
خرید کتاب های کنکور
با تخفیف ویژه
و
ارسال رایگان
Medabook.com
مدابوک
یک جلسه تماس تلفنی رایگان
با مشاوران رتبه برتر
برای انتخاب بهترین منابع
دبیرستان و کنکور
۰۲۱ ۲۸۴۲۵۲۱۰

فهرست مطالب
ریاضیات گسسته

فهرست مطالب	شماره صفحه
آزمون‌ها	۵
آزمون (۱) نوبت اول	۶
آزمون (۲) نوبت اول	۷
آزمون (۳) نوبت اول	۸
آزمون (۴) نوبت اول	۹
آزمون (۵) نوبت اول	۱۰
آزمون (۶) نوبت دوم	۱۱
آزمون (۷) نوبت دوم	۱۲
آزمون (۸) نوبت دوم	۱۳
آزمون (۹) نوبت دوم	۱۴
آزمون (۱۰) نوبت دوم	۱۵
آزمون (۱۱) نوبت دوم	۱۶
آزمون (۱۲) نوبت دوم	۱۷
آزمون (۱۳) نوبت دوم	۱۸
آزمون (۱۴) نوبت دوم	۱۹
آزمون (۱۵) نوبت دوم	۲۰
آزمون (۱۶) نوبت دوم	۲۱
آزمون (۱۷) نوبت دوم	۲۲
آزمون (۱۸) نوبت دوم	۲۳
آزمون (۱۹) نوبت دوم	۲۴
آزمون (۲۰) نوبت دوم	۲۶
پاسخنامه تشریحی	۲۸
خلاصه فصل‌ها	۴۸

سوالات آزمون‌های

ترم اول

و

ترم دوم

آزمـــــــون (۶) نـوبت دوم

۱ اگر $n^۲$ مضربی از ۳ باشد، نشان دهید که n نیز مضربی از ۳ است. (فصل اول) ۱

۲ چند عدد طبیعی مانند a داریم، به‌طوری که $a|۱۰۸$ و $۹|a$؟ (فصل اول) ۱

۳ اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $n|m$ ثابت کنید $a \overset{n}{\equiv} b$. (فصل اول) ۱

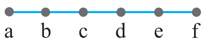
۴ آیا می‌توان یک کیسهٔ ۱۹ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۴ کیلویی وزن کرد؟ (فصل اول) ۱

۵ دو مجموعهٔ $V(G)$ و $E(G)$ به صورت زیر داده شده‌اند. با توجه به آن‌ها شکل گراف موردنظر را رسم کنید. (فصل دوم) ۱/۵

$$V(G)=\{v_۱,v_۲,...,v_۶\}$$
$$E(G)=\{v_۱v_۴,v_۲v_۵,v_۶v_۱,v_۵v_۱\}$$

۶ گرافی را مشخص کنید که عدد احاطه‌گری آن، $\left[\dfrac{n}{\Delta+۱}\right]$ نباشد. (فصل دوم) ۲

۷ در گراف شکل زیر، چند مجموعهٔ ۴ عضوی می‌توان نوشت که احاطه‌گر نباشد؟ (فصل دوم) ۲



۸ در گراف $C_۶$ عدد احاطه‌گری را به‌دست آورید. (فصل دوم) ۲

۹ با حروف کلمهٔ انتخابات چند کلمهٔ ۸ حرفی می‌توان نوشت که حرف‌های «ت» کنار هم باشند؟ (فصل سوم) ۱

۱۰ متعامد بودن دو مربع لاتین داده شده را بررسی کنید. (فصل سوم) ۱/۲۵

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

۱۱ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله زیر را به‌دست آورید. (فصل سوم) ۲/۲۵

$$x_۱+\sqrt{x_۲}+x_۳+x_۴=۳ \qquad x_i \geq ۰ \ ; \ ۱ \leq i \leq ۴$$

۱۲ چند عدد طبیعی مانند n وجود دارد، به‌طوری که $۱ \leq n \leq ۳۵۰$ و بر هیچ‌یک از اعداد ۴، ۵ و ۶ بخش‌پذیر نباشد؟ (فصل سوم) ۲/۵

۱۳ ثابت کنید در بین هر ۳۶۸ نفر حداقل دو نفر هستند که در یک روز متولد شده‌اند؟ (فصل سوم) ۱/۵

آزمـــــــون (۷) نـوبت دوم

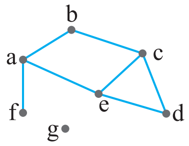
۱ اگر a و b اعداد حقیقی باشند و $ab < ۰$، ثابت کنید: $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \leq -۲$. (فصل اول) ۰/۷۵

۲ ثابت کنید حاصل‌ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است. (فصل اول) ۰/۷۵

۳ اگر a عددی طبیعی باشد و دو عدد $(۹k+۷)$ و $(۷k+۶)$ را عاد کند، ثابت کنید: $a=۱$ یا $a=۵$. (فصل اول) ۱

۴ در یک رستوران فقط دو نوع غذا، قورمه‌سبزی و قیمه وجود دارد. اگر ۵ نفر وارد این رستوران شوند به چند طریق می‌توانند سفارش غذا بدهند؟ (هر نفر فقط یک پرس غذا میل می‌کند.) (فصل اول) ۱

۵ گراف G را درنظر بگیرید. (فصل دوم) ۱/۵



الف) مجموعهٔ $V(G)$ و $E(G)$ را بنویسید.

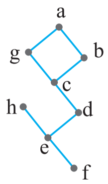
ب) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید.

پ) مجموعهٔ همسایه‌های رأس‌های f و g و e را بنویسید.

ت) اگر $N_G(x) = \{a,c\}$، آنگاه x کدام رأس است؟

۶ اگر برای گراف G داشته باشیم $\Upsilon(G)=۱$، در این صورت به چه ویژگی‌هایی از گراف G می‌توان پی برد؟($\Delta(G)$، حداقل و حداکثر تعداد یال‌های را که گراف G می‌تواند داشته باشد، مشخص کنید.) (فصل دوم) ۲

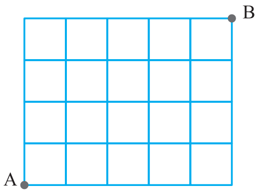
۷ عدد احاطه‌گری شکل مقابل را مشخص کنید. (فصل دوم) ۲



۸ عدد احاطه‌گری $P_۵$ را پیدا کنید. (فصل دوم) ۲

۹ دو مربع لاتین ۵×۵ بنویسید. (فصل سوم) ۱/۵

۱۰ چند مسیر از A به B وجود دارد، به‌طوری که فقط مجاز باشیم به سمت راست یا بالا حرکت کنیم؟ (فصل سوم) ۰/۷۵



۱۱ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ زیر را به‌دست آورید. (فصل سوم) ۲/۲۵

$x_۱ + ۳x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۱۱ \qquad x_i \geq ۰ ، ۱ \leq i \leq ۵$

۱۲ چه تعداد تابع مانند $f: A \longrightarrow B$ می‌توان تعریف کرد، اگر بدانیم $|A| = ۵$ و $|B| = ۴$ است؟ چه تعداد از این توابع یک‌به‌یک هستند؟ (فصل سوم) ۱

۱۳ اگر یک قفل رمزدار شامل ۴ رقم از صفر تا ۹ باشد و بدانیم که رمز بسته شده روی قفل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۸ را شامل می‌شود و امتحان کردن هر رمز ۴ رقمی ۵ ثانیه طول می‌کشد، حداکثر زمانی که لازم است تا این قفل باز شود، چند ثانیه است؟ (فصل سوم) ۲

۱۴ ثابت کنید اگر در یک دبیرستان ۵۰۵ دانش‌آموز مشغول تحصیل باشند، لااقل ۷ نفر از آن‌ها روز و ماه تولدشان یکسان است. (فصل سوم) ۱/۵

آزمـــــون (۵) نـوبت اول

۱ ثابت کنید حاصل‌ضرب سه عدد متوالی همراه بر ۳ بخش‌پذیر است. (فصل اول) ۲

۲ اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از استدلال بازگشتی، درستی رابطهٔ روبه‌رو را بررسی کنید: $a^۲+۱\geq b(۲-b)$ (فصل اول) ۱/۵

۳ اگر $a|b$ و $a|c$، نشان دهید $a|mb\pm nc$. (فصل اول) ۱/۵

۴ ثابت کنید اگر n عدد صحیح و $n^۲$ فرد باشد، n نیز فرد است. (فصل اول) ۱/۵

۵ اگر $d=(a-۵,a^۲-۶a+۳)$ و $a\in\mathbb{Z}$ باشد، آنگاه d را پیدا کنید. (فصل اول) ۱/۷۵

۶ اگر در یک تقسیم ۱۴۰ واحد به مقسوم، اضافه و ۳ واحد از مقسوم‌علیه کم کنیم، از باقی‌مانده، ۷ واحد کم می‌شود و خارج قسمت تغییر نمی‌کند. خارج قسمت را به‌دست آورید. (فصل اول) ۱/۷۵

۷ باقی‌ماندهٔ تقسیم $A=۱!+۲!+۳!+\dots+۵۰۰!$ را بر ۱۰ به‌دست آورید. (فصل اول) ۱/۵

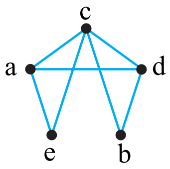
۸ رقم یکان $۳^{۲۵}+۷^{۷۳}$ را محاسبه کنید. (فصل اول) ۲

۹ ثابت کنید هرگاه عددی دو عدد را بشمارد آنگاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد. $(a|b, a|c\Rightarrow a|b\pm c)$ (فصل اول) ۱/۵

۱۰ عدد $\overline{۲۴۳۵a۲}$ بر عدد ۱۱ بخش‌پذیر است. a را پیدا کنید. (فصل اول) ۱/۵

۱۱ الف) مسیر در گراف را تعریف کنید. (فصل دوم) ۲

ب) یک مسیر به طول ۳ از a به b در گراف مقابل بنویسید.



۱۲ در گراف ۳- منتظم از مرتبهٔ ۶، چند یال اضافه کنیم تا گراف کامل از همین مرتبه به‌دست آید؟ (فصل دوم) ۱/۵

آزمـــــــون (۲۰) نـوبت دوم(هماهنگ کشوری شهریور ماه سال ۱۳۹۸)

۱ **درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.** ۰/۵

الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است. درست نادرست

ب) برای هر عدد طبیعی n بزرگتر از ۱، عدد $۲^n -۱$ اول است. درست نادرست

---

۲ **جاهای خالی را پر کنید.** ۱/۵

الف) $[a،b]=c$ اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشند:

۱) $a|c، b|c$

۲) .... $\forall m>۰،$

ب) گراف G را .... می‌نامیم هر گاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.

ج) مقدار $\gamma(C_n)$ به ازای هر عدد طبیعی $n>۲$ برابر است با: ....

د) هر گاه $(kn+۱)$ کبوتر یا بیشتر در .... لانه قرار بگیرند، در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل .... کبوتر در آن قرار گرفته است.

---

۳ **برای هر سه عدد حقیقی x,y,z ثابت کنید:** $x^۲+y^۲+z^۲ \geq xy+yz+xz$ ۱/۵

---

۴ **اگر باقی‌مانده تقسیم a بر دو عدد ۵,۶ به ترتیب ۲,۳ باشد؛ باقی‌مانده تقسیم عدد a را بر ۳۰ بیابید.** ۱/۵

---

۵ **باقی‌مانده تقسیم $۱۹+(۲۷)^۷$ را بر ۱۳ بیابید.** ۱/۵

---

۶ **با تبدیل معادله سیاله خطی $۲۰۰۰x+۵۰۰۰y=۲۹۰۰۰$ به معادله هم‌نهشتی و حل آن، جواب‌های عمومی این معادله را بیابید.** ۱/۵

---

۷ **گراف G با مجموعه راس‌های $V=\{a,b,c,d,e,f\}$ و مجموعه یال‌های زیر را در نظر بگیرید:** ۲

$E=\{ab,bc,cd,ed,ae,cf,ef\}$

الف) نمودار گراف را رسم کنید.

ب) $N_G[b]$ را مشخص کنید.

ج) یک مسیر به طول ۵ از b به d بنویسید.

---

۸ **یک گراف ۵ راسی غیرتهی $k-$منتظم رسم کنید به طوری که:** ۱

الف) k بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

ب) k کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

---

۹ **الف) گراف $P_۸$ را رسم کنید.** ۱/۵

ب) یک $\gamma-$ مجموعه از آن را مشخص کنید.

ج) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۴ عضوی از آن را مشخص نمایید.

پاسخ‌نامه تشریحی

ریاضیات گسسته — پاسخ‌نامه آزمون (۱)

۱

بله، دو عدد فرد را $2k+1$ و $2k'+1$ فرض می‌کنیم که داریم:

$$(2k+1)+(2k'+1)=(2k+2k')+2=2\underbrace{(k+k'+1)}_{q}=2q$$

که $2q$، عددی زوج است.

۲

خیر، زیرا به عنوان مثال $3\times4 \mid 6$ ولی $3\nmid 6$ و $4\nmid 6$

۳

فرض کنیم $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}=a$ عددی گویا باشد، پس داریم:

$$1+\sqrt{2}=a^3 \Rightarrow \sqrt{2}=a^3-1$$

با توجه به آنکه a^3-1 عددی گویا است، پس $\sqrt{2}$ نیز گویا است که این خلاف فرض است، پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

۴

$$xy\le\frac{x^2+y^2}{2}\Leftrightarrow 2xy\le x^2+y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2xy\ge 0\Leftrightarrow (x-y)^2\ge 0$$

عبارت فوق همواره برقرار است، پس حکم درست است.

۵

$$3^9=3^5\times3^4 \xrightarrow{q=3^4} 3^5 \mid 3^9$$

$$a^n=a^{n-m}\times a^m \xrightarrow{q=a^{n-m}} a^m \mid a^n$$

۶

$$a\mid b\Rightarrow |a|\mid b$$

$$a\mid a\Rightarrow |a|\mid a$$

اگر برای هر $m>0$ داشته باشیم $m\mid a$ و $m\mid b$ در این صورت خواهیم داشت:

$$m\mid a\Rightarrow |m|\le|a| \xrightarrow{m>0} m\le|a|$$

۷

$$\left.\begin{array}{l}A=39q+17\\ B=39q'+23\end{array}\right\}\Rightarrow A-B=39(q-q')-6=39(q-q')-39+33$$

$$\Rightarrow A-B=39\underbrace{(q-q'-1)}_{q''}+33\Rightarrow A-B=39q''+33$$

$$\Rightarrow \text{باقی مانده}=r=33$$

۸

$$4x\overset{5}{\equiv}17\Rightarrow 4x\overset{5}{\equiv}2$$

$$\Rightarrow 4x\overset{5}{\equiv}2\times5+2\overset{5}{\equiv}12\xrightarrow{\div 4}x\overset{\frac{5}{(5,4)}}{\equiv}3\Rightarrow x=5k+3$$

۹

$$3a-5\overset{10}{\equiv}4a-7\Rightarrow -5+7\overset{10}{\equiv}4a-3a$$

$$\Rightarrow a\overset{10}{\equiv}2\xrightarrow[10]{\times 9}9a\overset{10}{\equiv}18\Rightarrow 9a+6\overset{10}{\equiv}24\ ,\ 24\overset{10}{\equiv}4$$

$$\Rightarrow 9a+6\equiv4\Rightarrow r=4$$

۱۰

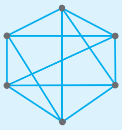
$$2^6\overset{7}{\equiv}1\Rightarrow\left(2^6\right)^5\overset{7}{\equiv}(1)^5\Rightarrow 2^{30}\overset{7}{\equiv}1\xrightarrow{\times 2}2^{31}\overset{7}{\equiv}2$$

$$3^3\overset{7}{\equiv}6\overset{7}{\equiv}-1\Rightarrow\left(3^3\right)^{10}\overset{7}{\equiv}(-1)^{10}\xrightarrow{\times 3}3^{31}\overset{7}{\equiv}3$$

$$4^3\overset{7}{\equiv}1\Rightarrow(4^3)^{10}\overset{7}{\equiv}(1)^{10}\xrightarrow{\times 4}4^{31}\overset{7}{\equiv}4$$

$$2^{31}+3^{31}+4^{31}\overset{7}{\equiv}2+3+4\overset{7}{\equiv}2$$

۱۱



۱۲

$$\binom{p}{2}=21\Rightarrow\frac{p(p-1)}{2}=21\Rightarrow p(p-1)=42\Rightarrow p=7$$

پس درجه هر رأس گراف ۶ است.

۱۳

$$4p=2q\Rightarrow q=2p$$

$$q+12=\binom{p}{2}\Rightarrow 2p+12=\frac{p(p-1)}{2}\Rightarrow p^2-5p-24=0$$

$$\Rightarrow(p-8)(p+3)=0\Rightarrow p=8\Rightarrow q=16$$

ریاضیات گسسته — پاسخ‌نامه آزمون (۲)

۱

الف) اگر a زوج باشد $(a=2k)$، عدد بعدی $a+1=2k+1$ خواهد بود، پس داریم:

$$a(a+1)=2\underbrace{k(2k+1)}_{q}\Rightarrow 2\mid a(a+1)$$

ب) اگر a فرد باشد $(a=2k+1)$، عدد بعدی $a+1=2k+2$ است و داریم:

$$a(a+1)=(2k+1)(2k+2)=2\underbrace{(2k+1)(k+1)}_{q}\Rightarrow 2\mid a(a+1)$$

بنابراین حاصل‌ضرب هر دو عدد متوالی زوج است.

۲

خیر به عنوان مثال $7\mid 3+4$ ولی $7\nmid 3$ و $7\nmid 4$ و یا $12\mid 15-3$ ولی $12\nmid 3$ و $12\nmid 15$.

۳

$$2a^2+b^2+1\ge 2(a-ba)\Leftrightarrow a^2+a^2+b^2+1-2a+2ba\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2+(a+b)^2\ge 0$$

چون رابطهٔ فوق همواره برقرار است، پس حکم درست است.

ریاضیات گسسته پاسخ‌نامه آزمون (۷)

۱

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\le -۲ \Leftrightarrow \frac{b^۲+a^۲}{ab}\le -۲ \overset{ab<۰}{\Leftrightarrow} a^۲+b^۲+۲ab\ge ۰$$
$$\Leftrightarrow (a+b)^۲\ge ۰$$

نامعادله فوق همواره درست است، پس حکم درست است.

۲

فرض کنیم r یک عدد گویای ناصفر و x عددی گنگ باشد.

فرض خلف: فرض کنیم rx عددی گویا باشد.

$$rx\in\mathbb{Q}\Rightarrow (\frac{۱}{r})(rx)\in\mathbb{Q}\Rightarrow x\in\mathbb{Q}$$

$x\in\mathbb{Q}$ با فرض x گنگ است در تناقض است، پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

۳

$$a\,|\,۹k+۷\Rightarrow a\,|\,۷\times(۹k+۷)\Rightarrow a\,|\,۶۳k+۴۹$$
$$a\,|\,۷k+۶\Rightarrow a\,|\,۹\times(۷k+۶)\Rightarrow a\,|\,۶۳k+۵۴$$
$$\Rightarrow a\,|\,(۶۳k+۴۹)-(۶۳k+۵۴)\Rightarrow a\,|\,-۵\Rightarrow a=۱ \text{ یا } a=۵$$

۴

تعداد غذای قورمه‌سبزی را x و تعداد غذای قیمه را y در نظر می‌گیریم:

$$x+y=۵\Rightarrow x\overset{۱}{\equiv}۵\Rightarrow x=k+۵$$
$$k+۵+y=۵\Rightarrow y=-k$$
$$\left.\begin{array}{l}x\ge ۰\Rightarrow k+۵\ge ۰\Rightarrow k\ge -۵\\ y\ge ۰\Rightarrow -k\ge ۰\Rightarrow k\le ۰\end{array}\right\}\Rightarrow k=\{-۵,-۴,-۳,-۲,-۱,۰\}$$

به ۶ طریق می‌توانند سفارش غذا دهند.

۵

الف) $V(G)=\{a,b,c,d,e,f,g\}$

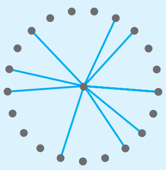
ب) $\delta(G)=۰$ و $\Delta(G)=۳$

پ) $N_G(e)=\{a,c,d\}$ ، $N_G(g)=\{\ \}$ ، $N_G(f)=\{a\}$

ت) $N_G(x)=\{a,c\}\Rightarrow x=b$

۶

این گراف در صورتی که $n\ge ۲$ باشد، باید مانند شکل مقابل باشد که یک رأس در وسط و سایر رأس‌ها به آن وصل شوند به این ترتیب $\Delta(G)=n-۱$ است که در این صورت حداکثر تعداد یال‌ها $(n-۱)$ است.

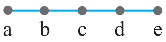


۷

با توجه به آن‌که $\gamma\ge\left\lceil\frac{۸}{۳+۱}\right\rceil=۲$ است ولی مجموعه‌های احاطه‌گر ۲ عضوی نداریم و مجموعه $\{a,c,e\}$ احاطه‌گر مینیم است پس $\gamma\le ۳$ است. پس $\gamma=۳$ است.

۸

باتوجه به آن‌که $P=۵$ و $\Delta=۲$ است، پس $\gamma\ge\left\lceil\frac{۵}{۲+۱}\right\rceil=۲$ و مجموعه $\{b,d\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است، پس $\gamma\le ۲$ بنابراین $\gamma=۲$ است.



۹

۵	۱	۲	۳	۴
۱	۲	۳	۴	۵
۴	۵	۱	۲	۳
۳	۴	۵	۱	۲
۲	۳	۴	۵	۱

۱	۲	۳	۴	۵
۵	۱	۲	۳	۴
۴	۵	۱	۲	۳
۳	۴	۵	۱	۲
۲	۳	۴	۵	۱

۱۰

اگر حرکت به سمت راست را با R و حرکت به سمت بالا را با حرف L نمایش دهیم، باید ۵ بار حرف R و ۴ بار حرف L داشته باشیم. بنابراین:

$$\frac{۹!}{۵!\,۴!}=۱۲۶$$

۱۱

$$x_۲=۰\Rightarrow x_۱+x_۳+x_۴+x_۵=۱۱\Rightarrow\binom{۱۱+۴-۱}{۴-۱}=۳۶۴$$
$$x_۲=۱\Rightarrow x_۱+x_۳+x_۴+x_۵=۸\Rightarrow\binom{۸+۴-۱}{۴-۱}=۱۶۵$$
$$x_۲=۲\Rightarrow x_۱+x_۳+x_۴+x_۵=۵\Rightarrow\binom{۵+۴-۱}{۴-۱}=۵۶$$
$$x_۲=۳\Rightarrow x_۱+x_۳+x_۴+x_۵=۲\Rightarrow\binom{۲+۴-۱}{۴-۱}=۱۰$$

پس کل حالت‌ها $۳۶۴+۱۶۵+۵۶+۱۰=۵۹۵$ است.

۱۲

تعداد توابع $=۴^۵$ ، تعداد توابع یک‌به‌یک: $۴\times۳\times۲\times۱\times۰=۰$

۱۳

اگر A تعداد رمزهای ۴ رقمی فاقد ۷ و B تعداد رمزهای ۴ رقمی فاقد ۸ باشند، داریم:

$$|A|=۹\times۹\times۹\times۹=۹^۴ \qquad |B|=۹\times۹\times۹\times۹=۹^۴$$
$$|A\cap B|=۸\times۸\times۸\times۸=۸^۴$$
$$|S|-|A\cup B|=۱۰^۴-(۹^۴+۹^۴-۸^۴)=۹۷۴$$

زمان لازم $=۹۷۴\times۵=۴۸۷۰$ ثانیه

پس ۴۸۷۰ ثانیه زمان لازم داریم.

۱۴

چون ۷ روز در هفته و ۱۲ ماه در سال داریم $۷\times۱۲=۸۴$ لانه داریم؛ چون $۵۰۵=۸۴\times۶+۱$ است، پس حداقل ۷ نفر از آن‌ها روز و ماه تولد یکسان دارند.

۱۳

دست‌کم $۲۱=۵\times۴+۱$ اسب باید داشته باشیم تا دست کم ۵ اسب هم‌رنگ داشته باشیم.

ریاضیات گسسته — پاسخ‌نامهٔ آزمون (۱۹)

۱

اگر دو عدد نامنفی باشند حکم چنین خواهد بود. $\frac{a+b}{۲}\geq\sqrt{ab}$

$$\frac{a+b}{۲}\geq\sqrt{ab}\Leftrightarrow a+b\geq۲\sqrt{ab}\Leftrightarrow a+b-۲\sqrt{ab}\geq۰\Leftrightarrow(\sqrt{a}+\sqrt{b})^۲\geq۰$$

گزاره همیشه درست

۲

الف) ۲۸ ب) ۳ راس ج) $p-۱$ د) ۱۵

۳

$$m=۱۳q_۱+۲ \qquad ۳m=۱۳(۳q_۱)+۶$$
$$n=۱۳q_۲+۹ \qquad ۵n=۱۳(۵q_۲)+۴۵ \quad\Rightarrow ۵n-۳m=۱۳q'+۳۹$$
$$\Rightarrow ۵n-۳m=۱۳q''+۰\Rightarrow r=۰$$

۴

روز اول مهر، شنبه را برابر صفر درنظر می‌گیریم ۲۹ روز در مهر و سه ماه آبان و آذر و دی و ۱۲ روز بهمن، فاصله اول مهر تا ۱۲ بهمن است، پس داریم:

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

$$۲۹+۳۰+۳۰+۳۰+۱۲=۱۳۱\overset{۷}{\equiv}۵$$

که متناظر این عدد در جدول روز پنج‌شنبه را نشان می‌دهد.

۵

$$۲y\overset{۵}{\equiv}۱۸\xrightarrow{(۲،۵)=۱}y\overset{۵}{\equiv}۹\Rightarrow y\overset{۵}{\equiv}۹\overset{۵}{\equiv}۴$$

$$y=۵k+۴ \quad , \quad x=-۲k+۲$$

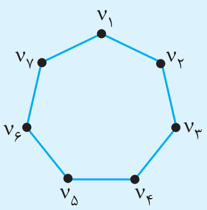
۶

الف) $q=۷$ ، $p=۶$ ب) $N_G(b)=\{a,d,c\}$

ج) $\frac{p(p-۱)}{۲}=$ تعداد یال‌های گراف G + تعداد یال‌های گراف $\bar{G}$

۱۶= مجموع درجه‌های رئوس گراف $\bar{G}$ $\Rightarrow$ ۸= تعداد یال‌های گراف $\bar{G}$

۷



الف) $\{v_۱,v_۳,v_۴,v_۵\}$

ب) $\gamma(G)=۳$

ج) $\{v_۲,v_۴,v_۶\}$ ، $\{v_۱,v_۳,v_۵\}$

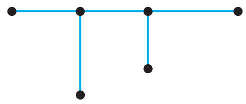
۸

الف) اگر $\{a_۱,a_۲,...,a_n\}$ یک مجموعه احاطه‌گر غیرمینیمال باشد در این صورت یک یا چند عضو وجود دارند که با حذف آنها مجموعه احاطه‌گر مینیمال باقی می‌ماند. بنابراین عضوی مانند $a_۱$ را در نظر می‌گیریم اگر با حذف آن هنوز مجموعه احاطه‌گر باقی بماند آن را حذف می‌کنیم در غیر این‌صورت آن را نگه داشته و همین کار را برای سایر رئوس انجام می‌دهیم.

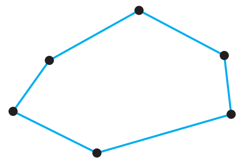
ب) $A=\{h,g,f,i,j\}$

۹

الف)



ب)



۱۰

$$P=\frac{۹!}{۳!\times۲!\times۲!}\Rightarrow p=۳\times۷!$$

۱۱

الف) $۵!\times۶!$ ب) $۵!\times۷!$ ج) $۱۰!\times۲!$

۱۲

$$x_۱+x_۲+x_۳+x_۴+x_۵=۱۰\Rightarrow x_۱+y_۲+۱+y_۳+۱+y_۴+۱+y_۵+۱=۱۰$$

$$x_۱+y_۲+y_۳+y_۴+y_۵=۶\xrightarrow{\binom{n+k-۱}{k-۱}}\binom{۶+۵-۱}{۵-۱}$$

۱۳

	دوشنبه	یکشنبه	شنبه
A	۳	۱	۲
B	۲	۳	۱
C	۱	۲	۳

و

	دوشنبه	یکشنبه	شنبه
A	۳	۲	۱
B	۲	۱	۳
C	۱	۳	۲

$\Rightarrow$

	دوشنبه	یکشنبه	شنبه
A	۳۳	۲۱	۱۲
B	۲۲	۱۳	۳۱
C	۱۱	۳۲	۲۳

۱۴

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$n(A\cup B)=\left[\frac{۹۰}{۲}\right]+\left[\frac{۹۰}{۳}\right]+\left[\frac{۹۰}{۶}\right]$$

$$n(A\cup B)=۶۰$$

۱۵

تعداد لانه‌ها: $۷\times۱۲=۸۴$ تعداد کبوترها: ۵۰۵ دانش‌آموز

$$\begin{array}{r|l} ۵۰۵ & ۸۴ \\ \underline{-۵۰۴} & ۶ \\ ۱ & \end{array} \qquad ۶+۱=۷$$

طبق اصل لانه کبوتری لااقل ۷ نفر آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.

ریاضیات گسسته | **پاسخ‌نامه آزمون (۲۰)**

۱

الف) درست ب) نادرست

۲

الف) $\forall m>0, a|m, b|m \Rightarrow c\le m$

ب) همبند

ج) $\left[\dfrac{n}{\Delta+1}\right]$

د) به ترتیب متن سوال n و $(k+1)$

۳

$x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+xz \Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2\ge 2xy+2yz+2xz$

$\Leftrightarrow (x^2+y^2-2xy)+(y^2+z^2-2yz)+(x^2+z^2-2xz)\ge 0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2\ge 0$

چون نابرابری آخری همواره درست است پس با بازگشت روابط حکم برقرار است.

۴

$\begin{cases} a=5q+2 \\ a=6q'+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6a=30q+12 \\ 5a=30q'+15 \end{cases} \Rightarrow a=30q''-3$

$\Rightarrow a=30r+27$

۵

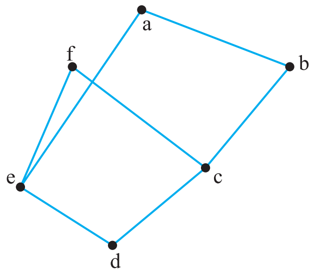
$27\overset{13}{\equiv}1 \Rightarrow (27)^7\overset{13}{\equiv}1^7 \Rightarrow (27)^7+19\overset{13}{\equiv}1^7+19=20 \Rightarrow (27)^7+19\overset{13}{\equiv}7$

۶

$2x+5y=29 \Rightarrow 2x\overset{5}{\equiv}29 \Rightarrow 2x\overset{5}{\equiv}4 \Rightarrow x=5k+2$

$y=-2k+5$

۷



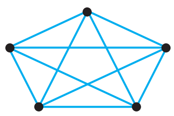
الف) رسم شکل

ب) $N_G[b]=\{a,b,c\}$

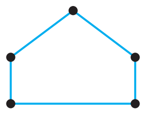
ج) b,a,e,f,c,d

۸

الف)



ب)



۹

الف)

ب) $\{a,d,g\}$ ج) $\{a,d,e,h\}$

۱۰

یک مجموعه احاطه‌گر غیرمینیمال به صورت $\{a,h,f,b\}$ است.

اکنون با حذف راس a از آن، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال به‌دست می‌آید.

۱۱

الف) $4!\times 6!$ ب) $5!\times 4!$

ج) $3!\times 7!$

۱۲

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=12 \Rightarrow y_1+3+x_2+x_3+x_4+y_5+4+x_6=12$

$y_1+x_2+x_3+x_4+y_5+x_6=5$

$\xrightarrow{\binom{n+k-1}{k-1}} \binom{5+6-1}{6-1}$

۱۳

	۱	۲	۳	۴
C_1	T_1	T_2	T_3	T_4
C_2	T_4	T_1	T_2	T_3
C_3	T_3	T_4	T_1	T_2
C_4	T_2	T_3	T_4	T_1

۱۴

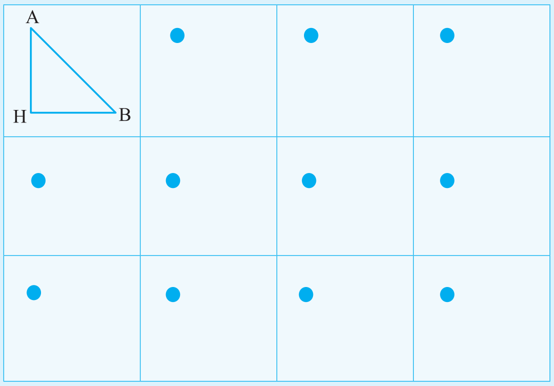
$|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2|=|\overline{A_1\cap A_2}|=|S|-|A_1|-|A_2|+|A_1\cap A_2|$

$=350-\left[\dfrac{350}{4}\right]-\left[\dfrac{350}{6}\right]+\left[\dfrac{350}{12}\right]=234$

۱۵

تعداد لانه‌ها: ۱۲ مربع به مانند شکل

تعداد کبوترها: ۱۳ نقطه



طبق اصل لانه کبوتری دو نقطه مانند A و B در یک لانه جای می‌گیرند.

پس:

$\begin{cases} AH<2 \\ BH<2 \end{cases} \Rightarrow AH^2+BH^2<8 \Rightarrow AB^2<8 \Rightarrow AB<\sqrt{8}$

خلاصه فصل‌ها

درس اول: استدلال ریاضی

مثال نقض: گاهی برای رد کردن یک قانون به صورت کلی، مثالی می‌آوریم که با حکم قانون در تناقض باشد. به این مثال، مثال نقض گویند.

مثال آیا گزارهٔ «برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است» درست است؟

پاسخ: با فرض $n = 6$ عدد $2^6 - 1 = 63$ اول نیست و حکم نقض می‌شود.

اثبات مستقیم

به اثبات کردن یک قانون با استفاده از مطالبی که در قبل، درستی آن‌ها را پذیرفتیم، اثبات مستقیم می‌گویند.

مثال اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $4k+1$ مربع کامل است.

پاسخ: فرض کنیم $a \in \mathbb{N}$: $k = a(a+1)$ باشد، پس داریم:

$$4k+1 = 4a(a+1)+1 = 4a^2+4a+1 = (2a+1)^2$$

پس $4k+1$ مربع کامل است.

اثبات با درنظر گرفتن همه حالت‌ها: برخی اوقات برای اثبات برخی از گزاره‌ها باید تمامی موارد ممکن را در مسأله درنظر گرفته و گزاره را ثابت کنیم.

مثال ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، $n^2 - 5n + 7$ عددی فرد است.

پاسخ: برای اثبات این مطلب دو حالت در نظر می‌گیریم:

الف) n زوج است. به عبارت دیگر $n = 2k$ $(k \in \mathbb{N})$، پس داریم:

$$n^2 - 5n + 7 = (2k)^2 - 5(2k) + 7 = 4k^2 - 10k + 6 + 1$$

$$= 2(\underbrace{2k^2 - 5k + 3}_{q}) + 1 = 2q + 1 \Rightarrow \quad n^2 - 5n + 7 \text{ فرد است.}$$

ب) n فرد است. به عبارت دیگر $n = 2k+1$ $(k \in \mathbb{N})$، بنابراین داریم:

$$n^2 - 5n + 7 = (2k+1)^2 - 5(2k+1) + 7$$

$$= 4k^2 - 6k + 3 = 2(\underbrace{2k^2 - 3k + 1}_{q'}) + 1 = 2q' + 1 \Rightarrow n^2 - 5n + 7 \text{ فرد است.}$$

اثبات به روش غیرمستقیم (برهان خلف)

در این روش فرض می‌کنیم حکم نادرست باشد و سپس با استفاده از قوانین و استدلال‌های درست و مبتنی بر فرض به یک نتیجهٔ غیرممکن یا نتیجه متضاد با فرض می‌رسیم و از آن‌جا معلوم می‌شود که فرض نادرست بودن حکم، باطل است و درستی حکم ثابت می‌گردد.

مثال ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

پاسخ: فرض کنیم r عدد گویا و x گنگ است. باید ثابت کنیم $r + x$ گنگ است. فرض خلف: $r + x$ گنگ نیست.

$$r + x \in \mathbb{Q} \Rightarrow r + x - r \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$$

گویا بودن x خلاف فرض است، پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

اثبات‌های بازگشتی ـــ گزاره‌های هم‌ارز

اگر ارزش دو گزاره یکسان باشد، آن‌ها را گزاره‌های هم‌ارز (هم‌ارزش) می‌نامیم. اگر P و Q دو گزارهٔ هم‌ارز (یعنی همواره هر دو درست یا هر دو نادرست) باشند، آنگاه $P \Rightarrow Q$ و $Q \Rightarrow P$ هر دو درست هستند و در نتیجه $P \Leftrightarrow Q$ یک گزارهٔ درست است.

به عکس اگر ترکیب دوشرطی $P \Leftrightarrow Q$ درست باشد، آنگاه P و Q دو گزارهٔ هم‌ارز خواهند بود و اگر ارزش یکی از آن‌ها را بدانیم، ارزش دیگری نیز همان خواهد بود.

ویژگی‌های هم‌نهشتی

۱) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm c \quad (c \in \mathbb{Z})$

۲) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc \quad (c \in \mathbb{Z})$

۳) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n \quad (n \in \mathbb{N})$

۴) $a \overset{m}{\equiv} b \text{ ، } c \overset{m}{\equiv} d \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bd$

۵) $a \overset{m}{\equiv} b \text{ ، } c \overset{m}{\equiv} d \Rightarrow a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm d$

۶) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a \pm mt \overset{m}{\equiv} b \pm mk$

۷) $\begin{cases} ac \overset{m}{\equiv} bc \\ (m,c) = d \end{cases} \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$

۸) $\begin{cases} ac \overset{m}{\equiv} bc \\ (m,c) = ۱ \end{cases} \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} b$

نکته اگر بخواهیم کوچک‌ترین عدد نامنفی و هم‌نهشت با عدد a را به پیمانهٔ m، مشخص کنیم، کافی است عدد a را بر m تقسیم کنیم و باقیمانده را به‌دست آوریم.

نکته اگر b،a در تقسیم بر عدد طبیعی m، باقی‌ماندهٔ یکسان داشته باشند، در این صورت b،a به پیمانهٔ m ، هم‌نهشت هستند.

نکته اگر باقی‌مانده تقسیم a بر m مساوی r باشد، در این صورت: $a \overset{m}{\equiv} r$

مثال باقی‌مانده تقسیم $A = (۲۷)^۷ + ۱۹$ بر ۱۳ را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$۲۷ = ۱۳ \times ۲ + ۱ \Rightarrow ۲۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow (۲۷)^۷ \overset{۱۳}{\equiv} (۱)^۷ = ۱$$

$$۱۹ = ۱۳ \times ۱ + ۶ \Rightarrow ۱۹ \overset{۱۳}{\equiv} ۶$$

$$(۲۷)^۷ + ۱۹ \overset{۱۳}{\equiv} ۱ + ۶ \Rightarrow A \overset{۱۳}{\equiv} ۷$$

پس باقی‌مانده تقسیم A بر ۱۳ برابر ۷ است.

نکته برای پیدا کردن باقی‌ماندهٔ تقسیم عددی بر ۳ یا ۹ کافی است، باقی‌مانده مجموع عددها را بر ۳ یا ۹ به‌دست آوریم.

نکته برای پیدا کردن باقی‌مانده تقسیم عددی بر ۲ یا ۵ یا ۱۰ کافی است باقی‌مانده رقم یکان را بر ۲ یا ۵ یا ۱۰ به‌دست آوریم.

مثال باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A = (۲^{۱۱} + ۷) \times ۹$ را بر ۲۳ بیابید.

پاسخ:

$$۲^۵ \overset{۲۳}{\equiv} ۹ \Rightarrow ۲^{۱۰} \overset{۲۳}{\equiv} ۸۱ \text{ ، } ۸۱ \overset{۲۳}{\equiv} ۱۲$$

$$\Rightarrow ۲^{۱۰} \overset{۲۳}{\equiv} ۱۲ \overset{\times ۲}{\Longrightarrow} ۲^{۱۱} \overset{۲۳}{\equiv} ۲۴ \text{ ، } ۲۴ \overset{۲۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۲^{۱۱} \overset{۲۳}{\equiv} ۱$$

$$۲^{۱۱} + ۷ \overset{۲۳}{\equiv} ۱ + ۷$$

$$\Rightarrow (۲^{۱۱} + ۷) \times ۹ \overset{۲۳}{\equiv} ۷۲ \text{ ، } ۷۲ \overset{۲۳}{\equiv} ۳ \Rightarrow (۲^{۱۱} + ۷) \times ۹ \overset{۲۳}{\equiv} ۳$$

کاربرد همنهشتی در تاریخ

برای این کار باید فاصله دو تاریخ را به‌دست آورده و باقی‌ماندهٔ تقسیم آن را بر ۷ پیدا کنیم، اگر روز تاریخ جلوتر را بخواهیم به مقدار عدد باقی‌مانده به سمت جلو حرکت کنیم و چنانچه روز تاریخ گذشته را بخواهیم به مقدار عدد باقی‌مانده به سمت عقب حرکت کنیم.

معادله‌های همنهشتی

هر معادله به فرم $ax \overset{m}{\equiv} b$ را معادلهٔ همنهشتی می‌گوییم و منظور از حل یک معادلهٔ همنهشتی پیدا کردن همه جواب‌هایی چون $x_\circ \in \mathbb{Z}$ است که در معادلهٔ فوق صدق کنند یعنی:

$$(a,b \in \mathbb{Z}) \qquad ax_\circ \overset{m}{\equiv} b$$

مثال همهٔ اعداد صحیح را بیابید که سه برابر آن‌ها منهای ۱۳ بر ۷ بخش‌پذیر باشد.

پاسخ: اگر آن عدد را x فرض کنیم، باید $7 \mid 3x-13$ یا $3x \overset{7}{\equiv} 13$ حال داریم:

$$3x \overset{7}{\equiv} 13$$

$$\Rightarrow 3x \overset{7}{\equiv} 6 \overset{\div 3}{\Longrightarrow} x \overset{\frac{7}{(7,3)}}{\equiv} 2 \Rightarrow x \overset{7}{\equiv} 2 \Rightarrow x = 7k+2$$

مثال جواب‌های عمومی معادلهٔ $4x \overset{5}{\equiv} 17$ را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$4x \overset{5}{\equiv} 17 \,,\, 17 \overset{5}{\equiv} 2 \Rightarrow 4x \overset{5}{\equiv} 2$$

$$\overset{\text{ویژگی ۵}}{\Longrightarrow} 4x \overset{5}{\equiv} 2+(2\times 5)$$

$$4x \overset{5}{\equiv} 12 \overset{(4,5)=1}{\Longrightarrow} \cancel{4}x \overset{5}{\equiv} \cancel{4}\times 3$$

$$\Rightarrow x \overset{5}{\equiv} 3 \Rightarrow x = 5k+3$$

$$(5 \mid x-3 \Rightarrow x-3 = 5k \Rightarrow x = 5k+3)$$

طرز حل کردن معادلهٔ همنهشتی

در معادلهٔ $ax \overset{m}{\equiv} b$ اگر a و b عددی بزرگ‌تر از m باشند، باید به جای آن‌ها باقی‌ماندهٔ تقسیمشان را بر m بنویسیم و طرفین را اگر به ضریب x قابل قسمت باشند به آن تقسیم کنیم و در صورتی که قابل قسمت نباشند، ضریبی از پیمانه را به سمت دیگر اضافه کنیم تا طرفین بر ضریب x تقسیم شوند و به معادله‌ای به فرم $x \overset{m}{\equiv} c$ برسیم که جواب آن $x = mk+c$ خواهد بود.

قضیه: معادلهٔ هم نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است، اگر فقط $(a,m) \mid b$

معادلهٔ سیاله

هر معادله به صورت $ax+by=c$ را که در آن $a,b,c \in \mathbb{Z}$ است را یک معادلهٔ سیاله درجهٔ اول یا خطی می‌نامیم. برای حل یک معادلهٔ سیاله ابتدا آن را به صورت $ax \overset{m}{\equiv} b$ درآورده و از آنجا x را پیدا کرده و در معادلهٔ اولیه قرار می‌دهیم تا y به‌دست آید.

نکته معادلهٔ $ax+by=c$ وقتی دارای جواب است که $(a,b) \mid c$

نکته دو مربع لاتین متعامد نیستند، هرگاه در یکی از دو مربع دو درایه یکسان پیدا کنیم، به‌طوری که در جایگاه‌های نظیر به این دو درایه در مربع دیگر نیز درایه‌های یکسان (یکسان با هم نه لزوماً یکسان با درایه‌های مربع اول) وجود داشته باشد.

مثال آیا دو مربع لاتین ۴×۴ زیر متعامدند؟

A =

۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱
۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳

B =

۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱

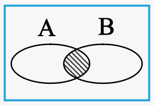
۳۳	۴۴	۱۱	۲۲
۴۱	۳۲	۲۳	۱۴
۱۲	۲۱	۳۴	۴۳
۲۴	۱۳	۴۲	۳۱

پاسخ: در مربع لاتین مقابل عدد تکراری نداریم پس این دو مربع لاتین متعامد هستند.

درس دوم: روش‌هایی برای شمارش

اصل شمول و عدم شمول

برای محاسبه تعداد اعضای $A\cup B$ یعنی $|A\cup B|$، یک بار تعداد اعضای A و بار دیگر تعداد اعضای B را می‌شماریم و از مجموع آن‌ها تعداد اعضای $A\cap B$ را کم می‌کنیم که از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:



$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

مثال در یک کلاس ۲۵ نفری، ۱۵ نفر فوتبال و ۱۴ نفر والیبال بازی می‌کنند، مشخص کنید چند نفر نه فوتبال بازی می‌کنند و نه والیبال، به شرط آن که بدانیم ۹ نفر هم فوتبال بازی می‌کنند و هم والیبال؟

پاسخ:

مجموعه والیبالیست‌ها: V   مجموعه فوتبالیست‌ها: F

$$|F\cup V|=|F|+|V|-|F\cap V|\Rightarrow|F\cup V|=۱۵+۱۴-۹=۲۰$$

$$|S|-|F\cup V|=۲۵-۲۰=۵$$

پس ۵ نفر نه فوتبال باز می‌کنند و نه والیبال.

نکته اصل شمول و عدم شمول برای سه مجموعه از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

نکته $\left[\frac{n}{k}\right]$، تعداد عددهای طبیعی از ۱ تا n که مضرب k هستند را به ما می‌دهد.

محاسبهٔ تعداد توابع از مجموعه A به مجموعه B

اگر مجموعه A دارای m عضو باشد و تعداد عضوهای مجموعه B، n تا باشد تعداد تابع‌هایی که از A به B می‌توان نوشت به این صورت است که هر عضو A یکی از n عضو B را می‌تواند انتخاب کند، پس تعداد کل توابع $\underbrace{n\times n\times\ldots\times n}_{m\text{ تا}}=n^m$ است.

مثال از مجموعه $A=\{a,b,c,d\}$ به مجموعه $B=\{۱,۲,۴\}$ چند تابع می‌توان نوشت؟

پاسخ:

$$۳\times۳\times۳\times۳=۳^۴=۸۱$$

تعداد توابع پوشا

برای محاسبهٔ تعداد توابع پوشا کافی است، تعداد تابع‌های غیرپوشا را از تعداد کل توابع کم کنیم.

مثال از مجموعه $A=\{a,b,c,d\}$ به مجموعه $B=\{۱,۲,۳\}$ چند تابع پوشا می‌توان نوشت؟

پاسخ:

$$|S|=۳\times۳\times۳\times۳=۸۱$$

$$|\bar{۱}\cup\bar{۲}\cup\bar{۳}|=|\bar{۱}|+|\bar{۲}|+|\bar{۳}|-|\bar{۱}\cap\bar{۲}|-|\bar{۱}\cap\bar{۳}|-|\bar{۲}\cap\bar{۳}|+|\bar{۱}\cap\bar{۲}\cap\bar{۳}|=۲^۴+۲^۴+۲^۴-۱^۴-۱^۴-۱^۴+۰=۴۵$$

پس تعداد توابع پوشا از A به B برابر است با:

$$|S|-|\bar{۱}\cup\bar{۲}\cup\bar{۳}|=۸۱-۴۵=۳۶$$

تعداد توابع یک‌به‌یک

برای محاسبهٔ تعداد توابع یک‌به‌یک از مجموعهٔ A با m عضو به مجموعهٔ B با n عضو با شرط $m\le n$ برای اولین عضو از مجموعهٔ A، n انتخاب، دومین عضو $n-۱$ انتخاب و ... آخرین عضو $(n-m+۱)$ انتخاب دارید، پس به طور کلی تعداد توابع یک به یک از مجموعه A به مجموعه B برابر است با:

$$(n)_m=n\times n-۱\times n-۲\times\ldots\times(n-m+۱)=\frac{n!}{(n-m)!}$$

مثال به چند طریق می‌توان ۵ کتاب مختلف را بین ۸ نفر توزیع کرد، اگر بخواهیم به هر نفر حداکثر یک کتاب بدهیم؟

پاسخ: این سؤال مانند تابع یک‌به‌یک از یک مجموعهٔ ۵ عضوی به یک مجموعهٔ ۸ عضوی است.

$$(۸)_۵=\frac{۸!}{(۸-۵)!}=\frac{۸\times۷\times۶\times۵\times۴\times۳!}{۳!}=۶۷۲۰$$

اصل لانه کبوتری

اگر m کبوتر و n لانه داشته باشیم و $m>n$ و همهٔ کبوترها درون لانه قرار بگیرند، در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار گرفته است.

تعمیم اصل لانه کبوتری

هرگاه $(nk+۱)$ کبوتر یا بیشتر در n لانه قرار بگیرند، در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل $(k+۱)$ کبوتر در آن قرار گرفته است.

مثال ۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخهٔ گل قرار گرفته است؟

پاسخ:

$$k+۱=۵\Rightarrow k=۴$$

$$nk+۱=۵۴\Rightarrow ۴n+۱=۵۴\Rightarrow ۴n=۵۳\Rightarrow n=\left[\frac{۵۳}{۴}\right]=۱۳$$