فهرست

ماتریس و کاربردها

فصل اول: ماتریس و کاربردها ۷
درس اول: ماتریس و اعمال روی آن ۷
درس دوم: وارون ماتریس و دترمینان ۲۰
پاسخ سؤال‌های امتحانی ۳۴

آشنایی با مقاطع مخروطی

فصل دوم: آشنایی با مقاطع مخروطی ۴۵
درس اول: آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی ۴۵
درس دوم: دایره ۴۹
درس سوم: بیضی و سهمی ۶۰
پاسخ سؤال‌های امتحانی ۷۵

بردارها

فصل سوم: بردارها ۹۲
درس اول: معرفی فضای $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ ۹۲
درس دوم: ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها ۱۰۷
پاسخ سؤال‌های امتحانی ۱۱۸

آزمون‌های نیم‌سال اول ۱۳۰
آزمون‌های نیم‌سال دوم ۱۳۳
پاسخنامهٔ آزمون‌های نیم‌سال اول ۱۳۹
پاسخنامهٔ آزمون‌های نیم‌سال دوم ۱۴۶

فصل اول

ماتریس و کاربردها

۱ ماتریس و اعمال روی آن

تعریف ماتریس هر آرایش مستطیل‌شکل از اعداد حقیقی را یک ماتریس می‌نامند.

برای نمایش ماتریس، اعداد آن را داخل دو کروشه قرار می‌دهند.

به عنوان مثال؛ عبارت زیر، یک ماتریس است. همان‌گونه که مشاهده می‌کنید این ماتریس دارای دو سطر و سه ستون می‌باشد و اصطلاحاً می‌گوییم این ماتریس از مرتبهٔ ۳×۲ است.

$$A=\begin{array}{cccc} \overset{\text{ستون اول}}{\uparrow} & \overset{\text{ستون دوم}}{\uparrow} & \overset{\text{ستون سوم}}{\uparrow} & \\ \left[\begin{matrix} ۲ & ۰ & ۵ \\ -۳ & ۱ & \sqrt{۲} \end{matrix}\right] & & & \begin{matrix} \rightarrow \text{سطر اول} \\ \rightarrow \text{سطر دوم} \end{matrix} \end{array}$$

به طور کلی، اگر ماتریس A دارای m سطر و n ستون باشد، می‌گوییم ماتریس A از مرتبهٔ $m\times n$ است و آن را با نماد $A_{m\times n}$ نمایش می‌دهیم.

هر یک از عددهای موجود در ماتریس را یک «درایه» از ماتریس می‌نامند. اگر درایه‌ای در محل برخورد سطر دوم و ستون سوم قرار داشته باشد، آن را با نماد $a_{۲۳}$ نمایش می‌دهیم. به عنوان مثال، در ماتریس فوق درایهٔ $\sqrt{۲}$ در محل برخورد سطر دوم با ستون سوم قرار دارد، پس می‌گوییم $a_{۲۳}=\sqrt{۲}$ و یا $a_{۱۲}=۰$. به طور کلی درایه‌ای که در سطر iاُم و ستون jاُم قرار دارد با a_{ij} نمایش داده می‌شود.

تذکرمهم هر ماتریس از مرتبهٔ ۱×۱ را معادل با یک عدد حقیقی در نظر می‌گیریم؛ یعنی اگر $A=[a]_{۱\times۱}$، آن‌گاه می‌گوییم $A=[a]_{۱\times۱}=a$.

نمایش اختصاری ماتریس‌ها

فرض کنیم ماتریس B از مرتبهٔ $m\times n$ به صورت روبه‌رو باشد:

$$B_{m\times n}=\begin{array}{c} \begin{matrix} \phantom{b_{۱۱}} & \phantom{b_{۱۲}} & & \overset{\text{ستون jام}}{\uparrow} & & \end{matrix} \\ \left[\begin{matrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} & \cdots & b_{۱j} & \cdots & b_{۱n} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & \cdots & b_{۲j} & \cdots & b_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i۱} & b_{i۲} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m۱} & b_{m۲} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn} \end{matrix}\right] \end{array} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \rightarrow \text{سطر iام} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

چون نمایش این ماتریس به صورت فوق به فضای زیادی نیاز دارد و ضمناً زمان زیادی برای نوشتن و خواندن آن لازم است، معمولاً آن را به صورت مختصر $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ نمایش می‌دهند و اگر مرتبهٔ آن برای ما مشخص باشد و بیم اشتباه نرود، آن‌گاه آن را به صورت $B=[b_{ij}]$ نیز نمایش می‌دهند.

مثال و پاسخ

مثال ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۲}$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$\forall i,j,۱\leq i\leq ۳,۱\leq j\leq ۲:\begin{cases}a_{ij}=i+j \ :\ i>j\\ a_{ij}=i\times j \ :\ i=j\\ a_{ij}=i-j \ :\ i<j\end{cases}$$

این ماتریس را با درایه‌هایش نمایش دهید.

پاسخ چون A از مرتبهٔ ۳×۲ است، پس ماتریس A باید به صورت مقابل باشد:

$$A=\begin{bmatrix}\square & \square\\ \square & \square\\ \square & \square\end{bmatrix}$$

در درایهٔ $a_{۱۱}$، چون $i=j=۱$، پس $a_{۱۱}=۱\times۱=۱$.

در درایهٔ $a_{۱۲}$، $i<j$ است، پس $a_{۱۲}=۱-۲=-۱$.

در درایهٔ $a_{۲۱}$، $i>j$ است، پس $a_{۲۱}=۲+۱=۳$.

در درایهٔ $a_{۲۲}$، $i=j$، پس $a_{۲۲}=۲\times۲=۴$.

در درایهٔ $a_{۳۱}$، $i>j$، پس $a_{۳۱}=۳+۱=۴$.

و سرانجام در درایهٔ $a_{۳۲}$ نیز $i>j$ است و در نتیجه $a_{۳۲}=۳+۲=۵$.

اکنون واضح است که ماتریس A به صورت زیر خواهد بود:

$$A=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۳ & ۴\\ ۴ & ۵\end{bmatrix}$$

مثال و پاسخ

مثال ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$\forall i,j:\begin{cases}a_{ij}=i\times j^{۲} \ :\ i<j\\ a_{ij}=i+۲j \ :\ i\geq j\end{cases}$$

مجموع درایه‌های ماتریس A را پیدا کنید.

پاسخ همانند مثال قبل داریم:

$$\left.\begin{array}{l}a_{۱۱}=۱+۲\times۱=۳\ ,\ a_{۱۲}=۱\times۲^{۲}=۴\ ,\ a_{۱۳}=۱\times۳^{۲}=۹\\ a_{۲۱}=۲+۲\times۱=۴\ ,\ a_{۲۲}=۲+۲\times۲=۶\ ,\ a_{۲۳}=۲\times۳^{۲}=۱۸\\ a_{۳۱}=۳+۲\times۱=۵\ ,\ a_{۳۲}=۳+۲\times۲=۷\ ,\ a_{۳۳}=۳+۲\times۳=۹\end{array}\right|\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۳ & ۴ & ۹\\ ۴ & ۶ & ۱۸\\ ۵ & ۷ & ۹\end{bmatrix}$$

اکنون به سادگی معلوم می‌شود که مجموع درایه‌های این ماتریس برابر ۶۵ است.

مثال و پاسخ

مثال یک ضابطه برای ماتریس مقابل به دست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۴ & ۴\\ ۳ & ۴ & ۴\\ ۴ & ۵ & ۶\end{bmatrix}$$

پاسخ یکی از ضابطه‌ها می‌تواند به صورت زیر باشد:

$$a_{ij}=\begin{cases}i+j : i\geq j\\ ۴ \quad : i<j\end{cases}$$

مثال و پاسخ

مثال اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۲}$ و $a_{ij}=i\times j-۲$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس A چه‌قدر است؟

پاسخ

$$\text{مجموع درایه‌های ستون دوم}=a_{۱۲}+a_{۲۲}+a_{۳۲}$$

$$=(۱\times۲-۲)+(۲\times۲-۲)+(۳\times۲-۲)=۰+۲+۴=۶$$

چند ماتریس خاص

۱- ماتریس مربعی

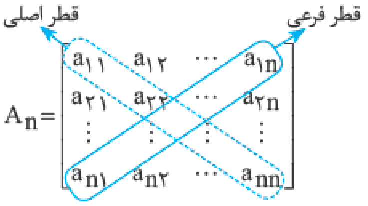
اگر تعداد سطرها و ستون‌های یک ماتریس با هم برابر باشند، آن ماتریس را ماتریس مربعی می‌نامند.

اگر A ماتریسی از مرتبهٔ $n \times n$ باشد، اصطلاحاً آن را ماتریس مربعی از مرتبهٔ n می‌نامند و معمولاً با A_n نمایش می‌دهند.

تعریف قطر اصلی در ماتریس مربعی در هر ماتریس مربعی، درایه‌هایی که شمارهٔ سطر و ستون آن‌ها برابر باشند، قطر اصلی را تشکیل می‌دهند؛ به بیان دیگر در یک ماتریس مربعی، تمام درایه‌هایی که به صورت a_{ii} هستند روی قطر اصلی قرار دارند.

در یک ماتریس مربعی، درایه‌هایی که روی قطر عمود بر قطر اصلی قرار دارند، قطر فرعی ماتریس را تشکیل می‌دهند.

در ماتریس مربعی مقابل، قطرهای اصلی و فرعی نمایش داده شده‌اند.



$$A_n=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n۱} & a_{n۲} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

نکته اگر a_{ij} روی قطر فرعی یک ماتریس $n \times n$ باشد، آن‌گاه $i+j=n+۱$.

مثال و پاسخ

مثال **در یک ماتریس از مرتبهٔ $n \times n$، درایهٔ a_{ij} هم روی قطر اصلی و هم روی قطر فرعی است. مرتبهٔ ماتریس را برحسب i پیدا کنید.**

پاسخ چون a_{ij} روی قطر اصلی است، پس $i=j$ و چون a_{ij} روی قطر فرعی هم قرار دارد، بنا بر نکتهٔ فوق باید داشته باشیم $i+j=n+۱$ که در آن n مرتبهٔ ماتریس است. از این دو رابطه داریم:

$$i+j=n+۱ \xrightarrow{i=j} ۲i=n+۱ \Rightarrow n=۲i-۱$$

۲- ماتریس سطری

ماتریسی که فقط یک سطر داشته باشد، ماتریس سطری می‌نامند.

$$A_{۱\times n}=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \end{bmatrix}$$

۳- ماتریس ستونی

ماتریسی که فقط یک ستون داشته باشد، ماتریس ستونی می‌نامند.

$$A_{n\times ۱}=\begin{bmatrix} a_{۱۱} \\ a_{۲۱} \\ \vdots \\ a_{n۱} \end{bmatrix}$$

۴- ماتریس قطری

ماتریس مربعی را که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند، ماتریس قطری می‌نامند. (توجه داشته باشیم که درایه‌های روی قطر اصلی می‌توانند صفر باشند و می‌توانند مخالف صفر باشند.) در زیر چند ماتریس قطری ارائه شده‌اند:

$$A=[۵]\ ,\ B=\begin{bmatrix} -۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\ ,\ C=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

۵- ماتریس اسکالر

اگر در یک ماتریس قطری، تمام درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابر باشند، آن را ماتریس اسکالر می‌نامند. در زیر چند ماتریس اسکالر ارائه شده‌اند:

$$A=[۵]\ ,\ B=\begin{bmatrix} -۴ & ۰ \\ ۰ & -۴ \end{bmatrix}\ ,\ C=\begin{bmatrix} k & ۰ & ۰ \\ ۰ & k & ۰ \\ ۰ & ۰ & k \end{bmatrix}$$

مثال و پاسخ

مثال **در عبارت زیر، جای‌های خالی را با واژه‌های مناسب پر کنید تا گزاره‌ای درست حاصل شود:**

هر ماتریس قطری یک ماتریس .... ولی هر ماتریس .... یک ماتریس ....

پاسخ اسکالر نیست ـ اسکالر ـ قطری است

۶ـ ماتریس صفر

ماتریسی را که **تمام** درایه‌های آن صفر باشند، ماتریس صفر می‌نامند. معمولاً ماتریس صفر از مرتبهٔ $n \times p$ را با نماد $\bar{O}_{n \times p}$ نمایش می‌دهند.

در زیر چند ماتریس صفر نمایش داده شده‌اند.

$$\bar{O}_{۱\times ۳}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\ ,\ \bar{O}_{۲\times ۴}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\ ,\ \bar{O}_{۳\times ۳}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

تساوی دو ماتریس

دو ماتریس زمانی مساوی هستند که هر دو شرط زیر را داشته باشند:

a) دو ماتریس هم‌مرتبه باشند.

b) تمام درایه‌های نظیر در دو ماتریس برابر باشند.

با توجه به تعریف فوق می‌توان گفت اگر $A=[a_{ij}]_{n \times p}$ و $B=[b_{ij}]_{k \times t}$، آن‌گاه زمانی این دو ماتریس برابرند که:

$$\begin{cases} k=n \\ t=p \\ \forall i,j: a_{ij}=b_{ij} \end{cases}$$

مثال و پاسخ

مثال **اگر دو ماتریس** $A=\begin{bmatrix} x+۲y & ۱ \\ ۲ & x^۲+۱ \end{bmatrix}$ **و** $B=\begin{bmatrix} ۵ & x+۲ \\ ۲ & z+۱ \end{bmatrix}$ **برابر باشند، مقادیر x، y و z را پیدا کنید.**

پاسخ هر دو ماتریس از مرتبهٔ ۲×۲ هستند، پس شرط اول تساوی دو ماتریس برقرار است. اکنون باید شرط دوم برقرار باشد، پس باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} x+۲y=۵ \xrightarrow{x=-۱} y=۳ \\ x+۲=۱ \Rightarrow x=-۱ \\ z+۱=x^۲+۱ \xrightarrow{x=-۱} z=۱ \end{cases}$$

مثال و پاسخ

مثال **اگر دو ماتریس** $A=\begin{bmatrix} ۱ & \sqrt{x}+\sqrt[۶]{y+۱} \end{bmatrix}$ **و** $B=\begin{bmatrix} z-۲ & ۰ \end{bmatrix}$ **برابر باشند، حاصل** z^x+y **چه‌قدر است؟**

پاسخ دو ماتریس از مرتبهٔ ۲×۱ هستند، پس کافی است درایه‌های نظیر برابر باشند:

$$\begin{cases} z-۲=۱ \Rightarrow z=۳ \\ \sqrt{x}+\sqrt[۶]{y+۱}=۰ \end{cases}$$

می‌دانیم $\sqrt{x} \geq ۰$ و $\sqrt[۶]{y+۱} \geq ۰$، پس: $\sqrt{x}+\sqrt[۶]{y+۱} \geq ۰$ و تنها زمانی $\sqrt{x}+\sqrt[۶]{y+۱}$ می‌تواند صفر باشد که هر کدام از عامل‌های جمع، صفر باشند؛ یعنی $x=۰$ و $y=-۱$. اکنون داریم: $z^x+y=۳^۰+(-۱)=۱-۱=۰$

جمع ماتریس‌ها

دو ماتریس وقتی قابل جمع هستند که آن دو ماتریس هم‌مرتبه باشند و مجموع دو ماتریس هم‌مرتبه، ماتریسی از همان مرتبه است و هر درایهٔ آن، حاصل‌جمع دو درایهٔ نظیر از آن دو ماتریس باشد.

پس اگر $A=[a_{ij}]_{m \times n}$، $B=[b_{ij}]_{m \times n}$ و $C=A+B$، آن‌گاه $C=[c_{ij}]_{m \times n}$ طوری که: $\forall i,j: c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$

مثال و پاسخ

مثال اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۵ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$، آن‌گاه حاصل $A+B$ را پیدا کنید.

پاسخ چون هر دو ماتریس از مرتبهٔ ۲×۲ هستند، پس هم‌مرتبه می‌باشند و جمع‌پذیرند؛ بنا بر تعریف جمع دو ماتریس داریم:

$$A+B=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۵ & ۰ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲+۴ & ۳+(-۱) \\ -۵+۲ & ۰+۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۶ & ۲ \\ -۳ & ۳ \end{bmatrix}$$

ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس

اگر r عددی حقیقی و A ماتریسی از مرتبهٔ $n\times p$ باشد، حاصل $r\cdot A$ یک ماتریس از مرتبهٔ $n\times p$ است که هر درایهٔ آن، r برابر درایهٔ نظیر از ماتریس A می‌باشد؛ به بیان دیگر، برای این‌که عدد حقیقی r را در یک ماتریس ضرب کنیم، کافی است r را در تک‌تک درایه‌های آن ماتریس ضرب کنیم.

به زبان ریاضی داریم:

$$r\in\mathbb{R}, A=[a_{ij}]_{n\times p} \Rightarrow r\cdot A=[r\cdot a_{ij}]_{n\times p}$$

مثال و پاسخ

مثال اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۳ \end{bmatrix}$، آن‌گاه $۲A+۳B$ را پیدا کنید.

پاسخ

$$۲A+۳B=۲\times\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \end{bmatrix}+۳\times\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۶ \\ ۸ & ۱۰ & ۱۲ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۹ & ۳ & ۳ \\ ۶ & ۰ & -۹ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۱ & ۷ & ۹ \\ ۱۴ & ۱۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

قرینهٔ یک ماتریس

اگر تمام درایه‌های یک ماتریس را قرینه کنیم، ماتریسی که حاصل می‌شود، قرینهٔ ماتریس اولیه می‌نامند. در واقع قرینهٔ ماتریس A همان ماتریس $(-۱)\times A$ است که با نماد $-A$ نمایش داده می‌شود.

واضح است که حاصل‌جمع هر ماتریس با قرینهٔ همان ماتریس، برابر ماتریس صفر از همان مرتبه است؛ یعنی:

$$A+(-A)=\overline{O}$$

مثال و پاسخ

مثال دو ماتریس ۲×۳ مثال بزنید که مجموع آن‌ها برابر ماتریس صفر باشد.

پاسخ فرض کنیم A و B دو ماتریس ۲×۳ باشند، طوری که $A+B=\overline{O}_{۳\times۲}$، پس $B=\overline{O}_{۳\times۲}-A$ یا $B=-A$؛ یعنی کافی است تمام درایه‌های ماتریس A را قرینه کنیم، بنابراین به عنوان نمونه، اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ -۲ & ۰ \\ ۱ & -۳ \end{bmatrix}$، آن‌گاه $B=-A=\begin{bmatrix} -۳ & -۴ \\ ۲ & ۰ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$.

ویژگی‌های جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس

اگر A، B و C سه ماتریس از مرتبهٔ $n\times p$ و r و s دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه ویژگی‌های زیر برقرار هستند:

الف) $A+B=B+A$ (ویژگی جابه‌جایی جمع دو ماتریس)

ب) $A+(B+C)=(A+B)+C$ (ویژگی شرکت‌پذیری عمل جمع در ماتریس)

پ) $A+\overline{O}=\overline{O}+A=A$ (ویژگی وجود عضو بی‌اثر یا عضو خنثی در عمل جمع ماتریس)

ت) $A+(-A)=(-A)+A=\overline{O}$ (ویژگی وجود عضو قرینه در عمل جمع ماتریس)

ث) $r\cdot(A+B)=r\cdot A+r\cdot B$ (ویژگی توزیع‌پذیری ضرب عدد در جمع ماتریس)

ج) $(r+s)\cdot A=r\cdot A+s\cdot A$ (ویژگی توزیع‌پذیری ضرب ماتریس در جمع دو عدد حقیقی)

چ) اگر $r\neq ۰$ باشد، آن‌گاه $A=B \Leftrightarrow r\cdot A=r\cdot B$ (ویژگی حذف ضرب عدد در ماتریس)

مثال و پاسخ

مثال ویژگی جابه‌جایی جمع دو ماتریس؛ یعنی ویژگی (الف) را ثابت کنید.

پاسخ فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{n\times p}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times p}$، بنا بر تعریف جمع دو ماتریس هم‌مرتبه داریم:

$$A+B=[a_{ij}]_{n\times p}+[b_{ij}]_{n\times p}$$

$$=[a_{ij}+b_{ij}]_{n\times p}$$ بنا به تعریف عمل جمع دو ماتریس

$$=[b_{ij}+a_{ij}]_{n\times p}$$ ویژگی جابه‌جایی عمل جمع در مجموعهٔ اعداد حقیقی

$$=[b_{ij}]_{n\times p}+[a_{ij}]_{n\times p}$$ بنا به تعریف عمل جمع ماتریس‌ها

$$=B+A$$

مثال و پاسخ

مثال ویژگی توزیع‌پذیری ضرب یک ماتریس در جمع دو عدد حقیقی؛ یعنی ویژگی (ج) را ثابت کنید.

پاسخ فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{n\times p}$ یک ماتریس و r و s دو عدد حقیقی باشند. اکنون داریم:

$$(r+s)\cdot A=(r+s)\cdot[a_{ij}]_{n\times p}$$

$$=[(r+s)\cdot a_{ij}]_{n\times p}$$ بنا بر تعریف ضرب عدد در یک ماتریس

$$=[r\cdot a_{ij}+s\cdot a_{ij}]_{n\times p}$$ ویژگی توزیع‌پذیری ضرب در جمع در مجموعهٔ اعداد حقیقی

$$=[r\cdot a_{ij}]_{n\times p}+[s\cdot a_{ij}]_{n\times p}$$ بنا به تعریف عمل جمع دو ماتریس

$$=r\cdot[a_{ij}]_{n\times p}+s\cdot[a_{ij}]_{n\times p}$$ بنا بر تعریف ضرب عدد در ماتریس

$$=r\cdot A+s\cdot B$$

ضرب دو ماتریس

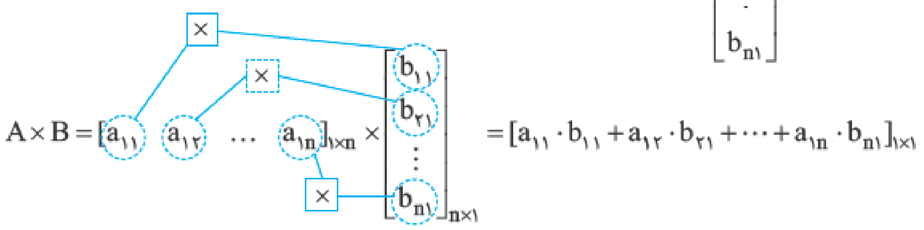
الف) ضرب ماتریس سطری در ماتریس ستونی

اگر A ماتریس سطری از مرتبهٔ $۱\times n$ و B ماتریس ستونی از مرتبهٔ $n\times ۱$ باشد، آن‌گاه ضرب A در B تعریف‌پذیر است و حاصل آن ماتریسی از مرتبهٔ ۱×۱ می‌باشد که معادل با یک عدد حقیقی است. برای پیداکردن حاصل‌ضرب $A\times B$ هر درایه از ماتریس A مانند $a_{۱i}$ را در درایهٔ $b_{i۱}$ از ماتریس B ضرب می‌کنیم و مجموع این حاصل‌ضرب‌ها را به دست می‌آوریم.

به عنوان مثال؛ اگر $A=[۴\quad ۵\quad -۲]_{۱\times ۳}$ و $B=\begin{bmatrix}۳\\ ۲\\ ۱\end{bmatrix}_{۳\times ۱}$، آن‌گاه داریم:

$$A\times B=[۴\quad ۵\quad -۲]\times\begin{bmatrix}۳\\ ۲\\ ۱\end{bmatrix}=[۴\times ۳+۵\times ۲+(-۲)\times ۱]_{۱\times ۱}=[۲۰]_{۱\times ۱}=۲۰$$

و به طور کلی اگر $A=[a_{۱۱}\quad a_{۱۲}\quad \dots\quad a_{۱n}]_{۱\times n}$ و $B=\begin{bmatrix}b_{۱۱}\\ b_{۲۱}\\ \vdots\\ b_{n۱}\end{bmatrix}$ باشند، آن‌گاه داریم:



$$A\times B=[a_{۱۱}\quad a_{۱۲}\quad \dots\quad a_{۱n}]_{۱\times n}\times\begin{bmatrix}b_{۱۱}\\ b_{۲۱}\\ \vdots\\ b_{n۱}\end{bmatrix}_{n\times ۱}=[a_{۱۱}\cdot b_{۱۱}+a_{۱۲}\cdot b_{۲۱}+\dots+a_{۱n}\cdot b_{n۱}]_{۱\times ۱}$$

$$=a_{۱۱}\cdot b_{۱۱}+a_{۱۲}\cdot b_{۲۱}+\dots+a_{۱n}\cdot b_{n۱}$$

تذکر وقتی یک ماتریس سطری در ماتریس ستونی قابل ضرب است که اگر ماتریس سطری از مرتبهٔ $۱\times n$ و ماتریس ستونی از مرتبهٔ $p\times ۱$ باشد، آن‌گاه باید $n=p$ باشد.

ب) ضرب ماتریس در ماتریس

اگر A و B دو ماتریس باشند، آن‌گاه به شرطی ماتریس $A\times B$ تعریف‌پذیر است (وجود دارد) که تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشد؛ یعنی اگر A از مرتبهٔ $n\times p$ است، باید B از مرتبهٔ $p\times m$ باشد و حاصل‌ضرب آن‌ها ماتریسی از مرتبهٔ $n\times m$ است.

پس اگر $A=[a_{ij}]_{n\times p}$ و $B=[b_{ij}]_{p\times m}$، آن‌گاه $C=A\times B$ طوری که $C=[c_{ij}]_{n\times m}$.

طرح‌وارهٔ روبه‌رو برای این منظور می‌تواند مفید باشد:

$n\times \boxed{p}$ مرتبهٔ ماتریس اول

$\boxed{p}\times m$ مرتبهٔ ماتریس دوم

$n\times m$ مرتبهٔ ماتریس حاصل‌ضرب

برای پیداکردن درایهٔ سطر iام، ستون jام ماتریس حاصل‌ضرب، باید سطر iام ماتریس A را در ستون jام ماتریس B ضرب کنیم.

مثال و پاسخ

مثال اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & -۱ \\ ۰ & ۲ & ۴ \\ ۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ ۴ & -۲ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}$، آیا ماتریس $A\times B$ وجود دارد؟ چرا؟ اگر جواب مثبت است، ماتریس حاصل‌ضرب را پیدا کنید.

پاسخ مرتبهٔ ماتریس A، ۳×۳ و ماتریس B، ۳×۲ است. چون تعداد ستون‌های ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم، برابر است، پس ماتریس $A\times B$ تعریف‌پذیر است و ماتریس حاصل‌ضرب از مرتبهٔ ۳×۲ است.

اکنون هر یک از سطرهای ماتریس A را در هر یک از ستون‌های ماتریس B ضرب می‌کنیم: (اگر سطر iام ماتریس A را در ستون jام ماتریس B ضرب کنیم، آن‌گاه حاصل آن، درایهٔ سطر iام، ستون jام از ماتریس حاصل‌ضرب است)

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & -۱ \\ ۰ & ۲ & ۴ \\ ۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ ۴ & -۲ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲\times ۱+۳\times ۴+(-۱)\times ۳ & ۲\times ۵+۳\times(-۲)+(-۱)\times ۰ \\ ۰\times ۱+۲\times ۴+۴\times ۳ & ۰\times ۵+۲\times(-۲)+۴\times ۰ \\ ۲\times ۱+۱\times ۴+۰\times ۳ & ۲\times ۵+۱\times(-۲)+۰\times ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۱ & ۴ \\ ۲۰ & -۴ \\ ۶ & ۸ \end{bmatrix}$$

توجه کنید که ضرب دو ماتریس در حالت کلی دارای خاصیت جابه‌جایی نیست؛ یعنی گاهی $A\times B$ قابل تعریف است ولی $B\times A$ قابل تعریف نیست و حتی گاهی $A\times B$ و $B\times A$ هر دو تعریف‌پذیرند ولی با هم برابر نیستند.

دو ماتریس تعویض‌پذیر اگر A و B دو ماتریس باشند به طوری که $A\times B=B\times A$، آن‌گاه می‌گوییم این دو ماتریس تعویض‌پذیرند.

اگر A و B بخواهند تعویض‌پذیر باشند هر دو باید ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبه باشند، زیرا اگر A از مرتبهٔ $m\times p$ باشد، برای این‌که $A\times B$ وجود داشته باشد باید B از مرتبهٔ $p\times k$ باشد و در نتیجه ماتریس $A\times B$ از مرتبهٔ $m\times k$ است.

ضمناً برای این‌که $B\times A$ تعریف‌شده باشد، باید $k=m$ باشد، پس مرتبهٔ ماتریس B باید $p\times m$ باشد و در این صورت $B\times A$ از مرتبهٔ $p\times p$ است و چون $A\times B$ از مرتبهٔ $p\times k$ است برای این‌که این دو ماتریس برابر باشند، باید $k=p$ باشد در نتیجه $k=p=m$؛ یعنی هر دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبه هستند.

به جای این عبارت‌های طولانی می‌توان به صورت زیر استدلال کرد:

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ مرتبهٔ } = m\times \boxed{p} \\ B \text{ مرتبهٔ } = \boxed{p}\times k \end{array}\right\} \Rightarrow A\times B \text{ مرتبهٔ } = m\times k$$

$$\left.\begin{array}{l} B \text{ مرتبهٔ } = p\times \boxed{k} \\ A \text{ مرتبهٔ } = \boxed{m}\times p \end{array}\right\} \Rightarrow B\times A \text{ مرتبهٔ } = p\times p$$

باید $k=m$ باشد.

چون $A\times B$ باید با $B\times A$ برابر باشد، بنابراین $k=p$ و $m=p$؛ یعنی هر دو ماتریس، مربعی و هم‌مرتبه هستند.

مثال و پاسخ

مثال اگر $A=\begin{bmatrix}۱۱&۳\\۴&۱\end{bmatrix}$، آن‌گاه ماتریسی مانند B چنان پیدا کنید که $A\times B=B\times A$.

پاسخ بنا بر مطالب صفحهٔ قبل باید ماتریس B نیز از مرتبهٔ ۲×۲ باشد، پس اگر فرض کنیم $B=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$، آن‌گاه باید داشته باشیم:

$$A\times B=B\times A\Rightarrow\begin{bmatrix}۱۱&۳\\۴&۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱۱&۳\\۴&۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}۱۱a+۳c&۱۱b+۳d\\۴a+c&۴b+d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۱a+۴b&۳a+b\\۱۱c+۴d&۳c+d\end{bmatrix}$$

بنا بر تساوی دو ماتریس داریم:

$$\begin{cases}۱۱a+۳c=۱۱a+۴b\Rightarrow c=\frac{۴}{۳}b\\ \left.\begin{array}{l}۱۱b+۳d=۳a+b\\۴a+c=۱۱c+۴d\end{array}\right|\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}۱۰b=۳(a-d)\\۱۰c=۴(a-d)\end{array}\right|\Rightarrow a-d=\frac{۱۰}{۳}b\\ ۴b+d=۳c+d\Rightarrow c=\frac{۴}{۳}b\end{cases}$$

پس کافی است $c=\frac{۴}{۳}b$ و $a-d=\frac{۱۰}{۳}b$ باشد، در نتیجه به عنوان مثال، اگر فرض کنیم $b=۶$، آن‌گاه $c=۸$ و $a-d=۲۰$. در نتیجه اگر $a=۵$، آن‌گاه $d=-۱۵$ و بنابراین یکی از ماتریس‌هایی مانند B به صورت زیر است:

$$B=\begin{bmatrix}۵&۶\\۸&-۱۵\end{bmatrix}$$

(به عنوان آزمایش، حاصل‌های دو ماتریس $A\times B$ و $B\times A$ را به دست آورید و عملاً مشاهده کنید که برابرند.)

توجه داشته باشید که به ازای هر a و b یک مقدار برای c و d به دست می‌آید و در نتیجه بی‌شمار ماتریس مانند B می‌توان یافت طوری که $A\times B=B\times A$ باشد.

مثال و پاسخ

مثال ماتریس $A=\begin{bmatrix}۶&۹\\۲&۳\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. ماتریسی ناصفر و از مرتبهٔ ۲×۲ مانند B، مثال بزنید که $A\times B=\bar{O}$. آیا $B\times A$ نیز برابر ماتریس صفر است؟

پاسخ فرض کنیم $B=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$، پس باید داشته باشیم:

$$A\times B=\bar{O}\Rightarrow\begin{bmatrix}۶&۹\\۲&۳\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۰\\۰&۰\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}۶a+۹c&۶b+۹d\\۲a+۳c&۲b+۳d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۰\\۰&۰\end{bmatrix}$$

می‌دانیم دو ماتریس، زمانی برابرند که **تمام** درایه‌های نظیر از دو ماتریس، با هم برابر باشند، پس باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}\left.\begin{cases}۶a+۹c=۰\\۲a+۳c=۰\end{cases}\right\}\text{این دو معادله یکسان‌هستند}\Rightarrow ۲a+۳c=۰\Rightarrow c=-\frac{۲}{۳}a\\ \left.\begin{cases}۶b+۹d=۰\\۲b+۳d=۰\end{cases}\right\}\text{این دو معادله یکسان هستند}\Rightarrow ۲b+۳d=۰\Rightarrow d=-\frac{۲}{۳}b\end{cases}$$

به ازای هر مقدار a، یک مقدار برای c و به ازای هر مقدار b، یک مقدار برای d به دست می‌آید؛ مثلاً اگر فرض کنیم $a=۳$ باشد، آن‌گاه $c=-۲$ و اگر فرض کنیم $b=-۶$، آن‌گاه $d=۴$، پس در این صورت داریم:

$$B=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳&-۶\\-۲&۴\end{bmatrix}$$

(توجه داشته باشیم که به ازای هر مقدار دلخواهی که به a و b نسبت دهیم، یک مقدار برای c و d حاصل می‌شود، در نتیجه تعداد بی‌شمار ماتریس مانند B وجود دارد که $A\times B=\bar{O}$.) اکنون حاصل $B\times A$ را پیدا می‌کنیم.

$$B\times A=\begin{bmatrix}۳&-۶\\-۲&۴\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۶&۹\\۲&۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۸-۱۲&۲۷-۱۸\\-۱۲+۸&-۱۸+۱۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶&۹\\-۴&-۶\end{bmatrix}\neq\bar{O}$$

نتیجه می‌گیریم که اگر $A\times B=\bar{O}$ باشد، دلیلی ندارد $B\times A$ نیز برابر ماتریس صفر باشد.

مثال و پاسخ

مثال اگر A ماتریس ناصفر از مرتبهٔ ۲×۳ و $B=\begin{bmatrix}۱&۲&۳\\۲&۴&۶\\۴&۸&۱۲\end{bmatrix}$، آن‌گاه ماتریس A را چنان مشخص کنید که $A\times B=\bar{O}$ باشد. از این مثال چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

پاسخ فرض کنیم $A=\begin{bmatrix}x&y&z\\t&k&p\end{bmatrix}$، پس باید داشته باشیم:

$$A\times B=\bar{O}\Rightarrow\begin{bmatrix}x&y&z\\t&k&p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۲&۳\\۲&۴&۶\\۴&۸&۱۲\end{bmatrix}=\bar{O}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x+۲y+۴z&۲x+۴y+۸z&۳x+۶y+۱۲z\\t+۲k+۴p&۲t+۴k+۸p&۳t+۶k+۱۲p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}$$

بنا بر تساوی دو ماتریس باید داشته باشیم:

$$\Rightarrow\begin{cases}\left.\begin{array}{l}x+۲y+۴z=۰\\۲x+۴y+۸z=۰\\۳x+۶y+۱۲z=۰\end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{این سه معادله یکسان هستند}\\\text{زیرا هر کدام مضربی از دیگری است.}\end{array}\Rightarrow x+۲y+۴z=۰\qquad(۱)\\\left.\begin{array}{l}t+۲k+۴p=۰\\۲t+۴k+۸p=۰\\۳t+۶k+۱۲p=۰\end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{این سه معادله یکسان هستند}\\\text{زیرا هر کدام مضربی از دیگری است.}\end{array}\Rightarrow t+۲k+۴p=۰\qquad(۲)\end{cases}$$

هر یک از رابطه‌های (۱) یا (۲) در واقع یک معادله با سه مجهول هستند، پس هر کدام از آن‌ها دارای بی‌شمار جواب می‌باشند؛ مثلاً اگر $x=۲$ و $y=۱$ باشد، آن‌گاه $۲+۲\times۱+۴z=۰$ یا $z=-۱$ و اگر $t=۰$ و $k=۶$، آن‌گاه $۰+۲\times۶+۴p=۰$ یا $p=-۳$.

پس ماتریس A می‌تواند به صورت $A=\begin{bmatrix}۲&۱&-۱\\۰&۶&-۳\end{bmatrix}$ باشد. (توجه داشته باشیم که بی‌شمار ماتریس مانند A می‌توان ارائه داد.)

در این مثال و مثال قبلی دیدیم که A و B هر دو مخالف صفر هستند ولی $AB=\bar{O}$. در حوزهٔ اعداد حقیقی می‌دانیم اگر حاصل‌ضرب دو عدد برابر صفر باشد، آن‌گاه حداقل یکی از آن دو عدد باید برابر صفر باشد ولی در ضرب ماتریس‌ها این ویژگی وجود ندارد؛ یعنی شاید ضرب دو ماتریس، برابر ماتریس صفر باشد ولی هیچ‌یک از دو ماتریس، ماتریس صفر نباشد.

ماتریس واحد (ماتریس همانی) یک ماتریس اسکالر را که تمام درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن **۱** باشند، ماتریس واحد (ماتریس همانی) می‌نامند و با I نمایش می‌دهند.

در زیر، دو نوع ماتریس واحد از مرتبه‌های مختلف نمایش داده شده‌اند:

$$I_۲=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}\text{ و }I_۳=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}$$

مثال و پاسخ

مثال ماتریس دلخواهی از مرتبهٔ ۳×۳ مانند A را در نظر بگیرید. حاصل $A\times I_۳$ و $I_۳\times A$ را پیدا کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

پاسخ فرض کنیم $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$، پس داریم:

$$A\times I_۳=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}=A$$

همچنین داریم:

$$I_۳\times A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}=A$$

به نظر می‌رسد که ماتریس $I_۳$، عضو بی‌اثر عمل ضرب ماتریس‌ها از مرتبهٔ ۳×۳ باشد و همچنین به گونه‌ای استثنایی دارای ویژگی جابه‌جایی نیز می‌باشد.

ویژگی‌های عمل ضرب ماتریس‌ها

ویژگی (۱) در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها دارای خاصیت جابه‌جایی نیست.

ویژگی (۲) اگر A ماتریس $n\times n$ و I ماتریس واحد از همان مرتبه باشد، آن‌گاه داریم: $A\times I=I\times A=A$

ویژگی (۳) ضرب ماتریس‌ها در حاصل‌جمع دو ماتریس، خاصیت توزیع‌پذیری دارد؛ یعنی اگر A ماتریسی $n\times p$ و B و C ماتریس‌هایی از مرتبهٔ $p\times k$ باشند، آن‌گاه رابطهٔ زیر برقرار است:

توزیع‌پذیری از چپ $A\times(B+C)=A\times B+A\times C$

یا

توزیع‌پذیری از راست $(B+C)\times A=B\times A+C\times A$

ویژگی (۴) عمل ضرب ماتریس‌ها دارای خاصیت شرکت‌پذیری است؛ یعنی اگر A ماتریسی از مرتبهٔ $n\times p$، B از مرتبهٔ $p\times k$ و C از مرتبهٔ $k\times m$ باشد، آن‌گاه رابطهٔ مقابل برقرار است:

شرکت‌پذیری ضرب ماتریس‌ها $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$

مثال و پاسخ

مثال برای ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۵ & ۶ & ۷ \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & ۴ \\ ۵ & ۵ \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} ۰ & -۲ \\ -۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ نشان دهید رابطهٔ $A\times(B+C)=A\times B+A\times C$ برقرار است.

پاسخ

$$B+C=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & ۴ \\ ۵ & ۵ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۰ & -۲ \\ -۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۱ & ۶ \\ ۸ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$A\times(B+C)=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۵ & ۶ & ۷ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۱ & ۶ \\ ۸ & ۶ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲۹ & ۲۹ \\ ۷۷ & ۷۳ \end{bmatrix} \quad (۱)$$

از طرفی:

$$A\times B+A\times C=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۵ & ۶ & ۷ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & ۴ \\ ۵ & ۵ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۵ & ۶ & ۷ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & -۲ \\ -۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۲۲ & ۲۴ \\ ۶۲ & ۶۴ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۷ & ۵ \\ ۱۵ & ۹ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲۹ & ۲۹ \\ ۷۷ & ۷۳ \end{bmatrix} \quad (۲)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود: $A\times(B+C)=A\times B+A\times C$

توان‌های طبیعی یک ماتریس مربعی

اگر A ماتریسی مربعی باشد، آن‌گاه $A^{۲} = A \times A$ ، $A^{۳} = A^{۲} \times A = A \times A^{۲}$ و ... .

در حالت کلی اگر n عددی طبیعی باشد، آن‌گاه $A^{n} = A^{n-۱} \times A = A \times A^{n-۱}$.

مثال و پاسخ

مثال **اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \\ -۱ & ۰ & ۱ \\ -۲ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه مجموع درایه‌های سطر دوم $A^{۲}$ را پیدا کنید.**

پاسخ

سطر دوم $A^{۲}$ = سطر دوم $A \times$ ماتریس A

$$= [۱ \quad ۰ \quad -۱] \times \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۱ & -۲ \end{bmatrix} = [-۱ \quad ۱ \quad ۵]$$

پس مجموع درایه‌های سطر دوم ماتریس $A^{۲}$ برابر ۵ است.

مثال و پاسخ

مثال **اگر $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه ماتریس‌های $A^{۲}$ ، $A^{۳}$ و $A^{۴}$ را مشخص کنید و سپس با استدلال استقرایی ماتریس A^{n} را حدس بزنید.**

پاسخ

$$A^{۲} = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲+۱ & -۲ \\ ۲ & -۲+۱ \end{bmatrix}$$

$$A^{۳} = A^{۲} \times A = \begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & -۳ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳+۱ & -۳ \\ ۳ & -۳+۱ \end{bmatrix}$$

$$A^{۴} = A^{۳} \times A = \begin{bmatrix} ۴ & -۳ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & -۴ \\ ۴ & -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴+۱ & -۴ \\ ۴ & -۴+۱ \end{bmatrix}$$

با توجه به موارد بالا با استدلال استقرایی می‌توان حدس زد که:

$$A^{n} = \begin{bmatrix} n+۱ & -n \\ n & -n+۱ \end{bmatrix}$$

سؤال‌های امتحانی

۱- اگر $M = [m_{ij}]_{۳\times۳}$ و $m_{ij} = \begin{cases} ۲ : i < j \\ ۱ : i \not< j \end{cases}$ ، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس M را پیدا کنید.

۲- اگر ماتریس‌های $A = [a_{ij}]_{۳\times۳}$ و $B = [b_{ij}]_{۳\times۳}$ به صورت زیر تعریف شده باشند:

$$a_{ij} = \begin{cases} i^{۲} - j : i < j \\ ۲i - ۱ : i = j \\ j^{۲} - i : i > j \end{cases} , \quad b_{ij} = \mathrm{Min}\{i , j\}$$

آن‌گاه حاصل $۲A - ۳B$ را به دست آورید.

۳- اگر $A - B = B - A$ ، آن‌گاه کدام درست است؟

الف) $A = \overline{O}$

ب) $B = \overline{O}$

پ) $A = B$

ت) $A = -B$

۴- اگر A و B دو ماتریس هم‌مرتبه و k و t دو عدد حقیقی و متمایز باشند و داشته باشیم $kA + tB = kB + tA$ ، آن‌گاه نشان دهید $A = B$.

۵- اگر A ماتریس ۳×۲ و B ماتریس ۳×۴ باشد، کدام‌یک از ماتریس‌های زیر تعریف‌شده است؟

الف) AB

ب) BA

پ) $BA^{۲}$

۶- اگر $A=[a_{ij}]_{۵\times۵}$ ، آن‌گاه چندتا از درایه‌های $a_{۱۴}$ ، $a_{۴۲}$ ، $a_{۳۳}$ ، $a_{۲۵}$ روی قطر فرعی آن قرار دارند؟

۷- اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$ ، آن‌گاه درایهٔ سطر دوم، ستون اول ماتریس $M=ABA$ را پیدا کنید.

۸- اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۳ & ۲ & ۱\\ ۲ & ۱ & ۳\end{bmatrix}$ ، $B=[a_{ij}-۱]$ و $C=[a_{ij}+۲]$ ، آن‌گاه درایهٔ سطر دوم، ستون سوم ماتریس $M=ABC$ را مشخص کنید.

۹- اگر $A=[a_{ij}]_{۲\times۳}$ با درایه‌های $a_{ij}=i+j$ و $B=[b_{ij}]_{۳\times۲}$ با درایه‌های $b_{ij}=i-j$ ، آن‌گاه مجموع درایه‌های AB را پیدا کنید.

۱۰- اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ و $A^{۱۳۹۷}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ ، آن‌گاه $a+b+c+d$ چه‌قدر است؟

۱۱- اگر در حاصل‌ضرب $\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۰ & a & ۱\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۵ & ۴\\ ۰ & -۱ & ۱\\ ۰ & ۰ & ۲a\end{bmatrix}$ بدانیم مجموع درایه‌های روی قطر اصلی و زیر آن برابر ۷− است، مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی آن چه‌قدر است؟

۱۲- ریشه‌های معادلهٔ $[x\ \ ۱]\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ ۱\end{bmatrix}=۰$ را پیدا کنید.

۱۳- اگر $۱۴=[۲\ \ x\ \ -۱]\begin{bmatrix}۱ & ۳\\ x & ۱\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ ۲\end{bmatrix}$ باشد، مقدار x چه‌قدر است؟

۱۴- اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & -۲ & -۶\\ -۳ & ۲ & ۹\\ ۲ & ۰ & -۳\end{bmatrix}$ ، حاصل $A^{۱۷}$ را پیدا کنید.

۱۵- اگر $A=\begin{bmatrix}۳ & ۲ & -۱\\ ۱ & ۴ & ۲\\ ۲ & ۰ & ۵\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۴ & ۲ & -۱\\ ۰ & ۱ & -۲\\ -۲ & ۳ & ۱\end{bmatrix}$ ، آن‌گاه ماتریس $M=A^{۲}+B^{۲}+AB+BA$ را پیدا کنید.

۱۶- حاصل $[۱\ \ ۳\ \ ۵]\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ ۳ & -۱\\ ۶ & ۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰\\ ۱\end{bmatrix}$ را مشخص کنید.

۱۷- مجموع درایه‌های ماتریس $\begin{bmatrix}۳ & ۵ & ۱\\ ۴ & ۲ & ۳\\ ۰ & ۳ & -۱\end{bmatrix}^{۲}\begin{bmatrix}۱\\ ۲\\ ۳\end{bmatrix}$ چه‌قدر است؟

۱۸- هرگاه $A=\begin{bmatrix}۳ & ۲ & -۱\\ ۴ & ۳ & ۱\\ ۱ & ۲ & ۳\end{bmatrix}$ ، آن‌گاه درایه‌های سطر دوم، ستون سوم ماتریس $A^{۲}$ و درایهٔ سطر سوم، ستون اول ماتریس $A^{۳}$ را به دست آورید.

۱۹- اگر $A=\begin{bmatrix}۵\\ ۷\end{bmatrix}$ ، $B=[۳\ \ -۲]$ و $M=A\times B$ ، آن‌گاه حاصل $M^{۱۲۱}$ را پیدا کنید.

۲۰- اگر $A=\begin{bmatrix}۳\\ ۴\\ -۱\end{bmatrix}$ ، $B=[۱\ \ -۱\ \ -۲]$ و $M=A\times B$ ، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $M^{۵}$ را پیدا کنید.

۲۱- اگر $D=\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}$، آن‌گاه ماتریس‌های $D^{۲}$ و $D^{۳}$ را پیدا کنید. چه نتیجهٔ کلی می‌توان گرفت؟ نتیجه را بیان کنید.

۲۲- اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و k عددی طبیعی باشد، ماتریس $A^{k}-A^{k-۱}$ را پیدا کنید.

۲۳- اگر $A^{۳}=I-۲A$، آن‌گاه نشان دهید $(A^{۲}+I)^{۲}=A+I$.

۲۴- اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$، آن‌گاه حاصل $A^{۵۳}-A^{۴۶}$ را مشخص کنید.

۲۵- اگر ماتریس‌های $\begin{bmatrix} m & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۳ & n \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشند، $m+n$ چه‌قدر است؟

۲۶- a و b را چنان بیابید که دو ماتریس $\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} a & ۲ \\ b & -۱ \end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشند.

۲۷- اگر A و B دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبه باشند و بین این دو ماتریس، رابطهٔ $(A-B)\times(A+B)=A^{۲}-B^{۲}$ برقرار باشد، آن‌گاه نشان دهید این دو ماتریس تعویض‌پذیرند.

۲۸- اگر $(A+B)^{۲}=A^{۲}+B^{۲}$، آن‌گاه ثابت کنید $A^{۲}B=BA^{۲}$.

۲۹- اگر A ماتریس مربعی مرتبهٔ n و I ماتریس واحد از همان مرتبه باشد،حاصل $(A-I)^{۲}-(A+I)^{۲}$ را پیدا کنید.

۳۰- اگر $A^{۲}+A=I$ باشد، حاصل $A^{۵}$ را پیدا کنید.

۳۱- اگر $A^{۲}=A$ و داشته باشیم $(I+A)^{n}=I+۳۱A$، مقدار n را به دست آورید.

۳۲- اگر m و k دو عدد حقیقی و A و B ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبه و I ماتریس واحد از همان مرتبه باشند و داشته باشیم $A=mB+kI$، آن‌گاه ثابت کنید A و B تعویض‌پذیرند.

۳۳- اگر $A^{۲}=A$ باشد، درستی یا نادرستی رابطه‌های زیر را بررسی کنید:

الف) $(A-I)^{۲}=A-I$

ب) $(I-A)^{۲}=I-A$

۳۴- اگر $A^{۲}=A-I$، آن‌گاه ثابت کنید $A^{۵}+A=I$.

۳۵- اگر $AB-۳BA=\bar{O}$ و $AB^{۳}+mB^{۳}A=\bar{O}$، آن‌گاه مقدار m را مشخص کنید.

۳۶- اگر $A^{۲}=۳A$ و $B=۲A-۳I$، آن‌گاه ماتریس $B^{۲}$ را مشخص کنید.

۳۷- اگر $A=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$، ثابت کنید $A^{۲}=\begin{bmatrix} \cos ۲\theta & -\sin ۲\theta \\ \sin ۲\theta & \cos ۲\theta \end{bmatrix}$.

پاسخ سؤال‌های امتحانی

۱- با توجه به این‌که $m_{ij}=\begin{cases}۲ : i<j \\ ۱ : i \not< j\end{cases}$، داریم:

$$\left.\begin{matrix} m_{۱۱}=۱, m_{۱۲}=۲, m_{۱۳}=۲ \\ m_{۲۱}=۱, m_{۲۲}=۱, m_{۲۳}=۲ \\ m_{۳۱}=۱, m_{۳۲}=۱, m_{۳۳}=۱ \end{matrix}\right\} \Rightarrow M=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۱ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های این ماتریس، برابر ۱۲ می‌باشد.

۲- با توجه به تعریفی که از a_{ij} داده شده است، داریم:

$$\left.\begin{matrix} a_{۱۱}=۲\times ۱-۱=۱ \ , \ a_{۱۲}=۱^۲-۲=-۱ \ , \ a_{۱۳}=۱^۲-۳=-۲ \\ a_{۲۱}=۱^۲-۲=-۱ \ , \ a_{۲۲}=۲\times ۲-۱=۳ \ , \ a_{۲۳}=۲^۲-۳=۱ \\ a_{۳۱}=۱^۲-۳=-۲ \ , \ a_{۳۲}=۲^۲-۳=۱ \ , \ a_{۳۳}=۲\times ۳-۱=۵ \end{matrix}\right| \Rightarrow A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۲ \\ -۱ & ۳ & ۱ \\ -۲ & ۱ & ۵ \end{bmatrix}$$

توجه داشته باشیم که به عنوان مثال، $\text{Min}\{۵,۱\}=۱$ یا $\text{Min}\{۲,-۳\}=-۳$، همچنین $\text{Min}\{۲,۲\}=۲$. اکنون با توجه به تعریفی که از b_{ij} داده شده است؛ داریم:

$$\left.\begin{matrix} b_{۱۱}=۱, b_{۱۲}=۱, b_{۱۳}=۱ \\ b_{۲۱}=۱, b_{۲۲}=۲, b_{۲۳}=۲ \\ b_{۳۱}=۱, b_{۳۲}=۲, b_{۳۳}=۳ \end{matrix}\right| \Rightarrow B=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

اکنون داریم:

$$۲A-۳B=۲\times\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۲ \\ -۱ & ۳ & ۱ \\ -۲ & ۱ & ۵ \end{bmatrix}-۳\times\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & -۵ & -۷ \\ -۵ & ۰ & -۴ \\ -۷ & -۴ & ۱ \end{bmatrix}$$

۳- از رابطهٔ $A-B=B-A$ نتیجه می‌شود: $A+A=B+B$ یا $۲A=۲B$ و چون $۲\neq ۰$، پس $A=B$؛ یعنی گزارهٔ (پ) درست است.

۴- $$kA+tB=kB+tA \ \Rightarrow \ kA-tA=kB-tB \ \Rightarrow \ (k-t)A=(k-t)B$$

چون k و t دو عدد حقیقی متمایزند، پس $k-t\neq ۰$ و در نتیجه $A=B$.

۵- دو ماتریس وقتی قابل ضرب هستند که تعداد ستون‌های ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشد.

الف) ماتریس AB تعریف‌نشده است، زیرا تعداد ستون‌های ماتریس A برابر ۳ و تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر ۴ است.

ب) ماتریس BA نیز تعریف‌نشده است، زیرا تعداد ستون‌های ماتریس B برابر ۳ و تعداد سطرهای ماتریس A برابر ۲ است.

پ) چون A از مرتبهٔ ۲×۳ است، پس ماتریس $A^۲=A\times A$ تعریف نشده، زیرا تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس A برابر نیست و در نتیجه $BA^۲$ نیز تعریف نخواهد شد.

۶- در یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n اگر درایهٔ a_{ij} روی قطر فرعی واقع باشد، آن‌گاه $i+j=n+۱$.

درایهٔ $a_{۱۴}$ روی قطر فرعی ماتریس ۵×۵ قرار ندارد، زیرا $۱+۴\neq ۵+۱$.

درایهٔ $a_{۴۲}$ روی قطر فرعی ماتریس ۵×۵ واقع است، زیرا $۴+۲=۵+۱$.

درایهٔ $a_{۳۳}$ نیز روی قطر فرعی قرار دارد و درایهٔ $a_{۲۵}$ روی قطر فرعی نیست.

۷- برای جلوگیری از اتلاف زمان و انجام عملیات کم‌تر، درایهٔ سطر دوم، ستون اول ماتریس $M=ABA$ را به صورت زیر پیدا می‌کنیم:

(سطر دوم ماتریس A) × B × (ستون اول ماتریس A)

پس داریم:

$$\text{درایهٔ } m_{۲۱}=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & ۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix}=۸-۱=۷$$

۸- با توجه به تعریفی که از ماتریس‌های B و C ارائه شده است؛ داریم:

$$B=\begin{bmatrix}۱-۱ & ۲-۱ & ۳-۱\\ ۳-۱ & ۲-۱ & ۱-۱\\ ۲-۱ & ۱-۱ & ۳-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۱ & ۲\\ ۲ & ۱ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۲\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}۳ & ۴ & ۵\\ ۵ & ۴ & ۳\\ ۴ & ۳ & ۵\end{bmatrix}$$

با توجه به توضیحی که در پاسخ به سؤال ۷ داده شده، خواهیم داشت:

$$m_{۲۳}=\begin{bmatrix}۳ & ۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۱ & ۲\\ ۲ & ۱ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۵\\ ۳\\ ۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵ & ۵ & ۸\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۵\\ ۳\\ ۵\end{bmatrix}=۲۵+۱۵+۴۰=۸۰$$

۹- با توجه به این‌که $a_{ij}=i+j$ و $b_{ij}=i-j$؛ داریم:

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۳ & ۴\\ ۳ & ۴ & ۵\\ ۴ & ۵ & ۶\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}۰ & -۱ & -۲\\ ۱ & ۰ & -۱\\ ۲ & ۱ & ۰\end{bmatrix}$$

اکنون حاصل AB را پیدا می‌کنیم:

$$AB=\begin{bmatrix}۲ & ۳ & ۴\\ ۳ & ۴ & ۵\\ ۴ & ۵ & ۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & -۱ & -۲\\ ۱ & ۰ & -۱\\ ۲ & ۱ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۱ & ۲ & -۷\\ ۱۴ & ۲ & -۱۰\\ ۱۷ & ۲ & -۱۳\end{bmatrix}$$

اکنون به سادگی معلوم می‌شود که مجموع درایه‌های ماتریس AB، برابر ۱۸ است.

۱۰-

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

$$A^{۳}=A^{۲}A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۳\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

با استدلال استقرایی نتیجه می‌شود $A^n=\begin{bmatrix}۱ & n\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ و در نتیجه $A^{۱۳۹۷}=\begin{bmatrix}۱ & ۱۳۹۷\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ و بنابراین: $a+b+c+d=۱۳۹۹$

۱۱-

$$\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۰ & a & ۱\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۵ & ۴\\ ۰ & -۱ & ۱\\ ۰ & ۰ & ۲a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۴ & ۵+۲a\\ ۰ & -a & ۳a\\ ۰ & ۰ & ۲a\end{bmatrix}$$

در ماتریس فوق، مجموع درایه‌های روی قطر اصلی و زیر آن، برابر $a+۲$ است، پس $a+۲=-۷$ یا $a=-۹$. اکنون داریم:

مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی $=۴+(۵+۲a)+۳a=۵a+۹=-۴۵+۹=-۳۶$

۱۲-

$$\begin{bmatrix}x & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ ۱\end{bmatrix}=۰\Rightarrow\begin{bmatrix}-x+۲ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ ۱\end{bmatrix}=۰$$

$$\Rightarrow x(-x+۲)+۳=۰\Rightarrow x^{۲}-۲x-۳=۰\Rightarrow\begin{cases}x=-۱\\ x=۳\end{cases}$$

۱۳-

$$\begin{bmatrix}۲ & x & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۳\\ x & ۱\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ ۲\end{bmatrix}=۱۴$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x^{۲}+۳ & x+۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ ۲\end{bmatrix}=۱۴\Rightarrow x^{۲}+۳+۲(x+۴)=۱۴\Rightarrow x^{۲}+۲x-۳=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۱\\ x=-۳\end{cases}$$

۱۴-

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۱ & -۲ & -۶\\ -۳ & ۲ & ۹\\ ۲ & ۰ & -۳\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱ & -۲ & -۶\\ -۳ & ۲ & ۹\\ ۲ & ۰ & -۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۵ & -۶ & -۶\\ ۹ & ۱۰ & ۹\\ -۴ & -۴ & -۳\end{bmatrix}$$

$$A^{۳}=A^{۲}\cdot A=\begin{bmatrix}-۵&-۶&-۶\\۹&۱۰&۹\\-۴&-۴&-۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&-۲&-۶\\-۳&۲&۹\\۲&۰&-۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&-۲&-۶\\-۳&۲&۹\\۲&۰&-۳\end{bmatrix}=A$$

یعنی $A^{۳}=A$ است؛ اکنون داریم:

$$A^{۱۷}=(A^{۳})^{۵}\times A^{۲}=A^{۵}\times A^{۲}=A^{۶}\times A=(A^{۳})^{۲}\times A=A^{۲}\times A=A^{۳}=A$$

۱۵- به جای محاسبهٔ مستقیم، راحت‌تر آن است که ابتدا عبارت داده‌شده را ساده کنیم.

$$M=A^{۲}+B^{۲}+AB+BA=(A^{۲}+AB)+(B^{۲}+BA)=A(A+B)+B(B+A)=A(A+B)+B(A+B)$$

$$=(A+B)(A+B)=(A+B)^{۲}$$

پس کافی است $A+B$ را پیدا کرده به توان ۲ برسانیم:

$$A+B=\begin{bmatrix}۷&۴&-۲\\۱&۵&۰\\۰&۳&۶\end{bmatrix}$$

$$M=(A+B)^{۲}=\begin{bmatrix}۷&۴&-۲\\۱&۵&۰\\۰&۳&۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۷&۴&-۲\\۱&۵&۰\\۰&۳&۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵۳&۴۲&-۲۶\\۱۲&۲۹&-۲\\۳&۳۳&۳۶\end{bmatrix}$$

۱۶-

$$\begin{bmatrix}۱&۳&۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&۴\\۳&-۱\\۶&۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴۱&۲۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix}=۲۶$$

۱۷- برای راحتی کار ابتدا حاصل ماتریس زیر را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix}۳&۵&۱\\۴&۲&۳\\۰&۳&-۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\۲\\۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۶\\۱۷\\۳\end{bmatrix}$$

اکنون داریم:

$$\text{عبارت}=\begin{bmatrix}۳&۵&۱\\۴&۲&۳\\۰&۳&-۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱۶\\۱۷\\۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۳۶\\۱۰۷\\۴۸\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های این ماتریس، برابر با ۲۹۱ است.

۱۸- درایهٔ سطر دوم، ستون سوم $A^{۲}$ = سطر دوم A × ستون سوم A

$$=\begin{bmatrix}۴&۳&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱\\۱\\۳\end{bmatrix}=-۴+۳+۳=۲$$

درایهٔ سطر سوم، ستون اول $A^{۳}$ = (سطر سوم A) × A × (ستون اول A)

$$=\begin{bmatrix}۱&۲&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳&۲&-۱\\۴&۳&۱\\۱&۲&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳\\۴\\۱\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}۱۴&۱۴&۱۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳\\۴\\۱\end{bmatrix}=۴۲+۵۶+۱۰=۱۰۸$$

۱۹-

$$M=\begin{bmatrix}۵\\۷\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳&-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۵&-۱۰\\۲۱&-۱۴\end{bmatrix}$$

از طرفی:

$$M^{۲}=\begin{bmatrix}۱۵&-۱۰\\۲۱&-۱۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱۵&-۱۰\\۲۱&-۱۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۵&-۱۰\\۲۱&-۱۴\end{bmatrix}=M$$

پس $M^{۳}=M^{۲}\cdot M=M$ و با استقرا نتیجه می‌شود $M^{۱۲۱}=M$.

۲۰-

$$M=AB=\begin{bmatrix}۳\\۴\\-۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱&-۱&-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳&-۳&-۶\\۴&-۴&-۸\\-۱&۱&۲\end{bmatrix}$$

$$M^۲=\begin{bmatrix}۳&-۳&-۶\\۴&-۴&-۸\\-۱&۱&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳&-۳&-۶\\۴&-۴&-۸\\-۱&۱&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳&-۳&-۶\\۴&-۴&-۸\\-۱&۱&۲\end{bmatrix}=M$$

پس $M^۲=M$ و با استقرا نتیجه می‌شود $M^۳=M^۲\times M=M\times M=M^۲=M$؛ $M^۵=M$ در نتیجه، مجموع درایه‌های $M^۵$، برابر مجموع درایه‌های M؛ یعنی برابر ۱۲- است.

۲۱-

$$D^۲=\begin{bmatrix}a&۰&۰\\۰&b&۰\\۰&۰&c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&۰&۰\\۰&b&۰\\۰&۰&c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^۲&۰&۰\\۰&b^۲&۰\\۰&۰&c^۲\end{bmatrix}$$

$$D^۳=D^۲\times D=\begin{bmatrix}a^۲&۰&۰\\۰&b^۲&۰\\۰&۰&c^۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&۰&۰\\۰&b&۰\\۰&۰&c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^۳&۰&۰\\۰&b^۳&۰\\۰&۰&c^۳\end{bmatrix}$$

با استقرا می‌توان پیش‌بینی کرد که $D^n=\begin{bmatrix}a^n&۰&۰\\۰&b^n&۰\\۰&۰&c^n\end{bmatrix}$.

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:

اگر یک ماتریس قطری را به توان n برسانیم، حاصل نیز ماتریسی قطری است که درایه‌های قطر اصلی آن، توانِ nام ماتریس اولیه است.

۲۲- ماتریس A قطری است و بنا بر نتیجهٔ تمرین قبل داریم:

$$A^k-A^{k-۱}=\begin{bmatrix}۲^k&۰\\۰&۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۲^{k-۱}&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲^k-۲^{k-۱}&۰\\۰&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲^{k-۱}&۰\\۰&۰\end{bmatrix}$$

۲۳-

$$(A^۲+I)^۲=(A^۲+I)(A^۲+I)=A^۴+A^۲+A^۲+I=A\times A^۳+۲A^۲+I=A(I-۲A)+۲A^۲+I$$

$$=A-۲A^۲+۲A^۲+I=A+I$$

۲۴-

$$A^۲=\begin{bmatrix}۰&۰&۱\\۰&۱&۰\\۱&۰&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۰&۱\\۰&۱&۰\\۱&۰&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}=I$$

از طرفی $A^۳=A^۲A=IA=A$، بنابراین می‌توان حدس زد:

$$A^n=\begin{cases}A &: \text{n فرد باشد}\\ I &: \text{n زوج باشد}\end{cases}$$

با توجه به نتیجهٔ فوق، داریم:

$$A^{۵۳}-A^{۴۶}=A-I=\begin{bmatrix}۰&۰&۱\\۰&۱&۰\\۱&۰&۰\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱&۰&۱\\۰&۰&۰\\۱&۰&-۱\end{bmatrix}$$

۲۵- چون دو ماتریس موردنظر، تعویض‌پذیر هستند، پس باید داشته باشیم:

$$\begin{bmatrix}n&۳\\۲&-۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&m\\-۱&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&m\\-۱&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n&۳\\۲&-۱\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}n-۳&mn+۶\\۳&۲m-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n+۲m&۳-m\\-n+۴&-۵\end{bmatrix}$$

پس باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} n-۳=n+۲m \Rightarrow m=-\frac{۳}{۲} \\ ۳=-n+۴ \Rightarrow n=۱ \\ mn+۶=۳-m \\ ۲m-۲=-۵ \end{cases}$$

این دو مقدار، در دو رابطهٔ بعدی نیز صدق می‌کنند، پس قابل‌قبول هستند، در نتیجه $m+n=-\frac{۱}{۲}$.

۲۶- چون دو ماتریس تعویض‌پذیرند، پس باید داشته باشیم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & a \\ -۱ & b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & a \\ -۱ & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -۱ & a+۳b \\ ۴ & ۳a+۲b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲+۳a & ۶+۲a \\ -۱+۳b & -۳+۲b \end{bmatrix}$$

از تساوی دو ماتریس نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} -۱=۲+۳a \Rightarrow a=-۱ \\ ۴=-۱+۳b \Rightarrow b=\frac{۵}{۳} \\ a+۳b=۶+۲a \Rightarrow ۳b=۶+a \\ ۳a+۲b=-۳+۲b \Rightarrow a=-۱ \end{cases}$$

جواب‌های به دست آمده از دستگاه فوق در معادلهٔ سوم نیز صدق می‌کند، پس دستگاه سازگار است و در نتیجه $a=-۱$ و $b=\frac{۵}{۳}$.

۲۷-

$$(A-B)\times(A+B)=A^۲-B^۲ \Rightarrow \cancel{A^۲}+AB-BA-\cancel{B^۲}=\cancel{A^۲}-\cancel{B^۲}$$

$\Rightarrow AB-BA=\bar{O} \Rightarrow AB=BA \Rightarrow$ A و B تعویض‌پذیرند.

۲۸-

$$(A+B)^۲=A^۲+B^۲ \Rightarrow (A+B)\times(A+B)=A^۲+B^۲ \Rightarrow \cancel{A^۲}+AB+BA+\cancel{B^۲}=\cancel{A^۲}+\cancel{B^۲} \Rightarrow AB=-BA \;(۱)$$

اکنون داریم:

$$A^۲B=A\cdot(AB)=A\cdot(-BA)=-A(BA)=-(AB)A \overset{(۱)}{=} -(-BA)A=BA^۲$$

۲۹-

$$(A-I)^۲-(A+I)^۲=(A-I)(A-I)-(A+I)(A+I)=(A^۲-AI-IA+I^۲)-(A^۲+AI+IA+I^۲)$$

$$=A^۲-۲A+I-A^۲-۲A-I=-۴A$$

۳۰- رابطه را به صورت $A^۲=I-A$ تبدیل می‌کنیم و طرفین این رابطه را در A ضرب می‌کنیم:

$$A(A^۲)=A(I-A) \Rightarrow A^۳=A-A^۲ \Rightarrow A^۳=A-(I-A)=۲A-I$$

$$A^۵=A^۳\cdot A^۲=(۲A-I)(I-A)=۲AI-۲A^۲-I^۲+IA=۲A-۲(I-A)-I+A=۵A-۳I$$

۳۱- چون $A^۲=A$، پس $A^۳=A(A^۲)=AA=A^۲=A$ و در نتیجه $A^n=A$؛ اکنون داریم:

$$(I+A)^۲=(I+A)(I+A)=I+۲A+A^۲=I+۲A+A=I+۳A=I+(۲^۲-۱)A$$

$$(I+A)^۳=(I+A)(I+A)^۲=(I+A)(I+۳A)$$

$$=I+۴A+۳A^۲=I+۴A+۳A=I+۷A=I+(۲^۳-۱)A$$

پس با استقرا نتیجه می‌شود $(I+A)^n=I+(۲^n-۱)A$.

در نتیجه داریم:

$$۲^n-۱=۳۱ \Rightarrow ۲^n=۳۲ \Rightarrow n=۵$$

۳۲- تساوی $A=mB+kI$ را یک بار از طرف چپ در B ضرب می‌کنیم و یک بار هم از طرف راست، پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l}BA=B(mB+kI)=mB^{۲}+kB\\ AB=(mB+kI)B=mB^{۲}+kB\end{array}\right\}\Rightarrow AB=BA\Rightarrow$$ A و B تعویض‌پذیرند.

۳۳- الف) $(A-I)^{۲}=(A-I)(A-I)=A^{۲}-A-A+I^{۲}=A^{۲}-۲A+I=A-۲A+I=-A+I\neq A-I$

پس تساوی (الف) نادرست است.

ب) $(I-A)^{۲}=(I-A)\cdot(I-A)=I^{۲}-A-A+\underbrace{A^{۲}}_{=A}=I-A$

پس تساوی (ب) درست است.

۳۴- $A^{۲}=A-I\xrightarrow{\text{به توان ۲}}A^{۴}=(A-I)^{۲}=\underbrace{A^{۲}}_{A-I}-۲A+I=-A$

$$A^{۵}=A^{۴}\cdot A=-A\cdot A=-A^{۲}=-(A-I)=-A+I\Rightarrow A^{۵}+A=I$$

۳۵- از رابطهٔ اول نتیجه می‌شود $AB=۳BA$. اکنون داریم:

$$AB^{۳}=(AB)B^{۲}=۳(BA)BB=۳B(AB)B=۳B(۳BA)B=۹B^{۲}(AB)=۹B^{۲}(۳BA)=۲۷B^{۳}A$$

پس $AB^{۳}-۲۷B^{۳}A=\bar{O}$ و در نتیجه $m=-۲۷$.

۳۶- دو طرف رابطهٔ $B=۲A-۳I$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$B^{۲}=(۲A-۳I)(۲A-۳I)=۴A^{۲}-۶AI-۶IA+۹I^{۲}$$

$$=۴A^{۲}-۱۲A+۹I=۴(۳A)-۱۲A+۹I\Rightarrow B^{۲}=۹I$$

۳۷- $$A^{۲}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos^{۲}\theta-\sin^{۲}\theta & -\cos\theta\sin\theta-\sin\theta\cos\theta\\ \sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta & -\sin^{۲}\theta+\cos^{۲}\theta\end{bmatrix}$$

می‌دانیم $\cos ۲\theta=\cos^{۲}\theta-\sin^{۲}\theta$ و $\sin ۲\theta=۲\sin\theta\cos\theta$، پس:

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}\cos ۲\theta & -\sin ۲\theta\\ \sin ۲\theta & \cos ۲\theta\end{bmatrix}$$