(ب) (100 مضرب ۵ است.) $\vee$ ($-3 \geq -10$)

(پ) $[(a-b)(a+b) = a^2 - b^2] \vee (x^2 \geq x)$

(ت) معادله $x^2 - 4 = 0$ ریشه ندارد یا حاصل $(x-1)^3$ منفی است.

پاسخ: (آ) 125 عددی فرد است یا 125 عددی مربع کامل است.

درست ————— نادرست
↓
درست

(ب) (100 مضرب ۵ است.) $\vee$ ($-3 \geq -10$)

درست ————— درست
↓
درست

(پ) $[(a-b)(a+b) = a^2 - b^2] \vee (x^2 \geq x)$

درست ————— درست (اتحاد مزدوج)
↓
درست

(ت) معادله $x^2 - 4 = 0$ ریشه ندارد یا حاصل $(x-1)^3$ منفی است.

نادرست ————— نادرست
↓
نادرست

$$(x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \xrightarrow[\text{جذر طبیعی}]{\text{جذر}} x = 2)$$

درسنامه ۲

نکته

گاهی لازم است نقیض یک گزاره عطفی یا فصلی را تعیین کنیم. برای این منظور از قوانین دموگن به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

یعنی برای پیدا کردن نقیض $p \vee q$ تک تک گزاره‌های p و q را نقیض می‌کنیم و علامت « $\vee$ » به « $\wedge$ » تبدیل می‌شود. به طریق مشابه می‌توان گفت برای نقیض کردن $p \wedge q$ تک تک گزاره‌های p و q را نقیض کرده و علامت « $\wedge$ » را به « $\vee$ » تبدیل می‌کنیم یعنی حرف «و» به «یا» و حرف «یا» به «و» تبدیل می‌شود.

مثال

نقیض گزاره‌های زیر را به دست آورید:

(آ) $(3 \notin \mathbb{Z}) \wedge (\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W})$

(ب) $(\frac{1}{5} < \frac{1}{4}) \vee (\sqrt{3} > \sqrt{2})$

(پ) ۳ عددی اول است و ۶۳ مضرب ۲ است.

(ت) ۵ مقسوم علیه ۱۰۰ نیست یا درآمد افراد، متغیر کمی نسبتی است.

(پاسخ: آ) $\sim[(3 \notin \mathbb{Z}) \wedge (\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W})] \equiv [\sim(3 \notin \mathbb{Z}) \vee \sim(\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W})] \equiv (3 \in \mathbb{Z}) \vee (\mathbb{N} \not\subseteq \mathbb{W})$

(ب) $\sim[(\frac{1}{5} < \frac{1}{4}) \vee (\sqrt{3} > \sqrt{2})] \equiv \sim(\frac{1}{5} < \frac{1}{4}) \wedge \sim(\sqrt{3} > \sqrt{2}) \equiv (\frac{1}{5} \geq \frac{1}{4}) \wedge (\sqrt{3} \leq \sqrt{2})$

(پ) نقیض گزاره داده شده به صورت مقابل است: ۳ عددی اول نیست یا ۶۳ مضرب ۲ نیست.

(ت) نقیض گزاره داده شده به صورت مقابل است: ۵ مقسوم علیه ۱۰۰ است و درآمد افراد، متغیر کمی نسبتی نیست.

مثال

اگر p و q دو گزاره دلخواه باشند، جدول ارزش درستی گزاره $(p \vee \sim q) \wedge \sim p$ را رسم کنید.

(پاسخ:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$(p \vee \sim q) \wedge \sim p$
د	د	ن	ن	د	ن
د	ن	ن	د	د	ن
ن	د	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	د	د

مثال

اگر p گزاره‌ای درست، q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره $(\sim p \wedge \sim q) \vee (r \wedge p)$ را بدون رسم جدول تعیین کنید.

(پاسخ: $(\sim p \wedge \sim q) \vee (r \wedge p) \equiv (\sim T \wedge \sim F) \vee (r \wedge T) \equiv (\underbrace{F \wedge T}_F) \vee (\underbrace{r \wedge T}_r) \equiv r$

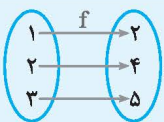
(مشابه فعالیت صفحه ۵ کتاب درسی)

۴. جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره مرکب	درست	نادرست
۱	در تابع $f(x) = x^2 - 5x$ متغیر مستقل برابر $f(x)$ است و درآمد افراد، متغیر کمی نسبتی است.		
۲	حاصل $(-5)^4$ عددی منفی نیست و رنگ پیراهن افراد، متغیر کیفی اسمی نیست.		
۳	۱۸ مضرب ۹ است و	✓	
۴	 و شیب هر خط عمودی (موازی محور عرض‌ها) تعریف نشده است.	✓	
۵	طول رأس سهمی $y = x^2 - 4x + 1$ برابر -۲ است و $\mathbb{Z} \not\subseteq \{0, 1, 2\}$		
۶	مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۱۰ عبارتند از $1, 2, 5, 10$ و میانه یک سری از داده‌ها همان چارک دوم است.		
۷	$(\sqrt{100-25} = 10-5) \wedge ((\frac{2}{3})^{-4} \neq (\frac{3}{2})^4)$		
۸	مربع هر عدد منفی، از خود آن عدد کوچک‌تر است و مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.		

(مشابه فعالیت صفحه ۶ کتاب درسی)

۵. جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره مرکب	درست	نادرست
۱	عدد ۲۳ زوج یا اول است.		
۲	عدد ۵۸ بر ۳ یا ۵ بخش‌پذیر است.		
۳	کسر $\frac{x^2}{ x -1}$ عبارتی گویا است یا ۸۰ عددی مرکب	✓	
۴	$(\sqrt{3} \in \mathbb{Z}) \vee ((-2)^4 \geq (-4)^2)$		
۵	اندازه قد افراد، متغیر کمی فاصله‌ای است یا ارسطو نویسنده کتاب ارغنون نیست.		
۶	نمودار ون  تابع نیست یا	✓	
۷	تجزیه‌شده عبارت $4x^2 - 4x + 1$ به صورت $(2x-1)^2$ است یا	✓	
۸	معکوس هر عدد حقیقی مثبت، کوچک‌تر از خود آن عدد است یا مجموع هر عدد طبیعی زوج با هر عدد طبیعی فرد، عددی فرد است.		

(مشابه تمرین ۳ صفحه ۱۱ کتاب درسی)

۶. با استفاده از جدول ارزش‌گذاری، درستی یا نادرستی هم‌ارزی‌های زیر را بررسی کنید:

$(p \vee \sim p) \equiv F$ ب	$(p \wedge \sim p) \equiv F$ ا
$\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$ ت	$\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$ پ
$[p \vee (\sim p \wedge q)] \equiv (p \vee q)$ ج	$[p \wedge (p \vee q)] \equiv p$ ث
$[p \vee (q \vee r)] \equiv [(p \vee q) \vee r]$ ح	$[p \wedge (\sim p \vee q)] \equiv (p \wedge q)$ چ

$$[p \wedge (q \vee r)] \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)] \text{ (د)}$$

$$[p \wedge (\sim p \wedge \sim q)] \equiv F \text{ (ر)}$$

$$[p \wedge (q \wedge r)] \equiv [(p \wedge q) \wedge r] \text{ (خ)}$$

$$[p \vee (q \wedge r)] \equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee r)] \text{ (ذ)}$$

$$[\sim(p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)] \equiv p \text{ (ز)}$$

۷. بدون رسم جدول، طرف دوم هم‌ارزی‌های زیر را به‌دست آورید.

$$(\sim p \vee T) \wedge (F \wedge \sim p) \equiv ? \text{ (ب)}$$

$$\sim(\sim p) \vee \sim(\sim T) \equiv ? \text{ (ا)}$$

$$\sim(p \vee \sim p) \wedge \sim(q \wedge \sim q) \equiv ? \text{ (پ)}$$

۸. اگر فرض کنیم که گزاره $p \wedge q$ گزاره‌ای درست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، بدون رسم جدول، ارزش گزاره $p \vee (q \wedge r)$ را تعیین کنید.

۹. بدون رسم جدول، طرف دیگر هم‌ارزی‌های زیر را به‌دست آورید. (T گزاره همواره درست و F گزاره همواره نادرست است.)

$$(p \wedge \sim p) \vee (q \vee T) \equiv ? \text{ (ب)}$$

$$\sim p \wedge \sim F \equiv ? \text{ (ا)}$$

۱۰. اگر ارزش گزاره $p \vee q$ نادرست و ارزش $\sim r$ درست باشد، ارزش گزاره $(\sim p \wedge q) \vee r$ را تعیین کنید.

۱۱. اگر گزاره $p \vee (\sim q \vee p)$ نادرست باشد، بدون رسم جدول، ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

$$\sim(p \vee q) \wedge \sim(\sim r) \equiv ? \text{ (ب)}$$

$$\sim p \vee (q \wedge r) \equiv ? \text{ (ا)}$$

۱۲. نقیض گزاره‌های زیر را به‌دست آورید سپس ارزش آن‌ها را تعیین کنید:

(ا) ۱۳ ضرب ۲ نیست و میانه یک سری از داده‌ها همان چارک اول است.

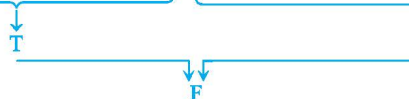
(ب) ۴ عدد مرکب است یا مسکو پایتخت روسیه نیست.

$$(-6 < -10) \wedge (\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\} \subseteq \mathbb{R}) \text{ (پ)}$$

$$(\frac{1}{8} \notin \mathbb{Z}) \vee (\sqrt{5} \neq 1) \text{ (ت)}$$

پاسخ‌های تشریحی

۴. ردیف ۱: در تابع $f(x) = x^2 - 5x$ متغیر مستقل $f(x)$ است و درآمد افراد، متغیر کمی نسبتی است.

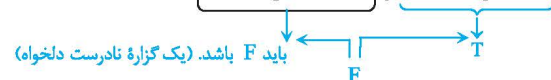


تذکر: توجه کنید که در تابع ذکرشده، x متغیر مستقل و $f(x)$ متغیر وابسته است.

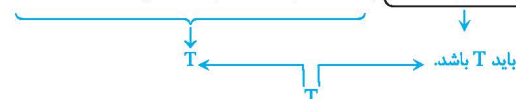
ردیف ۲: حاصل $(-5)^4$ عددی منفی نیست و رنگ پیراهن افراد، متغیر کیفی اسمی نیست.



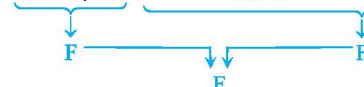
ردیف ۳: ۱۸ مضرب ۹ است و ۲ عددی فرد است.



ردیف ۴: ۲ عددی اول است و شیب هر خط عمودی، تعریف نشده است.



ردیف ۵: طول رأس سهمی $y = x^2 - 4x + 1$ برابر -۲ است و $\{0, 1, 2\} \not\subseteq \mathbb{Z}$



$$x = \frac{-(-4)}{2(1)} = 2$$

یادآوری: طول رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ برابر با $x = \frac{-b}{2a}$ است. بنابراین داریم:

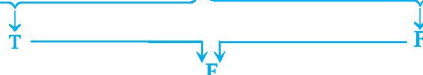
ردیف ۶: مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۱۰ عبارتند از ۱۰، ۲، ۵، ۱۰ و میانه یک‌سری از داده‌ها همان چارک دوم است.



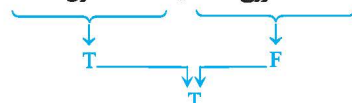
ردیف ۷: $(\sqrt{100-25} = 10-5) \wedge ((\frac{2}{3})^{-4} \neq (\frac{3}{2})^4)$



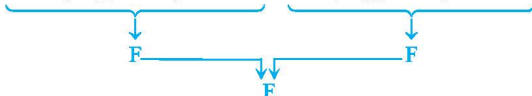
ردیف ۸: مربع هر عدد منفی، از خود آن عدد کوچک‌تر است و مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.



ردیف ۱: عدد ۲۳ زوج است یا ۲۳ عدد اول است.



ردیف ۲: عدد ۵۸ بر ۳ بخش‌پذیر است یا عدد ۵۸ بر ۵ بخش‌پذیر است.



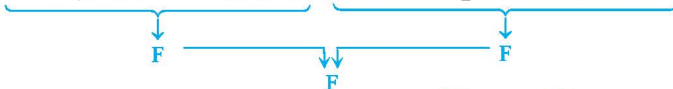
ردیف ۳: کسر $\frac{x^2}{|x|-1}$ گویا است یا ۸۰ عددی مرکب است.



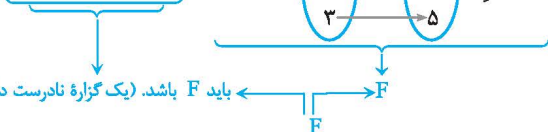
ردیف ۴: $(\sqrt{3} \in \mathbb{Z}) \vee ((-2)^4 \geq (-4)^2)$



ردیف ۵: اندازه قد افراد، متغیر کمی فاصله‌ای است یا ارسطو نویسنده کتاب ارغنون نیست.



ردیف ۶: نمودار ون



ردیف ۷: تجزیه‌شده عبارت $4x^2 - 4x + 1$ به صورت $(2x-1)^2$ است یا ۲ عددی فرد است.



ردیف ۸: معکوس هر عدد حقیقی مثبت، کوچک‌تر از خود آن عدد است یا مجموع هر عدد طبیعی زوج با هر عدد طبیعی فرد، عددی فرد است.



دقت کنید که معکوس عدد $\frac{1}{5}$ می‌شود ۵ که از خود $\frac{1}{5}$ بزرگ‌تر است، پس گزاره اول نادرست است.

۶

(آ) هم‌ارزی داده‌شده، درست است.

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
د	ن	ن
ن	د	ن

(ب) هم‌ارزی داده‌شده، نادرست است.

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
د	ن	د
ن	د	د

سمت راست هم‌ارزی
سمت چپ هم‌ارزی

(پ)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
د	د	ن	ن	د	ن	ن
د	ن	ن	د	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	د	د

پس هم‌ارزی داده‌شده درست است. ضمناً به این هم‌ارزی، قانون دمورگان می‌گوییم.

(ت)

سمت راست هم‌ارزی
سمت چپ هم‌ارزی

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$
د	د	ن	ن	د	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	د	ن	ن	د	د
ن	ن	د	د	ن	د	د

پس هم‌ارزی داده‌شده درست است. به این هم‌ارزی هم، دمورگان می‌گوییم.

(ث)

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	ن
ن	ن	ن	ن

این دو ستون، یکسان هستند پس هم‌ارزی داده‌شده، درست است.

سمت راست هم‌ارزی
سمت چپ هم‌ارزی

(ج)

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$p \vee (\sim p \wedge q)$	$p \vee q$
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	ن	ن	د	د
ن	د	د	د	د	د
ن	ن	د	ن	ن	ن

هم‌ارزی داده‌شده، درست است.

(ج)

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$p \wedge (\sim p \vee q)$	$p \wedge q$
د	د	ن	د	د	د
د	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن

هم‌ارزی داده‌شده، درست است.

(ح)

p	q	r	$q \vee r$	$p \vee q$	$p \vee (q \vee r)$	$(p \vee q) \vee r$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	د	د
د	ن	د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د	د	د
ن	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

هم‌ارزی داده‌شده، درست است.

(خ)

p	q	r	$q \wedge r$	$p \wedge q$	$p \wedge (q \wedge r)$	$(p \wedge q) \wedge r$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	د	ن	ن
د	ن	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	ن	ن	ن
ن	د	ن	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

هم‌ارزی داده‌شده، درست است.

(د)

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	ن	د	د
د	ن	د	د	ن	د	د	د
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	د	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

هم‌ارزی داده‌شده، درست است.

(ذ)

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee q$	$p \vee r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	د	د	د	د
د	ن	د	ن	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د	د	د	د
ن	د	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	ن	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

هم‌ارزی داده‌شده، درست است.

(ر)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$p \wedge (\sim p \wedge \sim q)$
د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	د	ن

هم‌ارزی، داده‌شده، درست است.

(ز)

p	q	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$p \vee \sim q$	$\sim(p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$
د	د	ن	د	ن	د	ن
د	ن	د	د	ن	د	ن
ن	د	ن	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	د	د	د

هم‌ارزی داده‌شده، نادرست است.

۷

$$[\sim(\sim p) \vee \sim(\sim T)] \equiv (p \vee T) \equiv T$$

(آ)

$$[\underbrace{(\sim p \vee T)}_T \wedge \underbrace{(F \wedge \sim p)}_F] \equiv (T \wedge F) \equiv F$$

(ب)

$$[\underbrace{\sim(p \vee \sim p)}_T \wedge \underbrace{\sim(q \wedge \sim q)}_F] \equiv (\sim T \wedge \sim F) \equiv (F \wedge T) \equiv F$$

(پ)

۸ چون $p \wedge q$ درست است، لذا هم p و هم q درست هستند. بنابراین:

$$[p \vee (q \wedge r)] \equiv [T \vee \underbrace{(T \wedge r)}_r] \equiv (T \vee r) \equiv T$$

$$(\sim p \wedge \sim F) \equiv (\sim p \wedge T) \equiv \sim p$$

(آ) ۹

$$[\underbrace{(p \wedge \sim p)}_F \vee \underbrace{(q \vee T)}_T] \equiv (F \vee T) \equiv T$$

(ب)

۱۰ ارزش $p \vee q$ نادرست است، پس هم p نادرست است و هم q ، از طرفی ارزش $\sim r$ درست است، پس ارزش خود r نادرست است.

$$[(\sim p \wedge q) \vee r] \equiv [(\sim F \wedge F) \vee F] \equiv [\underbrace{(T \wedge F)}_F] \vee F \equiv F$$

۱۱ گزاره $p \vee (\sim q \vee p)$ نادرست است، پس هم p نادرست است و هم $\sim q \vee p$. برای آن که $\sim q \vee p$ نادرست باشد، باید هم p نادرست باشد و هم $\sim q$ پس خود q درست است. لذا:

(آ)

$$[\sim p \vee (q \wedge r)] \equiv [\sim F \vee \underbrace{(T \wedge r)}_r] \equiv (T \vee r) \equiv T$$

(ب)

$$[\sim(p \vee q) \wedge \sim(\sim r)] \equiv [\sim \underbrace{(F \vee T)}_T] \wedge r \equiv (\sim T \wedge r) \equiv (F \wedge r) \equiv F$$

۱۲ (آ) نقیض این گزاره با توجه به قوانین دموگن به صورت زیر است:

۱۳ مضرب ۲ است یا میانه یک سری از داده‌ها همان چارک اول نیست.

درست نادرست

(ب) نقیض این گزاره به صورت زیر است:

۴ عدد مرکب نیست و مسکو پایتخت روسیه است.

درست نادرست

(پ) نقیض گزاره داده شده عبارت است از:

$$\underbrace{(-6 \geq -10)}_{\text{درست}} \vee \underbrace{(\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\} \not\subseteq \mathbb{R})}_{\text{نادرست}}$$

درست

$$\underbrace{(\frac{1}{8} \in \mathbb{Z})}_{\text{نادرست}} \wedge \underbrace{(\sqrt{5}^\circ = 1)}_{\text{درست}}$$

نادرست

(ت) نقیض این گزاره عبارت است از: