

خرید کتاب های کنکور

با تخفیف ویژه

و
ارسال رایگان

Medabook.com



مدابوک



یک جله تماس تلفنی رایگان

با مشاوران رتبه برتر

برای انتخاب بهترین منابع

دبیرستان و کنکور

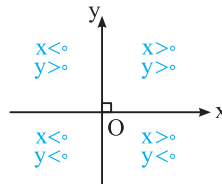
۰۲۱ ۲۸۴۲۵۲۱۰



درسنامه ۱

معادله خط

برای تعیین یک نقطه از صفحه، از دستگاه محورهای مختصات دکارتی استفاده می‌کنیم. این دستگاه از دو محور عمود بر هم $x'Ox$ (محور x ها) و $y'Oy$ (محور y ها) تشکیل شده است و این محورها صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند که هر کدام از آن‌ها را یک ربع می‌نامند و به هر نقطه A از صفحه، یک زوج مرتب (x, y) از اعداد حقیقی متناظر می‌شود. x را طول نقطه و y را عرض آن می‌نامند. علامت x و y در چهار ناحیه در شکل مقابل مشخص شده است:



نکته

اگر نقطه‌ای روی محور x ها قرار داشته باشد، عرض آن صفر است، لذا مختصات آن به صورت $(x, 0)$ می‌باشد.
اگر نقطه‌ای روی محور y ها قرار داشته باشد، طول آن صفر است، لذا مختصات آن به صورت $(0, y)$ می‌باشد.

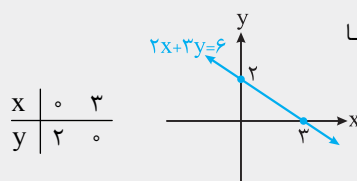
معادله خط

معادله یک خط در دستگاه مختصات دکارتی به صورت $ax + by + c = 0$ است که در آن a و b هم‌زمان صفر نیستند، یعنی $a^2 + b^2 \neq 0$.

رسم خط

می‌دانیم از هر دو نقطه متمایز، فقط یک خط می‌گذرد، بنابراین می‌توان با داشتن معادله یک خط و مشخص کردن مختصات ۲ نقطه از خط، نمودار آن را در دستگاه محورهای مختصات رسم کرد.

نمودار خط به معادله $2x + 3y = 6$ را در دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.



پاسخ: در معادله به جای x ، دو مقدار دلخواه قرار می‌دهیم تا مقدار y به دست آید و از آن‌جا با مشخص شدن مختصات دو نقطه، خط را رسم می‌کنیم:

شیب خط: شیب یک خط برابر است با نسبت تفاضل عرض‌های هر دو نقطه دلخواه روی آن به تفاضل طول‌های همان دو نقطه. به عبارت دیگر

اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه روی یک خط باشند و $x_A \neq x_B$ باشد، آن‌گاه:

$$m = \text{شیب خط} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

به عنوان مثال، شیب خط گذرنده از نقاط $A(1, -4)$ و $B(3, 2)$ برابر است با:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - (-4)}{3 - 1} = \frac{6}{2} = 3$$

محاسبه شیب خط با داشتن معادله خط

(۱) اگر معادله خط به صورت $ax + by + c = 0$ (یا $ax + by = c$) باشد و $b \neq 0$ ، آن‌گاه:

به عنوان مثال، شیب خط به معادله $2x + 3y = 1$ برابر $-\frac{2}{3}$ است. شیب x ضرب y ضرب

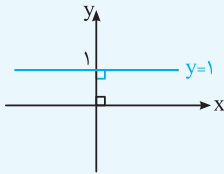
(۲) اگر معادله خط به صورت $y = mx + h$ باشد، آن‌گاه شیب خط برابر m (ضرب x) است.

به عنوان مثال، شیب خط به معادله $y = -\frac{1}{4}x + 3$ برابر $m = -\frac{1}{4}$ است.

$$\text{شیب خط} = -\frac{\text{ضرب } x}{\text{ضرب } y} = -\frac{a}{b}$$

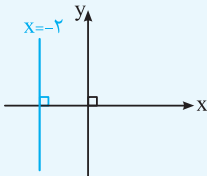
درسنامه ۱

نکته



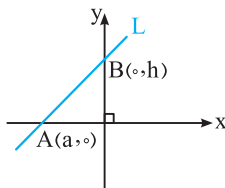
اگر خط L موازی محور x ها باشد، در این صورت شیب خط برابر صفر است و اگر خط از نقطه (a, b) بگذرد، معادله آن به صورت $y = b$ است. به عنوان مثال، خط $y = 1$ موازی محور x ها است و شیب آن برابر صفر است.

نکته



اگر خط L موازی محور y ها باشد، در این صورت برای خط L شیب تعریف نمی‌شود و اگر خط از نقطه (a, b) بگذرد، معادله آن به صورت $x = a$ است. به عنوان مثال، خط $x = -2$ موازی محور y ها است و این خط شیب ندارد.

طول از مبدأ و عرض از مبدأ خط راست



با توجه به شکل مقابل، خط L محور x ها را در نقطه $A(a, 0)$ قطع کرده است، a را طول از مبدأ خط L می‌گوییم. همچنین خط L محور y ها را در نقطه $B(0, h)$ قطع کرده است، h را عرض از مبدأ خط L می‌گوییم.

نکته

معادله خط با شیب m و عرض از مبدأ h به صورت $y = mx + h$ می‌باشد.

نوشتن معادله خط

در دو حالت می‌توان معادله خط راست را نوشت:

حالت اول: اگر شیب خط و نقطه‌ای از خط را داشته باشیم، می‌توانیم معادله آن را بنویسیم. هرگاه شیب خط m باشد و خط از نقطه $A(x_1, y_1)$ بگذرد، آن‌گاه معادله خط از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

حالت دوم: اگر مختصات دو نقطه از خط را داشته باشیم، می‌توانیم معادله آن را بنویسیم. هرگاه خطی از نقاط $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ بگذرد، آن‌گاه شیب خط از رابطه $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ به دست می‌آید و با در نظر گرفتن یکی از نقاط A یا B روی خط، مانند حالت اول معادله خط را می‌نویسیم و یا می‌توان مستقیماً از رابطه مقابل استفاده کرد:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), \quad x_2 \neq x_1$$

نکته

اگر $x_1 = x_2$ ، آن‌گاه معادله خط گذرنده از دو نقطه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) به صورت $x = x_1$ است و اگر $y_1 = y_2$ ، آن‌گاه معادله خط به صورت $y = y_1$ می‌باشد.

معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $(2, -5)$ و $(-2, 7)$ بگذرد.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - (-5)}{-2 - 2} = \frac{12}{-4} = -3, \quad A(2, -5) \Rightarrow y - (-5) = -3(x - 2) \Rightarrow y + 5 = -3x + 6 \Rightarrow y = -3x + 1$$

پاسخ:

وضعیت نسبی دو خط در صفحه

دو خط در صفحه یا متقاطع‌اند و یا موازی.

حالت اول: دو خط متقاطع

اگر دو خط در صفحه همدیگر را در یک نقطه قطع کنند، آن‌گاه می‌گوییم دو خط متقاطع هستند و اگر $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ معادله دو خط در صفحه باشند، آن‌گاه با حل دستگاه دو معادله دو مجهولی $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ محل تلاقی دو خط به دست می‌آید.

درسنامه ۱

مثال

معادله خطی را بنویسید که از محل تلاقی دو خط به معادلات $x + 2y = -5$ و $2x - y = 0$ و نقطه $(3, 5)$ می‌گذرد.

پاسخ: ابتدا محل تلاقی دو خط را با حل دستگاه دو معادله دو مجهولی به دست می‌آوریم:

$$2 \times \begin{cases} x + 2y = -5 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = -5 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow 5x = -5 \Rightarrow x = -1 \xrightarrow{2x-y=0} -2 - y = 0 \Rightarrow y = -2$$

بنابراین نقطه $(-1, -2)$ محل تلاقی دو خط است. برای نوشتن معادله خط داریم:

$$\begin{cases} A(-1, -2) \\ B(3, 5) \end{cases} \Rightarrow m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 + 2}{3 + 1} = \frac{7}{4} \Rightarrow y + 2 = \frac{7}{4}(x + 1) \xrightarrow{\times 4} 4(y + 2) = 7(x + 1) \Rightarrow 4y - 7x + 1 = 0$$

حالت دوم: دو خط موازی

اگر دو خط متقاطع نباشند، آن‌گاه دو خط موازی‌اند. در واقع اگر دو خط همدیگر را قطع نکنند و یا بر هم منطبق باشند، دو خط موازی‌اند.

نکته

اگر دو خط با هم موازی باشند، آن‌گاه شیب آن‌ها با هم برابر است و بر عکس.

مثال

معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(3, -4)$ بگذرد و موازی خط $5x - 3y = 1$ باشد.

پاسخ: شیب خط $5x - 3y = 1$ برابر $m = -\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y} = -\frac{5}{-3} = \frac{5}{3}$ است. از آن جایی‌که شیب دو خط موازی با هم برابرند، پس باید

معادله خطی را بنویسیم که از نقطه $(3, -4)$ می‌گذرد و شیب آن برابر $\frac{5}{3}$ است:

$$y - (-4) = \frac{5}{3}(x - 3) \xrightarrow{\times 3} 3(y + 4) = 5(x - 3) \Rightarrow 3y + 12 = 5x - 15 \Rightarrow 3y - 5x + 27 = 0$$

دو خط عمود بر هم

نکته

اگر m و m' شیب دو خط باشند و $mm' = -1$ ، آن‌گاه دو خط بر هم عمودند. بنابراین شیب دو خط عمود بر هم، عکس و قرینه هم می‌باشند.

مثال

معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(-1, 4)$ بگذرد و بر خط به معادله $y = -2x + 3$ عمود باشد.

پاسخ: شیب خط $y = -2x + 3$ برابر $m = -2$ است، پس شیب خط عمود بر این خط برابر $m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$ می‌باشد. معادله خطی که از نقطه $(-1, 4)$ بگذرد و شیب آن $\frac{1}{2}$ باشد، به صورت زیر است:

$$y - 4 = \frac{1}{2}(x + 1) \xrightarrow{\times 2} 2(y - 4) = (x + 1) \Rightarrow 2y - 8 = x + 1 \Rightarrow 2y - x - 9 = 0$$

(مشابه کار در کلاس ۲ صفحه ۲ کتاب درسی)

ت) $y = 4$

پ) $x = -1$

ب) $3x + 4y = 12$

ا) $2x - y = 1$

۲. در هر یک از قسمت‌های زیر، معادله خط را بنویسید.

آ) شیب خط -4 و عرض از مبدأ آن برابر ۲ باشد.

ب) شیب خط ۵ باشد و از نقطه $(-3, -2)$ بگذرد.

پ) خط از نقاط $(-1, 2)$ و $(1, 0)$ بگذرد.

ت) خط از نقطه $(3, 0)$ بگذرد و با خط $5x + 3y = 2$ موازی باشد.

ث) خط از نقطه $(4, 2)$ بگذرد و عمود بر خط به معادله $3x + 2y = 4$ باشد.

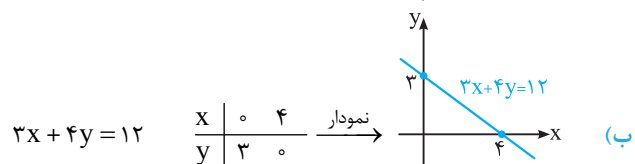
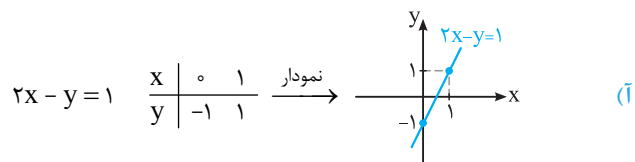
ج) طول از مبدأ خط ۲ و عرض از مبدأ آن ۵ باشد.

(مشابه کار در کلاس ۶ صفحه ۳ کتاب درسی)

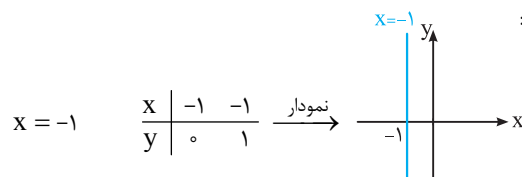
۳. (آ) معادله خط گذرنده از نقطه $(-4, 3)$ و موازی خط گذرنده از دو نقطه $(5, 1)$ و $(-4, 3)$ را بنویسید.
 (ب) معادله خط گذرنده از نقطه $(3, 2)$ و عمود بر خط گذرنده از دو نقطه $(2, 0)$ و $(-1, 6)$ را بنویسید.
۴. معادله خط گذرنده از نقطه $(3, -2)$ و نقطه تلاقی دو خط به معادلات $x + 2y = 7$ و $4x - y = 1$ را بنویسید.
۵. مقدار a را طوری به دست آورید که نقاط $(3, 1)$ ، $(5, -3)$ و $(a, 2a - 1)$ روی یک خط راست قرار داشته باشند.
۶. مقدار m را طوری به دست آورید که سه خط به معادله‌های $x + 2y = -1$ ، $3x - 2y = 8$ و $(m + 1)x + my = 7$ از یک نقطه بگذرند.
۷. وضعیت هر جفت از خطوط زیر را نسبت به هم مشخص کنید. (موازی، عمود یا متقاطع غیرعمود) (مشابه کار در کلاس ۱ صفحه ۱۴ کتاب درسی)
 $L_1: -3x + 5y = 1$ ، $L_2: 3x - y = 1$ ، $L_3: 5x + 3y = 7$ ، $L_4: 6x = 2y + 5$
۸. دو خط به معادلات $3x + (2m + 1)y = 4$ و $mx + 7y = 11$ داده شده است. (مشابه کار در کلاس ۲ صفحه ۱۴ کتاب درسی)
 (آ) مقدار m را طوری به دست آورید که دو خط با هم موازی باشند.
 (ب) مقدار m را طوری به دست آورید که دو خط بر هم عمود باشند.
۹. مقدار m را طوری به دست آورید که دو خط به معادلات $2x + (-m + 4)y = 3$ و $(m^2 + 4)y = 7$ با هم موازی باشند.
۱۰. خط گذرنده از دو نقطه $(m, 2m)$ و $(1, -1)$ بر خط به معادله $2x - 5y = 7$ عمود است. مقدار m را به دست آورید.
۱۱. مربع $ABCD$ که $A(4, 1)$ و $B(6, 2)$ دو رأس مجاور آن هستند، مفروض است. (مشابه کار در کلاس ۳ صفحه ۱۴ کتاب درسی)
 (آ) شیب ضلع AB را بیابید و معادله آن را بنویسید.
 (ب) شیب ضلع BC را به دست آورید و معادله آن را بنویسید.
 (پ) اگر $D(-1, 1)$ یک رأس دیگر این مربع باشد، مختصات رأس C را مشخص کنید.
۱۲. مربع $ABCD$ که $A(-3, -1)$ و $B(0, 2)$ دو رأس مجاور آن هستند، مفروض است.
 (آ) معادله ضلع AB را بنویسید.
 (ب) اگر $C(3, a)$ و $D(0, 2a - 2)$ دو رأس دیگر مربع باشند، مختصات رأس‌های C و D را بیابید.

پاسخ‌های تشریحی

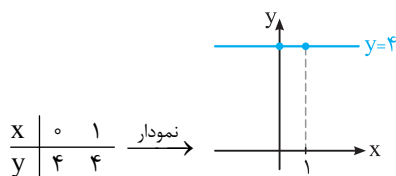
۱. با مشخص کردن دو نقطه دلخواه روی خط، خط را رسم می‌کنیم:



(پ) $x = -1$ ، خطی به موازات محور y ها است که طول هر نقطه روی آن برابر -1 است:



(ت) عرض تمام نقاط روی خط $y = 4$ برابر ۴ است:



۲. (آ) معادله خط با شیب m و عرض از مبدأ h به صورت $y = mx + h$ می‌باشد، بنابراین معادله خط با شیب $m = -4$ و عرض از مبدأ $h = 2$ برابر $y = -4x + 2$ است.

(ب) معادله خط گذرنده از نقطه (x_1, y_1) با شیب m به صورت زیر است:
 $y - y_1 = m(x - x_1)$

$m = 5$ ، $(-2, -3) \Rightarrow y + 3 = 5(x + 2)$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $x_1 \quad y_1$
 $\Rightarrow y + 3 = 5x + 10 \Rightarrow y = 5x + 7$

۴ با حل دستگاه دو معادله دو مجهولی $\begin{cases} 4x - y = 1 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$ ، نقطه تلاقی دو خط را به دست می آوریم:

$$\times 2 \begin{cases} 4x - y = 1 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x - 2y = 2 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \Rightarrow 9x = 9 \Rightarrow x = 1$$

$$\frac{x+2y=7}{x=1} \Rightarrow 1+2y=7 \Rightarrow 2y=6 \Rightarrow y=3$$

نقطه $A(1, 3)$ ، نقطه تلاقی دو خط است. معادله خط گذرنده از دو نقطه $A(1, 3)$ و $B(3, -2)$ به صورت زیر است:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 3}{3 - 1} = -\frac{5}{2}, A(1, 3)$$

$$y - 3 = -\frac{5}{2}(x - 1) \xrightarrow{\times 2} 2(y - 3) = -5(x - 1)$$

$$\Rightarrow 2y - 6 = -5x + 5 \Rightarrow 2y + 5x = 11$$

۵ ابتدا معادله خطی را که از دو نقطه $(3, 1)$ و $(5, -3)$ می گذرد، می نویسیم:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - 1}{5 - 3} = -\frac{4}{2} = -2, A(3, 1)$$

$$y - 1 = -2(x - 3) \Rightarrow y - 1 = -2x + 6 \Rightarrow y = -2x + 7$$

چون سه نقطه روی یک خط قرار دارند، پس مختصات نقطه $C(a, 2a - 1)$ نیز باید در معادله $y = -2x + 7$ صدق کند:

$$C(a, 2a - 1), y = -2x + 7 \Rightarrow 2a - 1 = -2a + 7$$

$$\Rightarrow 2a + 2a = 7 + 1 \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2$$

۶ محل تلاقی دو خط به معادله های $x + 3y = -1$ و $3x - 2y = 8$

از حل دستگاه $\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$ به دست می آید:

$$\times 2 \begin{cases} x + 3y = -1 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 6y = -2 \\ 9x - 6y = 24 \end{cases} \Rightarrow 11x = 22 \Rightarrow x = 2$$

$$\frac{x+3y=-1}{x=2} \Rightarrow 2+3y=-1 \Rightarrow 3y=-3 \Rightarrow y=-1$$

نقطه $(2, -1)$ محل تلاقی دو خط است. خط $(m+1)x + my = 7$ از نقطه $(2, -1)$ می گذرد، پس مختصات این نقطه در معادله

$$(m+1)x + my = 7 \text{ صدق می کند:}$$

$$2(m+1) - m = 7 \Rightarrow 2m + 2 - m = 7 \Rightarrow m = 5$$

۷ شیب هر یک از خطوط را به دست می آوریم. اگر شیب دو خط با هم

برابر باشند، آن دو خط موازی، اگر حاصل ضرب شیبها برابر -1 باشد، دو خط بر هم عمود و در غیر این صورت دو خط متقاطع غیرعمودند:

$$L_1: -3x + 5y = 1 \Rightarrow m_1 = -\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y} = -\frac{-3}{5} = \frac{3}{5}$$

$$L_2: 2x - y = 1 \Rightarrow m_2 = -\frac{2}{-1} = 2$$

$$L_3: 5x + 3y = 7 \Rightarrow m_3 = -\frac{5}{3}$$

$$L_4: 6x = 2y + 5 \Rightarrow 6x - 2y = 5 \Rightarrow m_4 = -\frac{6}{-2} = 3$$

دو خط L_1 و L_2 بر هم عمودند. $m_1.m_2 = -1 \Rightarrow$

دو خط L_3 و L_4 موازی اند. $m_3 = m_4 \Rightarrow$

L_1 و L_3 با L_4 و L_2 متقاطع غیرعمود می باشند.

پ شیب خط گذرنده از نقاط $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ برابر است با:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$A(-1, 2), B(1, 0) \Rightarrow m = \frac{0 - 2}{1 + 1} = -1$$

$$m = -1, A(-1, 2) \Rightarrow y - 2 = -1(x + 1)$$

ت شیب دو خط موازی با هم برابر است. شیب خط $5x + 3y = 2$ برابر $m = -\frac{5}{3}$ است، پس شیب خط مطلوب نیز برابر $-\frac{5}{3}$ می باشد:

$$m = -\frac{5}{3}, A(3, 0) \Rightarrow y - 0 = -\frac{5}{3}(x - 3)$$

$$\xrightarrow{\times 3} 3y = -5x + 15 \Rightarrow 3y + 5x = 15$$

ث حاصل ضرب شیبهای دو خط عمود بر هم برابر -1 است. شیب

خط $3x + 2y = 4$ برابر $-\frac{3}{2}$ می باشد، پس شیب خط مورد نظر برابر $m = \frac{-1}{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$ می باشد:

$$m = \frac{2}{3}, A(4, 2) \Rightarrow y - 2 = \frac{2}{3}(x - 4)$$

$$\xrightarrow{\times 3} 3(y - 2) = 2(x - 4) \Rightarrow 3y - 6 = 2x - 8 \Rightarrow 3y - 2x = -2$$

ج طول از مبدأ خط، محل برخورد خط با محور x ها می باشد، پس خط از نقطه $(2, 0)$ می گذرد. هم چنین عرض از مبدأ خط، محل برخورد خط با محور y ها می باشد، پس خط از نقطه $(0, 5)$ نیز می گذرد:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 0}{0 - 2} = -\frac{5}{2}$$

$$m = -\frac{5}{2}, A(2, 0) \Rightarrow y - 0 = -\frac{5}{2}(x - 2)$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2y = -5(x - 2) \Rightarrow 2y = -5x + 10 \Rightarrow 2y + 5x = 10$$

۳ آ شیب خط گذرنده از دو نقطه $A(5, 1)$ و $B(-4, 3)$ را به دست می آوریم. این عدد شیب خط مطلوب است:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 3}{5 - (-4)} = -\frac{2}{9}$$

معادله خط گذرنده از نقطه $(-4, 1)$ با شیب $m = -\frac{2}{9}$ به صورت زیر است:

$$y - 1 = -\frac{2}{9}(x + 4) \Rightarrow 9(y - 1) = -2(x + 4)$$

$$\Rightarrow 9y - 9 = -2x - 8 \Rightarrow 9y + 2x = 1$$

ب شیب خط گذرنده از دو نقطه $(2, 0)$ و $(-1, 6)$ برابر است با:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 0}{-1 - 2} = -\frac{6}{3} = -2$$

اگر m' شیب خط مطلوب باشد، آنگاه $m' = -\frac{1}{m}$ است و در نتیجه، داریم:

$$m' = -\frac{1}{m} = \frac{1}{2}, A(3, 2)$$

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x - 3) \xrightarrow{\times 2} 2(y - 2) = x - 3$$

$$\Rightarrow 2y - 4 = x - 3 \Rightarrow 2y - x = 1$$

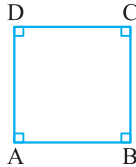
۱۱) ابتدا شیب خط گذرنده از دو نقطه A و B را به دست می آوریم:

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 1}{6 - 4} = \frac{1}{2}, \quad A(4, 1)$$

$$AB \text{ معادله خط: } y - 1 = \frac{1}{2}(x - 4) \xrightarrow{\times 2} 2(y - 1) = x - 4$$

$$2y - 2 = x - 4 \Rightarrow 2y - x = -2$$

ب) با توجه به شکل فرضی زیر، BC بر AB عمود است، پس:



$$m_{BC} = \frac{-1}{m_{AB}} \stackrel{(1)}{=} \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2, \quad B(6, 2)$$

$$BC \text{ معادله خط: } y - 2 = -2(x - 6) \Rightarrow y = -2x + 14$$

پ) معادله خط DC را می نویسیم. با داشتن معادله خط BC و قرار دادن آن‌ها در یک دستگاه و حل آن، مختصات نقطه C به دست می آید. با توجه به این که خط DC موازی AB است، پس شیب خط DC با شیب خط AB برابر می باشد:

$$m_{DC} = m_{AB} = \frac{1}{2}, \quad D(-1, 1)$$

$$DC \text{ معادله خط: } y - 1 = \frac{1}{2}(x + 1) \xrightarrow{\times 2} 2y - 2 = x + 1$$

$$\Rightarrow 2y - x = 3$$

$$\times (-2) \begin{cases} y = -2x + 14 \\ 2y - x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y = -4x + 28 \\ 2y - x = 3 \end{cases} \Rightarrow -x = 4x - 5 \Rightarrow -x = 4x - 5$$

$$\Rightarrow -5x = -5 \Rightarrow x = 1 \xrightarrow{y = -2x + 14} y = -2 + 14 = 12$$

$$\Rightarrow C(1, 12)$$

۱۲) شیب ضلع AB برابر است با:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 + 1}{0 + 3} = 1, \quad A(-3, -1)$$

$$AB \text{ معادله ضلع: } y - (-1) = 1(x - (-3))$$

$$\Rightarrow y + 1 = x + 3 \Rightarrow y = x + 2$$

ب) ضلع CD موازی ضلع AB است، پس شیب دو خط با هم برابرند:

$$m_{AB} = m_{CD}, \quad m_{AB} = 1, \quad m_{CD} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{(2a - 2) - a}{0 - 3}$$

$$= \frac{a - 2}{-3} = 1 \Rightarrow a - 2 = -3 \Rightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow C(3, -1), \quad D(0, -4)$$

۸) در دو خط موازی، شیب‌ها با هم برابرند:

$$3x + (2m + 1)y = 4 \Rightarrow \text{شیب خط} = a = -\frac{3}{2m + 1}$$

$$mx + 7y = 11 \Rightarrow \text{شیب خط} = a' = -\frac{m}{7}$$

$$a = a' \Rightarrow -\frac{3}{2m + 1} = -\frac{m}{7} \Rightarrow 3 \times 7 = m(2m + 1)$$

$$\Rightarrow 21 = 2m^2 + m \Rightarrow 2m^2 + m - 21 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(2)(-21) = 169 = 13^2$$

$$\Rightarrow m = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm 13}{2(2)}$$

$$\Rightarrow m_1 = \frac{-1 + 13}{4} = \frac{12}{4} = 3, \quad m_2 = \frac{-1 - 13}{4} = \frac{-14}{4} = -\frac{7}{2}$$

ب) اگر حاصل ضرب شیب دو خط برابر -۱ شود، آن‌گاه دو خط بر هم عمودند:

$$aa' = -1 \Rightarrow \left(-\frac{3}{2m + 1}\right)\left(-\frac{m}{7}\right) = -1 \Rightarrow \frac{3m}{7(2m + 1)} = -1$$

$$\Rightarrow 3m = -7(2m + 1) \Rightarrow 3m = -14m - 7 \Rightarrow 3m + 14m = -7$$

$$\Rightarrow 17m = -7 \Rightarrow m = -\frac{7}{17}$$

۹) با مساوی قرار دادن شیب‌های دو خط، مقدار m را به دست می آوریم:

$$2x + (-m + 4)y = 3 \Rightarrow a = -\frac{2}{-m + 4}$$

$$(\delta + 3m)x + (m^2 + 4)y = 7 \Rightarrow a' = -\frac{\delta + 3m}{m^2 + 4}$$

$$a = a' \Rightarrow \frac{2}{-m + 4} = \frac{\delta + 3m}{m^2 + 4}$$

$$\Rightarrow 2(m^2 + 4) = (\delta + 3m)(-m + 4)$$

$$\Rightarrow 2m^2 + 8 = -\delta m + 20 - 3m^2 + 12m \Rightarrow \delta m^2 - 7m - 12 = 0$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4(\delta)(-12) = 289 = 17^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = \frac{7 + 17}{2(\delta)} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5} \\ m = \frac{7 - 17}{2(\delta)} = \frac{-10}{10} = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = \frac{7 + 17}{2(\delta)} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5} \\ m = \frac{7 - 17}{2(\delta)} = \frac{-10}{10} = -1 \end{cases}$$

۱۰) شیب خط گذرنده از دو نقطه $(m, 2m)$ و $(1, -1)$ برابر است با:

$$a = \frac{2m + 1}{m - 1}$$

از طرفی شیب خط به معادله $2x - 5y = 7$ برابر $a' = -\frac{2}{-5} = \frac{2}{5}$ است.

چون دو خط بر هم عمودند، پس باید داشته باشیم:

$$aa' = -1 \Rightarrow \frac{2m + 1}{m - 1} \times \frac{2}{5} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{2(2m + 1)}{5(m - 1)} = -1 \Rightarrow 2(2m + 1) = -5(m - 1)$$

$$\Rightarrow 4m + 2 = -5m + 5 \Rightarrow 9m = 3 \Rightarrow m = \frac{1}{3}$$

درسنامه ۲

فاصله دو نقطه - مختصات نقطه وسط پاره خط - فاصله نقطه از خط

فاصله دو نقطه

(۱) اگر A و B دو نقطه هم‌عرض در صفحه باشند، آن‌گاه $AB = |x_B - x_A|$

(۲) اگر C و D دو نقطه هم‌طول باشند، آن‌گاه $CD = |y_C - y_D|$

به عنوان مثال، فاصله بین دو نقطه هم‌طول $A(۵, ۲)$ و $B(۵, ۷)$ برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

(۳) فاصله دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ برابر است با:

مثال فاصله بین دو نقطه $(۳, ۲)$ و $(-۱, ۰)$ را به دست آورید.

پاسخ: با فرض $A(۳, ۲)$ و $B(-۱, ۰)$ داریم:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-۱ - ۳)^2 + (۰ - ۲)^2} = \sqrt{۱۶ + ۴} = \sqrt{۲۰} = \sqrt{۴ \times ۵} = ۲\sqrt{۵}$$

مثال اگر نقاط $A(-۱, ۴)$ و $B(۳, ۳)$ دو رأس مجاور یک مربع باشند، محیط و مساحت مربع را به دست آورید.

پاسخ: فاصله بین دو نقطه A و B ، طول ضلع مربع می‌باشد:

$$a = BA = \sqrt{(-۱ - ۳)^2 + (۴ - ۳)^2} = \sqrt{۱۶ + ۱} = \sqrt{۱۷}$$

$$۱۷ = a^2 = \text{مساحت مربع} \quad \text{و} \quad ۴a = ۴\sqrt{۱۷} = \text{محیط مربع}$$

نکته

فاصله نقطه $A(x_1, y_1)$ تا مبدأ مختصات برابر $OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ است. به عنوان مثال، فاصله نقطه $(۶, ۸)$ تا مبدأ مختصات برابر $\sqrt{۶^2 + ۸^2} = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰$ می‌باشد.

دایره: مجموعه‌ای از نقاط در صفحه که فاصله آن‌ها از نقطه‌ای ثابت در همان صفحه به نام مرکز، مقداری ثابت است. این مقدار ثابت را شعاع دایره می‌گوییم و با R نشان می‌دهیم.

مثال دایره‌ای به مرکز $(۳, -۱)$ از نقطه $(۵, ۲)$ گذشته است. شعاع این دایره را به دست آورید. آیا نقطه $(۶, ۲)$ روی این دایره قرار دارد؟ چرا؟

پاسخ: فاصله هر نقطه روی دایره از مرکز دایره برابر اندازه شعاع دایره است. پس فاصله نقطه $A(۵, ۲)$ روی دایره از نقطه $O'(۳, -۱)$ (مرکز دایره) برابر R است:

$$R = O'A = \sqrt{(۵ - ۳)^2 + (۲ + ۱)^2} = \sqrt{۴ + ۹} = \sqrt{۱۳}$$

اگر فاصله نقطه $B(۶, ۲)$ از نقطه $O'(۳, -۱)$ برابر $R = \sqrt{۱۳}$ شود، آن‌گاه نقطه B روی این دایره قرار دارد:

$$O'B = \sqrt{(۶ - ۳)^2 + (۲ + ۱)^2} = \sqrt{۹ + ۹} = \sqrt{۱۸} \neq \sqrt{۱۳} \Rightarrow \text{نقطه } B \text{ روی این دایره قرار ندارد.}$$

درسنامه ۲

مختصات نقطه وسط پاره خط

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

(۱) اگر A و B دو نقطه دلخواه روی محور x ها و M وسط AB باشد، آن‌گاه:

$$y_N = \frac{y_C + y_D}{2}$$

(۲) اگر C و D دو نقطه دلخواه روی محور y ها و N وسط CD باشد، آن‌گاه:

(۳) فرض کنیم A و B دو نقطه دلخواه در صفحه مختصات و M وسط AB باشد. در این صورت:

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \frac{A + B}{2}$$

مثال

نقاط $A(5, -1)$ ، $B(-1, 3)$ و $C(3, 5)$ رأس‌های مثلث ABC هستند.

(آ) مختصات M، نقطه وسط ضلع AB را مشخص کنید.

(ب) طول میانه CM را به دست آورید.

(پ) معادله میانه CM را بنویسید.

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left(\frac{5 + (-1)}{2}, \frac{-1 + 3}{2} \right) = (2, 1)$$

پاسخ: (آ)

(ب) طول پاره خط CM را با داشتن مختصات دو نقطه C و M به دست می‌آوریم:

$$C(3, 5), M(2, 1) \Rightarrow CM = \sqrt{(2-3)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

(پ) معادله خط گذرنده از نقاط C و M، معادله میانه CM است:

$$m_{CM} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 5}{2 - 3} = \frac{-4}{-1} = 4, C(3, 5)$$

$$CM \text{ معادله: } y - 5 = 4(x - 3) \Rightarrow y - 5 = 4x - 12 \Rightarrow y - 4x + 7 = 0$$

قرینه یک نقطه نسبت به نقطه دیگر

اگر نقطه A را به نقطه M وصل کنیم و به همان اندازه امتداد دهیم تا به نقطه A' برسیم، آن‌گاه A' قرینه نقطه A نسبت به نقطه M است.

نکته

اگر A' قرینه نقطه A نسبت به نقطه M باشد، آن‌گاه M وسط پاره خط AA' است و داریم:



$$M = \frac{A + A'}{2} \Rightarrow A' = 2M - A$$

به عنوان مثال، قرینه نقطه $A(3, -1)$ نسبت به نقطه $M(2, 4)$ ، نقطه A' است که در آن:

$$A' = 2M - A = 2(2, 4) - (3, -1) = (4, 8) - (3, -1) = (1, 9)$$

نکته

قرینه نقطه $P(\alpha, \beta)$ نسبت به مبدأ مختصات، نقطه $P'(-\alpha, -\beta)$ است.

نکته

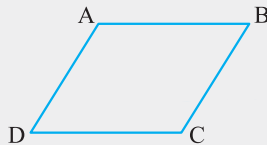
اگر چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

درسنامه ۲

مثال

اگر $A(2,1)$ ، $B(3,4)$ و $C(-1,5)$ سه رأس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ با قطر AC باشد، مختصات رأس D را به دست آورید.



پاسخ: مطابق شکل روبه‌رو، داریم:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - 1 = 3 + x_D \\ 1 + 5 = 4 + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = -2 \\ y_D = 2 \end{cases} \Rightarrow D(-2, 2)$$

تذکر: مربع، مستطیل و لوزی حالت خاصی از متوازی‌الاضلاع هستند، بنابراین نکته قبل برای آن‌ها نیز صادق است.

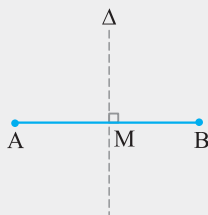
عمودمنصف: عمودمنصف پاره‌خط AB ، خطی است که از وسط پاره‌خط AB می‌گذرد و بر پاره‌خط AB عمود است.

نوشتن معادله عمودمنصف یک پاره‌خط: برای نوشتن معادله عمودمنصف پاره‌خط AB ، ابتدا مختصات نقطه M وسط AB را مشخص می‌کنیم و

سپس شیب آن را که قرینه عکس شیب خط گذرنده از نقاط A و B است، به دست می‌آوریم.

مثال

دو نقطه $A(3,6)$ و $B(1,2)$ مفروضند. معادله عمودمنصف پاره‌خط AB را بنویسید.



پاسخ: عمودمنصف پاره‌خط AB از وسط آن می‌گذرد و بر آن عمود است:

$$M = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{3+1}{2}, \frac{6+2}{2} \right) = (2, 4)$$

شیب خط Δ ، عکس قرینه شیب خط AB است:

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 6}{1 - 3} = 2 \Rightarrow m_{\Delta} = \frac{-1}{m_{AB}} = -\frac{1}{2}$$

$$y - 4 = -\frac{1}{2}(x - 2) \xrightarrow{\times 2} 2y - 8 = -x + 2 \Rightarrow 2y + x = 10$$

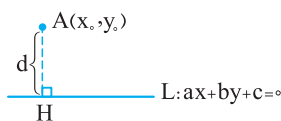
معادله خط گذرنده از نقطه $(2, 4)$ با شیب $-\frac{1}{2}$ برابر است با:

فاصله نقطه از خط

اگر A نقطه‌ای خارج خط L باشد، فاصله A تا L برابر است با طول پاره‌خطی که از A عمود بر L رسم می‌شود، یعنی کوتاه‌ترین مسیر از A به L .

از فرمول زیر برای محاسبه فاصله نقطه A از خط راست استفاده می‌کنیم:

اگر مختصات نقطه A به صورت $A(x_0, y_0)$ و معادله خط L به صورت $ax + by + c = 0$ باشد، آن‌گاه:



$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

برای استفاده از فرمول بالا، باید مراحل زیر را انجام دهیم:

(۱) همه اجزای معادله خط در یک طرف تساوی باشند.

(۲) در معادله خط به جای x ، طول نقطه (x_0) و به جای y ، عرض نقطه (y_0) را قرار می‌دهیم و مساوی صفر را حذف می‌کنیم و حاصل مثبت را در صورت کسر قرار می‌دهیم.

(۳) ضرایب x (یعنی a) و y (یعنی b) را به توان ۲ می‌رسانیم و جذر آن را به دست می‌آوریم و حاصل را در مخرج کسر قرار می‌دهیم.

(۴) نسبت عدد قسمت (۲) به قسمت (۳) فاصله بین نقطه و خط می‌باشد.

مثال

فاصله نقطه $A(3,2)$ از خط به معادله $4x + 3y + 1 = 0$ را به دست آورید.

در معادله به جای x ، ۳ و به جای y ، ۲ قرار می‌دهیم.

پاسخ:

$$d = \frac{|4(3) + 3(2) + 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{19}{\sqrt{25}} = \frac{19}{5}$$

x ضریب y ضریب

درسنامه ۲

نکته

$$d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

فاصله مبدأ مختصات از خط به معادله $ax + by + c = 0$ برابر است با:

نکته

فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $x = a$ برابر $d = |x_0 - a|$ و از خط $y = b$ برابر $d = |y_0 - b|$ است. به عنوان مثال فاصله نقطه $A(3, 4)$ از خط $x = 2$ برابر $d = |3 - 2| = 1$ و از خط $y = -5$ برابر $d = |4 - (-5)| = 9$ می‌باشد.

مثال

اگر فاصله نقطه $A(1, 1)$ از خط $y = x + m$ برابر $2\sqrt{2}$ باشد، m کدام است؟

پاسخ: معادله خط را به صورت $y - x - m = 0$ می‌نویسیم. فاصله نقطه A از خط برابر است با:

$$d = \frac{|1 - 1 - m|}{\sqrt{(-1)^2 + (1)^2}} = \frac{|m|}{\sqrt{2}}, \quad d = 2\sqrt{2} \Rightarrow \frac{|m|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow |m| = 4 \Rightarrow m = \pm 4$$

فاصله بین دو خط موازی

برای به دست آوردن فاصله بین دو خط موازی، یک نقطه دلخواه روی یکی از خطوط در نظر بگیرید و فاصله آن را از خط دیگر به دست آورید.

مثال

فاصله بین دو خط موازی به معادلات $x + y - 3 = 0$ و $x + y = 5$ را به دست آورید.

$$x = 0 \Rightarrow y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow A(0, 3)$$

پاسخ: نقطه دلخواه روی خط $x + y - 3 = 0$ مشخص می‌کنیم:

فاصله نقطه $A(0, 3)$ تا خط به معادله $x + y - 5 = 0$ ، فاصله بین دو خط موازی می‌باشد:

$$d = \frac{|0 + 3 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

۱۳. اگر $A(3, -2)$ و $B(-1, 6)$ دو نقطه باشند،

آ طول پاره خط AB را به دست آورید. (ب) فاصله مبدأ مختصات از وسط AB به دست آورید.

(مشابه کار در کلاس ۱ صفحه ۶ کتاب درسی)

۱۴. نقاط $A(-4, 4)$ ، $B(0, 4)$ و $C(-2, 2)$ را در نظر بگیرید.

آ مثلث ABC را رسم کنید.

(ب) نوع مثلث ABC را مشخص کنید.

(پ) مساحت مثلث را به دست آورید.

۱۵. اگر نقاط $A(2, 4)$ و $B(5, 8)$ دو رأس مجاور یک مربع باشند، محیط و مساحت مربع را به دست آورید.

۱۶. شخصی برای انجام یک عملیات بانکی نیاز به یک عابر بانک دارد. اگر موقعیت این شخص نقطه $(2, -4)$ باشد و سه عابر بانک با موقعیت‌های $(2, 5)$ ، $(4, 1)$ و $(3, -3)$ وجود داشته باشد، این شخص برای رسیدن هر چه سریع تر به عابر بانک، کدام یک را باید انتخاب کند؟

(مشابه کار در کلاس ۲ صفحه ۶ کتاب درسی)

۱۷. دایره‌ای به مرکز $(-1, 2)$ ، از نقطه $(2, 4)$ گذشته است. شعاع دایره را محاسبه کنید. کدام یک از نقاط $(3, 5)$ و $(4, -1)$ روی این دایره قرار دارند؟ چرا؟

۱۸. دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای نقاط $A(3, 1)$ و $B(1, 5)$ هستند.

آ اندازه شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.

(ب) آیا نقطه $(2, 0)$ روی این دایره قرار دارد؟ چرا؟

(مشابه تمرین ۱۴ صفحه ۹ کتاب درسی)

(مشابه کار در کلاس ۱ صفحه ۷ کتاب درسی)

۱۹. مثلث با رأس‌های $A(-2, 4)$ ، $B(3, -2)$ و $C(5, 4)$ را در نظر بگیرید.

(آ) مختصات M ، نقطهٔ وسط ضلع BC را مشخص کنید.

(ب) طول میانهٔ AM را به‌دست آورید.

(پ) معادلهٔ میانهٔ AM را بنویسید.

(مشابه کار در کلاس ۲ صفحه ۷ کتاب درسی)

۲۰. (آ) نقطهٔ $M(5, -1)$ وسط پاره‌خط واصل بین دو نقطهٔ $A(3, 2)$ و B است. مختصات نقطهٔ B را بیابید.

(ب) قرینهٔ نقطهٔ $A(-3, 4)$ را نسبت به نقطهٔ $M(-1, 2)$ به‌دست آورید.

(پ) قرینهٔ نقطهٔ $(-3, 5)$ را نسبت به مبدأ مختصات به‌دست آورید.

۲۱. اگر قرینهٔ نقطهٔ $(a + 1, b - 3)$ نسبت به نقطهٔ $(3, 5)$ ، نقطهٔ $(b - 2, -a)$ است. مقادیر a و b را به‌دست آورید.

(مشابه تمرین ۵ صفحه ۹ کتاب درسی)

۲۲. نقاط $A(-2, -1)$ ، $B(2, 1)$ و $C(-3, 1)$ سه رأس از یک مستطیل هستند.

(آ) مختصات رأس چهارم آن را مشخص کنید.

(ب) مساحت مستطیل را به‌دست آورید.

۲۳. دو نقطهٔ $A(3, -4)$ و $B(-1, 0)$ مفروض‌اند. معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB را بنویسید.

۲۴. نقاط $(2, 0)$ و $(4, 2)$ دو رأس مقابل یک مربع هستند. معادلهٔ قطرهای این مربع را بنویسید.

۲۵. نقاط $A(3, 1)$ ، $B(-1, 3)$ ، $C(-4, -1)$ و $D(4, -1)$ مفروض‌اند. نقطه‌ای مشخص کنید که فاصلهٔ آن از هر چهار نقطه به یک اندازه باشد.

(مشابه تمرین ۶ صفحه ۹ کتاب درسی)

(مشابه کار در کلاس ۹ صفحه ۹ کتاب درسی)

۲۶. فاصلهٔ نقطهٔ $(4, -6)$ را از دو خط به معادلات $x = -2$ و $y = 5$ به‌دست آورید.

(مشابه کار در کلاس ۹ صفحه ۹ کتاب درسی)

۲۷. در هر قسمت مختصات یک نقطه و معادلهٔ یک خط داده شده است. فاصلهٔ نقطه تا خط را به‌دست آورید.

$$(آ) (2, -1), 3x + 4y + 1 = 0, (ب) (-4, 5), 2x = y - 4$$

۲۸. مثلث ABC را با رأس‌های $A(2, 0)$ ، $B(-1, 4)$ و $C(-2, 1)$ در نظر بگیرید.

(آ) طول ارتفاع AH را به‌دست آورید.

(ب) مساحت مثلث ABC را به‌دست آورید.

۲۹. یکی از اضلاع مربع روی خط به معادلهٔ $2x = y - 3$ واقع است. اگر نقطهٔ $(3, 1)$ یکی از رأس‌های این مربع باشد، مساحت آن را به‌دست آورید.

(مشابه تمرین ۷ صفحه ۹ کتاب درسی)

۳۰. اندازهٔ شعاع و مساحت دایره به مرکز $(-1, 2)$ و مماس بر خط به معادلهٔ $2y + x = 5$ را به‌دست آورید. (مشابه کار در کلاس ۲ صفحه ۹ کتاب درسی)

۳۱. در هر یک از قسمت‌های زیر، ابتدا نشان دهید دو خط داده‌شده با هم موازیند و سپس فاصلهٔ بین آن‌ها را به‌دست آورید.

$$(آ) 2x - y = 5, 2x - y = 11, (ب) 2x + 2y = 7, x = -y + 4$$

۳۲. فاصلهٔ نقطهٔ $(3, 4)$ از خط $x + 3y = a$ برابر $\frac{3}{\sqrt{10}}$ است. مقدار a را به‌دست آورید.

۳۳. خطوط $4x + 4y = 1$ و $4x - 3y = 5$ معادلات دو ضلع یک مستطیل و $A(1, 1)$ یک رأس آن است. مساحت مستطیل را به‌دست آورید.

۳۴. مثلث ABC با سه رأس $A(1, 4)$ ، $B(-2, -2)$ و $C(4, 2)$ مفروض است.

(آ) معادلهٔ میانهٔ وارد بر ضلع BC را به‌دست آورید.

(ب) طول میانهٔ AM را به‌دست آورید.

(پ) معادلهٔ ارتفاع BH را محاسبه کنید.

(ت) نقطهٔ تلاقی میانهٔ AM و ارتفاع BH را به‌دست آورید.

(ث) مساحت مثلث ABC را به‌دست آورید.

۳۵. اگر مسافت فیزیکی هر درجه طول و عرض جغرافیایی 11° کیلومتر و طول و عرض جغرافیایی شهر A به ترتیب 45° و 37° و طول و عرض جغرافیایی شهر B به ترتیب 37° و 31° باشد، فاصلهٔ بین دو شهر A و B چند کیلومتر است؟

(مشابه تمرین ۹ صفحه ۱۰ کتاب درسی)

پاسخ‌های تشریحی

۱۷) فاصله نقطه $A(4, 2)$ تا مرکز دایره، یعنی $O'(2, -1)$ برابر اندازه شعاع دایره است:

$$R = O'A = \sqrt{(4-2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

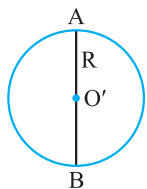
فاصله هر یک از نقاط $B(5, -3)$ و $C(-1, 4)$ را تا نقطه O' به دست می‌آوریم، هر کدام برابر $\sqrt{13}$ شود، روی این دایره قرار دارد:

$$O'B = \sqrt{(5-2)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

پس B روی این دایره قرار دارد.

$$O'C = \sqrt{(-1-2)^2 + (4+1)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

بنابراین C روی این دایره قرار ندارد.



۱۸) نقطه وسط پاره خط AB ، مرکز دایره است:

$$O' = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{5+1}{2}, \frac{-1-3}{2} \right) = (3, -2)$$

فاصله دو نقطه A و O' برابر اندازه شعاع دایره است:

$$R = O'A = \sqrt{(3-1)^2 + (-2+3)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

۱۹) اگر فاصله نقطه $M(0, 2)$ تا $O'(3, -2)$ (مرکز دایره) برابر $\sqrt{5}$ باشد، آن‌گاه نقطه M روی این دایره قرار دارد:

$$O'M = \sqrt{(0-3)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{25} = 5$$

پس نقطه M روی محیط این دایره قرار ندارد.

۱۹) مختصات M وسط پاره خط BC برابر است با:

$$M = \left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2} \right) = \left(\frac{3+5}{2}, \frac{-2+4}{2} \right) = \left(\frac{8}{2}, \frac{2}{2} \right) = (4, 1)$$

۲۰) با داشتن مختصات دو نقطه A و M ، طول پاره خط AM را به دست می‌آوریم:

$$A(-2, 4), M(4, 1) \Rightarrow AM = \sqrt{(4+2)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}$$

$$m = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{1-4}{4-(-2)} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2} \quad (\text{پ})$$

$$m = -\frac{1}{2}, A(-2, 4) \Rightarrow y - 4 = -\frac{1}{2}(x + 2)$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2(y - 4) = -(x + 2) \Rightarrow 2y - 8 = -x - 2 \Rightarrow 2y + x = 6$$

۱۳) اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ باشند، آن‌گاه طول پاره خط AB برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

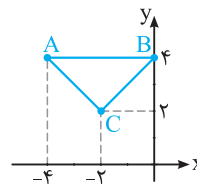
$$A(3, -2), B(-1, 6) \Rightarrow AB = \sqrt{(-1-3)^2 + (6-(-2))^2}$$

$$= \sqrt{(-4)^2 + (8)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = 4\sqrt{5}$$

۱۴) اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ باشد، آن‌گاه مختصات نقطه M وسط AB به صورت $M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$ است. بنابراین:

$$M = \left(\frac{3-1}{2}, \frac{-2+6}{2} \right) = (1, 2), O(0, 0)$$

$$\Rightarrow OM = \sqrt{(1-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$



۱۴) ۱۴

۱۵) طول اضلاع مثلث را به دست می‌آوریم:

$$AB = \sqrt{(4-0)^2 + (4-4)^2} = \sqrt{16+0} = \sqrt{16} = 4$$

$$AC = \sqrt{(2-4)^2 + (-2+4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(2-0)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

چون $AC = BC$ ، پس مثلث متساوی الساقین است. از طرفی تساوی $AB^2 = AC^2 + BC^2$ برقرار است، پس مثلث در رأس C قائم‌الزاویه است.

$$S = \frac{1}{2} CA \times CB = \frac{1}{2} \times \sqrt{8} \times \sqrt{8} = \frac{1}{2} \times 8 = 4 \quad (\text{پ})$$

۱۵) فاصله بین دو نقطه A و B ، طول ضلع مربع است:

$$AB = \sqrt{(8-4)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

محیط مربع برابر $4AB = 4 \times 5 = 20$ و مساحت مربع برابر $a^2 = 5^2 = 25$ می‌باشد.

۱۶) اگر $P(4, -2)$ موقعیت این شخص و نقاط $A(2, 5)$ ، $B(1, 4)$ و $C(-3, 3)$ موقعیت‌های این سه عابرانک باشند، با به دست آوردن فاصله نقطه P تا هر یک از نقاط A ، B و C ، کوتاه‌ترین فاصله را انتخاب می‌کنیم.

$$PA = \sqrt{(2-4)^2 + (5+2)^2} = \sqrt{4+49} = \sqrt{53}$$

$$PB = \sqrt{(1-4)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$$

$$PC = \sqrt{(-3-4)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{49+25} = \sqrt{74}$$

با توجه به اعداد به دست آمده، کم‌ترین فاصله این شخص تا عابرانک B است.

شیب خط Δ ، قرینه عکس شیب خط AB است:

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 + 4}{-1 - 3} = -1 \Rightarrow m_{\Delta} = \frac{-1}{m_{AB}} = \frac{-1}{-1} = 1$$

معادله خط گذرنده از نقطه $(1, -2)$ با شیب ۱ برابر است با:

$$y - (-2) = 1(x - 1) \Rightarrow y + 2 = x - 1 \Rightarrow y = x - 3$$

۲۴ با توجه به شکل فرضی زیر، مختصات دو نقطه A و C مشخص است. برای نوشتن معادله قطر AC ، داریم:

$$m_{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0}{4 - 2} = \frac{2}{2} = 1$$

$A(2,0)$, $m = 1$

$$AC \text{ معادله: } y - 0 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x - 2$$

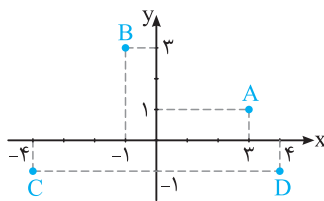
قطر BD ، عمودمنصف قطر AC است، پس شیب آن برابر

$$m' = -\frac{1}{m_{AC}} = -1$$

$$M = \frac{A+C}{2} = \left(\frac{2+4}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = (3,1), m' = -1$$

$$BD \text{ معادله قطر: } y - 1 = -1(x - 3) \Rightarrow y - 1 = -x + 3 \Rightarrow y = -x + 4$$

۲۵ نقاط A, B, C و D را در دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم:



فاصله تمام نقاط روی عمودمنصف CD از نقاط D و C به یک اندازه است. معادله عمودمنصف CD به صورت زیر است:

$$M = \left(\frac{-4+4}{2}, \frac{-1-1}{2}\right) = (0,-1)$$

بنابراین $x = 0$ عمودمنصف CD است.

فاصله تمام نقاط روی عمودمنصف AB از نقاط A و B به یک اندازه است. معادله عمودمنصف AB به صورت زیر است:

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-1}{-1-3} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow AB \text{ شیب عمودمنصف} = \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 2$$

$$N = \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = (1,2)$$

$$AB \text{ معادله عمودمنصف: } y - 2 = 2(x - 1) \Rightarrow y - 2 = 2x - 2 \Rightarrow y = 2x$$

محل تلاقی دو خط به معادلات $x = 0$ و $y = 2x$ ، از چهار

نقطه A, B, C و D به یک فاصله است:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow y = 2(0) = 0 \Rightarrow O(0,0)$$

۲۰ اگر $M(5,-1)$ ، $A(3,2)$ و $B(x_B, y_B)$ ، آنگاه:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow 5 = \frac{3 + x_B}{2} \Rightarrow 3 + x_B = 10 \Rightarrow x_B = 7 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow -1 = \frac{2 + y_B}{2} \Rightarrow y_B + 2 = -2 \Rightarrow y_B = -4 \end{cases}$$

پس مختصات نقطه B ، به صورت $B(7,-4)$ است.

۲۱ اگر A' قرینه نقطه A نسبت به نقطه M باشد، آنگاه:

$$\begin{aligned} A' &= 2M - A = 2(-1,2) - (3,4) = (-2,4) - (3,4) \\ &= (-2+3, 4-4) = (1,0) \end{aligned}$$

۲۲ قرینه نقطه $A(-3,5)$ نسبت به مبدأ مختصات، نقطه $A'(3,-5)$ می‌باشد.

۲۱ با فرض $A(a+1, b-3)$ ، $M(3,5)$ و $A'(b-2, -a)$ ، داریم:

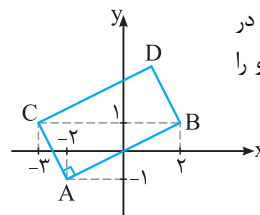
$$\begin{cases} 3 = \frac{(a+1) + (b-2)}{2} \\ 5 = \frac{(b-3) - a}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a+b-1}{2} = 3 \\ \frac{b-a-3}{2} = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b-1=6 \\ b-a-3=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=7 \\ b-a=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b=20 \\ 2a=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=10 \\ a=-3 \end{cases}$$

$$\frac{a+b}{2} = 7 \Rightarrow a+10=7 \Rightarrow a=-3$$

۲۲ با مشخص کردن نقاط A, B و C در

دستگاه محورهای مختصات، رأس‌های روبه‌رو را مشخص می‌کنیم:



۲۱ نقاط B و C روبه‌روی هم و نقاط A و D روبه‌روی هم قرار دارند. در مستطیل (هر متوازی‌الاضلاع) داریم:

$$A + D = B + C$$

$$\Rightarrow D = B + C - A = (2,1) + (-2,1) - (-3,-1) = (3,3)$$

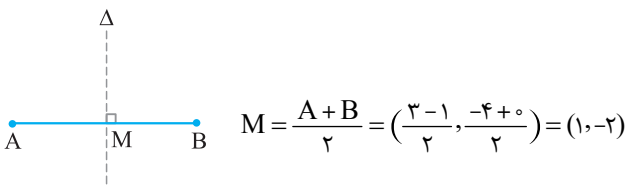
۲۲ مساحت مستطیل $ABDC$ برابر حاصل ضرب AB در AC است:

$$AB = \sqrt{(2+2)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

$$AC = \sqrt{(-3+2)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow S = AB \times AC = \sqrt{20} \times \sqrt{5} = \sqrt{100} = 10$$

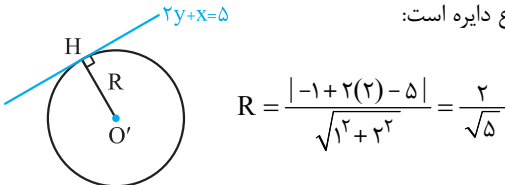
۲۳ عمودمنصف پاره‌خط AB از وسط آن می‌گذرد و بر آن عمود است:



$$\text{فاصله نقطه } A \text{ تا ضلع } BC = \frac{|2(3) - 1 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow S = \left(\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{64}{5}$$

۳۰ مطابق شکل زیر، فاصله O' (مرکز دایره) تا خط $x + 2y - 5 = 0$ برابر اندازه شعاع دایره است:



مساحت دایره به شعاع R برابر πR^2 است، بنابراین:

$$S = \pi R^2 = \pi \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \pi \times \frac{4}{5} = \frac{4\pi}{5}$$

۳۱ اگر شیب دو خط داده شده با هم برابر باشند، آنگاه دو خط با هم موازی اند:

$$2x - y = 11 \Rightarrow m_1 = \frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y} = -\frac{2}{-1} = 2$$

$$2x - y = 5 \Rightarrow m_2 = \frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y} = -\frac{2}{-1} = 2$$

دو خط با هم موازی اند. $m_1 = m_2 \Rightarrow$

برای به دست آوردن فاصله بین دو خط موازی داده شده، نقطه دلخواهی روی یکی از خطها، مثلاً $2x - y = 11$ مشخص می‌کنیم، سپس فاصله این نقطه را تا خط دیگر، یعنی خط به معادله $2x - y - 5 = 0$ به دست می‌آوریم. نقطه $A(5, -1)$ روی خط $2x - y = 11$ قرار دارد. فاصله A تا خط $2x - y - 5 = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|2(5) - (-1) - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

$$x = -y + 4 \Rightarrow x + y - 4 = 0$$

$$2x + 2y = 7 \Rightarrow 2x + 2y - 7 = 0$$

شیب خط به معادله $x + y - 4 = 0$ برابر $m_1 = -\frac{1}{1} = -1$ و شیب خط به معادله $2x + 2y - 7 = 0$ برابر $m_2 = -\frac{2}{2} = -1$ می‌باشد:

دو خط با هم موازی اند. $m_1 = m_2 \Rightarrow$

نقطه $A(2, 2)$ روی خط $x + y - 4 = 0$ قرار دارد. فاصله نقطه A را تا خط به معادله $2x + 2y - 7 = 0$ به دست می‌آوریم:

$$d = \frac{|2(2) + 2(2) - 7|}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \times \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{8}}{8} = \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

۲۶ فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $x = a$ برابر $d = |x_0 - a|$ و از

خط $y = b$ برابر $d = |y_0 - b|$ است، بنابراین فاصله نقطه $A(4, -6)$ از

خط $x = -2$ برابر $d = |-2 - 4| = 6$ و از خط $y = 5$ برابر

$d = |-6 - 5| = 11$ می‌باشد.

۲۷ فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ برابر

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ می‌باشد:}$$

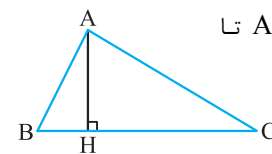
$$2x + 4y + 1 = 0, A(2, -1)$$

$$\Rightarrow d = \frac{|2(2) + 4(-1) + 1|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{3}{\sqrt{20}} = \frac{3}{2\sqrt{5}}$$

$$2x = y - 4 \Rightarrow 2x - y + 4 = 0, A(-4, 5)$$

$$\Rightarrow d = \frac{|2(-4) - 5 + 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{9}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}$$

۲۸ مطابق شکل مقابل، فاصله نقطه A تا ضلع BC برابر طول ارتفاع AH است:



معادله BC را با داشتن مختصات دو نقطه B و C می‌نویسیم:

$$B(-1, 4), C(-2, 1) \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 1}{-1 - 2} = 3$$

$$\text{معادله } BC: y - 4 = 3(x + 1) \Rightarrow y - 3x - 7 = 0$$

فاصله نقطه $A(2, 0)$ تا خط به معادله $y - 3x - 7 = 0$ برابر است با:

$$AH = \frac{|0 - 3(2) - 7|}{\sqrt{(-3)^2 + (1)^2}} = \frac{13}{\sqrt{10}} \times \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{13\sqrt{10}}{10}$$

۲۹ مساحت مثلث ABC برابر است با:

طول پاره خط BC برابر است با:

$$BC = \sqrt{(-2 + 1)^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} \times \frac{13\sqrt{10}}{10} \times \sqrt{10} = \frac{13}{2}$$

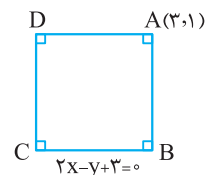
نقطه $A(3, 1)$ روی خط $2x = y - 3$ قرار ندارد، زیرا مختصات

نقطه A در معادله $2x - y + 3 = 0$ صدق نمی‌کند. اگر شکل فرضی زیر را

در نظر بگیریم، آنگاه $2x - y + 3 = 0$ معادله ضلع BC است. چون AB

بر BC عمود است، پس فاصله نقطه A تا خط $2x - y + 3 = 0$ ، طول

ضلع مربع است:



ت) معادله دو خط را در یک دستگاه قرار می‌دهیم و با حل دستگاه محل تلاقی دو خط را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{cases} x=1 \\ 2y-3x-2=0 \end{cases} \Rightarrow 2y-3(1)-2=0 \Rightarrow 2y=5$$

$$\Rightarrow y = \frac{5}{2} \Rightarrow \text{نقطه تلاقی} = (1, \frac{5}{2})$$

ث) مساحت مثلث ABC برابر است با: $S = \frac{1}{2} BH \times AC$

AC فاصله بین دو نقطه A و C است. داریم:

$$AC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (2-\frac{5}{2})^2} = \sqrt{9 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{37}{4}} = \frac{\sqrt{37}}{2}$$

BH، فاصله نقطه B تا خط AC است. ابتدا معادله خط AC را می‌نویسیم:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - \frac{5}{2}}{4 - 1} = -\frac{1}{6}, \quad A(1, \frac{5}{2})$$

$$AC \text{ معادله خط: } y - \frac{5}{2} = -\frac{1}{6}(x - 1) \Rightarrow 6y - 15 = -x + 1 \Rightarrow x + 6y - 16 = 0$$

$$\Rightarrow 3y + 2x - 14 = 0$$

فاصله نقطه B(-2, -2) از خط به معادله $2x + 3y - 14 = 0$ برابر است با:

$$BH = \frac{|2(-2) + 3(-2) - 14|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{24}{\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} BH \times AC = \frac{1}{2} \times \frac{24}{\sqrt{13}} \times \frac{\sqrt{37}}{2} = 12$$

۳۵ موقعیت شهر A به صورت (۴۵, ۳۷) و موقعیت شهر B به صورت (۳۷, ۳۱) می‌باشد:

$$x_2 - x_1 = 45^\circ - 37^\circ = 8^\circ \xrightarrow{\times 110 \text{ km}} x_2 - x_1 = 880 \text{ km}$$

$$y_2 - y_1 = 37^\circ - 31^\circ = 6^\circ \xrightarrow{\times 110 \text{ km}} y_2 - y_1 = 660 \text{ km}$$

$$\Rightarrow \text{فاصله بین دو شهر} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(880)^2 + (660)^2} = \sqrt{8^2 \times 110^2 + 6^2 \times 110^2}$$

$$= \sqrt{110^2 (8^2 + 6^2)} = \sqrt{110^2 \times 100} = 110 \times 10 = 1100 \text{ km}$$

۳۲ فاصله نقطه (۳, ۴) را از خط $x + 3y - a = 0$ به دست می‌آوریم و آن را برابر $\frac{3}{\sqrt{10}}$ قرار می‌دهیم:

$$d = \frac{|3 + 3(4) - a|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|15 - a|}{\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow |15 - a| = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 15 - a = 3 \\ 15 - a = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 12 \\ a = 18 \end{cases}$$

۳۳ دو خط $3x + 4y = 1$ و $4x - 3y = 5$ بر هم عمودند، زیرا:

$$3x + 4y = 1 \Rightarrow m = -\frac{3}{4} \Rightarrow mm' = -1$$

$$4x - 3y = 5 \Rightarrow m' = \frac{4}{3}$$

مختصات نقطه $A(1, 1)$ در هیچ یک از معادلات $4x - 3y = 5$ و $3x + 4y = 1$ صدق نمی‌کنند، پس نقطه A روی هیچ یک از این دو خط قرار ندارند. طبق شکل، فاصله نقطه A از دو خط، طول و عرض مستطیل خواهند بود:

$$a = \frac{|3(1) + 4(1) - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{6}{5}, \quad b = \frac{|4(1) - 3(1) - 5|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow S = ab = \frac{6}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

۳۴ برای قسمت‌های (ا) و (ب)، مختصات M وسط پاره خط BC را

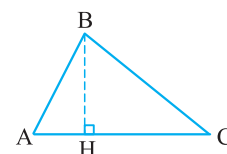
$$M = \frac{B+C}{2} = (1, 0)$$

به دست می‌آوریم:

$$M(1, 0), A(1, 4) \xrightarrow{x_A = x_M} x = 1 \quad (\text{معادله میانه AM}) \quad (ا)$$

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(1-1)^2 + (0-4)^2} = 4 \quad (ب)$$

پ) برای نوشتن معادله ارتفاع BH، شیب ارتفاع را به دست می‌آوریم:



$$m_{BH} = \frac{-1}{m_{AC}}, \quad m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{2-4}{4-1} = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow m_{BH} = \frac{-1}{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}, \quad B(-2, -2) \Rightarrow y + 2 = \frac{3}{2}(x + 2)$$

$$\Rightarrow 2y - 3x - 2 = 0$$