

خرید کتاب های کنکور

با تخفیف ویژه

و

ارسال رایگان

Medabook.com

+



مدابوک



یک جله تماس تلفنی رایگان

با مشاوران رتبه برتر

برای انتخاب بهترین منابع

دبیرستان و کنکور

۰۲۱ ۲۸۴۲۵۲۱۰



CONTENTS

مجموعه	۱۰	
الگو و دنباله	۱۱	
Set, Pattern & Sequence	01	
توان‌های گویا و عبارت‌های جبری	۱۴	
Rational Exponents & Algebraic Expressions	02	
قدر مطلق و جزء صحیح	۱۶	
معادلات گویا و رادیکالی، نامعادله	۱۷	
Elementary Operations	03	
معادله درجه دوم	۲۰	
نمودار تابع درجه دوم (سه‌می)	۲۱	
Quadratic	04	
مفهوم تابع، دامنه و برد، تساوی دو تابع	۲۳	
انتقال، توابع صعودی و نزولی	۲۵	
اعمال جبری روی توابع، ترکیب توابع	۲۶	
تابع یک به یک و تابع وارون	۲۹	
Functions & Their Graphs	05	
توابع نمایی	۳۲	
لگاریتم	۳۳	
Exponential Functions & Logarithms	06	
نسبت‌های مثلثاتی، روابط بین نسبت‌های مثلثاتی	۳۶	
تناوب و تانژانت، توابع مثلثاتی، معادلات مثلثاتی	۳۸	
Trigonometric Functions	07	
همسایگی، فرایندهای حدی و محاسبه حد	۴۱	
رفع ابهام $\frac{0}{0}$	۴۲	
پیوستگی	۴۳	
حد بی‌نهایت و حد دربی‌نهایت	۴۵	
Limits & Continuity	08	
قواعد محاسبه مشتق، خط مماس	۴۷	
مشتق پذیری، مشتق چپ و راست و آهنگ تغییر	۵۰	
Differentiation	09	
کاربرد مشتق [اکسترمم‌های تابع و بهینه‌سازی]	۵۳	
Applications Of Derivatives	10	
شمارش، بدون شمردن	۵۶	
Count Without Counting	11	
مبانی احتمال	۵۹	
احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل، قانون احتمال کل	۶۱	
Probability	12	
جامعه و نمونه، معیارهای گرایش به مرکز	۶۴	
معیارهای پراکندگی	۶۵	
Descriptive Statistics	13	
هندسه پایه	۶۷	
Basic Geometry	14	
هندسه تحلیلی	۷۳	
مقاطع مخروطی	۷۴	
Analytic Geometry	15	
آزمون‌های جامع (شبییه ساز)	۷۹	
Final Assessment Test	16	
Answers	۱۰۶	



PETER SCHOLZE
FIELDS.2018 1987



1. کدام گزینه صحیح است؟

(۲) $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$

(۱) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q}' = \mathbb{N}$

(۴) $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}') \subseteq \mathbb{W}$

(۳) $(\mathbb{Z} - \mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{N}$

2. اگر $A = (-3, 6]$, $B = (0, 8]$, $C = (-\infty, 2]$, $D = (2, +\infty)$ باشد، حاصل $(A \cup C) - (B \cap D)$ برابر با کدام بازه است؟

(۲) $(-\infty, 2]$

(۱) $(-3, 2]$

(۴) $(0, \infty)$

(۳) $(-\infty, 2)$

3. کدام مجموعه منتهای است؟

(۲) مثلث‌هایی با مساحت ۶

(۱) اعداد صحیح کمتر از ۲۵

(۴) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{x} \in \mathbb{N}\}$

(۳) اعداد گویای موجود در بازه $(1, 2)$

4. اگر A مجموعه اعداد طبیعی فرد و B مجموعه اعداد اول باشند، کدام مجموعه منتهای و غیرتهی است؟

(۲) $B - A$

(۱) $A - B$

(۴) $A - (A \cup B)$

(۳) $A \cap B$

5. کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر مجموعه $A \cup B$ نامنتهای و مجموعه B نیز نامنتهای باشد، مجموعه A منتهای است.

(۲) اگر مجموعه‌های A و B نامنتهای باشند، مجموعه $A \cap B$ هم نامنتهای است.

(۳) اگر \mathbb{N} مجموعه مرجع و A مجموعه‌ای نامنتهای باشد، مجموعه A' منتهای است.

(۴) اگر مجموعه A منتهای و مجموعه B نامنتهای باشد، مجموعه $B - A$ نامنتهای است.

6. اگر مجموعه مرجع، مجموعه اعداد طبیعی یک‌رقمی باشد و $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $B = \{4, 5, 6, 7\}$ باشند، متمم مجموعه $B' - A$ چند عضو دارد؟

(۲) ۵

(۱) ۲

(۴) ۸

(۳) ۷

7. اگر $A = (-2, 3]$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ باشد، مجموعه $A' \cup B'$ کدام است؟

(۲) $(-\infty, 1] \cup (3, +\infty)$

(۱) $(1, 3]$

(۴) $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

(۳) $\mathbb{R} - (1, 3)$

8. اگر A و B دو مجموعه غیرتهی باشند، ساده شده مجموعه $(A - B) - (B \cap A')$ برابر کدام است؟

(۲) \emptyset

(۱) B'

(۴) $A - B$

(۳) $A \cap B$

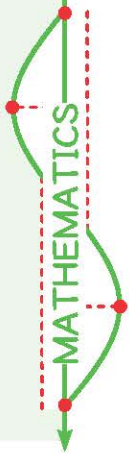
9. اگر $n(A) = 4$, $n(B) = 7$, $n(A - B) = 3$ مجموعه $A \cup B$ چند عضو دارد؟

(۲) ۱

(۱) ۱۰

(۴) ۱۲

(۳) ۱۳



10. اگر مجموعه‌های A و B به ترتیب دارای 5 و 7 عضو باشند، در کدام حالت زیر تعداد اعضای مجموعه $A \cup B$ حداکثر خواهد بود؟

- (1) زیرمجموعه B باشد.
 (2) B زیرمجموعه A باشد.
 (3) A و B جدا از هم باشند.
 (4) بستگی به مجموعه مرجع دارد.

11. فرض کنید A و B دو زیرمجموعه از مجموعه مرجع U باشند و $n(U) = 80$, $n(A) = 20$, $n(B) = 55$, $n(A \cup B) = 37$ ، تعداد اعضای که فقط در مجموعه B قرار دارند کدام است؟

- (1) 14
 (2) 15
 (3) 16
 (4) 17

12. در یک کلاس 39 نفری، 16 نفر در گروه ورزش، 12 نفر در گروه روزنامه دیواری و 9 نفر فقط در گروه ورزشی هستند. چند نفر از آنان عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند؟

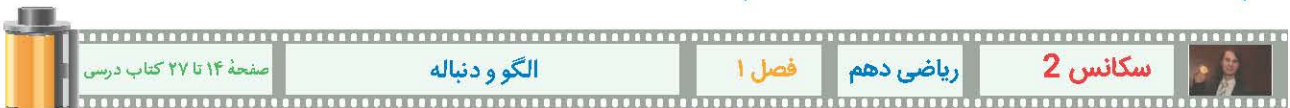
- (1) 15
 (2) 16
 (3) 17
 (4) 18

13. در یک کلاس 20 نفره، 8 نفر عینکی و 4 نفر چپ دست هستند و 10 نفر نه چپ دست هستند و نه عینکی، تعداد دانش‌آموزانی که هم عینک زده‌اند و هم چپ دست هستند کدام است؟

- (1) 2
 (2) 3
 (3) 8
 (4) 6

14. اجتماع دو مجموعه A و B دارای 40 عضو است. مجموعه‌های $(A - B)$ و $(B - A)$ به ترتیب 12 و 18 عضو دارند. اگر از هریک از مجموعه‌های A و B، 9 عضو برداشته شود، از مجموعه اشتراک آن‌ها 4 عضو کم می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه جدید کدام است؟

- (1) 22
 (2) 23
 (3) 24
 (4) 26



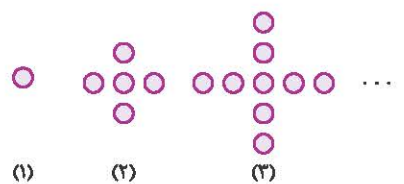
15. در الگوی مقابل، تعداد پاره‌خط‌ها در شکل دوازدهم کدام است؟

- (1) 53
 (2) 49
 (3) 45
 (4) 44



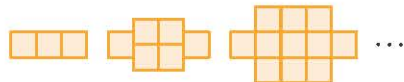
16. با توجه به الگوی مقابل تعداد دایره‌ها در شکل چندم برابر 29 است؟

- (1) هفتم
 (2) هشتم
 (3) نهم
 (4) دهم



17. در الگوی مقابل تعداد مربع‌ها در شکل نهم کدام است؟

- (1) 78
 (2) 83
 (3) 84
 (4) 89



18. در الگوی مقابل اختلاف تعداد مربع‌های رنگی و مستطیل‌های سفید در شکل چهاردهم کدام است؟

- (1) 32
 (2) 26
 (3) 18
 (4) 14





AKSHAY VENKATESH
FIELDS:2018 1964



دهم: ص ۹۵ تا ۱۱۳
یازدهم: ۴۸ تا ۵۳
مفهوم تابع، دامنه و برد، تساوی دو تابع

سکانس 8
فصل ۵
10 + 11

118. اگر رابطه $f = \{(3, a+2b), (5, 4), (7, 2), (3, 7), (5, 2a-b)\}$ یک تابع باشد، $a^2 - b^2$ کدام است؟

- ۴ (۲)
- ۶ (۴)
- ۳ (۱)
- ۵ (۳)

119. کدام نمودار، نمایش یک تابع $y = f(x)$ است؟



120. اگر رابطه $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x & ; x \leq 2 \\ ax - 2 & ; x \geq 2 \end{cases}$ یک تابع باشد، مقدار $f(4)$ کدام است؟

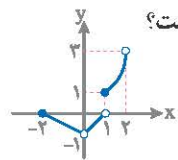
- ۱۲ (۲)
- ۱۶ (۴)
- ۱۰ (۱)
- ۱۴ (۳)

121. کدام رابطه نشان دهنده یک تابع است؟

- $y = \sqrt{x^2 - 1}$ (۲)
- $|x| + |y| = 4$ (۱)
- $y(x-2) = 0$ (۴)
- $y^2 = 5x - 1$ (۳)

122. اگر $f = \{(1, m+n), (2, n^2+n), (n^2-3n, 4)\}$ یک تابع همانی باشد، m کدام است؟

- ۳ (۲)
- ۶ (۴)
- ۲ (۱)
- ۲ (۳)



123. نمودار تابع f به صورت مقابل است. اگر a و b به ترتیب تعداد اعضای صحیح دامنه و برد تابع f باشند، مقدار $a - b$ کدام است؟

- ۱ (۲)
- ۳ (۴)
- صفر (۱)
- ۲ (۳)

124. دامنه تابع $f(x) = \frac{x+5}{x^2+ax+b}$ به صورت $\mathbb{R} - \{3\}$ است. مقدار $a + b$ کدام است؟

- ۳ (۲)
- ۶ (۴)
- ۳ (۱)
- ۶ (۳)

125. اگر $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ دامنه تابع $f(3-x)$ ، کدام است؟

- $[0, 3]$ (۲)
- $[1, 3]$ (۴)
- $[0, 2]$ (۱)
- $[1, 2]$ (۳)

126. اگر $f(x) = \sqrt{x + |x+2|}$ دامنه تابع $f(-x)$ کدام است؟

- $x \geq -1$ (۲)
- $x \geq 1$ (۴)
- $x \leq -1$ (۱)
- $x \leq 1$ (۳)

127. دامنه تابع $y = \sqrt{1 - \log(x^2 - 3x)}$ به کدام صورت است؟

(۱) $[-2, 5]$ (۲) $(-2, 5) - (0, 3)$

(۳) $[-2, 0) \cup (3, 5]$ (۴) $\mathbb{R} - [0, 3]$

128. شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = f(x-2)$ است. دامنه تابع با ضابطه $\sqrt{x}f(x)$ است؟

(۱) $[-1, 1] \cup [0, 6]$

(۲) $[-3, 1] \cup [0, 2]$

(۳) $[-5, -3] \cup [-1, 2]$

(۴) $[-5, -2] \cup [0, 2]$

129. بُرد تابع $f(x) = x - |x - 2|$ کدام است؟

(۱) $(-\infty, 2]$ (۲) $[-1, +\infty)$

(۳) $(-1, 2)$ (۴) $(2, +\infty)$

130. بُرد تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & ; x \geq 0 \\ |x+1| - 2 & ; x < 0 \end{cases}$ کدام است؟

(۱) $[0, +\infty)$ (۲) \mathbb{R}

(۳) $[-2, +\infty)$ (۴) $[-1, +\infty)$

131. بُرد تابع $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ کدام است؟

(۱) $[0, 1)$ (۲) $[0, 1]$

(۳) $(0, 1)$ (۴) $(0, 1]$

132. در بازه (a, b) نمودار تابع $y = -x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$ بالاتراز نمودار تابع $y = 2x + |x|$ است. طول نقطه وسط این بازه کدام است؟ (داخل - ۹۶)

(۱) -2 (۲) $-1/5$

(۳) -1 (۴) $-9/5$

133. دو تابع f و g بر روی اعداد حقیقی تعریف شده‌اند. در کدام حالت دو تابع مساوی‌اند؟

(۱) $f(x) = 2 \log x$ و $g(x) = \log x^2$ (۲) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{|x|}$ و $g(x) = 1$

(۳) $f(x) = (\sqrt{x})^2$ و $g(x) = x$ (۴) $f(x) = \frac{x}{|x|}$ و $g(x) = \frac{|x|}{x}$

134. در کدام گزینه دو تابع f و g باهم مساوی هستند؟

(۱) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ و $g(x) = x + 1$ (۲) $f(x) = \sqrt{x^2}$ و $g(x) = x$

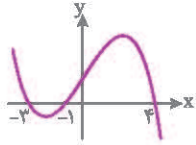
(۳) $f(x) = \frac{x}{[x]}$ و $g(x) = \frac{[x]}{x}$ (۴) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ و $g(x) = \sqrt{1 - x} \times \sqrt{1 + x}$

135. کدام یک از توابع زیر با تابع $y = \log \frac{x-2}{x}$ برابر است؟

(۱) $\log(x-2) - \log x$ (۲) $\log \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x}$

(۳) $\frac{1}{2} \log \left(\frac{x-2}{x} \right)^2$ (۴) $2 \log \sqrt{\frac{x-2}{x}}$

(خارج - ۹۴)



(خارج - ۹۶)



ARTUR AVILA
FIELDS:2014 1979



206. اگر $f(x) = \left(\frac{3}{a+2}\right)^x$ ضابطه یک تابع نمایی باشد، مجموعه مقادیر a کدام است؟

- (۱) $(-2, 1) \cup (1, +\infty)$
 (۲) $(-2, +\infty)$
 (۳) $[-2, 2]$
 (۴) $\mathbb{R} - (-2, 1)$

(داخل - ۹۱)

207. در تابع با ضابطه $f(x) = a \cdot b^x$; $b > 0$ داریم $f(0) = \frac{3}{2}$ و $f(-2) = \frac{3}{22}$ مقدار $f\left(\frac{3}{2}\right)$ کدام است؟

- (۱) ۶
 (۲) ۸
 (۳) ۱۲
 (۴) ۲۴

208. اگر $\left(\frac{6\sqrt{22}}{3\sqrt{8}}\right)^2 = 2^A$ باشد، مقدار A کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$
 (۲) $2\sqrt{2}$
 (۳) $6\sqrt{2}$
 (۴) $12\sqrt{2}$

209. از معادله $(8\sqrt{2})^{3x} = \frac{8^x}{3^2}$ مقدار x کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$
 (۲) $\frac{2}{5}$
 (۳) $\frac{3}{4}$
 (۴) $-\frac{2}{3}$

210. دو تابع $f(x) = 3^{ax+b}$ و $g(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^x$ در نقطه‌ای به طول ۱- متقاطع هستند. اگر $f(2) = \frac{1}{3}$ باشد، مقدار $f^{-1}(27)$ کدام است؟ (داخل - ۹۵)

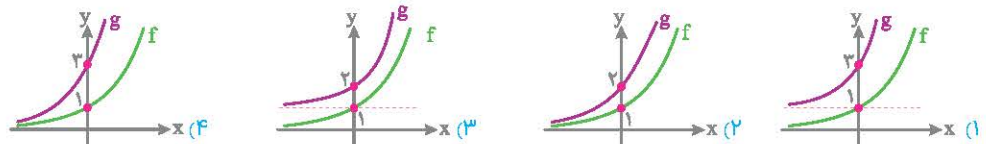
- (۱) -۳
 (۲) -۲
 (۳) ۱
 (۴) ۳

211. نمودار یک تابع به صورت $f(x) = -2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{Ax+B}$ ، نمودار تابع $y = x^2 - x$ را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۲ قطع می‌کند. $f(3)$ کدام است؟

(داخل - ۹۸)

- (۱) ۳
 (۲) ۴
 (۳) ۵
 (۴) ۶

212. در کدام گزینه نمودارهای دو تابع $f(x) = 3^x$ و $g(x) = 3^{x+1}$ به درستی رسم شده است؟



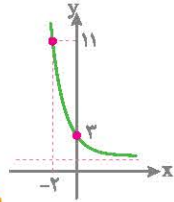
213. نمودار تابع $f(x) = 2^{-x+1} - 1$ از کدام ناحیه دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

- (۱) اول
 (۲) دوم
 (۳) سوم
 (۴) چهارم

فصل ۶ | لگاریتم و تابع نمایی

فربید آنلاین در gajmarket.com

NOTE



214. شکل مقابل نمودار تابع $f(x) = a + b^{-x}$ است. این نمودار خط $y = 29$ را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱) $-2/5$
- (۲) -3
- (۳) $-3/5$
- (۴) -4

215. کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) $5^{7/6} > 5^{7/2}$
- (۲) $(\sqrt{5}-2)^3 > (\sqrt{5}-2)^2$
- (۳) $(\sqrt{3}+1)^2 < (\sqrt{3}+1)^3$
- (۴) $(0/2)^{-1/2} < (0/2)^{-1/6}$

216. مجموعه جواب نامعادله $(0/4)^{4x-6} < (0/4)^{x^2-x}$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) صفر
- (۲) ۲
- (۳) ۱
- (۴) بیشمار



یازدهم: ۱۰۵ تا ۱۱۸

لگاریتم

فصل ۶

ریاضی ۱۱

سکانس 13



(داخل - ۹۸)

217. اگر $x^2 = (\frac{125}{8})^{2x-1} = (0/4)^{2x-1}$ باشد، $\log_8(9x+1)$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$
- (۲) $\frac{3}{4}$
- (۳) $\frac{4}{3}$
- (۴) $\frac{3}{2}$

218. اگر $\log_7(x-1) = 3 + \log_7 x$ باشد، مقدار $\log_7(x-1)$ کدام است؟

- (۱) $1/5$
- (۲) $2/25$
- (۳) 3
- (۴) 4

219. اگر لگاریتم عدد $2\sqrt[3]{0/25}$ در مبنای ۸ برابر A باشد، آن‌گاه لگاریتم عدد $(\frac{1}{A}-1)$ در مبنای ۴ کدام است؟

- (۱) -3
- (۲) $\frac{2}{3}$
- (۳) $\frac{1}{3}$
- (۴) $\frac{2}{3}$

220. اگر لگاریتم a در پایه $\sqrt{3}$ برابر $\frac{4}{3}$ باشد، آن‌گاه لگاریتم $(a^3 + 7)$ در پایه ۸ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$
- (۲) $\frac{4}{3}$
- (۳) $\sqrt{2}$
- (۴) $\frac{3}{2}$

221. اگر $\log_7 12 = a$ باشد، عدد 4^{a-2} کدام است؟

- (۱) $4/5$
- (۲) 6
- (۳) 9
- (۴) 18

222. اگر $3^a = A$ باشد، آن‌گاه $\log_9 9A^2$ کدام است؟

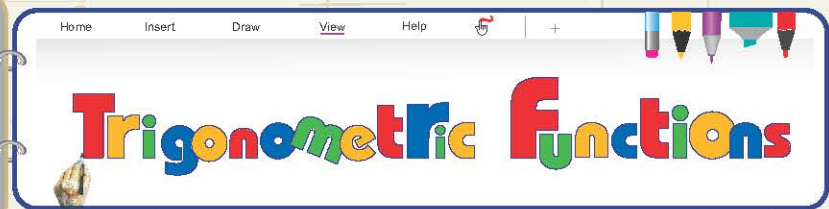
- (۱) $3+a^2$
- (۲) $3+2a$
- (۳) $2+a^2$
- (۴) $2+2a$

223. اگر $\log 5 = 3k$ باشد، $\log \sqrt[3]{1/6}$ کدام است؟

- (۱) $1-4k$
- (۲) $2-5k$
- (۳) $1-2k$
- (۴) $1-k$



TIMOTHY GOWERS
FIELDS: 1998 1963



نسبت‌های مثلثاتی، روابط بین نسبت‌های مثلثاتی
دهم: ۴۶ تا ۴۹، یازدهم: ۴۲ تا ۴۴، دوازدهم: ۴۳ تا ۴۲

سکانس 14
فصل 7 | 12 + 11 + 10

242. اگر مجموع دو زاویه برابر $\frac{5\pi}{12}$ رادیان و تفاضل آن‌ها ۵ درجه باشد، زاویه بزرگ‌تر چند درجه است؟

- (۱) 40° (۲) 30°
(۳) 35° (۴) 45°

243. اگر یک زاویه مرکزی به اندازه $\frac{6}{5}$ rad کمانی به طول ۱۲ سانتی‌متر را روی محیط دایره جدا کند، قطر دایره چند سانتی‌متر است؟

- (۱) ۱۰ (۲) $\frac{10}{3}$
(۳) $\frac{20}{3}$ (۴) ۲۰

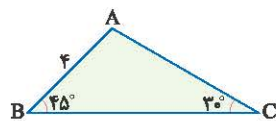
244. ناظری به فاصله ۳۵ متری از دیواری ایستاده است که مجسمه‌ای روی آن قرار دارد. اگر ناظر پایین‌ترین و بالاترین قسمت مجسمه را با زاویه‌های 40° و 45° رؤیت کند، ارتفاع مجسمه چقدر است؟

$(\tan 40^\circ = 0.8)$

- (۱) ۶ (۲) $6/4$
(۳) ۷ (۴) $7/2$

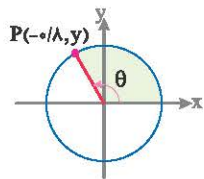
245. در متوازی‌الاضلاعی دو قطر ۱۲ و ۸ واحد، و زاویه بین دو قطر ۱۳۵ درجه است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند برابر $\sqrt{2}$ است؟ (داخل - ۹۲)

- (۱) ۱۸ (۲) ۲۴
(۳) ۳۲ (۴) ۳۶



246. در مثلث مقابل، طول ضلع BC کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ (۲) $2(\sqrt{2} + \sqrt{3})$
(۳) $\sqrt{2} + \sqrt{6}$ (۴) $2(\sqrt{2} + \sqrt{6})$



247. در دایره مثلثاتی مقابل مقدار $\tan \theta$ کدام است؟

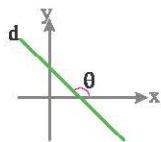
- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{3}{4}$
(۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $-\frac{4}{3}$

248. کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) $\sin 140^\circ > \cos 140^\circ$ (۲) $\sin 55^\circ < \tan 55^\circ$
(۳) $\cot 300^\circ > \tan 300^\circ$ (۴) $\cot 15^\circ < \cos 15^\circ$

249. نمودار خط d به معادله $3x + 2y = 4$ به صورت مقابل است. حاصل $\tan(\frac{3\pi}{4} + \theta)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$
(۳) $-\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$





(خارج - ۹۸)

250. اگر $\frac{\pi}{4} < x < \pi$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x \right)$ کدام است؟

(۱) $-\cos^2 x$

(۲) $-\cos x$

(۳) $\cos^2 x$

(۴) $\cos x$

(داخل - ۹۸)

251. اگر $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ باشد، حاصل $\sqrt{1 + \tan^2 x} \left(2 \sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x \right)$ کدام است؟

(۱) $\sin x$

(۲) $\cos x$

(۳) $-\sin x$

(۴) $-\cos x$

(داخل - ۹۸)

252. حاصل عبارت $\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{-17\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{19\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{-11\pi}{6}\right)$ کدام است؟

(۱) $-\frac{1}{4}$

(۲) $-\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{1}{4}$

(۴) $\frac{1}{2}$

253. اگر $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ و انتهای کمان α در ربع سوم باشد، حاصل عبارت مقابل کدام است؟ $\sin\left(\frac{9\pi}{4} + \alpha\right) \cos\left(\frac{7\pi}{4} - \alpha\right) - \tan\left(\alpha - \frac{3\pi}{4}\right)$

(خارج - ۹۸)

(۱) $-1/23$

(۲) $-0/52$

(۳) $0/27$

(۴) $0/48$

(خارج - ۹۴)

254. حاصل عبارت $\frac{\sin 25^\circ + \sin 70^\circ}{\cos 56^\circ - \cos 11^\circ}$ با فرض $\tan 2^\circ = 0/2$ کدام است؟

(۱) $-\frac{3}{4}$

(۲) $\frac{3}{4}$

(۳) $\frac{7}{3}$

(۴) $\frac{5}{8}$

255. اگر $\frac{3\pi}{4} < x < 2\pi$ باشد، حاصل عبارت $\left(\frac{1}{\sin x} - 2 \sin x\right) \sqrt{2 - 2 \cos 2x}$ کدام است؟

(۱) $\cos 2x$

(۲) $2 \cos 2x$

(۳) $-\cos 2x$

(۴) $-2 \cos 2x$

256. مقدار $\sin 67/5^\circ$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$

(۲) $\frac{\sqrt{2}+2}{2}$

(۳) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$

(۴) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

257. ساده شده عبارت $\frac{\sqrt{1 + \cos 2^\circ}}{\cos^4 5^\circ - \sin^4 5^\circ}$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{2} \sin 1^\circ$

(۲) $2 \cos 2^\circ$

(۳) $\sqrt{2}$

(۴) 2

258. اگر $\sin 2x = \frac{2}{3}$ باشد، حاصل $\sin^4 x + \cos^4 x$ کدام است؟

(۱) $\frac{7}{9}$

(۲) $\frac{1}{9}$

(۳) $-\frac{7}{9}$

(۴) $-\frac{1}{9}$

فصل ۷ | مثلثات

فهرست آفلاین در gajmarket.com



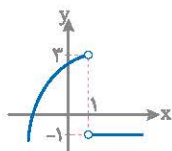
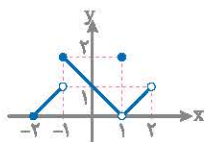
MARTIN HAIRER
FIELDS:2014 1975



همسایگی، فرایندهای حدی و محاسبه حد
یازدهم: ص ۱۲۰ تا ۱۳۶
دوازدهم: ص ۵۳ تا ۵۴

سکانس 16
فصل ۸
۱۲ + ۱۱

فصل ۸ | حد و پیوستگی



289. بازه $\{y\} - (x+4, 2x-1)$ همسایگی محذوف عدد ۲ است. مجموعه مقادیر x کدام است؟

- (۱) $-1 < x < 2$
- (۲) $-2 < x < 2$
- (۳) $-\frac{3}{2} < x < 2$
- (۴) $-2 < x < \frac{3}{2}$

290. دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟

- (۱) صفر
- (۲) ۱
- (۳) -۱
- (۴) ۲

291. نمودار تابع f به صورت مقابل است. حاصل کدام یک از حدهای زیر موجود است؟

(۱) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

(۳) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

(۲) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

(۴) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

292. کدام تابع زیر در $x=0$ حد ندارد؟

(۱) $y = x|x|$

(۳) $y = x - |x|$

(۲) $y = x + |x|$

(۴) $y = \frac{x}{|x|}$

293. تابع باضابطه $f(x) = [2x]$ در نقطه $x = \frac{1}{4}$ چه وضعیتی دارد؟

(۱) حد دارد.

(۳) فقط حد چپ دارد.

(۲) فقط حد راست دارد.

(۴) حد چپ و راست نابرابر دارد.

294. نمودار تابع f به صورت مقابل است. کدام گزینه درست است؟

(۱) $\lim_{x \rightarrow 1^+} [x]f(x) = 1$

(۳) $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x)-1)^2 = 4$

(۲) $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1)f(x) = 3$

(۴) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x-1) = -1$

295. اگر تابع $f(x)$ به صورت $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & ; x < 1 \\ x^2 - 1 & ; 1 \leq x < 3 \\ 2x - 5 & ; x \geq 3 \end{cases}$ باشد، کدام گزینه صحیح نیست؟

(۱) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 6$

(۳) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$

(۲) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$

(۴) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 3$

296. اگر $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & ; x \geq 1 \\ x^2+6 & ; x < 1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x-2 & ; x \geq 1 \\ 2x & ; x < 1 \end{cases}$ کدام تابع زیر در $x=1$ حد دارد؟

(۱) $f+g$

(۳) $f-g$

(۲) $\frac{f}{g}$

(۴) $f \times g$

خرید آنلاین در gajmarket.com

297. اگر $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{f(x)-3} = 1$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{f(x)+4}$ کدام است؟

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

298. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4|x|-|x|}{|x|-|x|}$ کدام است؟

- ۴ (۱)
- ۲ (۲)
- ۲ (۳)
- ۴ (۴)

299. به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = \frac{a|x|}{x} - 4|x|$ در $x=0$ حد دارد؟

- ۱ (۳)
- ۱ (۱)
- ۲ (۴)
- ۲ (۲)

300. حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin x}{|\sin x|} + \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} [\cos x]$ کدام است؟

- ۱ (۳)
- صفر (۱)
- ۲ (۲)
- ۲ (۴)

301. اگر تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + |x| & ; x < -1 \\ |x| & ; x = -1 \\ 3x + a & ; x > -1 \end{cases}$ در $x = -1$ دارای حد باشد، مقدار a کدام است؟

- ۲ (۱)
- ۳ (۲)
- ۵ (۳)
- ۶ (۴)

302. اگر حد تابع $f(x) = \begin{cases} (b+1)|x| + |x| & ; x > -1 \\ 3 & ; x = -1 \\ a|x| + 2bx - 1 & ; x < -1 \end{cases}$ در $x = -1$ برابر ۵ باشد، مقدار a کدام است؟

- ۷ (۱)
- ۲ (۳)
- ۳ (۲)
- ۵ (۴)



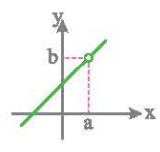
یازدهم: ص ۱۲۸ تا ۱۳۶
دوازدهم: ص ۵۰ تا ۵۳

رفع ابهام

فصل ۸

۱۱ + ۱۲

سکانس ۱۷



303. حاصل $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{2x^2 + 5x + 2}$ کدام است؟

- ۴ (۱)
- ۴ (۳)
- ۳ (۲)
- ۴ (۴)

304. نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ به صورت مقابل است. مقدار $a + b$ کدام است؟

- ۲ (۱)
- ۶ (۳)
- ۴ (۲)
- ۸ (۴)

305. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2[x] - 8}{x - 2}$ کدام است؟

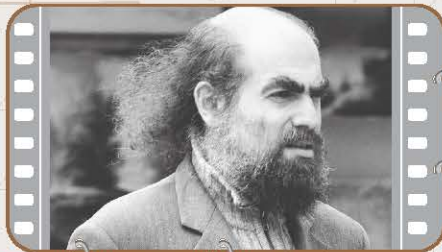
- ۸ (۱)
- ۴ (۳)
- ۴ (۴)
- ۸ (۲)

306. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x^2 - 5x + 6|}{x^2 - 2x}$ کدام است؟

- ۱ (۱)
- ۱ (۳)
- ۱ (۴)
- ۱/۲ (۲)

307. حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x-5} - 2}{x^2 - 9}$ کدام است؟

- ۱/۴ (۱)
- ۱/۱۰ (۳)
- ۱/۸ (۲)
- ۱/۱۲ (۴)



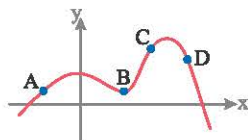
GRIGORI PERELMAN
FIELDS:2006 1966



دوازدهم: ص ۶۶ تا ۷۶
و ۸۲ تا ۸۸
قواعد محاسبه مشتق، خط مماس

سکانس 20
ریاضی ۱۲ فصل ۹

342. با توجه به نمودار تابع f ، کدام رابطه میان شیب نقاط مشخص شده برقرار است؟



(۱) $m_B < m_A < m_C < m_D$

(۲) $m_A < m_B < m_D < m_C$

(۳) $m_A < m_C < m_B < m_D$

(۴) $m_D < m_B < m_A < m_C$

343. در شکل مقابل حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ کدام است؟

(۱) ۳

(۲) $\frac{2}{3}$

(۳) $\frac{3}{2}$

(۴) ۲

344. اگر $f'(4) = \frac{3}{4}$ باشد، حاصل حد $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+3h) - f(4-h)}{h}$ کدام است؟

(۱) ۴

(۲) ۱۲

(۳) ۳

(۴) ۶

345. با توجه به نمودار توابع f و g حاصل $(3f + 2g)'(1)$ کدام است؟

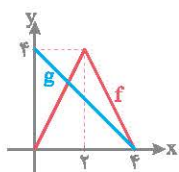
(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

(برگرفته از کتاب درسی)



346. اگر شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه $A(-2, -3)$ برابر $\frac{1}{4}$ باشد، آنگاه مشتق $y = x^2 f(x)$ در $x = -2$ کدام است؟

(۱) ۸

(۲) ۱۰

(۳) ۱۲

(۴) ۱۴

347. اگر $f(x) = (3x^2 - 7)(2x - 5)^3$ باشد، $f'(2)$ کدام است؟

(۱) -۱۲

(۲) ۱۸

(۳) ۲۴

(۴) ۳۰

348. اگر $f(x) = (x + \sqrt{x^2 - x})^3$ و $g(x) = (x - \sqrt{x^2 - x})^3$ باشد، حاصل $f'(2)g(2) + g'(2)f(2)$ چقدر است؟

(۱) -۱۲

(۲) ۱۲

(۳) -۸

(۴) ۸

فصل ۹ | مشتق

خرید آنلاین در gajmarket.com

(خارج - ۹۸)

349. در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{-x-1}{\sqrt{x}}$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\frac{1}{4}+h) - f(\frac{1}{4})}{h}$ کدام است؟

- ۱ (۱)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)
- ۲ (۲)

350. مشتق تابع $f(x) = \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ در $x=4$ کدام است؟

- ۱ (۱)
- ۱ (۳)
- ۱ (۲)
- ۱ (۴)

351. اگر $f(x) = (x^2 - x - 2)\sqrt{x^2 - 7x}$ باشد، $f'(-1)$ کدام است؟

- ۱ (۱)
- ۳ (۳)
- ۲ (۲)
- ۴ (۴)

352. اگر $f(x) = \frac{2x}{x+3}$ مقدار $f''(-4)$ کدام است؟

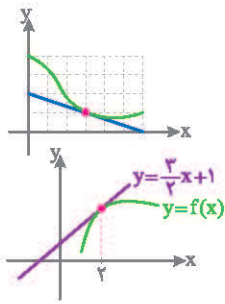
- ۱ (۱)
- ۳ (۳)
- ۲ (۲)
- ۴ (۴)

353. نمودار تابع f به صورت مقابل است. مشتق تابع $y = \sqrt{f(x)}$ در $x=3$ کدام است؟

- ۱ (۱)
- ۳ (۳)
- ۲ (۲)
- ۴ (۴)

354. با توجه به شکل مقابل، مشتق تابع $y = \frac{f(x)}{x^2+x}$ در نقطه $x=2$ کدام است؟

- ۱ (۱)
- ۳ (۳)
- ۲ (۲)
- ۴ (۴)



(داخل - ۹۸)

355. اگر $g(x) = x + \sqrt{x}$ و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{4}{3}$ باشد، $(fog)'(1)$ کدام است؟

- ۱ (۱)
- ۳ (۳)
- ۲ (۲)
- ۴ (۴)

356. خط به معادله $y = 3x - 5$ در نقطه $x=2$ بر نمودار تابع $y = g(x)$ مماس است. اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{2x - 2} = \frac{2}{3}$ باشد، $(fog)'(2)$ کدام است؟

(خارج - ۹۸)

- ۱ (۱)
- ۳ (۳)
- ۲ (۲)
- ۴ (۴)

357. اگر $f(x) = \sqrt{4x-7}$ و $g(x) = 2x^2 + \frac{1}{x}$ ، مشتق تابع $g \circ f$ به ازای $x=2$ کدام است؟

- ۱ (۱)
- ۳ (۳)
- ۲ (۲)
- ۴ (۴)

(داخل - ۹۸)

358. اگر $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ و $(fog)'(2) = 6$ باشد، $f'(5)$ کدام است؟

- ۱ (۱)
- ۳ (۳)
- ۲ (۲)
- ۴ (۴)

(داخل - ۹۳)

359. اگر $f(x) = \frac{x^2-2}{1+x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ حاصل $g'(x) \cdot f'(g(x))$ کدام است؟

- ۱ (۱)
- ۳ (۳)
- ۲ (۲)
- ۴ (۴)



CÉDRIC VILLANI
FIELDS:2010 1973



395. تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ در کدام بازه صعودی است؟

- (۱) $(-2, 0)$ (۲) $(-\infty, -2)$ (۳) $(0, 2)$ (۴) \mathbb{R}

396. تابع با ضابطه $f(x) = mx^3 + 2x^2 + \frac{m}{3}x - 1$ همواره صعودی است. حدود m کدام است؟

- (۱) $[-2, 2]$ (۲) $(-\infty, -2)$ (۳) $(-2, 0)$ (۴) $[2, +\infty)$

397. نمودار تابع $y = x^{\frac{1}{5}} - 4x^{\frac{3}{5}}$ در حوالی مبدأ مختصات چگونه است؟



398. نمودار تابع f به صورت مقابل است، مجموعه طول نقاط بحرانی تابع f کدام است؟

- (۱) $\{-1, 1, 4\}$ (۲) $\{-2, -1, 2, 3, 4\}$ (۳) $\{-1, 3, 4\}$ (۴) $\{-2, -1, 3, 4, 5\}$

399. نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = |x^2 - 2x|$ رؤوس یک مثلث هستند. مساحت این مثلث کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

400. مجموعه طول نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = (x^2 - 28) \times \sqrt[3]{x}$ کدام است؟

- (۱) $\{-2, 2\}$ (۲) $\{-\sqrt{7}, \sqrt{7}\}$ (۳) $\{-2, 0, 2\}$ (۴) $\{-7, 0, 1\}$

401. تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = [x]$ در بازه $[-2, 1)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) بیشمار (۴) ۱

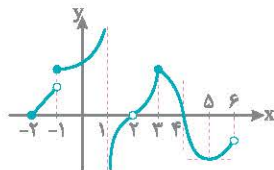
402. تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x) = |\sin x|$ در بازه $(-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

403. تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه $y = |x^3 - x|$ روی بازه $[-1, 2]$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

(داخل - ۹۱)



فصل ۱۰ کاربرد مشتق

خرید آنلاین در gajmarket.com

(داخل - ۹۰)



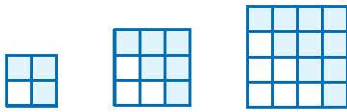
ALESSIO FIGALLI
FIELDS:2018 1984



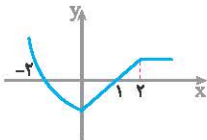
646. اگر $A = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{4}}{\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}}$ باشد، حاصل $\sqrt{7+A}^{-6}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۱/۵ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

647. با توجه به الگوی مقابل، در شکلی که تعداد مربع‌های سفید برابر ۶۶ است، تعداد مربع‌های رنگی کدام است؟



- ۶۶ (۱) ۷۷ (۳) ۶۸ (۲) ۷۸ (۴)



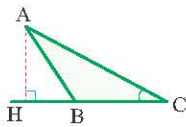
648. شکل روبه‌رو نمودار تابع $y=f(x)$ است. مجموعه جواب نامعادله $\frac{(x-1)f(x)}{x+3} < 0$ کدام است؟

- ۱ (۱) $(-3, 1)$ ۲ (۲) $(-\infty, 2)$ ۳ (۳) $(-3, -2)$ ۴ (۴) $[1, +\infty)$

649. مختصات رأس سهمی به معادله $y=3x^2+bx+c$ به صورت $A(-1, -4)$ است. این سهمی محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

- ۱ (۱) -1 ۲ (۲) -4 ۳ (۳) 6 ۴ (۴) 2

(ریاضی داخل - ۹۹)



650. در شکل روبه‌رو، فرض کنید $\sin C = \frac{5}{13}$ و $CH=9$. اندازه ارتفاع AH کدام است؟

- ۱ (۱) $\frac{3}{25}$ ۲ (۲) $\frac{3}{5}$ ۳ (۳) $\frac{3}{6}$ ۴ (۴) $\frac{3}{75}$

651. اگر چند جمله‌ای $f(x)$ بر $x+3$ بخش پذیر باشد، باقی مانده تقسیم $f(3x-1)$ بر $3x+2$ کدام است؟

- ۱ (۱) -2 ۲ (۲) 5 ۳ (۳) 0 ۴ (۴) 3

652. دو تابع $f(x)=\sqrt{x|x|}$ و $g(x)=\sqrt{|x|} \times \sqrt{|x|}$ با کدام دامنه با هم مساوی‌اند؟

- ۱ (۱) \mathbb{R} ۲ (۲) $[0, +\infty)$ ۳ (۳) $(0, +\infty)$ ۴ (۴) $(-\infty, 0]$

653. چند مورد از مطالب زیر، در رابطه با نمودار تابع $f(x) = \frac{1-2x}{x+1}$ درست است؟

الف) از هر چهار ناحیه دستگاه مختصات می‌گذرد.

ب) محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند.

پ) ضابطه وارون آن به صورت $f^{-1}(x) = \frac{1-x}{x+2}$ است.

- ۱ (۱) صفر ۲ (۲) 1 ۳ (۳) 2 ۴ (۴) 3

654. اگر $f(x) = -x + [x]$ و $g(x) = 2^x$ آن‌گاه برد تابع $g \circ f$ کدام است؟

- ۱ (۱) $(\frac{1}{2}, 1)$ ۲ (۲) $(\frac{1}{4}, 1)$ ۳ (۳) $(1, 2)$ ۴ (۴) $(\frac{1}{2}, 2)$

آزمون‌های جامع شبیه‌ساز

خرید آنلاین در: gajmarket.com

655 تابع f با ضابطه $f(x) = |2x - 4| - |x + 1| + x$ را در بازه اکیدا نزولی در نظر بگیرید. نمودار تابع f^{-1} و خط $y = x + 1$ با کدام طول متقاطع هستند؟

(۱) $\frac{5}{9}$

(۲) $\frac{7}{13}$

(۳) $\frac{1}{3}$

(۴) غیر متقاطع

(ریاضی خارج - ۹۶)

656 با فرض $f(x) = x^2 - 4x + 9; x \geq 2$ و $g(x) = \frac{3-x}{3}$ ، حاصل $(f^{-1} \circ g^{-1})(-9)$ ، کدام است؟

(۱) ۳

(۲) ۴

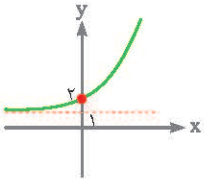
(۳) ۵

657 شکل مقابل نمودار تابع $f(x) = a + 2^{(x+b)}$ است. مقدار $f(3)$ کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۵

(۳) ۹



(داخل - ۹۷)

658 از رابطه $\log(x+2) + \log(2x-1) = \log(4x+1)$ مقدار لگاریتم $\log(2x+5)$ در پایه ۴ کدام است؟

(۱) $0/5$

(۲) $0/75$

(۳) $1/25$

(۴) $1/5$

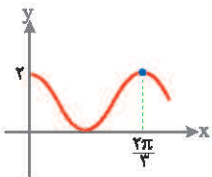
659 اگر $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ و انتهای کمان α در ربع چهارم باشد حاصل عبارت مقابل کدام است؟ $\cos(\frac{3\pi}{4} - \alpha) \sin(\frac{5\pi}{4} + \alpha) - \tan(\pi - \alpha)$

(۱) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$

(۲) $\frac{4}{3}\sqrt{2}$

(۳) $-\frac{4}{3}\sqrt{2}$

(۴) $-\frac{2}{3}\sqrt{2}$



660 شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + \cos^2 bx - \sin^2 bx$ است. مقدار $f(\frac{\pi}{9})$ کدام است؟

(۱) $1/5$

(۲) ۲

(۳) $2/5$

(۴) ۳

661 جواب کلی معادله مثلثاتی $2 \cos x (\cos x - \sin x) = 1$ کدام است؟

(۱) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

(۲) $k\pi - \frac{\pi}{8}$

(۳) $k\pi + \frac{3\pi}{8}$

(۴) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$

(ریاضی داخل - ۹۸)

662 حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 7\sqrt{x} + 5}{2x - \sqrt{3x} + 1}$ کدام است؟

(۱) $-1/5$

(۲) $-1/2$

(۳) $-0/8$

(۴) $-0/6$

663 حاصل حد تابع $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{3} + \tan x}$ وقتی $x \rightarrow \frac{2\pi}{3}^+$ کدام است؟

(۱) $+\infty$

(۲) $-\infty$

(۳) صفر

(۴) وجود ندارد

(خارج - ۹۷)

664 تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+a} - b & ; x \neq 0 \\ \frac{1}{12} & ; x = 0 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی \mathbb{R} پیوسته است. b کدام است؟

(۱) ± 1

(۲) ± 2

(۳) ± 3

(۴) وجود ندارد

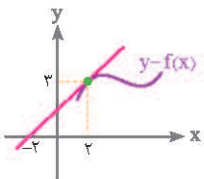
665 نمودار تابع f به صورت مقابل است. مشتق تابع $y = x^2 f(x)$ در $x = 2$ کدام است؟

(۱) ۱۱

(۲) ۷

(۳) ۱۵

(۴) ۱۹



6 مجموعه مرجع به صورت $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ است، پس:

$$B' = U - B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{4, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3, 8, 9\}$$

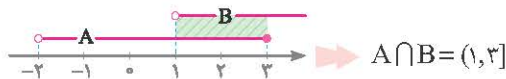
بنابراین مجموعه $B' - A$ برابر است با:

$$B' - A = \{1, 2, 3, 8, 9\} - \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{8, 9\}$$

پس متمم مجموعه $B' - A$ به صورت $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ است که ۷ عضو دارد.

7 نمایش بازه‌ای مجموعه B به صورت $B = (1, +\infty)$ است. چون می‌دانیم

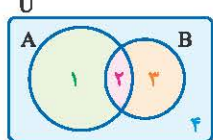
$$A' \cup B' = (A \cap B)'$$



متمم مجموعه $A \cap B$ به صورت $(-\infty, 1] \cup (3, +\infty)$ است، پس:

$$A' \cup B' = (A \cap B)' = (-\infty, 1] \cup (3, +\infty)$$

8 نمودارون را برای دو مجموعه A و B رسم می‌کنیم و ناحیه‌ها را شماره‌گذاری می‌کنیم:



$$(A - B) - (B \cap A') = (\{1, 2\} - \{2, 3\}) - (\{2, 3\} \cap \{3, 4\}) = \{1\}$$

با توجه به نمودار، ناحیه $\{1\}$ مجموعه $A - B$ را نشان می‌دهد.

9 برای به دست آوردن تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه A و B ، به

تعداد اعضای اشتراک آن‌ها نیاز داریم. بنابراین خواهیم داشت:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) \Rightarrow 3 = 4 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 1$$

بنابراین $n(A \cup B)$ برابر است با:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 4 + 7 - 1 = 10$$

10 می‌دانیم $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ است، بنابراین

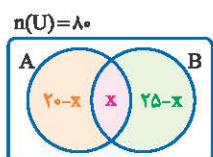
هنگامی $n(A \cup B)$ ما کسیم می‌شود که $n(A \cap B) = 0$ باشد، یعنی دو مجموعه جدا از هم باشند.

11 ابتدا تعداد عضوهای مجموعه B را به دست می‌آوریم:

$$n(B) = n(U) - n(B') \Rightarrow n(B) = 10 - 5 = 5$$

از طرفی $n(A \cup B) = 37$ است، حال اگر فرض

کنیم $n(A \cap B) = x$ خواهیم داشت:



$$(20 - x) + x + (25 - x) = 37 \Rightarrow x = 8$$

بنابراین تعداد اعضای که فقط در مجموعه B هستند، برابر است با:

$$25 - x = 25 - 8 = 17$$

Set, Pattern & Sequence

1 بررسی گزینه‌ها:

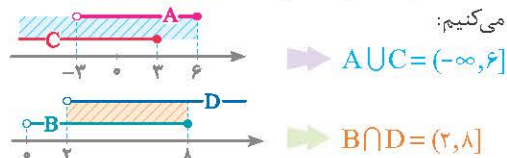
1 هیچ عددی وجود ندارد که هم طبیعی باشد و هم گنگ، پس: $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$

2 از آن جایی که $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ ، در نتیجه: $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$

3 چون $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ ، پس $\mathbb{Z} - \mathbb{Q} = \emptyset$ در نتیجه: $\emptyset \subseteq \mathbb{N}$

4 می‌دانیم $\mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ولی \mathbb{Q} زیرمجموعه \mathbb{W} نیست، بلکه $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{Q}$

2 با استفاده از نمایش هندسی، مجموعه‌های $A \cup C$ و $B \cap D$ را روی محور مشخص می‌کنیم:



حال مجموعه $(A \cup C) - (B \cap D)$ را مشخص می‌کنیم:



3 بررسی گزینه‌ها:

1 این مجموعه به صورت $\{23, 24, 25, \dots\}$ است که نامتناهی است.

2 با تغییر مقدار ارتفاع و قاعده، بی‌شمار مثلث با مساحت ۶ می‌توان ساخت.

3 در بازه $(1, 3)$ بی‌شمار عدد گویا وجود دارد.

4 مجموعه اعداد طبیعی که عدد ۱۰ بر آن‌ها بخش پذیر باشد، به صورت زیر

است. پس این مجموعه، متناهی است. $A = \{1, 2, 5, 10\}$

4 ابتدا مجموعه‌های A و B را با اعضا مشخص می‌کنیم:

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}, B = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$$

حال به بررسی گزینه‌های پردازیم:

1 نامتناهی و غیر تهی $A - B = \{1, 9, 15, 21, \dots\}$

2 متناهی و غیر تهی $B - A = \{2\}$

3 نامتناهی و غیر تهی $A \cap B = \{3, 5, 7, 11, \dots\}$

4 تهی $A - (A \cup B) = \emptyset$

5 بررسی گزینه‌ها:

1 در این حالت مجموعه A می‌تواند نامتناهی یا متناهی باشد:

$$A \cup B = \{0, 1, 2, \dots\}, B = \{1, 2, 3, \dots\} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = \{0, 2, 4, \dots\} \\ A_2 = \{0\} \end{cases}$$

2 در این حالت مجموعه $A \cap B$ می‌تواند نامتناهی یا متناهی باشد:

$$A_1 = \{0, 1, 2, \dots\}, B_1 = \{1, 2, 3, \dots\} \Rightarrow A_1 \cap B_1 = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$A_2 = \{0, 1, 2, \dots\}, B_2 = \{\dots, -2, -1, 0\} \Rightarrow A_2 \cap B_2 = \{0\}$$

3 اگر A نامتناهی باشد، A' می‌تواند نامتناهی یا متناهی باشد:

$$A_1 = \{1, 3, 5, \dots\} \Rightarrow A'_1 = \{2, 4, 6, \dots\}$$

$$A_2 = \{2, 3, 4, \dots\} \Rightarrow A'_2 = \{1\}$$

4 اگر A متناهی و B نامتناهی باشد، مجموعه $B - A$ نامتناهی است.

44 همه اعداد زیر رادیکال را به عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم:

$$A = \sqrt[4]{4^2 \cdot 16} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[4]{2^2 \cdot 2^4} \times 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[4]{2^6} \times 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[4]{2^2 \times 2^2 \times 2^2} \times 2^{\frac{2}{3}} \\ = \sqrt[4]{2^2} \times 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}} = 2^{\frac{3}{2} + \frac{4}{3}} = 2^{\frac{9}{6} + \frac{8}{6}} = 2^{\frac{17}{6}} = 2^2 = 4$$

$$\Rightarrow (2A)^{-\frac{1}{3}} = 8^{-\frac{1}{3}} = (2^3)^{-\frac{1}{3}} = 2^{-1} = \frac{1}{2} = 0.5$$

45 با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای خواهیم داشت:

$$(x+3y)^2 - (x-3y)^2 = (x^2 + 6xy + 9y^2) - (x^2 - 6xy + 9y^2) \\ = 12xy = 12 \times \frac{1}{3} = 4$$

اتحاد مربع مجموع و تفاضل دو جمله‌ای به صورت زیر است:

$$1) (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad 2) (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

46 طرفین تساوی داده شده را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$2x + \frac{5}{x} = 9 \xrightarrow{\text{توان 2}} (2x + \frac{5}{x})^2 = 81 \Rightarrow 4x^2 + \frac{25}{x^2} + 2(2x)(\frac{5}{x}) = 81$$

$$\Rightarrow 4x^2 + \frac{25}{x^2} + 20 = 81 \Rightarrow 4x^2 + \frac{25}{x^2} = 61$$

47 با استفاده از اتحادهای مربع و مکعب دو جمله‌ای داریم:

$$A = (x^2 - 6x^2 + 12x - 8) \left(\frac{x}{x^2 - 4x + 4} - \frac{1}{x-2} \right) \\ = (x-2)^2 \left(\frac{x}{(x-2)^2} - \frac{1}{x-2} \right) = x(x-2) - (x-2)^2 \\ = (x-2)(x - (x-2)) = (x-2) \times 2 \Rightarrow \frac{x-2}{A} = \frac{x-2}{2(x-2)} = \frac{1}{2}$$

اتحاد مکعب مجموع و تفاضل دو جمله‌ای به صورت زیر است:

$$1) (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ 2) (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

48 در جمله‌های x^4 و $8x$ از x و در جمله‌های -24 و $-3x^3$ از -3 فاکتور می‌گیریم:

$$x^4 - 3x^3 + 8x - 24 = x(x^3 + 8) - 3(x^3 + 8) \\ = (x-3)(x^3 + 8) = (x-3)(x+2)(x^2 - 2x + 4)$$

اتحادهای زیر به اتحاد چاق و لاغر معروف هستند:

$$1) a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\ 2) a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

49 در هریک از بیاناتها مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\left(x + \frac{2}{x-2}\right) \left(1 - \frac{1}{x-2}\right) = \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x-2}\right) \left(\frac{x-3}{x-2}\right) = \frac{(x-1)(x-2)}{x-2} = x-1$$

اگر جملات t_m, t_n, t_k از یک دنباله حسابی ($m > n > k$) جملات متوالی

یک دنباله هندسی باشند، قدرنسبت دنباله هندسی از رابطه $q = \frac{m-n}{n-k}$ به دست می‌آید. پس در این سؤال قدرنسبت دنباله هندسی برابر است با:

$$q = \frac{24-9}{9-4} = \frac{15}{5} = 3$$

40 در دنباله هندسی $t_n = t_1 q^{n-1}$, $t_8 = t_1 q^7$, $t_5 = t_1 q^4$, $t_3 = t_1 q^2$ است. پس با

توجه به گفته‌های سؤال چون جمله‌های t_8, t_5, t_3 تشکیل دنباله حسابی داده‌اند، می‌توانیم شرط تشکیل دنباله حسابی را بنویسیم:

$$2t_5 = \frac{t_3 + t_8}{2} \Rightarrow 4t_1 q^4 = t_1 q + t_1 q^7 \xrightarrow{-t_1 q} 4q^4 = 1 + q^6$$

حال با فرض $q^3 = A$ به معادله درجه دوم زیر می‌رسیم:

$$4A = 1 + A^2 \Rightarrow A^2 - 4A + 1 = 0 \Rightarrow A = \frac{4 \pm \sqrt{16}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} = q^3$$

با فرض $q^3 = 2 + \sqrt{3}$ نسبت بزرگ‌ترین جمله یعنی t_8 به کوچک‌ترین جمله یعنی t_3 برابر است با:

$$\frac{t_8}{t_3} = \frac{t_1 q^7}{t_1 q^2} = q^5 = (q^3)^2 = (2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$$

توجه کنید با فرض $q^3 = 2 - \sqrt{3}$ چون مقدار قدرنسبت کوچک‌تر از یک می‌شود، ترتیب جملات عوض می‌شود و باز هم به همین جواب می‌رسیم.

Rational Exponents & Algebraic Expressions

41 همه اعداد را ساده و به عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم:

$$(0.25)^4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \times 6^4 = \left(\frac{1}{4}\right)^4 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 \times (2^3 \times 3^4) \\ = \frac{1}{2^8} \times \frac{2^2 \times 3^2}{3^2} \times 2^3 \times 3^4 = \frac{2^3 \times 3^4}{2^6} = 3 \times 3^2 = 12$$

42 اعداد زیر رادیکال‌ها را باز می‌کنیم:

$$A = \frac{2}{3} \sqrt{18} + 2\sqrt{27} - \sqrt{108} + 0.3\sqrt{200} \\ = \frac{2}{3} \times 3\sqrt{2} + 2 \times 3\sqrt{3} - \sqrt{36 \times 3} + 0.3 \times 10\sqrt{2} \\ = 2\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

حال اعداد مربع کامل را از زیر رادیکال خارج می‌کنیم:

$$A = \frac{2}{3} \times 3\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow A^2 = (5\sqrt{2})^2 = 25 \times 2 = 50$$

43 می‌دانیم: $\sqrt{24} \times 6 = \sqrt{2^3 \times 3} \times 6 = \sqrt{2^5 \times 3^2} \times 3$ حال همه اعداد زیر

رادیکال را به عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم:

$$\sqrt{12} \times \sqrt{54} \times \sqrt{2\sqrt{6}} = \sqrt{2^2 \times 3} \times \sqrt{2 \times 3^3} \times \sqrt{2 \times 3^2} \times \sqrt{2 \times 3} \times \sqrt{2 \times 3} \times \sqrt{2 \times 3} \times \sqrt{2 \times 3} \\ = \sqrt{2^2 \times 3^2} \times \sqrt{2 \times 3^3} \times \sqrt{2 \times 3^2} \times \sqrt{2 \times 3} \times \sqrt{2 \times 3} \times \sqrt{2 \times 3} \times \sqrt{2 \times 3} \times \sqrt{2 \times 3} \\ = \sqrt{2^2 \times 3^2} \times \sqrt{2 \times 3^3} \times \sqrt{2 \times 3^2} \times \sqrt{2 \times 3} \times \sqrt{2 \times 3} \times \sqrt{2 \times 3} \times \sqrt{2 \times 3} \times \sqrt{2 \times 3} \\ = \sqrt{2^{12} \times 3^{12}} = \sqrt{6^{12}} = 6$$

چون فرجه رادیکال‌ها متفاوت است، همه فرجه‌ها را به ک.م.م اعداد ۱۲، ۴، ۶، ۳ تبدیل می‌کنیم:

$$\sqrt{3 \times 3^2} \times \sqrt{2 \times 3^3} \times \sqrt{2 \times 3} \times \sqrt{2 \times 3} \times \sqrt{2 \times 3} \times \sqrt{2 \times 3} \times \sqrt{2 \times 3} \times \sqrt{2 \times 3} \\ = \sqrt{2^{12} \times 3^{12}} = \sqrt{6^{12}} = 6$$

وزن خالص ماده حل شده در هر حالت را به دست می آوریم:

$$\frac{\text{وزن ماده حل شده}}{11} = \frac{40}{100} \Rightarrow \text{وزن ماده حل شده} = 4/4$$

$$\frac{\text{وزن ماده حل شده}}{4} = \frac{70}{100} \Rightarrow \text{وزن ماده حل شده} = 2/8$$

حال با مخلوط کردن رنگ ها، $11 + 4 = 15$ کیلوگرم رنگ ایجاد می شود. می خواهیم غلظت محلول را به 50 درصد برسانیم. اگر فرض کنیم X کیلوگرم از محلول تبخیر می شود؛ پس خواهیم داشت:

$$\frac{\text{وزن ماده حل شده}}{\text{وزن کل}} = \frac{50}{100} \Rightarrow \frac{4/4 + 2/8}{15 - X} = \frac{50}{100} \Rightarrow \frac{7/2}{15 - X} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 15 - X = 14/4 \Rightarrow X = 0/6$$

178 اگر طول زمین X و عرض آن Y باشد، با توجه به این که محیط زمین برابر 20 است؛ پس:

$$2X + 2Y = 20 \Rightarrow X + Y = 10 \Rightarrow Y = 10 - X$$

می دانیم به عدد $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ عدد طلایی می گویند. بنابراین:

$$\frac{X}{Y} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{X}{10 - X} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow 2X = 10 - (1 + \sqrt{5})X + 10\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow (3 + \sqrt{5})X = 10(1 + \sqrt{5}) \Rightarrow X = \frac{10(1 + \sqrt{5})}{3 + \sqrt{5}} = \frac{10(1 + \sqrt{5})}{3 + \sqrt{5}} \times \frac{3 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}$$

$$= \frac{10(3 - \sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 5)}{9 - 5} = \frac{10(2\sqrt{5} - 2)}{4} = 5(\sqrt{5} - 1) = 5\sqrt{5} - 5$$

179 طرفین تساوی را به توان 2 می رسانیم:

$$2X + 1 = \sqrt{11X - 2} \Rightarrow (2X + 1)^2 = 11X - 2 \Rightarrow 4X^2 + 4X + 1 = 11X - 2$$

$$\Rightarrow 4X^2 - 7X + 3 = 0 \Rightarrow X_1 = 1, X_2 = \frac{3}{4} \Rightarrow |X_1 - X_2| = |1 - \frac{3}{4}| = \frac{1}{4}$$

مجموع ضرایب = 0

180 رادیکال را تنها کرده و سپس طرفین را به توان 2 می رسانیم:

$$\sqrt{2a^2 + 4a} = 2 - 3a \Rightarrow 2a^2 + 4a = 9a^2 - 12a + 4 \Rightarrow 7a^2 - 16a + 4 = 0$$

برای راحت تر تجزیه کردن عبارت $7a^2 - 16a + 4 = 0$ ، عدد 7 را در 4 ضرب می کنیم:

$$7a^2 - 16a + 4 = 0 \Rightarrow a^2 - 16a + 28 = 0 \Rightarrow (a - \frac{14}{7})(7a - 2) = 0$$

ریشه های معادله $a = \frac{14}{7}, a = \frac{2}{7}$ ، اما چون $a = 2$ طرف

سمت راست معادله اولیه را منفی می کند، قابل قبول نیست و فقط $a = \frac{2}{7}$

قابل قبول است، بنابراین:

$$\frac{a+1}{a} = 1 + \frac{1}{a} = 1 + \frac{1}{\frac{2}{7}} = 1 + \frac{7}{2} = \frac{9}{2} = 4/5$$

173 چون $x = 2$ جواب معادله است، پس در معادله صدق می کند:

$$\frac{x-2}{ax-5} = \frac{a+2}{x-1} \xrightarrow{x=2} \frac{1}{2a-5} = \frac{a+2}{2-1} \Rightarrow \frac{1}{2a-5} = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow 2a^2 - 5a = 2 \Rightarrow 2a^2 - 5a - 2 = 0$$

برای راحت تر تجزیه کردن عبارت $2a^2 - 5a - 2 = 0$ ، عدد 3 را در 2 ضرب می کنیم:

$$2a^2 - 5a - 2 = 0 \Rightarrow a^2 - 5a - 6 = 0 \Rightarrow (2a+1)(a-\frac{6}{2}) = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}, 2$$

174 با فرض $t = \frac{2X}{X-1}$ معادله به صورت $2t + \frac{1}{t} = 3$ در می آید:

$$2t + \frac{1}{t} = 3 \Rightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب} = 0} t = 1, t = \frac{1}{2}$$

$$1) \frac{2X}{X-1} = 1 \Rightarrow 2X = X-1 \Rightarrow 2X = -1 \Rightarrow X = -\frac{1}{2}$$

ریشه بزرگتر = $-\frac{1}{5}$

$$2) \frac{2X}{X-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow 6X = X-1 \Rightarrow 5X = -1 \Rightarrow X = -\frac{1}{5}$$

175 اگر بهروز کل کار را در X ساعت انجام دهد، پس در هر ساعت $\frac{1}{X}$ کار

را انجام می دهد. حال چون بهروز کار را 9 ساعت زودتر از فرهاد انجام می دهد،

پس فرهاد کل کار را در $X+9$ ساعت انجام می دهد، پس در هر ساعت $\frac{1}{X+9}$

کار را انجام می دهد. از طرفی اگر هر دو با هم کار کنند، این کار در 20 ساعت

انجام می شود، پس:

$$\frac{1}{X} + \frac{1}{X+9} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{(X+9)+X}{X(X+9)} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{2X+9}{X^2+9X} = \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow X^2 + 9X = 40X + 180 \Rightarrow X^2 - 31X - 180 = 0 \Rightarrow X = 36, X = -5$$

176 اگر سرعت آب برابر V باشد، هنگامی که قایق در جهت آب حرکت

می کند سرعت آن برابر $10 + V$ و هنگامی که در خلاف جهت آب حرکت

می کند، سرعتش برابر $10 - V$ می شود. حال از آن جایی که اختلاف زمان رفت

و برگشت 5 دقیقه است، پس:

$$\frac{1200}{100-7} - \frac{1200}{100+7} = 5 \xrightarrow{+5} \frac{240}{100-7} - \frac{240}{100+7} = 1 \xrightarrow{\text{جابجایی گزینه ها}} V = 20$$

سرعت متوسط برابر است با جابه جایی تقسیم بر زمان سپری شده است

$$\Delta t = \frac{\Delta X}{v_{av}} \quad \text{یعنی: } v_{av} = \frac{\Delta X}{\Delta t} \quad \text{بنابراین خواهیم داشت:}$$

3 معادله جدید را با کمک رابطه $x^2 - Sx + P = 0$ می‌نویسیم:
 جدید معادله $x^2 - (-5)x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 2 = 0$

طراح ممکن است همین تست را به صورت «اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $2x^2 - 3x - 1 = 0$ باشند، مجموعه جواب کدام معادله به صورت $\{ \frac{1}{\alpha} - 1, \frac{1}{\beta} - 1 \}$ است؟» از ما بپرسد.

103 برای این که معادله درجه دوم $x^2 + (m-2)x + m + 1 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی مثبت باشد، باید $\Delta > 0$, $S > 0$, $P > 0$ باشد:

1 $\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow (m-2)^2 - 4(1)(m+1) > 0$

2 $S = -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow -\frac{m-2}{1} > 0 \Rightarrow m < 2$

3 $P = \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{m+1}{1} > 0 \Rightarrow m > -1$

از اشتراک جواب‌های به دست آمده از 1, 2, 3، مقادیر قابل قبول برای m به صورت $-1 < m < 2$ است.

104 با فرض $x^2 + 4x + 3 = t$ داریم:
 $t = \sqrt{t+2} \Rightarrow t^2 = t+2 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \xrightarrow{a+c=b} t = 2, t = -1$
 چون t برابر با یک عبارت رادیکالی است پس باید نامنفی باشد بنابراین به ازای $t = 2$ خواهیم داشت:
 $x^2 + 4x + 3 = 2 \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{1} = 1$

105 فرض می‌کنیم $x^2 + x = t$ باشد، در این صورت:
 $(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0 \Rightarrow t^2 - 18t + 72 = 0 \Rightarrow t = 6, t = 12$

1 $x^2 + x = 6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2, -3$

2 $x^2 + x = 12 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+4) = 0 \Rightarrow x = 3, -4$

بنابراین مجموع جواب‌ها برابر است با: $(-3) + 2 + 3 + (-4) = -2$

106 با توجه به نمودار داده شده، علامت Δ , a , b , c به صورت زیر است:

1 دهانه سهمی رو به پایین باز شده است، پس: $a < 0$

2 محل برخورد با محور y ها منفی است، پس: $c < 0$

3 شیب نمودار در نقطه $(0, c)$ مثبت است، پس: $b > 0$

4 سهمی محور x ها را در دو نقطه قطع کرده، پس: $\Delta > 0$

107 می‌دانیم طول رأس سهمی به معادله $f(x) = ax^2 + bx + c$ از رابطه $x_s = -\frac{b}{2a}$ به دست می‌آید. از آن جایی که طول رأس سهمی برابر 1 است، پس:
 $x_s = \frac{-a}{2(-2)} = 1 \Rightarrow \frac{a}{4} = 1 \Rightarrow a = 4$

از طرفی منحنی محور x ها را در نقطه‌ای با طول 1- قطع می‌کند، پس:
 $0 = -2(-1)^2 + 4(-1) + b \Rightarrow 0 = -6 + b \Rightarrow b = 6$

99 در معادله $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$ مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها برابر است با:
 $S = -\frac{-(m+3)}{m} = \frac{m+3}{m}$, $P = \frac{5}{m}$

اگر ریشه‌های معادله α و β باشند، با توجه به صورت تست داریم:
 $\alpha^2 + \beta^2 = 6 \Rightarrow S^2 - 2P = 6$
 حال به جای S و P در رابطه $S^2 - 2P = 6$ جایگذاری می‌کنیم:
 $S^2 - 2P = 6 \Rightarrow \left(\frac{m+3}{m}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{m}\right) = 6 \Rightarrow \frac{m^2 + 6m + 9 - 10m}{m^2} = 6$

$\Rightarrow m^2 - 4m + 9 = 6m^2 \Rightarrow 5m^2 + 4m - 9 = 0$ مجموع ضرایب = -9، برابر صفر

$\begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{9}{5} \end{cases}$

حال به ازای هر کدام از m ‌های به دست آمده شرط حقیقی بودن ریشه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$m = 1: x^2 - 4x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4(1)(5) = 16 - 20 = -4 < 0$

$m = -\frac{9}{5}: -\frac{9}{5}x^2 - \frac{6}{5}x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = \left(-\frac{6}{5}\right)^2 - 4\left(-\frac{9}{5}\right)(5) = \frac{36}{25} + 36 > 0$

بنابراین تنها جواب قابل قبول $m = -\frac{9}{5}$ است. البته در این حالت نیازی به چک کردن Δ نبود، چون a و c مختلف‌العلامه بودند معادله قطعاً دو ریشه داشت.

100 اگر ریشه‌های معادله را α, β فرض کنیم طبق فرض مسئله رابطه $\alpha = \frac{\beta}{2} + 5$ بین ریشه‌های معادله برقرار است. از طرفی با توجه به معادله، مجموع ریشه‌ها برابر است با $\alpha + \beta = -\frac{-1}{1} = 1$ بنابراین:
 $\frac{\beta}{2} + 5 + \beta = 1 \Rightarrow \frac{3\beta}{2} = 3 \Rightarrow \beta = 2$

چون $\beta = 2$ یکی از ریشه‌های معادله است، پس در آن صدق می‌کند:
 $2^2 - 8 \times 2 + m = 0 \Rightarrow m = 12$

101 به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:
 1 ریشه‌های معادله $3x^2 - 4x - 1 = 0$ را α و β در نظر می‌گیریم:
 $S = \alpha + \beta = -\frac{-4}{3} = \frac{4}{3}$, $P = \alpha\beta = -\frac{1}{3}$

2 ریشه‌های معادله $3x^2 + ax + b = 0$ برابر $\beta + 1$ و $\alpha + 1$ است. حاصل ضرب این ریشه‌ها برابر است با:
 $P_{new} = \frac{b}{3} \Rightarrow (\alpha+1)(\beta+1) = \frac{b}{3} \Rightarrow \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = \frac{b}{3}$
 $\Rightarrow -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + 1 = \frac{b}{3} \Rightarrow \frac{b}{3} = 2 \Rightarrow b = 6$

102 به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:
 1 ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x - 1 = 0$ را α و β در نظر می‌گیریم:
 $S = \alpha + \beta = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$, $P = \alpha\beta = -\frac{1}{2}$

2 ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x - 1 = 0$ برابر $\frac{1}{\alpha} - 1$ و $\frac{1}{\beta} - 1$ است. بنابراین مجموع و حاصل ضرب این ریشه‌ها می‌یابیم:

$S_{new} = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) + \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} - 2 = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} - 2 = -3 - 2 = -5$

$P_{new} = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\left(\frac{1}{\beta} - 1\right) = \frac{1}{\alpha\beta} - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) + 1 = \frac{1}{\alpha\beta} - \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}\right) + 1 = 2$

۱۳۵ دامنه تابع $f = \log\left(\frac{x-2}{x}\right)$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{x-2}{x} > 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -\infty & 2 & +\infty \\ \hline f & + & - & + \end{array} \Rightarrow (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$$

حال دامنه هریک از گزینه‌ها را مشخص می‌کنیم:

۱ $y = \log(x-2) - \log x \Rightarrow \begin{cases} x-2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 2$

۲ $y = \log\left(\frac{(x-2)(x+2)}{x(x+2)}\right) \Rightarrow D_y = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty) - \{2\}$

۳ $y = \frac{1}{2} \log\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 \Rightarrow D_y = \mathbb{R} - \{0, 2\}$

۴ $y = 2 \log\sqrt{\frac{x-2}{x}} \Rightarrow D_y = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

در $x = -2$ در تابع f صدق می‌کند، اما در **۱**، **۲** صدق نمی‌کند. از طرفی در $x = 1$ صدق می‌کند اما در f صدق نمی‌کند.

۱۳۶ ابتدا x را به $-x$ (قرینه نسبت به محور y ها) و سپس در معادله به دست آمده x را به $x-2$ (دو واحد به سمت x های مثبت) تبدیل می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f(x) = \sqrt{-x} \Rightarrow f(x) = \sqrt{-(x-2)} = \sqrt{2-x}$$

برای پیدا کردن طول نقطه تقاطع نمودار تابع $f(x) = \sqrt{2-x}$ با نیمساز ناحیه اول و سوم خواهیم داشت:

$$x = \sqrt{2-x} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2 = 2-x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \checkmark \\ x_2 = -2 \times \end{cases} \text{مجموع ضرایب} = 0$$

۱۳۷ ابتدا ضابطه هر دو نمودار را ساده می‌کنیم:

$$y = (x^2 + 6x + 4 + 5) - 5 = (x+2)^2 - 5$$

$$y = (x^2 - 4x + 3 + 1) - 1 = (x-2)^2 - 1$$

داخل پیرانتراز $x+2$ به $x-2$ رسیده است یعنی x به -5 تبدیل شده پس نمودار 5 واحد به سمت راست منتقل شده و چون بیرون پیرانتراز -5 به -1 رسیده یعنی به اندازه 4 واحد اضافه شده، پس نمودار 4 واحد به سمت بالا منتقل شده است.

۱۳۸ نمودار تابع $y = x^2 - 3x - 1 = 0$ محور x ها را

در دو نقطه با طولهای 2 و 5 قطع می‌کند، حال اگر این سهمی را 2 واحد به طرف x های مثبت انتقال دهیم، طول نقاط تلاقی اش با محور x ها منفی نیست.

۱۳۹ برای این که منحنی 2 واحد به طرف x های منفی منتقل شود کافی است x را به $x+2$ تبدیل کنیم:

$$y = x^2 - x - 3 \Rightarrow y = (x+2)^2 - (x+2) - 3$$

حال برای این که تابع 9 واحد به طرف y های منفی منتقل شود کافی است 9 واحد از y کم کنیم:

$$y = (x+2)^2 - (x+2) - 3 - 9$$

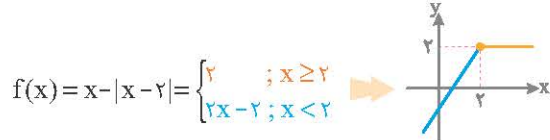
حال طرف دوم را ساده می‌کنیم:

$$y = (x^2 + 4x + 4) - (x+2) - 12 \Rightarrow y = x^2 + 3x - 10$$

در بازه‌ای که نمودار زیر محور x ها قرار دارد، y منفی است، پس:

$$x^2 + 3x - 10 < 0 \Rightarrow (x+5)(x-2) < 0 \Rightarrow -5 < x < 2$$

۱۳۹ نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



بنابراین برد تابع برابر بازه $(-\infty, 2]$ است.

۱۳۰ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ |x+1|-2 & ; x < 0 \end{cases}$ را رسم می‌کنیم:



۱۳۱ چون x^2 عبارتی نامنفی است، پس $\frac{x^2}{x^2+1}$ مثبت بوده و چون

مخرج از صورت یک واحد بیشتر است، پس حاصل $\frac{x^2}{x^2+1}$ عددی کوچک‌تر از یک خواهد بود، بنابراین برد تابع بازه $(0, 1]$ است.

۱۳۲ برای این که مشخص کنیم در کدام بازه، نمودار تابع $y = -x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{9}{3}$

بالاتر از نمودار تابع $y = 2x + |x|$ قرار گرفته است، باید مجموعه جواب نامعادله $-x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{9}{3} > 2x + |x|$ را به دست آوریم. بنابراین:

۱ $x \geq 0: -x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{9}{3} > 2x + x \Rightarrow -x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{9}{3} > 0$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{9}{3} < 0 \Rightarrow -\frac{9}{3} < x < 1 \xrightarrow{x \geq 0} 0 \leq x < 1$$

$$(x-1)(x+\frac{9}{3})$$

۲ $x < 0: -x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{9}{3} > 2x - x \Rightarrow -x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{9}{3} > 0$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{9}{3} < 0 \Rightarrow -3 < x < \frac{3}{2} \xrightarrow{x < 0} -3 \leq x < 0$$

$$(x+3)(x-\frac{3}{2})$$

از اجتماع بازه‌های به دست آمده از **۱**، **۲** مجموعه جواب نامعادله برابر بازه $(-3, 1)$ می‌شود که طول وسط آن برابر $1 - \frac{-3+1}{2} = 1$ است.

۱۳۳ بررسی گزینه‌ها:

۱ $D_f = (0, +\infty), D_g = \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow f \neq g$

۲ $D_f = \mathbb{R} - \{0\}, D_g = \mathbb{R} \Rightarrow f \neq g$

۳ $D_f = [0, +\infty), D_g = \mathbb{R} \Rightarrow f \neq g$

۴ $D_f = D_g = \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow f = g$

۱۳۴ بررسی گزینه‌ها:

۱ $D_f = \mathbb{R} - \{1\}, D_g = \mathbb{R} \Rightarrow f \neq g$

۲ دامنه هر دو تابع \mathbb{R} است ولی ضابطه تابع f بعد از ساده شدن به صورت $f(x) = |x|$ می‌باشد، پس $f \neq g$ است.

۳ $D_f = \mathbb{R} - [0, 1), D_g = \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow f \neq g$

۴ دامنه هر دو تابع $[-1, 1]$ و ضابطه هایشان هم یکسان است، پس $f = g$ می‌باشد.

240 وقتی ۲۰ درصد از ماده در یک ثانیه کاهش می‌یابد، یعنی در یک ثانیه ۸۰ درصد آن باقی می‌ماند. پس اگر مقدار اولیه P_0 باشد، داریم:

تایمه	مقدار باقی مانده
۱ ثانیه	$P_0 / \lambda P_0$
۲ ثانیه	$P_0 / \lambda (P_0 / \lambda P_0) = (P_0 / \lambda)^2 P_0$
۳ ثانیه	$P_0 / \lambda (P_0 / \lambda P_0)^2 = (P_0 / \lambda)^3 P_0$
⋮	⋮
t ثانیه	$P_0 (P_0 / \lambda)^t$

پس مقدار باقی مانده از این ماده در ثانیه t ام از رابطه $P_t = P_0 (P_0 / \lambda)^t$ به دست می‌آید. حال فرض کنیم پس از t ثانیه به $\frac{1}{4}$ مقدار خودش می‌رسد، داریم:


$$P(t) = \frac{1}{4} P_0 \Rightarrow \frac{1}{4} P_0 = P_0 (P_0 / \lambda)^t \Rightarrow \frac{1}{4} = (P_0 / \lambda)^t \Rightarrow t = \log_{P_0 / \lambda} \frac{1}{4}$$

$$= \frac{\log \frac{1}{4}}{\log P_0 / \lambda} \Rightarrow t = \frac{-2 \log 2}{\log \lambda - \log P_0} = \frac{-2(\log 2)}{\log(P_0 / \lambda)} = \frac{-0.6}{-0.1} = 6$$

241 اگر انرژی آزاد شده را E فرض کنیم خواهیم داشت:

$$\log E = 11/\lambda + 1/\delta \Delta M \Rightarrow \log E = 11/\lambda + 1/\delta(9/\delta)$$

$$= 11/\lambda + 14/25 \Rightarrow \log E = 26/0.5 \Rightarrow E = 10^{26/0.5}$$

 اگر قدرت زلزله‌ای برحسب ریشتر برابر M باشد، انرژی آزاد شده آن زلزله، برابر E ، برحسب (Erg) است که از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$\log E = 11/\lambda + 1/\delta \Delta M$$

Trigonometric functions

242 زاویه بزرگ‌تر را x و زاویه کوچک‌تر را y در نظر می‌گیریم. از آن جایی که

$$\frac{5\pi}{12} \text{ رادیان معادل } 75^\circ = \frac{5 \times 18^\circ}{12} \text{ است، پس:}$$

$$x + y = 75^\circ$$

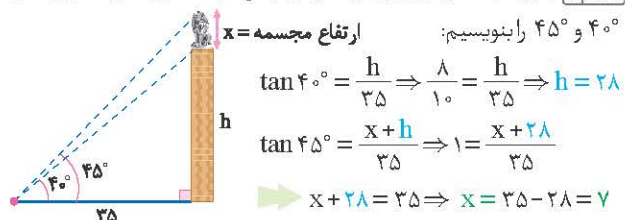
$$x - y = 5^\circ$$

$$\Rightarrow 2x = 80^\circ \Rightarrow x = 40^\circ$$

243 با توجه به رابطه طول کمان روبه‌رو به زاویه مرکزی θ داریم:

$$l = r \cdot \theta \Rightarrow 12 = r \times \frac{\pi}{6} \Rightarrow r = \frac{5 \times 12}{\pi} = 10 \text{ cm} \Rightarrow \text{قطر} = 2r = 20 \text{ cm}$$

244 با توجه به شکل زیر، برای پیدا کردن ارتفاع مجسمه باید تانژانت زاویه‌های 45° و 40° را بنویسیم:



245 می‌دانیم اگر طول دو قطر متوازی الاضلاع a و b و زاویه بین آن‌ها θ باشد، مساحت متوازی الاضلاع از رابطه $S = \frac{1}{2} ab \sin \theta$ به دست می‌آید.

$$S = \frac{1}{2} \times 12 \times 8 \times \sin 135^\circ = 48 \sin(180^\circ - 45^\circ) = 48 \sin 45^\circ$$

پس:

$$= 48 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 24\sqrt{2}$$

233 ابتدا معادله $4^x + 2^x = 72$ را حل می‌کنیم:

$$(2^x)^2 + 2^x - 72 = 0 \xrightarrow{2^x = t} t^2 + t - 72 = 0 \Rightarrow t = 8, t = -9$$

از $2^x = 8$ نتیجه می‌گیریم $x = 3$ است. بنابراین با جایگذاری $x = 3$ در معادله دوم داریم:

$$\log(x+1) + \log(2y+x^2) = 2 \Rightarrow \log(3+1) + \log(2y+9) = 2$$

$$\Rightarrow \log 4(2y+9) = 2 \Rightarrow 4(2y+9) = 10^2 = 100$$

$$\Rightarrow 2y+9 = 25 \Rightarrow y = 8$$

234

$$1) 2^{x-y} \times 4^{x+y} = 1 \Rightarrow 2^{x-y} \times (2^2)^{x+y} = 1 \Rightarrow 2^{x-y} \times 2^{2x+2y} = 1$$

$$\Rightarrow 2^{3x+2y-y} = 2^0 \Rightarrow 3x+2y-y=0$$

$$2) \log y = 2 \log 3 + \log x \Rightarrow \log y = \log 3^2 + \log x$$

$$\Rightarrow \log y = \log 9x \Rightarrow y = 9x$$

با جایگذاری **2** در **1** داریم:

$$3x + 2 \times 9x - y = 0 \Rightarrow 21x = y \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 9x = 3$$

235 با توجه به نمودار، دامنه تابع $y = \log_p U(x)$ برابر $(-1, +\infty)$ است. پس $U(x)$ باید در این بازه مثبت باشد. (حذف **3**، **4**)، از طرفی تابع نزولی است. پس $U(x)$ نمی‌تواند برابر $x+1$ باشد؛ بنابراین گزینه **1** نیز نادرست است.

236 دو نقطه $(-1, 0)$ و $(3, 1)$ روی نمودار تابع قرار دارند، پس:

$$f(-1) = 0 \Rightarrow 0 = \log_b(-1+a) \Rightarrow -1+a = 1 \Rightarrow a = 2$$

$$f(3) = 1 \Rightarrow 1 = \log_b(3+a) \Rightarrow b = 3+2 = 5$$

بنابراین $a \times b = 10$ است.

237 دامنه تابع به صورت $(\frac{1}{3}, +\infty)$ است، پس $\frac{1}{3}$ ریشه عبارت جلوی

$$2(\frac{1}{3}) + a = 0 \Rightarrow a = -1$$

لگاریتم است:

از طرفی نقطه $(2, 0)$ روی نمودار تابع قرار دارد، پس:

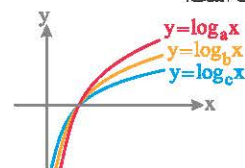
$$0 = -1 + \log_b(2 \times 2 + a) \Rightarrow 1 = \log_b(4+a) \Rightarrow b = 4+a = 4-1 = 3$$

پس ضابطه تابع به صورت $y = -1 + \log_3(2x-1)$ است و طول نقطه برخورد آن با خط $y = 1$ برابر است با:

$$1 = -1 + \log_3(2x-1) \Rightarrow 2 = \log_3(2x-1) \Rightarrow 2x-1 = 3^2 = 9$$

$$\Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$$

238 با توجه به شکل رابطه $a < b < c$ درست است.



239 چون مبنای لگاریتم‌ها عددی بزرگ‌تر از یک است، پس:

$$\log_8(x-1) \leq \log_8(2x-4) \Rightarrow x-1 \leq 2x-4 \Rightarrow 4-1 \leq 2x-x \Rightarrow 3 \leq x$$

۲۷۰ می‌دانیم $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ است، بنابراین ضابطه تابع به صورت

$y = a + b \sin x$ است. حال چون نمودار در آغاز رسم در مبدأ به طرف بالا

می‌رود، پس $b > 0$ است: $y_{\max} = a + b(1) = 3$ ①

از طرفی مقدار تابع در $x = -\frac{\Delta\pi}{6}$ برابر صفر است، پس:

$$0 = a + b \sin(-\frac{\Delta\pi}{6}) \Rightarrow a - \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow a = \frac{b}{2} \quad ②$$

از ① و ② مقادیر $a = 1$ و $b = 2$ به دست می‌آیند، بنابراین مقدار تابع در $x = \frac{\pi}{6}$

$$a + b \sin(\frac{\pi}{6}) = 1 + 2(\frac{1}{2}) = 2 \quad \text{برابر است با:}$$

۲۷۱ مقدار تابع در $x = 0$ برابر ۳ است، پس نقطه $(0, 3)$ در ضابطه تابع

صدق می‌کند: $3 = a + \sin 0 \Rightarrow a = 3$

از طرفی با توجه به شکل دوره تناوب تابع برابر $T = 5 - 1 = 4$ است، بنابراین:

$$T = \frac{2\pi}{|b\pi|} \Rightarrow 4 = \frac{2}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

چون شکل نمودار در مبدأ ابتدا نزولی است، پس $b = -\frac{1}{2}$ قابل قبول است. در نتیجه ضابطه تابع به صورت زیر است:

$$y = 3 - \sin(\frac{\pi}{2}x) \xrightarrow{x = \frac{25}{3}} y = 3 - \sin(\frac{\pi}{2} \times \frac{25}{3}) = 3 - \sin(\frac{25\pi}{6}) \\ = 3 - \sin(4\pi + \frac{\pi}{6}) = 3 - \sin \frac{\pi}{6} = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$$

۲۷۲ با توجه به نمودار بیشترین مقدار تابع f برابر $\sqrt{3}$ است که با قراردادن

1 به جای $\sin(x + \frac{\pi}{3})$ به دست می‌آید:

$$\max(y) = \sqrt{3} \Rightarrow a + b(1) = \sqrt{3} \quad ①$$

از طرفی نمودار از نقطه $(\pi, -\frac{3}{2})$ می‌گذرد، پس:

$$a + b \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\frac{3}{2} \Rightarrow a - \frac{\sqrt{3}}{2}b = -\frac{3}{2} \quad ② \Rightarrow a = 0, b = \sqrt{3}$$

تقسیم بندی محور x ها در شکل صورت سؤال اشتباه است؛ که البته تأثیری در حل مسأله ندارد.

۲۷۳ ابتدا با استفاده از رابطه $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ ضابطه تابع را

ساده می‌کنیم:

$$y = 1 + a \sin bx \cos bx = 1 + a \frac{1}{2} \sin 2bx = 1 + \frac{a}{2} \sin 2bx$$

باتوجه به نمودار، بیشترین مقدار تابع برابر $\frac{3}{2}$ است، پس:

$$1 + \frac{a}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow |a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

از طرفی دوره تناوب تابع برابر $T = \frac{2\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) = \pi$ است، پس:

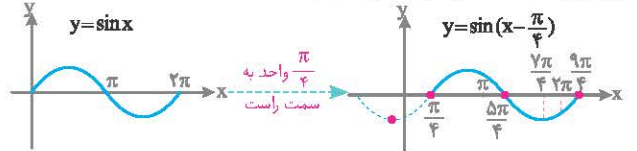
$$T = \frac{2\pi}{|2b|} \Rightarrow \pi = \frac{\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

از آن جایی که نمودار در آغاز رسم در مبدأ به طرف بالا می‌رود، پس a و b هر دو مثبت یا هر دو منفی هستند. با توجه به گزینه‌ها a و b را مثبت در نظر

می‌گیریم، پس: $a + b = 1 + 1 = 2$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 2(\frac{1}{\sqrt{3}})^2 - 1 = 2 \times \frac{1}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

۲۶۴ با توجه به قوانین انتقال داریم:



بنابراین طبق نمودار انتقال یافته، تابع $y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$ در بازه $[0, \pi]$ فقط در $x = \frac{\pi}{4}$ با محور x ها برخورد دارد.

۲۶۵ دوره تناوب توابع مثلثاتی $y = \cos(ax)$ و $y = \sin(ax)$ از رابطه

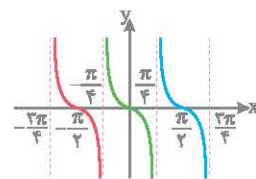
$$T = \frac{2\pi}{|a|} \text{ به دست می‌آید. حال دوره تناوب هر یک از توابع را به دست می‌آوریم:}$$

$$① T = \frac{2\pi}{|\pi|} = 2 \quad ② T = \frac{2\pi}{|\pi|} = 2 \quad ③ T = \frac{2\pi}{|2\pi|} = 1 \quad ④ T = \frac{2\pi}{|\pi|} = 2 \quad ⑤ T = \frac{2\pi}{|\pi|} = 2$$

۲۶۶ با استفاده از فرمول طلایی ضابطه f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = 1 - \cos^2 3x = \sin^2 3x = \frac{1 - \cos 6x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 6x$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{|6|} = \frac{\pi}{3}$$



۲۶۷ در شکل مقابل، نمودار تابع

$$y = -\frac{1}{3} \tan 2x \text{ در بازه } (-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$$

رسم شده است. با توجه به گزینه‌ها، تابع در بازه $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ اکیداً نزولی و دوره تناوب آن

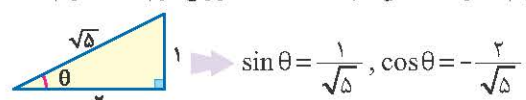
برابر $\frac{\pi}{2}$ است.

۲۶۸ با توجه به شکل، امتداد زاویه θ محور تناوب را در $0/5$ قطع کرده

است، پس $\tan \theta = -\frac{1}{3}$ است. از طرفی:

$$\cos(\frac{3\pi}{4} - 2\theta) = -\sin 2\theta = -2 \sin \theta \cos \theta$$

حال برای به دست آوردن $\sin \theta$ و $\cos \theta$ یک مثلث قائم الزاویه با زاویه θ در نظر می‌گیریم. با توجه به این انتهای کمان θ در ربع دوم است داریم:



بنابراین حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$-2 \sin \theta \cos \theta = -2(\frac{1}{\sqrt{5}})(-\frac{2}{\sqrt{5}}) = \frac{4}{5}$$

۲۶۹ با توجه به شکل صورت تست نکات زیر استخراج می‌شود:

① بیشترین مقدار تابع برابر ۲ است که با قرار دادن ۱ به جای $\sin(b\pi x)$ به

دست می‌آید، بنابراین $|a| = 2$ است.

② دوره تناوب تابع برابر ۶ است:

$$T = \frac{2\pi}{|b\pi|} \Rightarrow 6 = \frac{2}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{3}$$

③ چون نمودار در آغاز رسم در مبدأ به طرف بالا می‌رود، باید a و b هر دو مثبت

یا هر دو منفی باشند. با توجه به گزینه‌ها a و b را مثبت در نظر می‌گیریم، پس:

$$a + b = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

301 | چون تابع f در $x = -1$ حد دارد، پس حد چپ و حد راست آن در $x = -1$ باهم برابر هستند:

1 $x \rightarrow (-1)^- \Rightarrow x < -1 \Rightarrow [x] = -2, |x| = -x$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 + [x]}{x - (-1)^- |x|} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 - 2}{x - (-1) - (-x)} = \frac{1 - 2}{1} = -1$

2 $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (2x + a) = -2 + a$

$-2 + a = -1 \Rightarrow a = 2$ بنابراین خواهیم داشت:

302 | چون حد تابع f در $x = -1$ برابر Δ است، پس حد راست و حد چپ تابع نیز برابر Δ هستند:

1 $x \rightarrow (-1)^+ \Rightarrow x > -1 \Rightarrow [x] = -1, |x| = -x$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} ((b+1)[x] + |x|) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (-(b+1) - x)$

$= -(b+1) - (-1) = -b - 1 + 1 = -b \Rightarrow -b = \Delta \Rightarrow b = -\Delta$

2 $x \rightarrow (-1)^- \Rightarrow x < -1 \Rightarrow [x] = -2$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (a[x] + 2bx - 1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (-2a + 2(-\Delta)x - 1)$

$= -2a - 1 - 2(-1)\Delta = -2a + 2\Delta - 1 = \Delta \Rightarrow -2a = \Delta - 2\Delta + 1 \Rightarrow -2a = -\Delta + 1 \Rightarrow a = \frac{\Delta - 1}{2}$

303 | با جای‌گذاری $x = -2$ در کسر داده شده به ابهام $\frac{0}{0}$ می‌رسیم. پس:

$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{2x^2 + \Delta x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-2}{2x+1}$

$= \frac{-2-2}{2(-2)+1} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$

می‌توانستیم از قاعده هوییتال استفاده کنیم:

$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{2x^2 + \Delta x + 2} \stackrel{Hop}{=} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x}{4x + \Delta} = \frac{2(-2)}{4(-2) + \Delta} = \frac{-4}{-8 + \Delta} = \frac{4}{3}$

304 | طول نقطه تو خالی در نمودار تابع f ، ریشه مشترک صورت و مخرج کسر است. چون $x = 2$ ریشه مشترک صورت و مخرج کسر تابع f است، پس

$a = 2$ است. از طرفی با توجه به نمودار:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$

$= \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow a + b = 2 + 4 = 6$

305 | وقتی $x \rightarrow 2^+$ ، مقدار $[x]$ برابر 2 است، پس:

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 [x] - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x-2)(x+2)}{x-2}$

$= \lim_{x \rightarrow 2^+} 2(x+2) = 2 \times (4) = 8$

306 | عبارت داخل قدرمطلق را تجزیه می‌کنیم تا بتوانیم آن را تعیین علامت کنیم و قدرمطلق را برداریم:

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x^2 - 5x + 6|}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|(x-2)(x-3)|}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2| |x-3|}{x(x-2)}$

$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x-2)(x-3)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x-3)}{x} = \frac{-(2-3)}{2} = \frac{1}{2}$

296 | با توجه به ضابطه توابع f و g ، داریم:

1 $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 1 + x - 2) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 6 + 2x) = 9 \end{cases}$

2 $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x + 1}{x - 2} = -4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 6}{2x} = \frac{7}{2} \end{cases}$

3 $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 1 - (x - 2)) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 6 - (2x)) = 5 \end{cases}$

4 $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ((2x + 1) \cdot (x - 2)) = -4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ((x^2 + 6) \cdot (2x)) = 14 \end{cases}$

297 | با توجه به تساوی داده شده داریم:

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{f(x) - 3} = 1 \Rightarrow \frac{2}{\lim_{x \rightarrow 2} f(x) - 3} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) - 3 = 2$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{f(x) + 4} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} f(x) + 4} = \sqrt{5 + 4} = 3$

298 | وقتی $x \rightarrow 0^-$ داریم:

$x \rightarrow 0^- \Rightarrow x < 0 \Rightarrow [x] = -1, |x| = -x$

حال حاصل حد را محاسبه می‌کنیم:

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f[x] - |x|}{|x| - [x]} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(-1) - (-x)}{(-x) - (-1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-4 + x}{-x + 1} = \frac{-4}{1} = -4$

299 | برای این که تابع در $x = 0$ دارای حد باشد، باید حد راست و حد چپ آن در این نقطه برابر باشند:

1 $x \rightarrow 0^+ \Rightarrow x > 0 \Rightarrow |x| = x, [x] = 0$

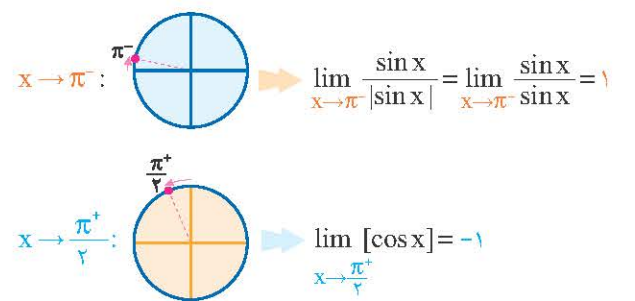
$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{a(x)}{x} - f(0) \right) = a$

2 $x \rightarrow 0^- \Rightarrow x < 0 \Rightarrow |x| = -x, [x] = -1$

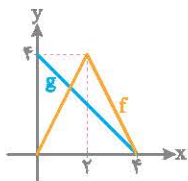
$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{a(-x)}{x} - f(-1) \right) = -a + 4$

بنابراین از 1 و 2 داریم: $a = -a + 4 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$

300 | با کمک دایره مثلثاتی، حاصل هریک از حدها را به دست می‌آوریم:



بنابراین حاصل عبارت خواسته شده برابر $0 = (-1) + 1$ است.



۳۴۵ مطابق شکل شیب خط مماس بر نمودار تابع f و g را در نقطه $x=1$ به ترتیب برابر 2 و $-\frac{1}{2}$ است، پس $f'(1)=2$ و $g'(1)=-\frac{1}{2}$ بوده و در نتیجه:

$$(2f+2g)'(1) = 2f'(1) + 2g'(1) = 2(2) + 2(-\frac{1}{2}) = 4$$

۳۴۶ نقطه $A(-2, -3)$ روی منحنی است. پس $f(-2) = -3$ است. از طرفی دیگر شیب خط مماس بر منحنی در نقطه‌ای به طول -2 برابر با $\frac{1}{4}$ است. بنابراین: $f'(-2) = \frac{1}{4}$ اگر $f(x) = x^2 f'(x)$ باشد خواهیم داشت:

$$y' = 2x \times f(x) + f'(x) \times x^2 \Rightarrow y'(-2) = -4 \times f(-2) + f'(-2) \times 4$$

$$\Rightarrow y'(-2) = -4(-3) + \frac{1}{4}(4) = 12 + 1 = 13$$

۳۴۷ مشتق تابع $f(x) = (2x^2 - 7)(2x - 5)^2$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = (4x)(2x - 5)^2 + 2 \times 2x \times (2x - 5)(2) = (4x)(2x - 5)^2 + 8x(2x - 5)$$

$$\xrightarrow{x=2} f'(2) = (8)(-1)^2 + 16(-1) = 8 - 16 = -8$$

۳۴۸ حاصل عبارت خواسته شده برابر مشتق $(f \cdot g)(x)$ در $x=2$ است، پس:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x + \sqrt{x^2 - x})^2 (x - \sqrt{x^2 - x})^2$$

$$= ((x + \sqrt{x^2 - x})(x - \sqrt{x^2 - x}))^2 = (x^2 - (x^2 - x))^2 = x^2$$

$$\Rightarrow f'(x)g(x) + g'(x)f(x) = 2x^2 \Rightarrow f'(2)g(2) + g'(2)f(2) = 12$$

۳۴۹ حد خواسته شده همان مشتق تابع f در $x = \frac{1}{4}$ است. بنابراین:

$$f(x) = \frac{-x-1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{(-1)\sqrt{x} - (-\frac{1}{2\sqrt{x}})(-x-1)}{(\sqrt{x})^2}$$

به ازای $x = \frac{1}{4}$ حاصل $\sqrt{x} = \frac{1}{2}$ برابر است. بنابراین:

$$\Rightarrow f'(\frac{1}{4}) = \frac{(-1)\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\frac{1}{4} + 1)}{\frac{1}{4}} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{5}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = 3$$

۳۵۰ اگر ضابطه f قبل از مشتق‌گیری ساده شود، بهتر است ابتدا آن را ساده کنیم و سپس مشتق بگیریم. در صورت کسر از \sqrt{x} فاکتور گرفته و ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم، سپس $f'(4)$ را به دست می‌آوریم:

$$m_D < m_B < m_A < m_C$$

۳۴۳ حد داده شده، برابر مشتق تابع f در $x=1$ یعنی $f'(1)$ است. از طرفی $f'(1)$ برابر شیب خط مماس بر منحنی f در $x=1$ است؛ بنابراین:

$$f(x) = \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 0$$

$$\Rightarrow f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

۳۵۱ اگر $f(a) = 0$ باشد و $y = f(x) \times g(x)$ باشد آنگاه:

$$y'(a) = f'(a) \times g(a)$$

از آن جایی که عبارت $(x^2 - x - 2)$ به ازای $x = -1$ صفر می‌شود، می‌توانیم فقط از عامل صفر شونده یعنی $(x^2 - x - 2)$ مشتق بگیریم و $x = -1$ را در بقیه عامل‌ها جای‌گذاری کنیم:

$$f(x) = (x^2 - x - 2)\sqrt{x^2 - 7x} \xrightarrow{x=-1} f'(x) = (2x-1)\sqrt{x^2-7x}$$

$$\Rightarrow f'(-1) = (-2-1)\sqrt{(-1)^2-7(-1)} = -3 \times \sqrt{8} = -3 \times 2\sqrt{2} = -6\sqrt{2}$$

۳۴۰ نمودار تابع f از نقطه $(2, 1)$ می‌گذرد، پس:

$$f(2) = 1 \Rightarrow \frac{2a + 1 + \sqrt{4 \times (2)^2 + 9}}{2(2) - 2} = 1 \Rightarrow \frac{2a + 1 + 5}{4} = 1$$

حال حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 1 + \sqrt{4x^2 + 9}}{2x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + \sqrt{4x^2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 2x}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 2x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

۳۴۱ حاصل حد تابع در $-\infty$ برابر -1 است، پس درجهٔ بی‌توان صورت و مخرج کسر با هم برابر است، بنابراین $n = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax}{2x - \sqrt{4x^2 + 15x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax}{2x - |2x|} \xrightarrow{|2x| = -2x} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax}{2x + 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax}{4x} = \frac{a}{4} = -1 \Rightarrow a = -4 \Rightarrow f(x) = \frac{-4x + 15}{2x - \sqrt{4x^2 + 15x}}$$

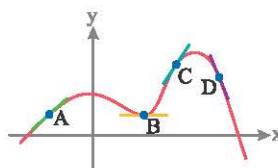
حال برای محاسبهٔ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ، با جای‌گذاری $x=2$ به ابهام $\frac{0}{0}$ می‌رسیم. بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-4x + 15}{2x - \sqrt{4x^2 + 15x}} \times \frac{2x + \sqrt{4x^2 + 15x}}{2x + \sqrt{4x^2 + 15x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-4(x-2)}{(-4x+15)(2x+\sqrt{4x^2+15x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-4(x-2)}{9x^2 - (4x^2 + 15x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-4(x-2)}{\Delta x(x-2)}$$

$$= \frac{-(9 + \sqrt{36 + 45})}{3} = \frac{-(9 + 9)}{3} = -6$$

Differentiation



۳۴۲ خط مماس بر نمودار را در نقاط نام‌گذاری شده رسم می‌کنیم، با توجه به نمودار شیب خط مماس در نقطه D منفی و در نقطه B صفر است.

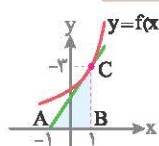
از طرفی شیب خط مماس بر نمودار در نقطه C بیشتر از نقطه A است؛ بنابراین:

و در نقطه B صفر است.

از طرفی شیب خط مماس بر نمودار در نقطه C بیشتر از نقطه A است؛ بنابراین:

بنابراین:

$$m_D < m_B < m_A < m_C$$



۳۴۳ حد داده شده، برابر مشتق تابع f در $x=1$ یعنی $f'(1)$ است. از طرفی $f'(1)$ برابر شیب خط مماس بر منحنی f در $x=1$ است؛ بنابراین:

بنابراین:

$$f'(1) = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{2} = 1$$

$$f'(1) = \text{شیب خط مماس} = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{2} = 1$$

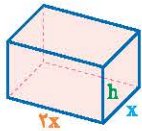
۳۴۴ در صورت کسر $f(4)$ را اضافه و کم می‌کنیم تا بتوانیم حد داده شده را به تعریف مشتق تبدیل کنیم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+2h) - f(4) + f(4) - f(4-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+2h) - f(4)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4) - f(4-h)}{h}$$

$$= 2 \lim_{2h \rightarrow 0} \frac{f(4+2h) - f(4)}{2h} + \lim_{-h \rightarrow 0} \frac{f(4-h) - f(4)}{-h}$$

$$= 2f'(4) + f'(4) = 4f'(4) = 4 \times \frac{3}{2} = 6$$



۴۲۴ تابع هزینه را به صورت زیر می نویسیم:

$$C(x) = 150(x)(2x) + 160(2xh + 2(x)h) = 300x^2 + 960xh$$

حال از آن جایی که حجم مخزن برابر $10m^3$ است، داریم:

$$V = 10 \Rightarrow x(2x)h = 10 \Rightarrow h = \frac{5}{x^2}$$

با جای گذاری ۲ در ۱ تابع هزینه را برحسب x می نویسیم:

$$C(x) = 300x^2 + 960x\left(\frac{5}{x^2}\right) = 300x^2 + \frac{4800}{x}$$

حال برای به دست آوردن مینیمم تابع، مشتق آن را برابر صفر قرار می دهیم:

$$C'(x) = 0 \Rightarrow 600x - \frac{4800}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{600x^3 - 4800}{x^2} = 0$$

$$600x^3 - 4800 = 0 \Rightarrow x^3 = \frac{4800}{600} = 8 \Rightarrow x = 2(m)$$

Count without Counting

۱۴۲۵ منظور از اتومبیل غیر برقی، بنزینی یا گازوئیلی است. بنابراین طبق اصل ضرب تعداد انواع اتومبیل برابر است با:

حجم موتور رنگ مدل
 $4 \times 8 \times 3 \times 1 \times 2 = 192$
 غیر برقی اتومات

۴۲۶ مسیرهایی که از A به B می توان رفت به صورت $(A \rightarrow C, C \rightarrow B)$

یا به صورت $(A \rightarrow D, D \rightarrow B)$ است. بنابراین تعداد راه های ممکن طبق

$$3 \times 1 + 2 \times 4 = 11$$

اصل ضرب و اصل جمع برابر است با:

۱۴۲۷ رقم ۷ را کنار می گذاریم یعنی ارقام $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$ را در

اختیار داریم و چون صحبتی از غیر مجاز بودن تکرار به میان نیامده بنابراین

تکرار ارقام مجاز است:

$$8 \times 9 \times 5 = 360$$

همه به جز صفر $\{0, 2, 4, 6, 8\}$

۳۴۲۸ ارقامی که در اختیار داریم $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ و رقم سمت چپ «۱»

$$4 \times 4 \times 3 \times 2 = 96$$

نمی تواند باشد:

۱۴۲۹ تعداد کل کدهای سه رقمی را به دست می آوریم و تعداد کدهایی که هر

سه رقم آن ها زوج است را کنار می گذاریم:

$$6 \times 6 \times 6 - 4 \times 4 \times 4 = 152$$

۴۴۳۰ ارقام فرد عبارتند از $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ بنابراین تعداد پلاک ها برابر است با:

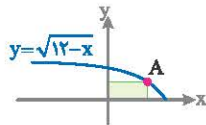
$$5 \times 4 \times 3 \times 4 \times 2 \times 1 = 480$$

۱۴۳۱ برای طبقه اول هر یک از سه رنگ را می توان استفاده کرد ولی برای

سایر طبقه ها تنها ۲ انتخاب وجود دارد چون با طبقه قبل خود نباید هم رنگ

$$3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 48$$

باشند:



۳۴۲۰ مطابق شکل، نقطه $A(x, \sqrt{12-x})$

یک رأس مستطیل است. بنابراین مساحت

مستطیل برابر است با: $S(x) = x\sqrt{12-x}$

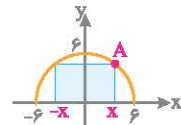
حال برای به دست آوردن بیشترین مساحت مستطیل، باید مشتق $S(x)$ را

برابر صفر قرار دهیم، اما قبل از آن بهتر است تابع مساحت را کمی ساده کنیم و

سپس مشتق بگیریم، بنابراین x را به زیر رادیکال منتقل می کنیم:

$$S(x) = \sqrt{12x^2 - x^3} \Rightarrow S'(x) = \frac{24x - 3x^2}{2\sqrt{12x^2 - x^3}} = 0 \Rightarrow 24x - 3x^2 = 0$$

$$x = 8 \Rightarrow S_{max} = 8\sqrt{12-8} = 8 \times 2 = 16$$



۴۲۱ معادله نیم دایره به مرکز مبدأ و شعاع ۶ به

صورت $y = \sqrt{36-x^2}$ است. مطابق شکل نقطه

$A(x, \sqrt{36-x^2})$ یک رأس مستطیل است. بنابراین

مساحت مستطیل برابر است با: $S(x) = 2x\sqrt{36-x^2}$

حال برای به دست آوردن بیشترین مساحت مستطیل، باید مشتق $S(x)$ را

برابر صفر قرار دهیم، اما قبل از آن بهتر است تابع مساحت را کمی ساده کنیم و

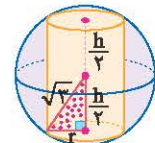
سپس مشتق بگیریم، بنابراین x را به زیر رادیکال منتقل می کنیم:

$$S(x) = 2\sqrt{36x^2 - x^4} \Rightarrow S'(x) = \frac{72x - 4x^3}{\sqrt{36x^2 - x^4}} = 0 \Rightarrow 72x - 4x^3 = 0$$

$$x^2 = 18 \Rightarrow x = \sqrt{18} \Rightarrow S_{max} = 2\sqrt{18}\sqrt{36-18} = 2 \times 18 = 36$$

۱۴۲۲ اگر ارتفاع استوانه برابر h و شعاع قاعده آن r باشد، طبق رابطه فیثاغورس

در مثلث مشخص شده داریم:



$$\left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2 = (\sqrt{3})^2 \Rightarrow \frac{h^2}{4} + r^2 = 3$$

از طرفی حجم استوانه برابر با $V = \pi r^2 h$ است. در فرمول حجم، به جای r^2

از رابطه ۱ عبارت $3 - \frac{h^2}{4}$ را قرار می دهیم و سپس از تابع به دست آمده

نسبت به h مشتق می گیریم:

$$V(h) = \pi\left(3 - \frac{h^2}{4}\right)h = 3\pi h - \pi \frac{h^3}{4} \Rightarrow V'(h) = 3\pi - \frac{3\pi h^2}{4} = 0$$

$$3\pi - \frac{3\pi h^2}{4} = 0 \Rightarrow h^2 = 4 \Rightarrow h = 2$$

۲۴۲۳ نقطه ای از ساحل که علی پیاده می شود را، D می نامیم. اگر x مسافت

طی شده با سرعت v و در مدت زمان t باشد، طبق رابطه $x = vt$ یا همان

$t = \frac{x}{v}$ داریم: زمان پارو زدن مسیر P تا D $t_1 = \frac{PD}{v} = \frac{1}{v}\sqrt{x^2+9}$

زمان پیاده روی مسیر D تا B $t_2 = \frac{BD}{v} = \frac{\lambda-x}{v} = 2 - \frac{1}{v}x$

زمان کل رسیدن از P به B برابر با $t_1 + t_2$ یعنی $t = \frac{1}{v}\sqrt{x^2+9} + 2 - \frac{1}{v}x$ است.

برای این که ببینیم مینیمم مطلق این تابع به ازای چه مقدار x به دست می آید،

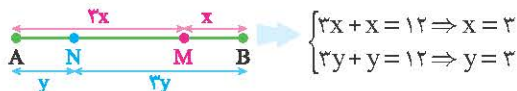
معادله $t' = 0$ را حل می کنیم:

$$\frac{x}{2\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{v} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{v} \Rightarrow 2x = \sqrt{x^2+9}$$

$$4x^2 = x^2 + 9 \Rightarrow x = \sqrt{3}$$

۴۵۴۲ پاره خط‌ها را بر حسب دو پارامتر مختلف نشان می‌دهیم و به روی شکل

$$\frac{MA}{MB} = \frac{BN}{AN} = 3 \Rightarrow \begin{cases} MA = 3x \\ MB = x \end{cases}, \begin{cases} BN = 3y \\ AN = y \end{cases}$$



حال با به دست آمدن مقادیر x و y طول پاره خط MN به صورت زیر قابل محاسبه است:

۴۵۴۳ می‌دانیم نسبت ارتفاع‌ها با نسبت اضلاع رابطه عکس دارد. بنابراین

کافیست به جای $\frac{h_a}{h_b}$ نسبت $\frac{b}{a}$ و به جای $\frac{h_b}{h_c}$ نسبت $\frac{c}{b}$ را قرار دهیم:

$$\frac{h_a}{h_b} + \frac{h_b}{h_c} = \frac{b}{a} + \frac{c}{b} = \frac{3}{6} + \frac{5}{3} = \frac{3}{6} + \frac{10}{6} = \frac{13}{6}$$

۴۵۴۴ اگر در یک تست اندازه پاره خط MN نه داده شده بود و نه خواسته

شده بود، بهتر است از تالس جزء به جزء استفاده کنیم:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{x+3}{3x-1} \Rightarrow 3x^2 - x = x^2 + 4x + 3$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(2x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

غرفی

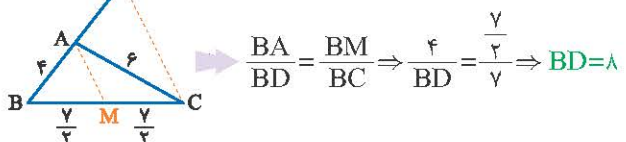
۴۵۴۷ چون MN جزء داده‌های مسئله است، باید از تالس جزء به کل

استفاده کنیم:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{3}{3+5} = \frac{6}{BC} \Rightarrow 3BC = 48 \Rightarrow BC = 16$$

۴۵۴۸ چون صحبت از دو خط موازی است به سراغ تالس می‌رویم و چون

را می‌خواهد باید از تالس جزء به کل استفاده کنیم:



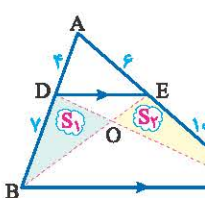
۴۵۴۹ همان طور که در شکل دیده می‌شود طول هر ۴ قطعه روی اضلاع

مثلث مشخص است، و معلوم بودن هر ۴ قطعه روی ساق‌های مثلث خبر از

عکس تالس می‌دهد [خبر آمد، خبری در راه است!] بنابراین کنترل می‌کنیم

ببینیم واقعاً خبری هست یا نه!

$$\frac{4}{7} = \frac{6}{10/5} \Rightarrow 4 \times 10 / 5 = 6 \times 7 \Rightarrow BC \parallel DE$$



پس در چهارضلعی $DECB$ قاعده‌های DE و BC موازی‌اند، یعنی این چهارضلعی دوزنقه است. بنابراین مثلث‌های رنگ شده، هم‌مساحت هستند. [در هر دوزنقه مساحت بال‌های پروانه متکی به ساقین با هم برابر است.]

نیمسازهای داخلی از هر سه ضلع مثلث به یک فاصله است، بنابراین این نقطه

از همه ساحل‌ها به یک اندازه دور

است. دقت کنید اگر نقطه‌ای دیگر

را در نظر بگیریم، ممکن است این

نقطه از یک ساحل دورتر باشد اما

در همان وضعیت به یک ساحل

دیگر نزدیک‌تر خواهد بود.



۴۵۳۸ روش استفاده شده توسط گلدباخ «استدلال استقرایی» بود، چون با

مجموعه محدودی از مشاهدات به یک نتیجه‌گیری کلی رسیده بود. [امروزه

معلوم شده این حدس درست است اما هنوز کسی نتوانسته اثبات دقیقی برای

آن ارائه دهد].

۴۵۳۹ در این روش اثبات، از استدلال استنتاجی استفاده کرده‌ایم زیرا از

اصول و قضیه‌هایی استفاده شده است که درستی آن‌ها را قبلاً پذیرفته‌ایم

[مانند اتحاد مربع دوجمله‌ای، زوج بودن یکی از دو عدد متوالی و...].

۴۵۴۰ می‌دانیم زوج نبودن به معنای فرد بودن است، بنابراین:

$$n^2 = \text{فرد} \Rightarrow n = \text{فرد} \xrightarrow{\text{عکس}} n = \text{فرد} \Rightarrow n^2 = \text{فرد}$$

یعنی اگر n زوج نباشد، آن‌گاه n^2 نیز زوج نیست.

۴۵۴۱ چون در این روش اثبات، حکم را نادرست فرض کرده‌ایم و به یک تناقض

رسیده‌ایم در واقع از روش برهان خلف برای اثبات یک حکم کلی استفاده کرده‌ایم.

۱۵۴۲ چون نسبتی داده شده و نسبتی خواسته شده، می‌توانیم از عددگذاری

استفاده کنیم. ولی مشکل این‌جاست که تناسب داده شده دارای یک سمت

مجهول و یک سمت معلوم نیست، بنابراین ابتدا آن را کمی ساده می‌کنیم:

$$\frac{x}{x+5} = \frac{y}{y+3} \xrightarrow{\text{تفضیل درمخرج}} \frac{x}{(x+5)-x} = \frac{y}{(y+3)-y}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{5}{3}$$

حال می‌توانیم فرض کنیم $x=5$ و $y=3$ است، در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{3x-y}{x+2y} = \frac{(3 \times 5) - 3}{5 + (2 \times 3)} = \frac{12}{11} = \frac{11+1}{11} = 1 + \frac{1}{11} = 1 \frac{1}{11}$$

۴۵۴۳ هر چند یک نسبت داده شده، ولی چون نسبتی خواسته نشده، نباید از

عددگذاری استفاده کرد، بنابراین از روش ضرب k استفاده می‌کنیم. یعنی:

$$\frac{x}{3} = y = z + 1 = k \Rightarrow \begin{cases} x = 3k \\ y = k \\ z = k - 1 \end{cases}$$

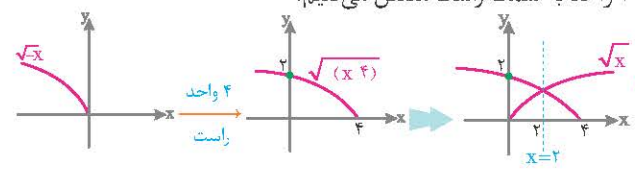
حال این مقادیر را در معادله داده شده قرار می‌دهیم تا مقدار k و در نتیجه

مقدار z به دست آید:

$$3k + 2(k) + (k-1) = 20 \Rightarrow 7k = 21 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow z = 3 - 1 = 2$$

740 ابتدا نمودار $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y قرینه کرده و سپس آن را

واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم:



با توجه به شکل، نمودار $y = \sqrt{-x+4}$ و $y = \sqrt{x}$ نسبت به خط $x=2$ تقارن دارند.

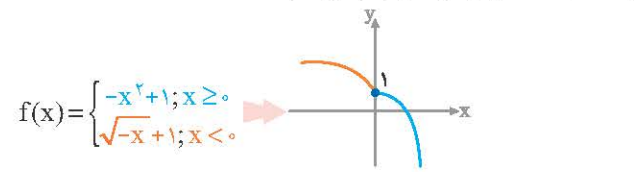
741 اگر زمانی که ماشین B به تنهایی برای تکمیل کار نیاز دارد برابر با x

باشد آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت که ماشین B در هر ساعت، $\frac{1}{x}$ کار انجام می‌دهد و بنابراین براساس شرط مسئله ماشین A در هر ساعت، $\frac{2}{x}$ کار را انجام می‌دهند. از آن جایی که هر دو باهم در 4 ساعت کار را انجام می‌دهند، حاصل جمع کار انجام شده توسط دو ماشین در یک ساعت برابر با $\frac{1}{4}$ کل کار است. یعنی:

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = 12$$

بنابراین ماشین B کل کار را در 12 ساعت و در نتیجه ماشین A کل کار را به تنهایی در 6 ساعت انجام می‌دهد.

742 ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



حال ضابطه وارون آن را به دست می‌آوریم:

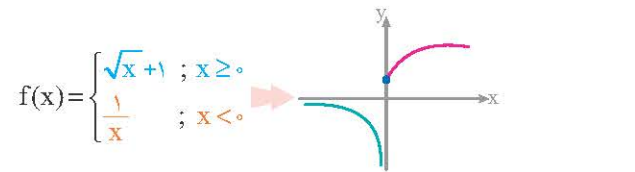
$$y = -x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = 1 - y \Rightarrow x = \pm \sqrt{1 - y} \xrightarrow{-x \geq 0} y^{-1} = \sqrt{1 - x}$$

$$y = \sqrt{-x + 1} \Rightarrow \sqrt{-x} = y - 1 \Rightarrow -x = (y - 1)^2 \Rightarrow y^{-1} = -(1 - x)^2$$

با توجه به این‌که در تابع f برد ضابطه $y = \sqrt{-x + 1}$ برابر $y > 1$ و برد ضابطه $y = -x^2 + 1$ برابر $y \leq 1$ است، پس:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & ; x \leq 1 \\ -(1-x)^2 & ; x > 1 \end{cases}$$

743 نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، تابع f یک‌به‌یک است؛ اما از آن جایی که ابتدا نزولی و سپس صعودی بوده، پس غیریک‌گنا است.

744 ابتدا دامنه تابع g را به دست می‌آوریم:

$$g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{-x^2+6x-8}} \Rightarrow -x^2+6x-8 > 0 \Rightarrow 2 < x < 4 \Rightarrow D_g = (2, 4)$$

از طرفی با توجه به نمودار $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ با دامنه $-2 \leq x \leq 4$ است. پس:

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{-2 \leq x \leq 4 \mid 2 < \frac{1}{x} + 1 < 4\}$$

$$= \{-2 \leq x \leq 4 \mid 2 < x < 6\} = (2, 4]$$

745 نمودارها در دو نقطه به طول‌های 1 و 3 متقاطع‌اند. پس این دو نقطه

در معادله $3^{Ax+B} = x^2$ صدق می‌کند:

$$I \quad x=1: 3^{A+B} = 1 \Rightarrow A+B=0$$

$$\Rightarrow A=1, B=-1$$

$$II \quad x=3: 3^{3A+B} = 3^2 \Rightarrow 3A+B=2$$

بنابراین $f(x) = 3^{x-1}$ بوده و برای مشخص کردن محل برخورد آن با محور y

$$f(0) = 3^{0-1} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

به جای x صفر قرار می‌دهیم:

746 به جای $(1+4\sqrt{6})^2$ می‌نویسیم $(\sqrt{6}+2)^2$ و داریم:

$$\log(\sqrt{6}-2) + \frac{1}{2} \log(\sqrt{6}+2)^2 = \log(\sqrt{6}-2) + \frac{2}{2} \log(\sqrt{6}+2)$$

$$= \log(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2) = \log(6-4) = \log 2 = k$$

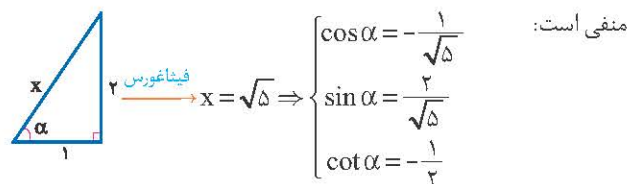
747 در صورت کسراز رابطه $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ و در مخرج کسراز

رابطه $2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = 2 \Rightarrow \frac{2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x = 2$$

$$\Rightarrow \sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \Rightarrow \sin 2x = \frac{2 \times 2}{1 + 2^2} = \frac{4}{5}$$

748 چون انتهای کمان α در ربع دوم است، پس $\sin \alpha$ مثبت و $\cos \alpha$



حال هر یک از نسبت‌های مثلثاتی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\sin\left(\frac{7\pi}{4} + \alpha\right) = \sin\left(2\pi + \frac{3\pi}{4} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \alpha\right) = -\cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{9\pi}{4} - \alpha\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\tan\left(\alpha - \frac{5\pi}{4}\right) = -\tan\left(\frac{5\pi}{4} - \alpha\right) = -\tan\left(2\pi + \frac{\pi}{4} - \alpha\right) = -\cot \alpha$$