

خرید کتاب های کنکور

با تخفیف ویژه

و

ارسال رایگان

Medabook.com

+



مدابوک



یک جله تماس تلفنی رایگان

با مشاوران رتبه برتر

برای انتخاب بهترین منابع

دبیرستان و کنکور

۰۲۱ ۲۸۴۲۵۲۱۰



شماره آزمون	مبحث آزمون	صفحه سوال	صفحه پاسخ نامه تشریحی
۱	ترسیم‌های هندسی	۷	۴۶
۲	استدلال	۸	۴۷
۳	جامع فصل	۸	۴۸
۴	نسبت و تناسب در هندسه / قضیه تالس	۱۰	۵۰
۵	تشابه مثلث‌ها	۱۱	۵۱
۶	کاربردهایی از قضیه تالس و تشابه مثلث‌ها	۱۲	۵۲
۷	جامع فصل	۱۳	۵۴
۸	چندضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آن‌ها	۱۵	۵۶
۹	مساحت و کاربردهای آن	۱۵	۵۷
۱۰	جامع فصل	۱۶	۵۹
۱۱	خط، نقطه و صفحه	۱۸	۶۱
۱۲	تفکر تجسمی	۱۹	۶۲
۱۳	جامع فصل	۲۰	۶۳
۱۴	مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره	۲۲	۶۵
۱۵	رابطه‌های طولی در دایره	۲۳	۶۶
۱۶	چندضلعی‌های محاطی و محیطی	۲۴	۶۸
۱۷	جامع فصل	۲۵	۶۹
۱۸	تبدیل‌های هندسی / کاربرد تبدیل‌ها	۲۷	۷۲
۱۹	جامع فصل	۲۸	۷۳
۲۰	قضیه سینوس‌ها / قضیه کسینوس‌ها	۳۰	۷۵
۲۱	قضیه نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبه طول نیمسازها / قضیه هرون (محاسبه ارتفاع‌ها و مساحت مثلث)	۳۰	۷۷
۲۲	جامع فصل	۳۱	۷۸
۲۳	جامع دهم	۳۴	۸۱
۲۴	جامع یازدهم	۳۶	۸۳
۲۵	جامع ۱	۳۸	۸۷
۲۶	جامع ۲	۳۹	۸۹
۲۷	جامع ۳	۴۱	۹۲
			۴۴

فصل ۱: ترسیم‌های هندسی و استدلال

فصل ۲: قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن

فصل ۳: چندضلعی‌ها

فصل ۴: تجسم فضایی

فصل ۵: دایره

فصل ۶: تبدیل‌های هندسی و کاربردها

فصل ۷: روابط طولی در مثلث

آزمون‌های جامع

پاسخ‌نامه کلیدی

ترسیم‌های هندسی و استدلال

(فصل ۱)

• نوع آزمون: مبحثی

• ۱۰ تست در ۱۵ دقیقه

• موضوع: ترسیم‌های هندسی

• صفحه کتاب درسی: ۱۷ تا ۱۰ هندسه دهم



۱- نقطه T به فاصله $(3x+1)$ از خط d قرار دارد. اگر هیچ نقطه‌ای روی d به فاصله ۱۰ از نقطه T وجود نداشته باشد، x کدام می‌تواند باشد؟

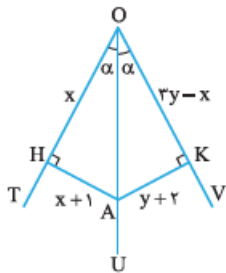
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲- فاصله بین دو خط موازی d و d' برابر با ۶ واحد است. نقاطی که تفاضل فاصله‌های آن‌ها از این دو خط برابر با ۲ واحد است، تشکیل می‌دهند.

(۱) دو خط موازی با d و d' در بین آن‌ها (۲) یک خط موازی با d و d' در بین آن‌ها

(۳) دو خط موازی با d و d' خارج از ناحیه بین آن‌ها (۴) دو خط موازی با d و d' یکی بین و دیگری خارج از ناحیه بین آن‌ها

۳- در شکل روبه‌رو، طول پاره‌خط‌های AH، OK، OH در کنار آن‌ها نوشته شده است. x + y برابر با کدام است؟



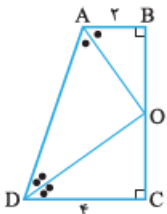
(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) ۵

(۴) ۶

۴- در شکل روبه‌رو OA و OD به ترتیب نیمسازهای زاویه‌های BAD و ADC هستند. طول AD کدام است؟



(۱) ۶

(۲) $4\sqrt{2}$

(۳) ۴/۵

(۴) $3\sqrt{3}$

۵- دو خط متقاطع و یک دایره را در نظر می‌گیریم. روی این دایره n نقطه وجود دارد که از هر دو خط به یک فاصله هستند. n چند مقدار متفاوت می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) ۵ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶- در مثلث ABC که $\hat{B} = \hat{C} = 70^\circ$ ، عمودمنصف AB و نیمساز زاویه داخلی B، همدیگر را در نقطه D قطع می‌کنند. زاویه A توسط AD به دو زاویه تقسیم می‌شود. نسبت اندازه‌های این دو زاویه کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۷- در مثلث ABC که $AB + 2 = AC + 1 = BC = 5$ ، عمودمنصف BC، ضلع AC را در نقطه M قطع کرده است. فاصله M از دورترین رأس مثلث ABC کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{8}$ (۲) $\frac{25}{8}$ (۳) $\frac{6}{5}$ (۴) $\frac{14}{5}$

۸- چند لوزی متمایز به طول ضلع ۵ و طول قطر ۷ می‌توان رسم کرد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

۹- دو نقطه A و B به فاصله ۵ واحد از هم قرار دارند. کمانی به مرکز A و شعاع ۳ واحد و کمان دیگری به مرکز B و شعاع ۴ واحد رسم می‌کنیم و نقاط تقاطع این دو کمان را M و N می‌نامیم. چهار ضلعی AMBN کدام است؟

- (۱) لوزی (۲) مستطیل (۳) دوزنقه (۴) هیچ‌کدام



۱۰- پاره خط $AB=10$ را در نظر گرفته، به مرکز A کمانی به شعاع ۶ و به مرکز B کمانی به شعاع ۸ رسم کرده، نقطه تقاطع دو کمان را M می نامیم، سپس به مرکز A کمانی به شعاع ۸ و به مرکز B کمانی به شعاع ۶ رسم کرده، نقطه تقاطع دو کمان را N می نامیم. مساحت چهارضلعی AMBN کدام است؟

- ۳۶ (۱) ۳۰ (۲) ۴۸ (۳) ۴۲ (۴)

• موضوع: استدلال • نوع آزمون: میثقی

• صفحه کتاب درسی: ۱۸ تا ۲۸ هندسه دهم • ۱۰ تست در ۱۵ دقیقه

۱۱- از تقاطع نیمسازهای داخلی دو زاویه غیرمجاور در یک پنجضلعی منتظم، یک چهارضلعی ایجاد می شود. بزرگ ترین زاویه این چهارضلعی چند درجه است؟

- ۱۰۸ (۱) ۱۳۲ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۴۴ (۴)

۱۲- در کدام چندضلعی محدب، مجموع زاویه های داخلی شش برابر مجموع زاویه های خارجی است؟

- ۱۰ ضلعی (۱) ۱۲ ضلعی (۲) ۱۴ ضلعی (۳) ۱۶ ضلعی (۴)

۱۳- در مثلثی به طول اضلاع ۴، ۶ و ۸ فاصله نقطه همرسی عمودمنصفها از ضلع بزرگ تر a است. فاصله این نقطه از ضلع کوچک تر کدام است؟

- a (۱) $\sqrt{a^2+12}$ (۲) 2a (۳) $\sqrt{a^2+16}$ (۴)

۱۴- در مثلث ABC بین زاویه ها رابطه $\hat{A} = \hat{B} + \hat{C}$ برقرار است. نقطه همرسی عمودمنصفهای ضلع های این مثلث کجا است؟

- (۱) داخل مثلث (۲) رأس A (۳) روی ضلع BC (۴) بیرون مثلث

۱۵- در یک مثلث قائم الزاویه، فاصله نقطه همرسی نیمسازهای داخلی از رأس های مثلث $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{5}$ و $\sqrt{10}$ است. طول ضلع کوچک تر این مثلث کدام است؟

- ۳ (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $1+\sqrt{5}$ (۳) $\frac{7}{2}$ (۴)

۱۶- اگر در مثلث ABC، بزرگ ترین ضلع AB باشد، کدام نتیجه گیری درست است؟

- $\hat{C} > 90^\circ$ (۱) $\hat{C} > 60^\circ$ (۲) $90^\circ < \hat{C} < 120^\circ$ (۳) $60^\circ < \hat{C} < 120^\circ$ (۴)

۱۷- در مثلث ABC، نقطه ای مانند K روی ضلع BC وجود دارد، به طوری که $AK = AB$. کدام گزینه همواره درست است؟

- $AC > AB$ (۱) $AC > BK$ (۲) $AC < AB$ (۳) $AC < BK$ (۴)

۱۸- نقیض گزاره «یک چهارضلعی وجود دارد که مجموع زاویه های داخلی آن 360° نیست.» کدام است؟

(۱) یک چهارضلعی وجود دارد که مجموع زاویه های داخلی آن 360° است.

(۲) در هر چهارضلعی مجموع زاویه های داخلی 360° است.

(۳) چهارضلعی ای وجود ندارد که مجموع زاویه های داخلی آنها 360° باشد.

(۴) حداقل یک چهارضلعی وجود دارد که مجموع زاویه های داخلی آن 360° است.

۱۹- در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، نقطه X روی BC چنان واقع است که $C\hat{A}X \neq \hat{B}$. کدام گزینه همواره درست است؟

- $\hat{B} > \hat{C}$ (۱) $\hat{B} < \hat{C}$ (۲) $A\hat{X}B \neq 90^\circ$ (۳) $A\hat{X}B = 90^\circ$ (۴)

۲۰- کدام قضیه دوشرطی نیست؟

(۱) هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

(۲) در مثلث متساوی الساقین، ارتفاع و میانه وارد بر قاعده بر هم منطبق اند.

(۳) قضیه فیثاغورس (۴) در مثلث دارای زاویه منفرجه، نقطه همرسی ارتفاعها داخل مثلث نیست.

• موضوع: جامع فصل • نوع آزمون: استاندارد

• صفحه کتاب درسی: ۱۰ تا ۲۸ هندسه دهم • ۱۵ تست در ۲۳ دقیقه

۲۱- اگر دو نقطه یافت شود که از نقطه A به فاصله ۴ و از نقطه B به فاصله ۳ باشد، طول پاره خط AB کدام می تواند باشد؟

- ۱ (۱) ۴ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)



۲۲- نقطه A به فاصله ۸ واحد از خط L قرار دارد. دو نقطه B و C روی L از A به فاصله ۱۰ واحد هستند. مساحت مثلث ABC کدام است؟

- ۳۶ (۱) ۴۲ (۲) ۴۸ (۳) ۵۴ (۴)

۲۳- روی ضلع‌های مثلث ABC یا امتدادهای آن‌ها، چند نقطه وجود دارد که از دو خط AB و AC به یک فاصله غیر صفر باشد؟

- دقیقاً یک (۱) دقیقاً دو (۲) صفر یا یک (۳) یک یا دو (۴)

۲۴- چند مثلث می‌توان رسم کرد که در آن طول یک ضلع و طول میانه و ارتفاع وارد بر آن ضلع به ترتیب ۳، ۴ و ۵ واحد باشد؟

- صفر (۱) یک (۲) دو (۳) بی‌شمار (۴)

۲۵- پاره خط $AB = 10$ را در نظر گرفته و عمودمنصف آن را رسم می‌کنیم. دایره‌ای به مرکز وسط AB و شعاع ۵، عمودمنصف را در دو نقطه P و Q قطع می‌کند. مساحت چهارضلعی APBQ کدام است؟

- ۲۵ (۱) $25\sqrt{2}$ (۲) $50\sqrt{2}$ (۳) ۵۰ (۴)

۲۶- مستطیل ABCD به طول اضلاع $AB = 18$ و $BC = 6$ مفروض است. دو کمان با شعاع‌های برابر، اولی به مرکز A و دومی به مرکز C رسم می‌کنیم؛ کمان اول CD را در M و کمان دوم AB را در N قطع می‌کند. اگر چهارضلعی AMCN لوزی باشد، شعاع کمان‌های رسم شده کدام بوده است؟

- ۱۰ (۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۱۶ (۴)

۲۷- برای رسم متوازی‌الاضلاع ABCD، از هر دو سر پاره خط $AC = 8$ ، دایره‌هایی به شعاع‌های m و n رسم می‌کنیم. کدام مقادیر برای m و n قابل قبول اند؟

- $n = 3$ و $m = 4$ (۱) $n = 4$ و $m = 5$ (۲) $n = 4$ و $m = 4$ (۳) $n = 1$ و $m = 9$ (۴)

۲۸- می‌دانیم محیط یک مثلث متساوی‌الساقین برابر با مقدار معلوم ۲p است. اگر طول ساق این مثلث را a در نظر بگیریم، کدام گزینه حدود تغییرات a را نشان می‌دهد؟

- $\frac{1}{3}p < a < p$ (۱) $\frac{1}{2}p < a < p$ (۲) $\frac{1}{3}p < a < \frac{2}{3}p$ (۳) $\frac{1}{4}p < a < \frac{1}{2}p$ (۴)

۲۹- نقطه P داخل مثلث ABC که $AB = 3$ و $AC = 4$ قرار دارد. حاصل $PB + PC$ کدام می‌تواند باشد؟

- ۱ (۱) ۷ (۲) ۲ (۳) ۸ (۴)

۳۰- یک ده‌ضلعی محدب حداکثر چند زاویه حاده دارد؟

- ۹ (۱) ۷ (۲) ۵ (۳) ۳ (۴)

۳۱- در مثلثی طول دو ضلع بزرگ‌تر ۸ و ۹ است. اگر فاصله نقطه هم‌مرسی عمودمنصف‌ها از رأس روبه‌روی ضلع بزرگ $m - 2$ و فاصله این نقطه از رأس روبه‌روی ضلع کوچک $9 - 2m$ باشد، فاصله نقطه هم‌مرسی عمودمنصف‌ها از وسط ضلع متوسط کدام است؟

- ۳ (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴)

۳۲- در مثلث ABC، نقطه H، نقطه هم‌مرسی ارتفاع‌ها است. از رأس‌های این مثلث، خط‌هایی به موازات ضلع‌های آن رسم می‌کنیم تا از تقاطع این خط‌ها مثلث $A'B'C'$ ایجاد شود. نقطه H برای مثلث $A'B'C'$ چه نقطه‌ای است؟

- (۱) نقطه هم‌مرسی ارتفاع‌ها (۲) نقطه هم‌مرسی عمودمنصف‌ها (۳) نقطه هم‌مرسی میانه‌ها (۴) نقطه هم‌مرسی نیمسازهای داخلی

۳۳- در مثلث ABC که $\hat{A} = 20^\circ$ و $\hat{C} = 85^\circ$ ، عمودمنصف‌ها در نقطه O هم‌رس‌اند و I نقطه هم‌مرسی نیمسازهای زاویه‌های داخلی است. زاویه BIC چند برابر زاویه BOC است؟

- ۲ (۱) $3/5$ (۲) ۳ (۳) $2/5$ (۴)

۳۴- در مثلث ABC، زاویه A از زاویه C کوچک‌تر است و $\hat{A} + \hat{C} = 2\hat{B}$. کدام گزینه درست است؟

- $BC < AB < AC$ (۱) $BC < AC < AB$ (۲) $AB < BC < AC$ (۳) $AB < AC < BC$ (۴)

۳۵- کدام گزینه مثال نقض ندارد؟

- (۱) نقطه هم‌مرسی نیمسازهای زاویه‌های هر مثلث، داخل آن مثلث قرار دارد.
 (۲) نقطه هم‌مرسی ارتفاع‌های هر مثلث داخل آن مثلث قرار دارد.
 (۳) نقطه هم‌مرسی عمودمنصف‌های هر مثلث داخل یا بیرون آن مثلث قرار دارد.
 (۴) نقطه هم‌مرسی ارتفاع‌های یک مثلث از سه ضلع آن به یک فاصله نیست.



۲۵

موضوع: جامع ۱

۲۰ تست در ۳۰ دقیقه

صفحه کتاب درسی: ۹۶ تا ۹۹ هندسه دهم - ۷۷ تا ۷۹ هندسه یازدهم

۲۹۶- خط Δ و دو نقطه P و Q را در نظر بگیرید. برای رسم مثلثی متساوی الساقین به قاعده PQ که رأس دیگر آن روی Δ واقع است، تعداد جوابها کدام نمی تواند باشد؟

- (۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) بی شمار

۲۹۷- از نقطه همرسی نیمسازهای زاویه های داخلی یک مثلث، عمودهایی بر سه ضلع آن وارد می کنیم، با وصل کردن پای این سه عمود، یک مثلث جدید حاصل می شود. نقطه همرسی نیمسازهای زاویه های داخلی مثلث اولیه، برای مثلث جدید چه نقطه ای است؟

- (۱) نقطه همرسی عمودمنصفها (۲) نقطه همرسی ارتفاعها (۳) نقطه همرسی میانهها (۴) نقطه همرسی نیمسازهای داخلی

۲۹۸- در مثلث ABC که $AC = 2AB = 12$ ، از نقطه D واقع بر ضلع BC، خطوطی موازی AB و AC رسم کنیم تا آن ها را به ترتیب در نقاط E و F قطع کنند. حاصل $DE + DF$ کدام نمی تواند باشد؟

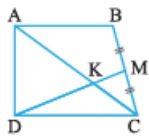
- (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۸ (۴) ۷

۲۹۹- در مثلث ABC که $\hat{A} = 30^\circ$ ، دو ارتفاع BK و CL را رسم می کنیم. طول BC چند برابر طول KL است؟

- (۱) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) ۲

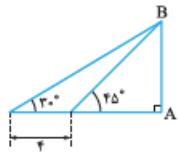
۳۰۰- مثلث قائم الزاویه ABC که در آن $\hat{A} = 90^\circ$ مفروض است. اگر فاصله نقطه A از ضلع BC برابر با $\frac{1}{5}$ واحد باشد، آن گاه حاصل $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{4}{9}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{5}{9}$



۳۰۱- در شکل مقابل، ABCD یک دوزنقه است. به طوری که $4CD = AB$ و M وسط BC است. مساحت مثلث MCK چند برابر مساحت مثلث CKD است؟

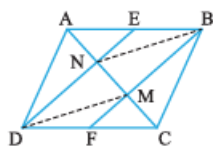
- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{1}{4}$



- (۱) $2(1 + \sqrt{6})$ (۲) $3 + \sqrt{6}$ (۳) $4 + \sqrt{3}$ (۴) $2 + 2\sqrt{3}$

۳۰۳- در شکل مقابل، ABCD متوازی الاضلاع و نقاط E و F وسط ضلع های آن هستند. نسبت مساحت چهارضلعی BMNE به مساحت چهارضلعی BMDN کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{15}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{1}{75}$ (۴) $\frac{1}{9}$



۳۰۴- در یک چندضلعی شبکه ای تعداد نقاط مرزی شش برابر تعداد نقاط درونی است. مساحت این چندضلعی کدام می تواند باشد؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۹ (۳) ۸ (۴) ۷

۳۰۵- یک نیم استوانه مطابق شکل مفروض است. سطح مقطع این نیم استوانه با صفحه مایلی که از قاعده های آن عبور نکند کدام است؟



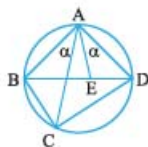
- (۱) سهمی (۲) قسمتی از یک دایره (۳) قستی از یک بیضی (۴) قسمتی از یک سهمی

۳۰۶- از مثلثی به طول اضلاع ۵، ۵ و ۶ واحد، دایره محاطی داخلی آن را جدا کرده و قسمت باقی مانده را حول ارتفاع وارد بر ضلع بزرگ تر دوران می دهیم. حجم شکل حاصل چند برابر π است؟

- (۱) $\frac{7}{5}$ (۲) ۷ (۳) $\frac{6}{5}$ (۴) ۶

۳۰۷- دو دایره $C(O, 5)$ و $C'(O', 4)$ که $OO' = 9$ را در نظر می گیریم. از نقطه A واقع بر دایره C' مماسی به موازات خط المکزین بر آن رسم می کنیم تا این مماس دایره C را در B قطع کند. محیط مثلث بزرگ تر OAB بین کدام دو عدد صحیح متوالی است؟

- (۱) ۲۰ و ۱۹ (۲) ۲۱ و ۲۲ (۳) ۲۴ و ۲۵ (۴) ۲۶ و ۲۷



۳۰۸- در شکل مقابل حاصل $AE \times AC$ با کدام گزینه برابر است؟

- (۱) $ED \times AB$
 (۲) $AB \times AD$
 (۳) $ED \times AC$
 (۴) $AD \times BC$

۳۰۹- در مثلثی به طول ضلع‌های ۵، ۵ و ۶ واحد، بیشترین فاصله نقاط واقع بر دایره محیطی، از نقاط واقع بر محیط مثلث، چند واحد است؟

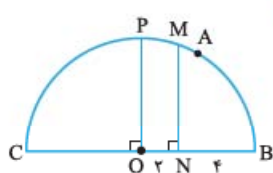
- (۱) $2/2$
 (۲) $2/25$
 (۳) $2/3$
 (۴) $2/35$

۳۱۰- دوزنقه قائم‌الزاویه محیطی به مساحت ۴۵ واحد مربع مفروض است. اگر اندازه ساق غیرقائم این دوزنقه برابر ۹ واحد باشد، شعاع دایره محاطی آن چند واحد است؟

- (۱) $3/5$
 (۲) 4
 (۳) 3
 (۴) $4/5$

۳۱۱- تبدیل یافته یک خط را تحت تبدیل‌های انتقال، دوران، تجانس و بازتاب نسبت به خط پیدا می‌کنیم. در چه تعداد از آن‌ها ممکن است تبدیل یافته خط بر خود عمود باشد؟

- (۱) 1
 (۲) 2
 (۳) 3
 (۴) 4



۳۱۲- مطابق شکل، O وسط قطر نیم‌دایره است و $\widehat{AB} = 60^\circ$. دو نقطه متغیر D و E به ترتیب روی MN و OP طوری حرکت می‌کنند که DE بر MN و OP عمود است. طول کوتاه‌ترین مسیر ADEC کدام است؟

- (۱) 11
 (۲) $2 + 3\sqrt{6}$
 (۳) $2(1 + \sqrt{19})$
 (۴) $3\sqrt{21}$

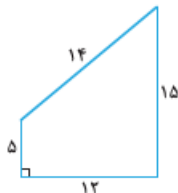
۳۱۳- در مثلث ABC، نیمساز داخلی AD را رسم می‌کنیم. نسبت $\frac{BD}{CD}$ برابر با کدام است؟

- (۱) $\frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{B}}$
 (۲) $\frac{\sin \hat{B}}{\sin \hat{C}}$
 (۳) $\frac{\cos \hat{B}}{\cos \hat{C}}$
 (۴) $\frac{\cos \hat{C}}{\cos \hat{B}}$



۳۱۴- در شکل مقابل طول AC کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{37}$
 (۲) 12
 (۳) 13
 (۴) $2\sqrt{35}$



۳۱۵- مساحت چهارضلعی شکل مقابل کدام است؟

- (۱) 114
 (۲) 120
 (۳) 108
 (۴) 102

• ۲۰ تست در ۳۰ دقیقه

• صفحه کتاب درسی: ۹۶ تا ۹۹ هندسه دهم - ۷۷ تا ۷۹ هندسه یازدهم



• موضوع: جامع ۲

۳۱۶- نقطه P به فاصله ۴ واحد از خط L مفروض است. چند نقطه در این صفحه وجود دارد که از P به فاصله ۳ و از L به فاصله ۲ واحد باشد؟

- (۱) صفر
 (۲) 1
 (۳) 2
 (۴) بی‌شمار

۳۱۷- عمود منصف ساق AC از مثلث متساوی‌الساقین ABC، ساق AB را در نقطه T قطع کرده است. اگر $\hat{TCB} = 7/5^\circ$ ، آن‌گاه زاویه A چند درجه است؟

- (۱) $52/5$
 (۲) $62/5$
 (۳) 65
 (۴) 55

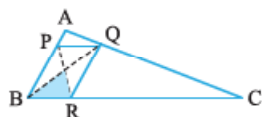
۳۱۸- در مثلثی به طول اضلاع ۱۰، ۲۴ و ۲۶، فاصله نقطه هم‌رسی ارتفاع‌ها از نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌ها کدام است؟

- (۱) 10
 (۲) 15
 (۳) 13
 (۴) $12/13$

۳۱۹- مساحت مثلثی به طول ارتفاع‌های $2/4$ ، 2 و $2/4$ کدام است؟

- (۱) $4/8$
 (۲) $3/2$
 (۳) 3
 (۴) 4

۳۲۰- در شکل مقابل $BP = 4AP$ و چهارضلعی BPQR متوازی‌الاضلاع است. نسبت مساحت مثلث APQ به مساحت مثلث رنگی کدام است؟

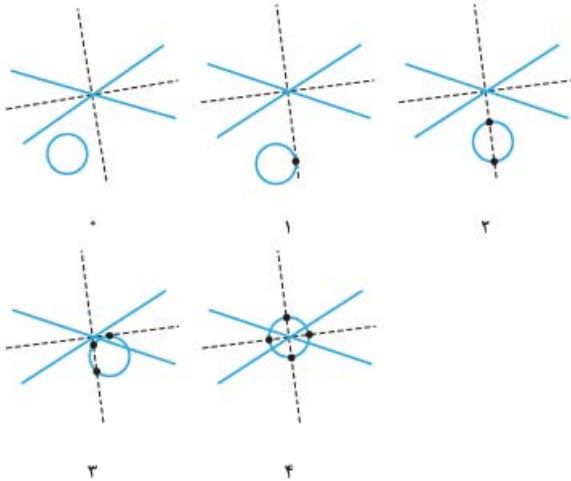


- (۱) 1
 (۲) $0/75$
 (۳) $0/5$
 (۴) $0/25$



آزمون ۱

۵- گزینه ۱ می‌دانیم نقطه‌ای که از دو خط متقاطع به یک فاصله است، روی نیمسازهای زاویه‌های بین آن‌ها قرار دارد. شکل‌های زیر نشان می‌دهد که این دایره می‌تواند با نیمسازها ۰، ۱، ۲، ۳ یا ۴ نقطه مشترک داشته باشند، پس n می‌تواند پنج مقدار متفاوت داشته باشد.



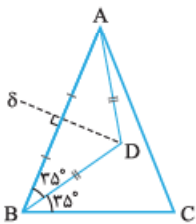
۶- گزینه ۲

$$\hat{B} = \hat{C} = 70^\circ \Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - 2 \times 70^\circ = 40^\circ$$

$$D \in \delta \Rightarrow DA = DB \Rightarrow \hat{BAD} = \hat{ABD} = 35^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{CAD} = 40^\circ - 35^\circ = 5^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{ABD}}{\hat{CAD}} = \frac{35^\circ}{5^\circ} = 7$$



۷- گزینه ۲ از $AB + 2 = AC + 1 = BC = 5$ نتیجه می‌گیریم

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \text{ از آنجا که } BC = 5 \text{ و } AC = 4, AB = 3$$

مثلث در رأس A قائم‌الزاویه است.

با توجه به شکل، از آنجا که

M روی عمودمنصف BC واقع

است $MB = MC$ پس در نظر

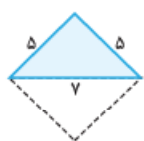
می‌گیریم $MB = x$ در این

صورت $AM = AC - MC = 4 - x$ ، حالا در مثلث قائم‌الزاویه

ABM داریم:

$$BM^2 = AB^2 + AM^2 \Rightarrow x^2 = 3^2 + (4-x)^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 9 + 16 - 8x + x^2 \Rightarrow x = \frac{25}{8}$$



۸- گزینه ۱ با اعداد ۵، ۵ و ۷ می‌توان تنها

یک مثلث رسم کرد؛ زیرا $7 < 5 + 5$ ، حالا اگر

دوتا از این مثلث‌ها را که در ضلع به طول ۷

مشترک‌اند رسم کنیم، لوزی موردنظر را رسم

کرده‌ایم.

۱- گزینه ۱ نقطه‌ای که از T به فاصله

R هستند، روی دایره‌ای به مرکز T و

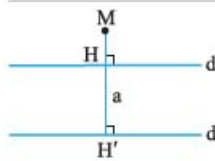
شعاع R واقع‌اند، با توجه به شکل اگر

فاصله T از d بیشتر از R باشد، هیچ

نقطه‌ای به فاصله R از T روی d وجود

ندارد، پس با توجه به شکل داریم:

$$TH > R \xrightarrow{R=10} \frac{TH=2x+1}{R=10} \Rightarrow 2x+1 > 10 \Rightarrow x > 4.5$$



۲- گزینه ۱ اول دقت کنید که اگر

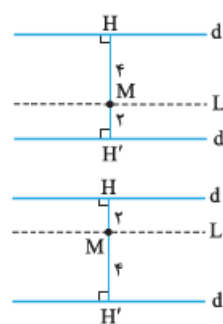
نقطه‌ای در خارج ناحیه بین دو خط

موازی باشد، تفاضل فاصله‌هایش از این

دو خط، می‌شود فاصله بین این دو خط؛

مثلاً در شکل روبه‌رو $MH' - MH = a$.

پس در این سؤال، اگر نقطه‌ای در خارج ناحیه بین d و d' واقع باشد، تفاضل فاصله‌هایش از d و d' می‌شود ۶.



حالا اگر M نقطه‌ای در ناحیه بین d

و d' باشد، دو حالت امکان‌پذیر است:

$$\begin{cases} MH + MH' = 6 \\ MH - MH' = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MH = 4 \\ MH' = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} MH + MH' = 6 \\ MH' - MH = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MH' = 4 \\ MH = 2 \end{cases}$$

دو خط L_1 و L_2 جواب‌های سؤال

هستند، L_1 به فاصله ۴ از d و ۲ از d' و L_2 به فاصله ۲ از d و ۴ از d'.

۳- گزینه ۲ با توجه به شکل OU

نیمساز زاویه TOV است؛ پس دو مثلث

قائم‌الزاویه OAH و OAK بنا به حالت

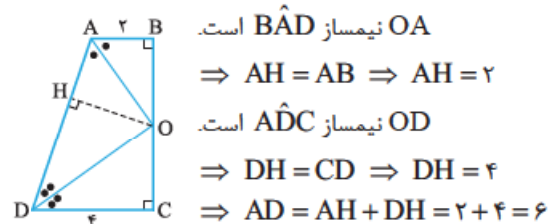
تساوی وتر و یک زاویه حاده هم‌نهشت

هستند، داریم:

$$\begin{cases} AH = AK \\ OH = OK \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = y + 2 \\ x = 2y - x \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow x + y = 5$$

۴- گزینه ۲ از نقطه O، عمود OH را بر AD وارد می‌کنیم، داریم:



OA نیمساز \hat{BAD} است.

$$\Rightarrow AH = AB \Rightarrow AH = 2$$

OD نیمساز \hat{ADC} است.

$$\Rightarrow DH = CD \Rightarrow DH = 4$$

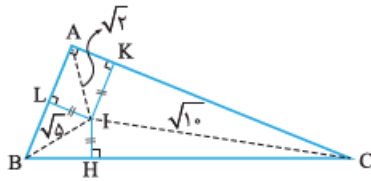
$$\Rightarrow AD = AH + DH = 2 + 4 = 6$$



۱۴- گزینه ۲ اگر $\hat{A} = \hat{B} + \hat{C}$ ، آن گاه با افزودن \hat{A} به دو طرف این معادله داریم:

$$2\hat{A} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} \\ \Rightarrow 2\hat{A} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

یعنی مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است و BC وتر آن است و می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه، نقطه هم‌مرسی عمودمنصف‌ها، وسط ضلع وتر است.



۱۵- گزینه ۱ با توجه به شکل نقطه I نقطه هم‌مرسی نیمسازهای داخلی مثلث ABC است.

می‌دانیم نقطه هم‌مرسی نیمسازهای داخلی از سه ضلع مثلث به یک فاصله است؛ یعنی $IH = IK = IL = x$. از طرفی چهارضلعی AKIL یک مستطیل است که دو ضلع مجاور آن هم‌اندازند، پس مربع است.

پس $IK = AK = x$. حالا در مثلث AKI داریم:

$$AI^2 = IK^2 + AK^2 \Rightarrow (\sqrt{2})^2 = x^2 + x^2 \\ \Rightarrow x = 1 \Rightarrow LI = AL = x = 1$$

در مثلث BIL داریم:

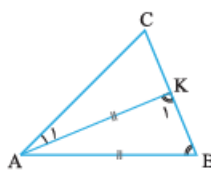
$$BL^2 + LI^2 = BI^2 \Rightarrow BL^2 + 1 = 5 \\ \Rightarrow BL^2 = 4 \Rightarrow BL = 2 \\ \Rightarrow AB = AL + BL = 1 + 2 = 3$$

۱۶- گزینه ۲ از آن جا که AB بزرگ‌ترین ضلع است، داریم:

$$AB > AC \Rightarrow \hat{C} > \hat{B} \\ AB > BC \Rightarrow \hat{C} > \hat{A}$$

با جمع طرفین دو نامعادله داریم:

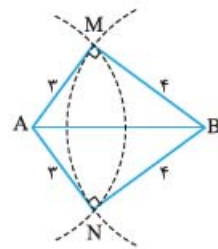
$$2\hat{C} > \hat{B} + \hat{A} \xrightarrow{+ \hat{C}} 3\hat{C} > \hat{B} + \hat{A} + \hat{C} \\ \Rightarrow 2\hat{C} > 180^\circ \Rightarrow \hat{C} > 90^\circ$$



۱۷- گزینه ۱ شکل مناسب را رسم می‌کنیم. مثلث ABK متساوی‌الساقین است، پس $\hat{B} = \hat{K}_1$. از طرفی \hat{K}_1 برای مثلث ACK یک زاویه خارجی است، پس $\hat{K}_1 > \hat{C}$ ؛ بنابراین $\hat{B} > \hat{C}$ و در نتیجه $AC > AB$.

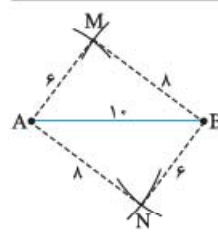
۱۸- گزینه ۲ نقیض گزاره «یک چهارضلعی وجود دارد که مجموع زاویه‌های داخلی آن 360° نیست.» می‌شود: «چنین نیست که یک چهارضلعی وجود دارد که مجموع زاویه‌های داخلی آن 360° نیست.» یا به بیان دیگر «مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی 360° است.»

۹- گزینه ۲ شکل مقابل نشان می‌دهد این چهارضلعی نه لوزی است، نه مستطیل و نه دوزنقه. توضیح بیشتر آن که در این چهارضلعی: همه ضلع‌ها با هم برابر نیستند، پس لوزی نیست.



ضلع‌های روبه‌رو با هم برابر نیستند، پس مستطیل نیست. $\hat{M} = \hat{N} = 90^\circ$ (به دلیل برقراری رابطه فیثاغورس در دو مثلث MAB و NAB)، یعنی دو زاویه روبه‌رو با هم برابرند، پس دوزنقه نیست.

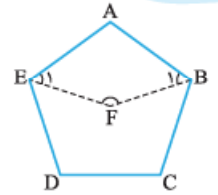
۱۰- گزینه ۲ در چهارضلعی AMBN طول ضلع‌های روبه‌رو با هم برابر است، پس این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است. از طرفی در مثلث MAB رابطه فیثاغورس برقرار است، پس این مثلث قائم‌الزاویه است. متوازی‌الاضلاعی که زاویه قائمه داشته باشد، مستطیل است؛ پس مساحت AMBN می‌شود:



$$AM \cdot BM = 6 \times 8 = 48$$

آزمون ۲

۱۱- گزینه ۲ هر زاویه داخلی پنج‌ضلعی منظم برابر است با:



$$\frac{(5-2) \times 180^\circ}{5} = 108^\circ$$

پس در چهارضلعی ABFE داریم:

$$\hat{A} = 108^\circ \text{ و } \hat{B}_1 = \hat{E}_1 = \frac{108^\circ}{2} = 54^\circ$$

از طرفی:

$$\hat{A} + \hat{B}_1 + \hat{F} + \hat{E}_1 = 360^\circ$$

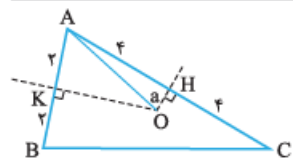
$$\Rightarrow 108^\circ + 54^\circ + \hat{F} + 54^\circ = 360^\circ \Rightarrow \hat{F} = 144^\circ$$

۱۲- گزینه ۲ مجموع زاویه‌های داخلی هر n ضلعی محدب

$$(n-2) \times 180^\circ \text{ و مجموع زاویه‌های خارجی آن } 360^\circ \text{ است، پس:}$$

$$(n-2) \times 180^\circ = 6 \times 360^\circ \Rightarrow n-2 = 6 \times 2 \Rightarrow n = 14$$

۱۳- گزینه ۲ شکل مقابل را در نظر می‌گیریم. با توجه به فرض



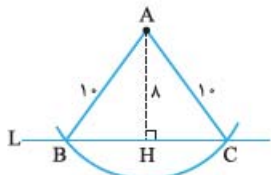
در مثلث قائم‌الزاویه AOH بنا به قضیه فیثاغورس داریم:

$$AO = \sqrt{a^2 + 16}$$

حالا در مثلث قائم‌الزاویه AOK از قضیه فیثاغورس استفاده می‌کنیم:

$$OK = \sqrt{OA^2 - AK^2}$$

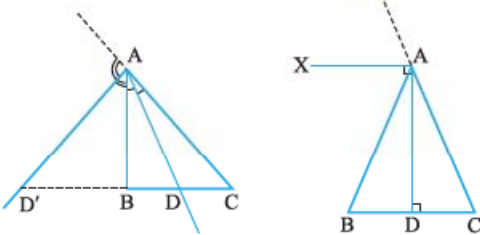
$$\Rightarrow OK = \sqrt{(a^2 + 16) - 4} = \sqrt{a^2 + 12}$$



$$S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} AH \times BC$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 12 = 48$$

۲۳- گزینه ۱: نقاطی که از AB و AC به یک فاصله هستند، در واقع نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه A هستند. با توجه به شکل، D و D' نقاط موردنظر هستند، اما اگر در مثلث ABC، AB = AC، آن گاه نیمساز خارجی زاویه A با BC موازی است و امتداد آن را قطع نمی‌کند. (دقت کنید AX و BC هر دو بر AD عمودند، پس با هم موازی‌اند).



۲۴- گزینه ۱: فرض کنید در مثلث ABC داریم $BC = 3$ ، $AM = 4$ و $AH = 5$. ابتدا پاره خط $BC = 3$ را رسم می‌کنیم. از A نتیجه می‌شود رأس A روی دایره‌ای به مرکز وسط BC و شعاع ۴ قرار دارد. از $AH = 5$ نتیجه می‌شود A روی دو خط موازی با BC و فاصله ۵ از آن قرار دارد. با توجه به شکل، این دایره با این دو خط نقطه مشترک ندارد، پس چنین مثلی وجود ندارد.

۲۵- گزینه ۱: با توجه به صورت سؤال، شکل را رسم می‌کنیم. در چهارضلعی APBQ قطرهای با هم برابر و عمودمنصف هم هستند. پس این چهارضلعی مربعی به قطر ۱۰ است و مساحت آن می‌شود:

$$S = \frac{AB^2}{2} = \frac{10^2}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

۲۶- گزینه ۱: طول ضلع لوزی که همان شعاع کمان‌های رسم شده است را r در نظر می‌گیریم. با توجه به شکل اگر $AM = r$ و $AMCN$ لوزی باشد، از $CD = 18$ نتیجه می‌گیریم. $DM = 18 - r$ ، پس در مثلث ADM داریم:

$$\hat{D} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow AM^2 = AD^2 + DM^2$$

$$\Rightarrow r^2 = 6^2 + (18 - r)^2$$

$$\Rightarrow r^2 - (18 - r)^2 = 36 \Rightarrow (r - 18 + r)(r + 18 - r) = 36$$

$$\Rightarrow 18(2r - 18) = 36 \Rightarrow r = 10$$

۱۹- گزینه ۱: فرض کنیم $\hat{A}XB = 90^\circ$. در این صورت:

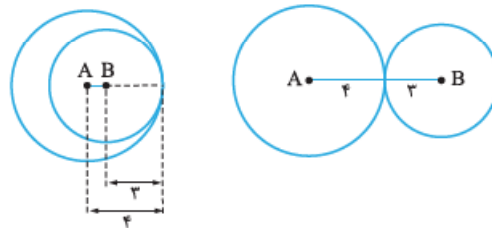
$$\begin{cases} \triangle ABC \xrightarrow{\hat{A}=90^\circ} \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \\ \triangle AXC \xrightarrow{\hat{X}=90^\circ} \hat{C} + \hat{CAX} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{CAX} = \hat{B}$$

که با فرض مسئله در تناقض است. پس $\hat{A}XB = 90^\circ$ باطل است و $\hat{A}XB \neq 90^\circ$. در مورد ۱ و ۲ هم دقت کنید که \hat{B} و \hat{C} هر وضعیتی نسبت به هم می‌توانند داشته باشند و لزومی ندارد \hat{B} بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از \hat{C} باشد.

۲۰- گزینه ۱: در ۱ عکس قضیه به این صورت است: «اگر نقطه همرسی ارتفاع‌های یک مثلث داخل آن نباشد، آن مثلث دارای زاویه منفرجه است». برای رد این حکم می‌توان مثلث قائم‌الزاویه را به عنوان مثال نقض در نظر گرفت که نقطه همرسی ارتفاع‌های آن داخل مثلث نیست (روی محیط آن است یا به بیان دقیق‌تر رأس قائمه مثلث است) ولی مثلث دارای زاویه منفرجه نیست.

آزمون ۳

۲۱- گزینه ۱: دو شکل زیر را ببینید:



اگر $AB = 1$ یا $AB = 7$ ، دایره A به مرکز A و شعاع ۳ با دایره B به مرکز B و شعاع ۴ تنها یک نقطه مشترک دارند. پس اگر $1 < AB < 7$ دو دایره در دو نقطه متقاطع هستند، به عبارت دیگر دو نقطه وجود دارد که از A به فاصله ۳ و از B به فاصله ۴ است.

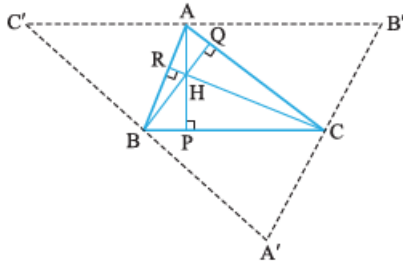
نقطاتی که از A به فاصله ۴ هستند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۴ قرار دارند و نقاطی که از B به فاصله ۳ هستند، روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۳ قرار دارند. حالا اگر این دو دایره در دو نقطه متقاطع باشند، با توجه به شکل می‌توان گفت که $AC = 4$ و $BC = 3$ دو ضلع از مثلث ABC هستند، در این صورت:

$$|AC - BC| < AB < AC + BC \Rightarrow 1 < AB < 7$$

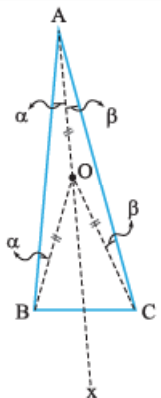
۲۲- گزینه ۱: دو نقطه B و C از تقاطع دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۱۰ با خط L به دست می‌آیند. در مثلث قائم‌الزاویه ABH، وتر $AB = 2 \times 5 = 10$ و $AH = 2 \times 4 = 8$ ، یک ضلع زاویه قائمه است؛ پس ضلع دیگر زاویه قائمه می‌شود $BH = 2 \times 3 = 6$ ؛ بنابراین $BC = 2BH = 12$. حالا داریم:



۲۲- گزینه ۲



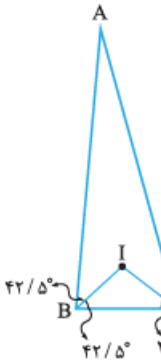
مطابق شکل چهارضلعی $ABCB'$ متوازی الاضلاع است؛ پس $AB' = BC$ چهارضلعی $ACBC'$ هم متوازی الاضلاع است، پس $AC' = BC$ نتیجه آن که $AB' = AC'$ ؛ به عبارت دیگر A وسط $B'C'$ است. از طرفی BC با $B'C'$ موازی است و AP بر BC عمود است، پس AP در نقطه A که وسط $B'C'$ است، بر آن عمود است. به عبارت دیگر AP عمودمنصف $B'C'$ است. با نظیر همین استدلال می توان ثابت کرد BQ عمودمنصف $A'C'$ و CR عمودمنصف $A'B'$ است. پس H می شود نقطه همرسی عمودمنصف های مثلث $A'B'C'$.



۲۳- گزینه ۲ اگر $\hat{A} = 20^\circ$ و $\hat{C} = 85^\circ$ آن گاه $\hat{B} = 75^\circ$. با توجه به شکل اگر O نقطه همرسی عمودمنصف ها باشد، از سه رأس مثلث به یک فاصله است و داریم:

$$\begin{aligned} \text{زاویه خارجی } B\hat{O}x &= 2\alpha \\ \text{زاویه خارجی } C\hat{O}x &= 2\beta \\ \Rightarrow B\hat{O}C &= B\hat{O}x + C\hat{O}x = 2\alpha + 2\beta \\ &= 2(\alpha + \beta) = 2\hat{A} = 40^\circ \end{aligned}$$

اگر I نقطه همرسی نیمسازهای زاویه های داخلی باشد، داریم:



$$\begin{aligned} \triangle IBC: B\hat{I}C + 42/5^\circ + 37/5^\circ &= 180^\circ \\ \Rightarrow B\hat{I}C &= 100^\circ \\ \Rightarrow \frac{B\hat{I}C}{B\hat{O}C} &= \frac{100^\circ}{40^\circ} = 2/5 \end{aligned}$$

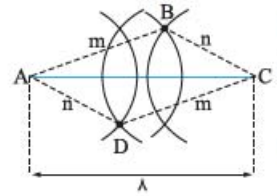
۲۴- گزینه ۲ از $\hat{A} + \hat{C} = 2\hat{B}$ نتیجه می شود $\hat{B} = \frac{\hat{A} + \hat{C}}{2}$

یعنی \hat{B} میانگین \hat{A} و \hat{C} است؛ پس بین \hat{A} و \hat{C} قرار دارد، یعنی با در نظر گرفتن $\hat{A} < \hat{C}$ داریم:

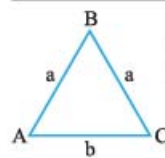
$$\hat{A} < \hat{B} < \hat{C} \quad (\cong)$$

از آن جا که ضلع روبه روی زاویه بزرگ تر، بزرگ تر است از ضلع روبه روی زاویه کوچک تر، از (\cong) نتیجه می گیریم: $BC < AC < AB$

۲۷- گزینه ۲ با توجه به شکل، شعاع دایره بزرگ تر را m و شعاع دایره کوچک تر را n در نظر می گیریم. برای آن که متوازی الاضلاع قابل رسم باشد، باید کماتی که از A به شعاع m رسم می شود با کماتی که از C به شعاع n رسم می شود متقاطع باشد؛ یا به عبارت دیگر مثلث ABC به طول ضلع های m, n و $n + m$ قابل رسم باشد، یعنی باید: $n + m > m$ و $m + n > n$

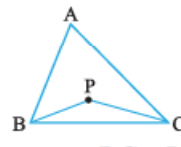


که مقادیر (\cong) در هر سه نامساوی صدق می کند.



۲۸- گزینه ۲ قاعده مثلث را b در نظر می گیریم، با توجه به فرض $2a + b = 2p$ از طرفی داریم:

$$\begin{aligned} AB + BC > AC &\Rightarrow a + a > b \\ \Rightarrow b - a < a &\xrightarrow{+2a} b - a + 2a < a + 2a \\ \Rightarrow 2p < 4a &\Rightarrow \frac{1}{2}p < a \quad (\cong) \\ AB + AC > BC &\Rightarrow a + b > a \xrightarrow{+a} a + b + a > a + a \\ \Rightarrow 2p > 2a &\Rightarrow a < p \quad (\cong\cong) \\ (\cong) \text{ و } (\cong\cong) &\Rightarrow \frac{1}{2}p < a < p \end{aligned}$$



۲۹- گزینه ۲ اگر از نقطه P درون مثلث ABC به دو رأس B و C وصل کنیم، آن گاه $BC < PB + PC < AB + AC$ با توجه به این نکته، در این سؤال $BC < PB + PC < \gamma$ ، از طرفی در مثلث ABC داریم:

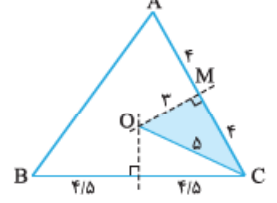
$$|AC - AB| < BC < AB + AC \quad (**)$$

هر دو رابطه (\cong) و $(\cong\cong)$ را در نظر بگیریم، برای نقطه P داریم: $1 < PB + PC < \gamma$

۳۰- گزینه ۲ می دانیم مجموع زاویه های خارجی هر n ضلعی محدب 360° است، پس هر n ضلعی محدب حداکثر می تواند سه زاویه منفرجه خارجی داشته باشد (اگر سه بشود چهار، مجموع چهار زاویه بیشتر از 90° ، بیشتر از 360° می شود). زاویه منفرجه خارجی یعنی زاویه حاده داخلی (مجموع زاویه داخلی و زاویه خارجی 180° است)، پس هر n ضلعی محدب، حداکثر سه زاویه حاده داخلی دارد.

۳۱- گزینه ۱ نقطه همرسی عمودمنصف ها، از هر سه رأس مثلث به یک فاصله است، پس: $m - 2 = 2m - 9 \Rightarrow m = 7$

$$\Rightarrow \text{فاصله نقطه همرسی عمودمنصف ها از رأس ها} = m - 2 = 5$$



حالا با توجه به شکل، بنا به قضیه فیثاغورس می توان گفت در مثلث قائم الزاویه OCM داریم $OM = 3$ ، یعنی فاصله نقطه همرسی عمودمنصف ها از وسط ضلع متوسط، ۳ است.



۳۵- گزینه ۱ نیمسازهای زاویه‌های هر مثلث، داخل آن مثلث قرار می‌گیرند، پس نقطه همرسی نیمسازهای زاویه‌های داخلی هم همیشه داخل مثلث است، پس ۱ همیشه درست است. به عنوان مثال نقض برای ۲ مثلثی با زاویه منفرجه را در نظر بگیرید که نقطه همرسی ارتفاع‌های آن بیرون مثلث است. به عنوان مثال نقض برای ۳ مثلثی قائم‌الزاویه را در نظر بگیرید که نقطه همرسی عمودمنصف‌های آن وسط وتر مثلث است. به عنوان مثال نقض برای ۴ مثلث متساوی‌الاضلاع را در نظر بگیرید که ارتفاع‌های آن همان نیمسازهای زاویه‌های مثلث هستند، لذا نقطه همرسی ارتفاع‌ها، همان نقطه همرسی نیمسازهای زاویه‌ها است که از هر سه ضلع به یک فاصله است.



$$\Rightarrow \frac{KL}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{BC}{KL} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

۳۰۰- گزینه ۲ ابتدا عبارت خواسته شده را ساده تر می کنیم:

$$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{b^2 + c^2}{(bc)^2}$$

$$= \frac{a^2}{(bc)^2} = \left(\frac{a}{bc}\right)^2$$

از طرفی می دانیم $a \cdot h_a = bc = 2S$ ، بنابراین:

$$\left(\frac{a}{bc}\right)^2 = \left(\frac{a}{a \cdot h_a}\right)^2 = \frac{1}{h_a^2} \Rightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left(\frac{1}{1/5}\right)^2 = \left(\frac{5}{1}\right)^2 = \frac{25}{1}$$

۳۰۱- گزینه ۲ از نقطه M خطی به موازات قاعده های دوزنقه

رسم کنیم تا AC را در نقطه N قطع کند.
 $MN \parallel AB$
 از طرفی طبق فرض داریم:

$$\Delta AB = 4CD \Rightarrow \begin{cases} AB = 4a \\ CD = a \end{cases} \xrightarrow{(*)} MN = 2a$$

$$\Delta MKN \sim \Delta CKD, \frac{MN}{CD} = \frac{NK}{CK} = \frac{2}{5}$$

هم چنین:

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta MKN}}{S_{\Delta CKD}} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \quad (**)$$

$$\frac{S_{\Delta MKN}}{S_{\Delta MKC}} = \frac{NK}{CK} = \frac{2}{5} \Rightarrow S_{\Delta MKN} = \frac{2}{5} S_{\Delta MKC}$$

از طرفی داریم:

حال با توجه به رابطه $(**)$ داریم:

$$\frac{\frac{2}{5} S_{\Delta MKC}}{S_{\Delta CKD}} = \frac{4}{25} \Rightarrow \frac{S_{\Delta MKC}}{S_{\Delta CKD}} = \frac{5}{2} \times \frac{4}{25} = \frac{2}{5} = 0.4$$

۳۰۲- گزینه ۲ در نظر می گیریم $AB = x$ در مثل قائم الزاویه ABC داریم:

$$\hat{C} = 30^\circ \Rightarrow BC = 2AB \Rightarrow BC = 2x$$

در مثل قائم الزاویه متساوی الساقین ABD داریم:

$$AD = AB \Rightarrow AD = x$$

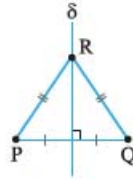
از طرفی در مثل قائم الزاویه ABC داریم:

$$\hat{A} = 60^\circ \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{3}}{2} BC \Rightarrow x + 4 = \frac{\sqrt{3}}{2} (2x)$$

$$\Rightarrow x + 4 = \sqrt{3}x \Rightarrow (\sqrt{3} - 1)x = 4$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{\sqrt{3} - 1} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} = 2(\sqrt{3} + 1)$$

آزمون ۲۵



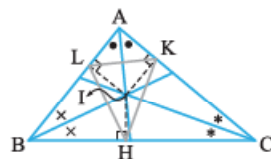
۲۹۶- گزینه ۲ اگر PQ قاعده مثلث متساوی الساقین PQR باشد، در این صورت R روی عمود منصف PQ قرار دارد. (شکل را نگاه کنید).

پس با توجه به صورت سؤال، می توان گفت که رأس دیگر مثلث، نقطه مشترک Δ و عمود منصف PQ است، سه حالت امکان پذیر است:



در حالت های (۱)، (۲) و (۳) به ترتیب یک، صفر و بی شمار جواب برای مسئله به دست می آید.

۲۹۷- گزینه ۲ مطابق شکل، نقطه I نقطه همرسی نیمسازهای داخلی مثلث ABC است، بنابراین از سه ضلع آن به یک فاصله است، یعنی اگر از I عمودهای IH، IK و IL را به ترتیب بر BC، AC و AB وارد کنیم، آن گاه $IH = IK = IL$ و این نشان دهنده آن است که نقطه I از سه رأس مثلث HKL به یک فاصله است، بنابراین نقطه I همرسی عمود منصف های ضلع های مثلث HKL است.

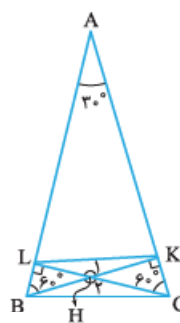


۲۹۸- گزینه ۲ $AC = 2AB = 12 \Rightarrow AC = 12, AB = 6$

$AB < AC$ ، پس: $\hat{B} > \hat{C}$
 هم چنین بنا بر فرض نتیجه می گیریم که در شکل روبه رو، چهارضلعی AEDF متوازی الاضلاع است و طبق قضیه خطوط موازی و مورب $\hat{D}_1 = \hat{C}$ و $\hat{D}_2 = \hat{B}$ بنابراین:

$$\begin{cases} AE = DF, AF = DE \\ \hat{BDE} : \hat{D}_1 < \hat{B} \Rightarrow BE < DE \end{cases}$$

لذا داریم: $BE + AE < DE + DF \Rightarrow AB < DE + DF$
 به طریق مشابه می توان نتیجه گرفت که: $DE + DF < AC$
 پس: $AB < DE + DF < AC \Rightarrow 6 < DE + DF < 12$



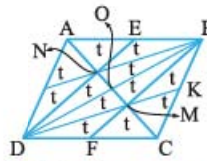
۲۹۹- گزینه ۲ با توجه به شکل در دو مثلث قائم الزاویه ABK و ACL، یکی از زاویه های حاده 30° است، پس زاویه حاده دیگر 60° است، یعنی $\hat{ABK} = \hat{ACL} = 60^\circ$ داریم:

$$\begin{cases} \Delta BHL : \sin 60^\circ = \frac{HL}{BH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Delta CHK : \sin 60^\circ = \frac{HK}{CH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{HL}{BH} = \frac{HK}{CH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{\hat{H}_1 = \hat{H}_2} \Delta HKL \sim \Delta HCB$$



۳۰۳- گزینه ۲ قطر BD را رسم می‌کنیم:



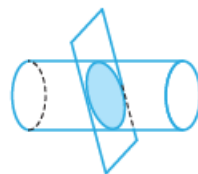
از آنجا که AO و DE به ترتیب AB و BD را نصف می‌کنند، نقطه N هم‌رسی میانه‌های مثلث ABD بوده و در نتیجه BN نیز AD را نصف می‌کند. به طریق مشابه نقطه M نیز نقطه هم‌رسی میانه‌های مثلث BCD است. لذا مساحت تمامی ۱۲ مثلث ایجاد شده با یکدیگر برابر است. حال اگر مساحت هر کدام از آن‌ها را t در نظر بگیریم، داریم:

$$\begin{cases} S_{BMNE} = 2t \\ S_{BMDN} = 4t \end{cases} \Rightarrow \frac{S_{BMNE}}{S_{BMDN}} = \frac{2t}{4t} = 0.5$$

۳۰۴- گزینه ۲ داریم $S = \frac{b}{2} + i - 1$ ، از طرفی طبق فرض $b = 6i$ پس:

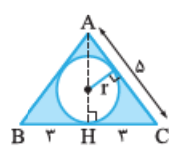
$$S = \frac{6i}{2} + i - 1 \Rightarrow S = 4i - 1 \Rightarrow i = \frac{S+1}{4}$$

از آنجا که i عددی صحیح است، تنها i=4 یعنی S=7 می‌تواند قابل قبول باشد.



۳۰۵- گزینه ۲ مقطع یک استوانه کامل با صفحه مایلی که از قاعده‌های آن عبور نکند، یک بیضی است، پس اگر استوانه به نیم‌استوانه تبدیل شود، مقطع حاصل یک نیم‌بیضی، یعنی قسمتی از یک بیضی خواهد بود.

۳۰۶- گزینه ۲ با توجه به شکل، با استفاده از



قضیه فیثاغورس، در مثلث قائم‌الزاویه ACH، طول AH برابر با ۴ خواهد بود و شعاع دایره محاطی داخلی برابر است با:

$$r = \frac{S}{P} = \frac{\frac{AH \times BC}{2}}{\frac{AB + AC + BC}{2}} = \frac{4 \times 6}{5 + 5 + 6} = \frac{2}{2}$$

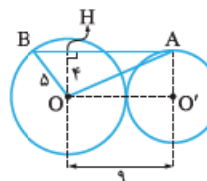
حجم شکل حاصل از دوران ABC حول AH برابر است با:

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi \cdot CH^2 \cdot AH = \frac{1}{3} \pi \times 9 \times 4 = 12\pi$$

حجم شکل حاصل از دوران دایره حول AH برابر است با:

$$V_2 = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{2}{2}\right)^3 = \frac{4}{3} \pi = 4/5\pi$$

$$\Rightarrow \text{حجم شکل مورد نظر } V = V_1 - V_2 = 12\pi - 4/5\pi = 7/5\pi$$



۳۰۷- گزینه ۲ از آنجا که OO' = R + R' دو دایره مماس خارج هستند. با توجه به شکل، داریم:

$$\Delta BOH \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} BH = 3$$

$$\Delta OAO' \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} OA = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

پس اضلاع مثلث OAB عبارتند از:

$$OA = \sqrt{17}, OB = 5, AB = AH + BH = 12$$

$$\Rightarrow \text{محیط } \triangle OAB = 12 + 5 + \sqrt{17} = 17 + \sqrt{17}$$

$$\xrightarrow{9 < \sqrt{17} < 10} 26 < \text{محیط } \triangle OAB < 27$$



۳۰۸- گزینه ۲ مطابق شکل دو زاویه محاطی ACB و ADB هر دو روبه‌روی کمان AB هستند، پس با هم برابرند، از آنجا که دو مثلث ABC و AED یک جفت زاویه برابر دارند، با هم متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{ED} \Rightarrow AB \cdot AD = AE \cdot AC$$

۳۰۹- گزینه ۲ با توجه به شکل اگر از مرکز دایره محاطی به ضلع بزرگ‌تر این مثلث عمود کنیم و امتداد دهیم تا این عمود دایره محاطی را قطع کند، فاصله بین پای این عمود و نقطه تقاطع آن با دایره محاطی، جواب سؤال است (یعنی طول پاره‌خط HK).



برای محاسبه HK ارتفاع وارد بر قاعده این مثلث متساوی‌الساقین را رسم می‌کنیم بنا به قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه ABH، طول AH می‌شود ۴. برای دو وتر AK و BC داریم:



$$AH \cdot HK = BH \cdot HC$$

$$\Rightarrow 4HK = 3 \times 3 \Rightarrow HK = \frac{9}{4} = 2.25$$

۳۱۰- گزینه ۲ می‌دانیم مساحت یک چندضلعی محاطی با طول شعاع دایره محاطی r و محیط 2P برابر است با:

$$S = r \cdot P \quad (*)$$

از طرفی در چهارضلعی محاطی، مجموع طول اضلاع مقابل با هم برابر است، در نتیجه:

$$2P = 2(AD + BC) = 2(2r + 9) \Rightarrow P = 2r + 9$$

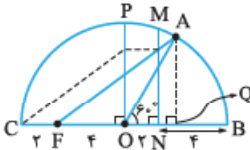
حال بنا بر رابطه (*) نتیجه می‌شود:

$$45 = r(9 + 2r) \Rightarrow 2r^2 + 9r - 45 = 0$$

$$\Rightarrow (r - 3)(2r + 15) = 0 \Rightarrow r = 3$$

۳۱۱- گزینه ۲ تصویر هر خط تحت هر یک از تبدیل‌های انتقال و تجانس، با خود آن خط موازی است و نمی‌تواند بر آن عمود باشد. اما تصویر خط d تحت یک دوران 90° یا بازتاب نسبت به محوری که با d زاویه 45° می‌سازد، بر d عمود است.

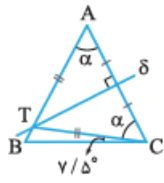
۳۱۲- گزینه ۲ با توجه به شکل، C را در راستای برداری به طول ۲، عمود بر MN و OP منتقل می‌کنیم تا F به دست آید.



طول کوتاه‌ترین مسیر مورد نظر برابر با مجموع طول AF و CF است.

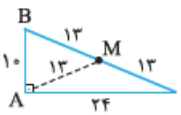
$$OA = OB = 2 + 4 = 6 \quad (\text{شعاع نیم‌دایره})$$





۳۱۷- گزینه ۲ با توجه به شکل، T روی عمودمنصف AC واقع است، پس $\hat{A} = \hat{A}CT$ و $TA = TC$

از طرفی: $\Delta ABC: \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$
 $\hat{B} = \hat{C} \rightarrow \hat{A} + 2\hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \alpha + 2(\alpha + 7/5^\circ) = 180^\circ$
 $\Rightarrow 3\alpha + 14^\circ = 180^\circ \Rightarrow 3\alpha = 166 \Rightarrow \alpha = 55^\circ$



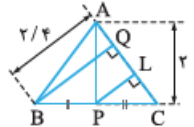
۳۱۸- گزینه ۲ با توجه به شکل و اندازه اضلاع داریم:

$26^2 = 24^2 + 10^2 \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$
 در نتیجه مثلث ABC قائم الزاویه است.

از طرفی می دانیم در مثلث قائم الزاویه، محل تلاقی ارتفاعها، رأس قائمه (نقطه A) و محل تلاقی عمودمنصفهای اضلاع، وسط وتر (نقطه M) است. هم چنین می دانیم در مثلث قائم الزاویه، طول میانه وارد بر وتر، نصف وتر است؛ بنابراین فاصله نقطه A تا M برابر است با:

$AM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 26 = 13$

۳۱۹- گزینه ۲ طول دو ارتفاع با هم برابر است، پس مثلث مورد نظر متساوی الساقین است. از پای ارتفاع وارد بر قاعده، عمودی بر یکی از ساقها وارد می کنیم. مطابق شکل داریم:



$\Delta BCQ \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{PL}{BQ} = \frac{PC}{BC} \Rightarrow \frac{PL}{2/4} = \frac{1}{2} \Rightarrow PL = 1/2$

$\Delta ALP \xrightarrow{\text{پیتاگورس}} AL = \sqrt{AP^2 - PL^2} = \sqrt{2^2 - (\frac{1}{2})^2}$

$= \sqrt{\frac{64}{25} - \frac{1}{25}} = \frac{1}{6}$

$\Delta APC: PL^2 = AL \cdot CL \Rightarrow (\frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{6}) \cdot CL \Rightarrow CL = 0/9$

$\Rightarrow AC = AL + CL = 2/5$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BQ \cdot AC = \frac{1}{2} \times 2/4 \times 2/5 = 3$

۳۲۰- گزینه ۲ مثلثهای APQ و CQR به ترتیب با نسبتهای 1/5 و 4/5 با مثلث ABC متشابهاند، پس داریم:

$S_{BPQR} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta APQ} - S_{\Delta CQR}$
 $= S_{\Delta ABC} - (\frac{1}{5})^2 S_{\Delta ABC} - (\frac{4}{5})^2 S_{\Delta ABC} = \frac{1}{25} S_{\Delta ABC}$

$\Rightarrow S_{\Delta OBR} = \frac{1}{4} S_{BPQR} = \frac{1}{100} S_{\Delta ABC}$

$\Rightarrow \frac{S_{\Delta APQ}}{S_{\Delta OBR}} = \frac{\frac{1}{25} S_{\Delta ABC}}{\frac{1}{100} S_{\Delta ABC}} = 4$

$\Delta AOQ: \begin{cases} AQ = \frac{\sqrt{3}}{2} OA \Rightarrow AQ = 3\sqrt{3} \\ OQ = \frac{1}{2} OA \Rightarrow OQ = 3 \end{cases}$

$\Delta AFQ: AF = \sqrt{AQ^2 + FQ^2}$
 $\Rightarrow AF = \sqrt{27 + 49} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$
 $\Rightarrow AF + CF = 2\sqrt{19} + 2 = 2(\sqrt{19} + 1)$

۳۱۳- گزینه ۱ از قضیه نیمساز داخلی می دانیم:

$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} \quad (*)$

و از قضیه سینوسها می دانیم:

$\frac{AC}{\sin \hat{B}} = \frac{AB}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{B}}$

$\xrightarrow{(*)} \frac{BD}{CD} = \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{B}}$



۳۱۴- گزینه ۱ از قضیه استورات استفاده می کنیم:

$BD \cdot AC^2 + CD \cdot AB^2 = BC \cdot BD \cdot CD + BC \cdot AD^2$
 $\Rightarrow 5x^2 + 7 \times 16 = 12 \times 5 \times 7 + 12 \times 6^2$
 $\Rightarrow 5x^2 = 4(105 + 108 - 28) \Rightarrow 5x^2 = 4 \times 185$
 $\Rightarrow x^2 = 4 \times 37 \Rightarrow x = 2\sqrt{37}$

۳۱۵- گزینه ۱ با استفاده از قضیه فیثاغورس

در مثلث قائم الزاویه ABD نتیجه می گیریم که: $BD = 13$

با استفاده از قضیه هرون در مثلث BCD داریم:

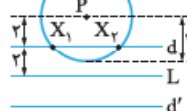
$P = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21$
 $\Rightarrow S_{\Delta BCD} = \sqrt{21 \times (21 - 13) + (21 - 14) \times (21 - 15)} = 84$

از طرفی: $S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD = \frac{1}{2} \times 12 \times 5 = 30$

$\Rightarrow S_{ABCD} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BCD} = 30 + 84 = 114$

آزمون ۲۶

۳۱۶- گزینه ۲ نقاطی که از P به فاصله ۳ واحد هستند، روی دایره‌ای به مرکز P و شعاع ۳ قرار دارند و نقاطی که از L به فاصله ۲ هستند، تشکیل دو خط موازی با L و



به فاصله ۲ از آن می دهند که با توجه به شکل، دو نقطه X_1 و X_2 شرایط مسئله را دارا هستند.