

خرید کتاب های کنکور

با تخفیف ویژه

و

ارسال رایگان

Medabook.com

+



یک جله تماس تلفنی رایگان

با مشاوران رتبه برتر

برای انتخاب بهترین منابع

دبیرستان و کنکور

۰۲۱ ۲۸۴۲۵۲۱۰





مجموعه، الگو و دنباله

مجموعه‌های اعداد

برخی از مجموعه‌های اعدادی را که کاربرد زیادی در ریاضیات دارند، در جدول زیر مشاهده می‌کنید.

نام مجموعه	نماد مجموعه	اعضای مجموعه
اعداد طبیعی	\mathbb{N}	$\{1, 2, 3, 4, \dots\}$
اعداد حسابی	\mathbb{W}	$\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
اعداد صحیح	\mathbb{Z}	$\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
اعداد طبیعی فرد	\mathbb{O}	$\{1, 3, 5, 7, \dots\}$
اعداد طبیعی زوج	\mathbb{E}	$\{2, 4, 6, 8, \dots\}$
اعداد گویا	\mathbb{Q}	$\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$
اعداد گنگ	\mathbb{Q}'	اعدادی که امکان ندارد به صورت نسبت دو عدد صحیح نوشته شوند.
اعداد حقیقی	\mathbb{R}	اجتماع دو مجموعه گویا و گنگ

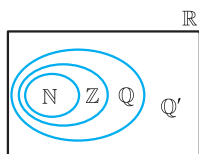
با دقت در این جدول نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{Q}' \quad \text{۳}$$

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' \quad \text{۲}$$

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \quad \text{۱}$$

تذکر: وضعیت مجموعه‌های $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ و \mathbb{Q}' در نمودار ون به صورت مقابل است:



نکته: مجموع، تفاضل، حاصل ضرب و حاصل تقسیم دو عدد گویا (به جز تقسیم بر صفر) عددی است گویا ولی در مورد اعداد گنگ نمی‌توان چنین اظهارنظری کرد. هم‌چنین حاصل جمع هر عدد گویا با هر عدد گنگ حتماً عددی گنگ است.

به طور مثال، حاصل جمع دو عدد گنگ $1 + \sqrt{2}$ و $2 - \sqrt{2}$ گویاست و یا حاصل ضرب دو عدد گنگ $\sqrt{2}$ و $3\sqrt{2}$ عددی است گویا.

تست: اگر $\alpha = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ آن‌گاه کدام عدد زیر گویاست؟

$$\alpha^2 - 4\alpha \quad (۴)$$

$$\alpha^2 - 3\alpha \quad (۳)$$

$$\alpha^2 - 2\alpha \quad (۲)$$

$$\alpha^2 - \alpha \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۱» سعی می‌کنیم به کمک توان‌رسانی $\sqrt{3}$ را از بین ببریم.

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2\alpha = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow 2\alpha - 1 = \sqrt{3} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (2\alpha - 1)^2 = (\sqrt{3})^2$$

$$\Rightarrow 4\alpha^2 - 4\alpha + 1 = 3 \Rightarrow \alpha^2 - \alpha = \frac{1}{4}$$

پس $\alpha^2 - \alpha$ یک عدد گویاست.

نکته: اگر $\frac{a}{b} < \frac{m}{n}$ آن‌گاه $\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+n} < \frac{m}{n}$.

نتیجه: اگر a, b, m, n اعداد طبیعی باشند، آن‌گاه $\frac{a+m}{b+n}$ یک عدد گویا بین دو عدد گویای $\frac{a}{b}$ و $\frac{m}{n}$ می‌باشد. به طور مثال اگر بخواهیم

بین $\frac{2}{3}$ و $\frac{4}{5}$ یک عدد گویا مثال بزنیم، کافی است $\frac{4+2}{5+3} = \frac{6}{8}$ را مثال بزنیم.



مجموعه، الگو و دنباله



مثال بین $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ سه عدد گویا مثال بزنید.

پاسخ ابتدا بین $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ یک عدد مثال می‌زنیم.

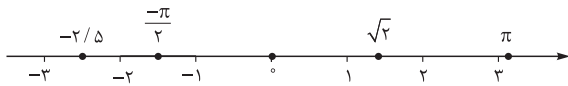
حال بین $\frac{1}{3}$ و $\frac{3}{6}$ یک عدد مثال می‌زنیم.

و بالاخره بین $\frac{1}{3}$ و $\frac{4}{9}$ یک عدد مثال می‌زنیم.

پس سه عدد $\frac{2}{6}$ و $\frac{3}{9}$ و $\frac{4}{12}$ را بین $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ پیدا کردیم.

محور اعداد حقیقی

تمام مجموعه اعدادی که در دبیرستان می‌خوانیم، زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی‌اند. هر عدد دلخواه حقیقی را می‌توان روی محور اعداد حقیقی نمایش داد و برعکس، هر نقطه روی این محور نشان‌دهنده یک عدد حقیقی است. به طور مثال اعداد π ، $\sqrt{2}$ ، $-\frac{\pi}{2}$ و $-\frac{2}{5}$ روی محور به صورت روبه‌رو می‌باشند:



بازه‌ها

زیرمجموعه‌هایی از \mathbb{R} که مشخص‌کننده یک قطعه از محور اعداد حقیقی باشند را «بازه» یا «فاصله» می‌نامیم. به طور مثال مجموعه $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 2\}$ ، مجموعه تمام اعداد حقیقی بین -1 و 2 به همراه خود این دو عدد است که آن را به صورت $[-1, 2]$ نشان می‌دهیم و به آن بازه بسته از -1 تا 2 می‌گوییم. اعضای این مجموعه به صورت زیر روی محور نمایش داده می‌شوند:

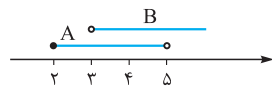


در جدول زیر، انواع بازه‌ها را مشاهده می‌کنید:

نام بازه	نماد بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش محوری
باز	(a, b)	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
بسته	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
نیم‌باز	$[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
نیم‌باز	$(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	
باز	$(a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$	
باز	$(-\infty, a)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	
نیم‌باز	$[a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$	
نیم‌باز	$(-\infty, a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	
باز	$(-\infty, +\infty)$	\mathbb{R}	

مثال اگر $A = [2, 5)$ و $B = (3, +\infty)$ دو بازه باشند، حاصل $A \cup B$ ، $A \cap B$ ، $A - B$ و $B - A$ را بیابید.

پاسخ نمایش هندسی هر دو بازه مطابق شکل مقابل است:



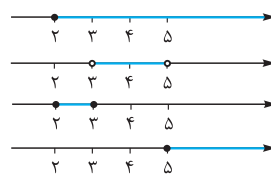
با توجه به شکل داریم:

$$A \cup B = [2, 5) \cup (3, +\infty) = [2, +\infty)$$

$$A \cap B = [2, 5) \cap (3, +\infty) = (3, 5)$$

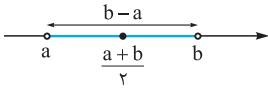
$$A - B = [2, 5) - (3, +\infty) = [2, 3]$$

$$B - A = (3, +\infty) - [2, 5) = [5, +\infty)$$





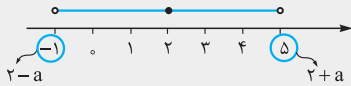
تذکر طول بازه‌های (a, b) , $[a, b]$, $(a, b]$ و $[a, b)$ همگی برابر $b - a$ است و در ضمن نقطهٔ وسط تمام این بازه‌ها $\frac{a+b}{2}$ است.



تست در بازهٔ $(2-a, 2+a)$ دقیقاً پنج عدد صحیح وجود دارد. حداکثر مقدار a کدام است؟

- ۱ (۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴)

پاسخ گزینهٔ «۳» نمایش محوری بازه به صورت زیر است:

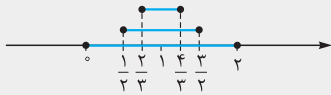


به ازای $a = 3$ بازه به صورت $(-1, 5)$ خواهد بود که شامل ۵ عدد صحیح است؛ اگر $a > 3$ انتخاب شود، آن‌گاه بازه، شامل ۷ عدد صحیح $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ خواهد بود.

تست اجتماع تمام بازه‌های به فرم $[1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}]$ کدام است؟ ($n \in \mathbb{N}$)

- ۱ (۱) $[0, 2]$ (۲) $[1, 2]$ (۳) $\{1\}$ (۴)

پاسخ گزینهٔ «۱» با انتخاب $n = 1, 2, 3, \dots$ و نمایش هندسی این بازه‌ها، معلوم می‌شود که اجتماع تمام آن‌ها برابر بازهٔ $[0, 2]$ است.



مجموعه‌های منتهای و نامنتاهی

مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن یک عدد حسابی است، مجموعهٔ منتهای می‌نامیم. اما اگر تعداد اعضای مجموعه‌ای از هر عددی که در نظر بگیریم، بزرگ‌تر باشد (بی‌نهایت باشد) آن را مجموعهٔ نامنتاهی می‌نامیم. به طور مثال، مجموعهٔ اعداد طبیعی، یک‌رقمی (که ۹ عضو دارد) و یا مجموعهٔ اعداد اول زوج (که یک عضو دارد) منتهای می‌باشند. اما مجموعه‌های $\mathbb{N}, \mathbb{W}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ و \mathbb{R} نامنتاهی‌اند.

تذکر مجموعهٔ تهی، منتهای است.

تذکر هر بازه به شکل (a, b) یک مجموعهٔ نامنتاهی است. ($a < b$)

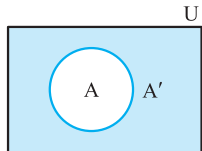
تست اگر A مجموعه‌ای منتهای و B مجموعه‌ای نامنتاهی باشد، آن‌گاه کدام مجموعهٔ زیر الزاماً منتهای است؟

- ۱ (۱) $A \cup B$ (۲) $B - A$ (۳) $A - B$ (۴) $B \cap \mathbb{N}$

پاسخ گزینهٔ «۳» تعداد اعضای $A - B$ یا برابر تعداد اعضای A است و یا کمتر از آن. پس $A - B$ منتهای است.

منهم یک مجموعه

مجموعهٔ مرجع: در هر مبحث، مجموعه‌ای که همهٔ مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعهٔ آن باشند، مجموعهٔ مرجع نامیده می‌شود و آن را با U (گاهی اوقات با M) نشان می‌دهند.

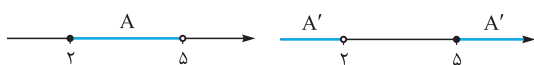


متمم A : اگر U مجموعهٔ مرجع باشد و $A \subseteq U$ ، آن‌گاه مجموعهٔ $U - A$ را (که با A' نشان می‌دهیم) متمم A می‌نامیم.

در واقع A' شامل تمام عضوایی از U است که در A نیستند.

به طور مثال اگر \mathbb{W} مجموعهٔ مرجع باشد، آن‌گاه $\mathbb{N}' = \mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\}$ و یا

اگر مجموعهٔ مرجع و $A = [2, 5]$ آن‌گاه $A' = (-\infty, 2) \cup [5, +\infty)$



نکته اگر U مجموعهٔ مرجع و A زیرمجموعهٔ دلخواه آن باشد، آن‌گاه:

- ۱ (۱) $U' = \emptyset$ (۲) $\emptyset' = U$ (۳) $A \cup A' = U$ (۴) $A \cap A' = \emptyset$



مجموعه، الگو و دنباله



تست اگر $(A \cap B') \cup (B \cap A')$ نامتناهی باشد، آن گاه کدام مجموعه زیر حتماً نامتناهی است؟
 (۱) $A - B$ (۲) $A \cup B$ (۳) A' (۴) A

پاسخ گزینه «۲» اگر A متناهی باشد، آن گاه $A \cap B'$ هم متناهی است. به طور مشابه اگر B نیز متناهی باشد، آن گاه $B \cap A'$ هم متناهی است. در این صورت اجتماع دو مجموعه $A \cap B'$ و $B \cap A'$ نیز متناهی است که این با فرض سؤال تناقض دارد. پس حتماً حداقل یکی از مجموعه‌های A و B نامتناهی است که در نتیجه $A \cup B$ نیز نامتناهی است.

تست کدام گزینه برای مجموعه‌های دلخواه A و B صحیح نیست؟
 (۱) اگر $A \subset B$ و A نامتناهی باشد، آن گاه B نیز نامتناهی است.
 (۲) اگر $A' \subset B'$ و A متناهی باشد، آن گاه B نیز متناهی است.
 (۳) اگر $A \subset B$ و $A \cap B$ متناهی باشد، آن گاه A نیز متناهی است.
 (۴) اگر $A' \subset B'$ و $A \cup B$ نامتناهی باشد، آن گاه B نیز نامتناهی است.

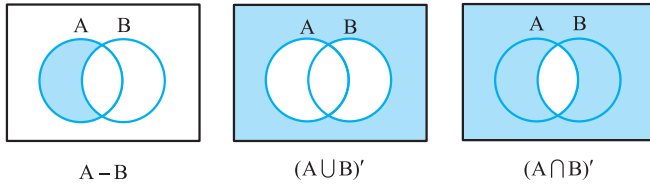
پاسخ گزینه «۴» صحیح است زیرا اگر A که یک مجموعه نامتناهی است، زیرمجموعه B باشد، پس B نمی‌تواند متناهی باشد، زیرا تمام اعضای A در B خواهند بود و در نتیجه B نیز نامتناهی است.

۲ صحیح است، زیرا اگر $A' \subset B'$ باشد $B \subset A$ است و اگر A متناهی باشد، قطعاً B نیز متناهی است.
 ۳ صحیح است. اگر $A \subset B$ باشد، آن گاه $A \cap B = A$ است؛ در نتیجه A مجموعه‌ای نامتناهی است.
 ۴ صحیح نیست، زیرا اگر $A' \subset B'$ باشد، $B \subset A$ است و $A \cup B = A$. اگر A نامتناهی باشد، B می‌تواند متناهی باشد، مثلاً اگر $A = \mathbb{N}$ و $B = \{1, 2\}$ باشد.

تذکره روابط زیر در مورد متمم یک مجموعه برقرار است:

(۱) $(A')' = A$ (۲) $A - B = A \cap B'$ (۳) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (۴) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

روابط ۳ و ۴ را روابط دمورگان می‌نامند. درستی روابط بالا را می‌توانید در نمودارهای ون که در زیر آمده است، تحقیق کنید.



تذکره به کمک رابطه توزیع پذیری که در زیر آمده است، می‌توانید بسیاری از روابط بین مجموعه‌ها را اثبات کنید.

۱ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ۲ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$\begin{cases} A \cup (A \cap B) = A \\ A \cap (A \cup B) = A \end{cases}$$

تذکره

تست با فرض $B - A = B$ حاصل $((B - A) \cup A')' - ((A \cup B') - B)'$ کدام است؟
 (۱) $A \cup B$ (۲) A' (۳) A (۴) B

پاسخ گزینه «۳» از $B - A = B$ نتیجه می‌گیریم $A \cap B = \emptyset$ است، یعنی دو مجموعه A و B از هم جدا هستند:

پس:

$$A - B = A \Rightarrow A \cap B = \emptyset \Rightarrow B - A = B$$

$$((B - A) \cup A')' - ((A \cup B') - B)' = (B \cap A) - ((A \cup B') \cap B)'$$

$$(A \cap B') \cap ((A \cup B') \cap B)' = (A - B) \cap B' = A \cap B' = A - B = A$$

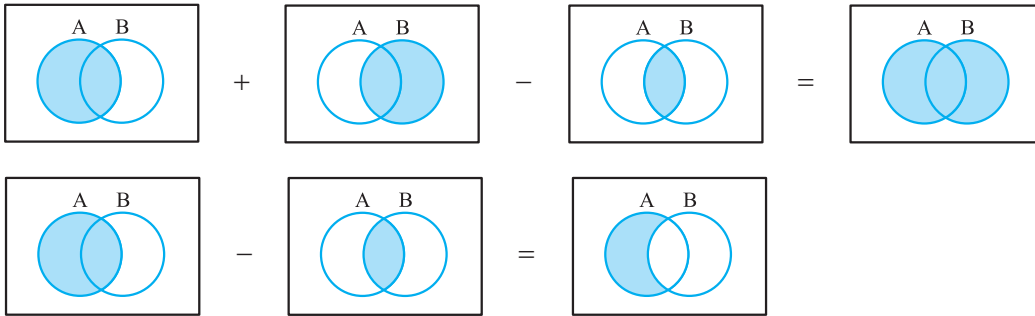
تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

تعداد عضوهای مجموعه متناهی A را با $n(A)$ (و یا $|A|$) نشان می‌دهند. در این صورت روابط زیر برقرار است:

۱ $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ ۲ $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$



نمودار ون‌های زیر، درستی این روابط را به طور شهودی نشان می‌دهند:



تعریف اگر $A \cap B = \emptyset$ آن‌گاه A و B را دو مجموعه جدا از هم می‌نامیم.

مثال اگر تعداد اعضای A دو برابر تعداد اعضای $A \cap B$ و نصف تعداد اعضای B باشد، آن‌گاه تعداد اعضای $A \cup B$ چند برابر تعداد اعضای A است؟

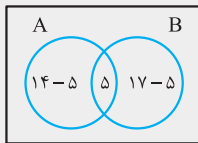
پاسخ با فرض $n(A) = x$ داریم:

$$\begin{cases} n(A \cap B) = \frac{1}{2}n(A) = \frac{1}{2}x \\ n(B) = 2n(A) = 2x \end{cases} \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = x + 2x - \frac{1}{2}x = \frac{5}{2}x$$

پس تعداد اعضای $A \cup B$ ، $2/5$ برابر تعداد اعضای A است.

تست مجموعه‌های A ، B و $A \cap B$ به ترتیب ۱۴، ۱۷ و ۵ عضو دارند. چند عضو فقط در یکی از این دو مجموعه است؟

- ۱) ۱۹ (۲) ۲۰ (۳) ۲۱ (۴) ۲۲



پاسخ گزینه «۳» **روش اول** در نمودار مقابل تعداد اعضای هر بخش نوشته شده است. تعداد اعضای

$A - B$ و $B - A$ به ترتیب ۹ و ۱۲ است. پس ۲۱ عضو فقط در A یا فقط در B قرار دارند.

روش دوم هدف یافتن $n((A - B) \cup (B - A))$ است.

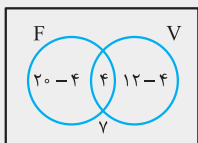
$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$\Rightarrow n((A - B) \cup (B - A)) = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B) = 14 + 17 - 10 = 21$$

تست ۲۰ نفر از دانش‌آموزان یک کلاس در تیم فوتبال، ۱۲ نفر در تیم والیبال و ۴ نفر در هر دو تیم ثبت‌نام کرده‌اند. اگر ۷ نفر در

هیچ‌کدام از دو تیم ثبت‌نام نکرده باشند، تعداد افراد کلاس کدام است؟

- ۱) ۳۲ (۲) ۳۳ (۳) ۳۴ (۴) ۳۵



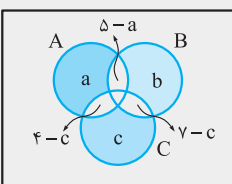
پاسخ گزینه «۴» در نمودار مقابل، تعداد دانش‌آموزان ثبت‌نامی در هر تیم نوشته شده است. تعداد

کل دانش‌آموزان برابر $(20 - 4) + 4 + (12 - 4) + 7 = 35$ می‌باشد.

تست برای سه مجموعه دلخواه A ، B و C تعداد اعضای مجموعه‌های $A - B$ ، $B - C$ ، $C - A$ ، $A - C$ و $C - B$ به ترتیب برابر

۴، ۷، ۵ و ۴ است. تعداد اعضای $B - A$ کدام است؟

- ۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۷ (۴) ۶



پاسخ گزینه «۲» تعداد اعضای ناحیه‌های رنگی را a ، b و c می‌گیریم (مطابق شکل)، سپس با

توجه به اطلاعات مسئله، تعداد اعضای سایر مجموعه‌ها را تعیین می‌کنیم.

$$\begin{cases} \delta - a = 6 - b \\ \gamma - c = 4 - a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b - a = 1 \\ a = c \end{cases} \Rightarrow b - c = 1$$

با توجه به شکل داریم:

هدف محاسبه $b + \gamma - c$ است. با توجه به رابطه $b - c = 1$ حاصل $b + \gamma - c$ برابر ۸ است.



الگو و دنباله

دنباله: هر تعداد عدد را که پشت سر هم قرار می‌گیرند، یک دنباله می‌نامیم. این اعداد، جملات دنباله نامیده می‌شوند.

جمله عمومی: جمله n ام دنباله که با t_n نمایش می‌دهیم را جمله عمومی دنباله می‌نامیم.

به مثال‌های زیر توجه کنید.

۱ $2, 4, 8, 16, \dots, 2^n, \dots \Rightarrow t_n = 2^n$

۲ $1, 4, 7, 10, \dots, 3n-2, \dots \Rightarrow t_n = 3n-2$

تست مجموع 2^0 جمله اول دنباله‌ای با جمله عمومی $t_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$ چه قدر است؟

۱) صفر ۲) 2^0 ۳) 1^0 ۴) 4^0

پاسخ گزینه «۳» اگر در جمله عمومی به جای n ، اعداد طبیعی $1, 2, 3, \dots, 2^0$ را جایگزین کنیم، 2^0 جمله اول به صورت زیر به دست می‌آید:

مجموع این 2^0 جمله برابر 1^0 است.

الگو: در بعضی دنباله‌ها، بین جملات الگویی وجود دارد که این الگو با جمله عمومی دنباله قابل بیان است. به طور مثال در الگوی مقابل، تعداد نقاط را می‌توان به صورت دنباله $4, 8, 12, \dots$ نشان داد. ... جمله عمومی این الگو به صورت $t_n = 4n$ می‌باشد.

تست در الگوی مقابل، مساحت مثلث رنگی در شکل هفتم چه قدر است؟ (در هر مرحله، وسط اضلاع مربع به هم وصل شده‌اند.)

۱) $\frac{1}{512}$ ۲) $\frac{1}{1024}$ ۳) $\frac{1}{256}$ ۴) $\frac{1}{128}$

شکل ۱ شکل ۲ شکل ۳

پاسخ گزینه «۱»

مساحت شکل ۱: $S_1 = \frac{1}{8}$

مساحت شکل ۲: $S_2 = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4}$

مساحت شکل ۳: $S_3 = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2$

\Rightarrow مساحت شکل ۷: $S_7 = \frac{1}{8} \times \left(\frac{1}{4}\right)^6 = \frac{1}{512}$

الگوی خطی

الگوهایی که جمله عمومی آن‌ها به صورت $t_n = an + b$ است، الگوی خطی می‌نامند.

نکته در یک الگوی خطی، اختلاف هر دو جمله متوالی، برابر ضریب n است.

مثال در یک الگوی خطی، جمله ششم، 14 واحد از جمله دوم بیشتر است. در این الگو، جمله سیزدهم، چه قدر از جمله هشتم بیشتر است؟

پاسخ جمله عمومی الگو را $t_n = an + b$ فرض می‌کنیم.

$$t_6 = 14 + t_2 \Rightarrow 6a + b = 14 + 2a + b \Rightarrow a = \frac{7}{2}$$

$$t_{13} - t_8 = (13a + b) - (8a + b) = 5a = \frac{35}{2} = 17 \frac{1}{2}$$



الگوی درجه دوم

اگر جمله عمومی یک دنباله، چند جمله‌ای درجه دوم باشد، این دنباله را یک دنباله درجه ۲ می‌نامیم.

تست در الگوی زیر، تعداد مربع‌های رنگ‌شده، جملات یک دنباله درجه ۲ هستند. مجموع ضرایب جمله عمومی این دنباله چه قدر است؟

(۱) ۵
(۲) ۶
(۳) ۳
(۴) ۴

پاسخ گزینه «۱» تعداد مربع‌های رنگ‌شده، جملات دنباله مقابل می‌باشند:

پس $t_n = (n+2)^2 - 4$ یعنی $t_n = n^2 + 4n$. مجموع ضرایب t_n برابر ۵ است.

تست در الگوی زیر، تعداد مربع‌های رنگ‌شده، جملات یک دنباله درجه ۲ هستند. مجموع ضرایب جمله عمومی این دنباله چه قدر است؟

(۱) ۵
(۲) ۶
(۳) ۳
(۴) ۴

پاسخ گزینه «۱» تعداد مربع‌های رنگ‌شده، جملات دنباله مقابل می‌باشند:

پس $t_n = (n+2)^2 - 4$ یعنی $t_n = n^2 + 4n$. مجموع ضرایب t_n برابر ۵ است.

دنباله‌های حسابی و هندسی

دنباله حسابی

دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست آید، یک دنباله حسابی نامیده می‌شود. به آن عدد ثابت، قدرنسبت دنباله می‌گویند که با نماد d نمایش می‌دهند.

نکته جملات دنباله حسابی را به صورت مقابل نشان می‌دهیم:

جمله عمومی: جمله n ام یا همان جمله عمومی دنباله حسابی با جمله اول t_1 و قدرنسبت d به صورت مقابل است:

مثال تعداد جملات مثبت دنباله حسابی $75, x, y, 63, \dots$ را تعیین کنید.

پاسخ جمله اول دنباله، ۷۵ و جمله چهارم آن ۶۳ است.

$t_4 = t_1 + 3d \Rightarrow 63 = 75 + 3d \Rightarrow d = -4$

$t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow t_n = 75 + (n-1)(-4) \Rightarrow t_n = -4n + 79$

پس باید $-4n + 79 > 0 \Rightarrow n < \frac{79}{4}$ باشد، در نتیجه $n < \frac{79}{4}$. تعداد اعداد طبیعی کوچکتر از $\frac{79}{4}$ برابر ۱۹ است.

تست در یک دنباله حسابی $t_4 = 75$ و $t_8 = 13$ است. اولین جمله بزرگتر از ۵۰ در این دنباله کدام است؟

(۱) t_{31} (۲) t_{32} (۳) t_{33} (۴) t_{34}

پاسخ گزینه «۳» قدرنسبت را d فرض کنید.

$$\begin{cases} t_4 = 75 \\ t_8 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + 3d = 75 \\ t_1 + 7d = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = \frac{3}{2} \\ t_1 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$t_n > 50 \Rightarrow t_1 + (n-1)d > 50 \Rightarrow \frac{5}{2} + \frac{3}{2}(n-1) > 50 \Rightarrow n > \frac{98}{3}$$

اولین عدد طبیعی، $n = 33$ است.

تست در یک دنباله حسابی $t_4 = 75$ و $t_8 = 13$ است. اولین جمله بزرگتر از ۵۰ در این دنباله کدام است؟

(۱) t_{31} (۲) t_{32} (۳) t_{33} (۴) t_{34}

پاسخ گزینه «۳» قدرنسبت را d فرض کنید.

$$\begin{cases} t_4 = 75 \\ t_8 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + 3d = 75 \\ t_1 + 7d = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = \frac{3}{2} \\ t_1 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$t_n > 50 \Rightarrow t_1 + (n-1)d > 50 \Rightarrow \frac{5}{2} + \frac{3}{2}(n-1) > 50 \Rightarrow n > \frac{98}{3}$$

اولین عدد طبیعی، $n = 33$ است.

تست دهمین جمله مشترک دو دنباله حسابی $\{-1, 3, 7, \dots\}$ و $\{2, 5, 8, \dots\}$ کدام است؟

(۱) ۱۱۹ (۲) ۱۱۸ (۳) ۱۳۰ (۴) ۱۳۲

پاسخ گزینه «۱» قدرنسبت دنباله‌ها برابر ۴ و ۳ است. پس جملات مشترک آن‌ها دارای قدرنسبتی برابر ۱۲ است. در واقع جملات مشترک (که اولین آن‌ها ۱۱ است)، خود یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۱۲ است.

$11, 23, 35, \dots \Rightarrow t_{10} = t_1 + 9d = 11 + 9 \times 12 = 119$

تست دهمین جمله مشترک دو دنباله حسابی $\{-1, 3, 7, \dots\}$ و $\{2, 5, 8, \dots\}$ کدام است؟

(۱) ۱۱۹ (۲) ۱۱۸ (۳) ۱۳۰ (۴) ۱۳۲

پاسخ گزینه «۱» قدرنسبت دنباله‌ها برابر ۴ و ۳ است. پس جملات مشترک آن‌ها دارای قدرنسبتی برابر ۱۲ است. در واقع جملات مشترک (که اولین آن‌ها ۱۱ است)، خود یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۱۲ است.

$11, 23, 35, \dots \Rightarrow t_{10} = t_1 + 9d = 11 + 9 \times 12 = 119$

نکته اگر c و b و a سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، آن‌گاه b را واسطه حسابی a و c می‌نامیم؛ در این صورت $b = \frac{a+c}{2}$.

در حالت کلی تر اگر a و c از نظر شماره جمله، از b به فاصله یکسان باشند، باز هم رابطه بالا برقرار است. به طور مثال:

$t_1, t_5, t_9 \Rightarrow t_5 = \frac{t_1 + t_9}{2}$



درج واسطه حسابی

اگر بخواهیم بین دو عدد a و b عدد چنان قرار دهیم که $n+2$ عدد حاصل تشکیل دنباله حسابی بدهند، گوییم بین a و b واسطه حسابی درج کرده‌ایم، در این صورت داریم:

$$\begin{cases} t_1 = a \\ t_{n+2} = b \end{cases} \Rightarrow b = a + (n+1)d$$

تست بین ۵ و ۱۲، پنج واسطه حسابی درج کرده‌ایم. مجموع واسطه‌های دوم و چهارم درج شده کدام است؟

۱۷ (۴)

۱۶ (۳)

۱۵ (۲)

۱۴ (۱)

پاسخ گزینه «۴» **روش اول** جملات دنباله را به صورت $5, a, b, c, e, f, 12$ می‌نویسیم:

$$t_7 = 12 \Rightarrow 5 + 6d = 12 \Rightarrow d = \frac{7}{6} \Rightarrow \begin{cases} b = t_3 = 5 + 2d = 5 + \frac{7}{3} = \frac{22}{3} \\ e = t_5 = 5 + 4d = 5 + \frac{14}{3} = \frac{29}{3} \end{cases}$$

پس حاصل $b+e$ برابر ۱۷ است.

روش دوم c هم واسطه حسابی ۵ و ۱۲ است و هم واسطه حسابی b و e ، پس:

$$c = \frac{e+b}{2} = \frac{5+12}{2} \Rightarrow e+b = 5+12 = 17$$

دنباله هندسی

دنباله‌ای را که در آن، هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت و غیرصفر به دست آید، دنباله هندسی می‌نامیم. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می‌نامیم. جمله اول هم باید غیرصفر باشد.

تکنه جملات دنباله هندسی را به صورت روبه‌رو نمایش می‌دهند:

$$t_1, t_1 r, t_1 r^2, \dots$$

جمله عمومی: جمله n ام یا همان جمله عمومی دنباله هندسی با جمله اول t_1 و قدرنسبت r برابر است با:

$$t_n = t_1 r^{n-1}$$

تذکره اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آن‌گاه $b^2 = ac$ و b را واسطه هندسی a و c می‌نامیم.

تست در یک دنباله هندسی با قدرنسبت بزرگ‌تر از یک، جمله پنجم مربع جمله n ام است. اگر جمله پانزدهم این دنباله برابر ۱ باشد، مقدار n کدام است؟

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

پاسخ گزینه «۳» جمله اول را t_1 و قدرنسبت را r فرض کنید.

$$\begin{cases} t_{15} = (t_n)^2 \\ t_{15} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 r^4 = (t_1 r^{n-1})^2 = t_1^2 r^{2n-2} \Rightarrow t_1 r^{2n-2} = 1 \\ t_1 r^4 = 1 \end{cases}$$

از مقایسه دو رابطه بالا نتیجه می‌گیریم $2n - 6 = 14 \Rightarrow n = 10$.

تست جملات دوم، ششم و هشتم یک دنباله حسابی، سه جمله متوالی یک دنباله هندسی‌اند. جمله چندم دنباله حسابی برابر صفر است؟

چهاردهم (۴)

سیزدهم (۳)

یازدهم (۲)

دهم (۱)

پاسخ گزینه «۱» جملات دنباله حسابی را به صورت $t+7d$ و $t+5d$ و $t+d$ در نظر می‌گیریم. باید $t+5d$ ، واسطه هندسی بین $t+7d$ و $t+d$ باشد.

$$(t+5d)^2 = (t+d)(t+7d)$$

$$\Rightarrow t^2 + 10td + 25d^2 = t^2 + 8td + 7d^2 \Rightarrow 2td + 18d^2 = 0 \Rightarrow t + 9d = 0 \Rightarrow t_1 = 0$$



مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

۱) اگر t_1 ، جمله اول و d ، قدرنسبت یک دنباله حسابی باشد؛ آن گاه مجموع n جمله اول آن از روابط زیر به دست می‌آید:

۱) $S_n = \frac{n}{2}(t_1 + t_n)$

۲) $S_n = \frac{n}{2}(2t_1 + (n-1)d)$

۲) اگر t_1 ، جمله اول و r ، قدرنسبت یک دنباله هندسی باشد، آن گاه مجموع n جمله اول آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{t_1(1-r^n)}{1-r}$$

تست مجموع ۶ جمله اول یک دنباله هندسی با قدرنسبت ۲، چند برابر مجموع ۳ جمله اول آن است؟

۱۸ (۴)

۱۵ (۳)

۹ (۲)

۱۶ (۱)

پاسخ گزینه «۲» با توجه به فرمول S_n در دنباله هندسی داریم:

$$S_n = \frac{t_1(1-r^n)}{1-r} \Rightarrow \begin{cases} S_6 = \frac{t_1(1-2^6)}{1-2} = 63t_1 \\ S_3 = \frac{t_1(1-2^3)}{1-2} = 7t_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{S_6}{S_3} = 9$$

تست در یک دنباله حسابی شامل n جمله، مجموع سه جمله اول برابر ۷، مجموع سه جمله آخر برابر ۴۳ و مجموع کل جملات برابر

۱۲۵ است. مقدار n کدام است؟

۱۵ (۴)

۱۲ (۳)

۱۰ (۲)

۲۵ (۱)

پاسخ گزینه «۴» ابتدا دقت کنید که $t_1 + t_n = t_1 + d + t_n - d = t_1 + t_{n-1}$ به طور مشابه $t_1 + t_n = t_1 + t_{n-2}$ حال با

توجه به فرمول S_n در دنباله حسابی داریم:

$$S_n = \frac{n}{2}(t_1 + t_n) = \frac{n}{2}(t_1 + t_{n-1}) = \frac{n}{2}(t_1 + t_{n-2}) \Rightarrow 3S_n = \frac{n}{2}(t_1 + t_1 + t_1 + t_{n-2} + t_{n-1} + t_n)$$

$$\Rightarrow 3 \times 125 = \frac{n}{2}(7 + 43) \Rightarrow n = 15$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- اگر برای مجموعه‌های A, B, C و D که هر کدام معرف یکی از مجموعه‌های اعداد طبیعی، اعداد صحیح، اعداد گویا و اعداد حقیقی است

رابطه $A \subset B \subset C \subset D$ برقرار باشد، مجموعه اعداد گنگ کدام است؟

$D - B$ (۴)

$D - C$ (۳)

$C - B$ (۲)

$B \cup C$ (۱)

۲- حاصل $\alpha^2 + 2\alpha$ به ازای کدام عدد زیر، گویاست؟

$\sqrt{2} - 1$ (۴)

$\sqrt{2} - 2$ (۳)

$\sqrt{2} + 2$ (۲)

$\sqrt{2} + 1$ (۱)

۳- مجموعه $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \frac{3n+21}{n+2} \in \mathbb{N}\}$ چند عضو دارد؟

۶ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۴- اگر α یک عدد حقیقی گنگ و به ازای هر α ، یک عدد حقیقی گویا باشد، آن گاه k کدام می‌تواند باشد؟

$-\frac{3}{2}$ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

$-\frac{9}{2}$ (۲)

$\frac{9}{2}$ (۱)



- ۵- اگر $\{1, 2, m+1\} = \{3, m-1, n-2\}$ آن گاه حاصل $m-n$ کدام است؟
 (۱) صفر (۲) -۱ (۳) ۳ (۴) -۲
- ۶- به ازای چند مقدار a دو مجموعه $\{a, a^2\}$ و $\{1, b, b^2\}$ با یکدیگر برابرند؟
 (۱) یک مقدار (۲) دو مقدار (۳) هیچ مقدار (۴) بی شمار مقدار
- ۷- اجتماع کدام دو بازه زیر، خود یک بازه است؟
 (۱) $(-3, 3), (2, 5)$ (۲) $(-1, 1), (1, 3)$ (۳) $(2, 4), (5, 7)$ (۴) $(1, 4), (-2, 0)$
- ۸- عدد گویای $2 + \frac{3}{n}$ عضو بازه $(2, 2/05)$ است. حداقل مقدار طبیعی n کدام است؟
 (۱) ۶۰ (۲) ۶۱ (۳) ۳۰ (۴) ۳۱
- ۹- اگر $2 + \frac{1}{n\sqrt{2}}$ عددی گنگ در بازه $(2, \frac{9}{4})$ باشد، آن گاه n چند مقدار طبیعی را اختیار نمی کند؟
 (۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) چهار
- ۱۰- اگر $a+1$ عضوی از بازه $(2a-3, 13-2a)$ باشد، a کدام است؟
 (۱) $a=2$ (۲) $a=3$ (۳) $a=4$ (۴) $a=5$
- ۱۱- به ازای چند مقدار طبیعی n ، بازه $(-\frac{1}{n}, \frac{12n}{4n-1})$ شامل عدد حقیقی $3/1$ است؟
 (۱) ۸ (۲) ۷ (۳) ۶ (۴) ۵
- ۱۲- در بازه $(\frac{2}{3} - n, \frac{2}{3} + n)$ دقیقاً سه عدد صحیح قرار دارد. حداکثر n کدام است؟
 (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{5}{3}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{7}{3}$
- ۱۳- اگر $A = [2, 4]$ و $B = [a, +\infty)$ به طوری که $A \cap B$ یک مجموعه با تعداد اعضای متناهی باشد، کدام صحیح است؟
 (۱) $a \geq 4$ (۲) $a = 4$ (۳) $a \leq 4$ (۴) a یافت نمی شود.
- ۱۴- اگر $A = (-\infty, 4]$ و $B = (a, +\infty)$ ، عدد صحیح a کدام باشد تا $A \cap B$ شامل ۴ عدد صحیح باشد؟
 (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲
- ۱۵- اگر $A = (-6, 2]$ و $B = [-1, 4)$ عدد $2\sqrt{3}$ عضو کدام مجموعه است؟
 (۱) $A - B$ (۲) $B - A$ (۳) $A' \cap B'$ (۴) $A \cap B$
- ۱۶- اگر $A = (-\infty, 5]$ و $B = (-3, +\infty)$ ، مجموعه $(A - B) \cup (B - A)$ چند عدد صحیح را شامل نمی شود؟
 (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹
- ۱۷- اگر $[-4, b] = [-3, 7] \cup [-a, 6]$ ، مقدار $a + b$ کدام می تواند باشد؟
 (۱) ۹ (۲) -۶ (۳) ۳ (۴) ۱۱
- ۱۸- اگر $A_n = [\frac{1-n}{4}, \frac{1+n}{4}]$ آن گاه $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$ کدام است؟
 (۱) $[-1, 1]$ (۲) $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ (۳) $[\frac{-1}{4}, \frac{3}{4}]$ (۴) $[-1, \frac{1}{4}]$
- ۱۹- اگر $M = \{1, 2, \dots, 9\}$ و $A = \{1, 2, 3\}$ به طوری که $B - A = \{4, 5\}$ برای B چند جواب به دست می آید؟ (M مرجع است)
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۸
- ۲۰- اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ باشد، آن گاه چند مجموعه مانند M در رابطه $(A \cap B) \subset M \subset (A \cup B)$ صدق می کند؟
 (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸
- ۲۱- با کدام شرط دو مجموعه A و B متمم یکدیگر هستند؟
 (۱) فقط $A \cap B = \emptyset$ (۲) فقط $A \cup B = M$
 (۳) $A \cap B = \emptyset, A \cup B = M$ (۴) $A \cap B = \emptyset, A' \cup B' = \emptyset$
- ۲۲- اگر $B \subseteq A$ و $A - B$ یک مجموعه غیر تهی و متناهی باشد، A و B کدام می تواند باشد؟
 (۱) $A = [2, 5], B = (2, 5)$ (۲) $A = [2, 5], B = \{2, 5\}$ (۳) $A = (2, 5), B = [2, 5]$ (۴) $A = [2, 5], B = \{2, 5\}$
- ۲۳- اگر A مجموعه ای نامتناهی و B مجموعه ای متناهی باشد، کدام مجموعه حتماً متناهی است؟
 (۱) $B' \cap A$ (۲) $A' \cap B'$ (۳) $B \cap A'$ (۴) $A' \cup B'$



۲۴- اگر A و B دو مجموعه غیر تهی و متنهای باشند، کدام مجموعه می تواند نامتنهای باشد؟

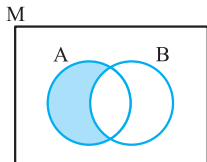
- (۱) $A - B'$ (۲) $B' - A'$ (۳) $(A' - B)'$ (۴) $(A - B)'$

۲۵- اگر $A \subset B \subset C$ به طوری که A متنهای و C نامتنهای باشد، کدام گزینه صحیح است؟

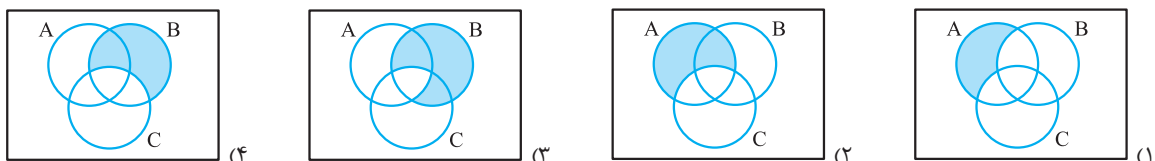
- (۱) B' نامتنهای است. (۲) $B - A$ نامتنهای است. (۳) C' متنهای است. (۴) $C - A$ نامتنهای است.

۲۶- متمم شکل رنگ شده کدام است؟

- (۱) $A' \cup B'$ (۲) $(A \cup B) - A'$ (۳) $B \cup A'$ (۴) $(A \cup B) - A$



۲۷- در کدام گزینه زیر، مجموعه $(A - B)' \cap (B - C)$ درست سایه زده شده است؟



۲۸- متمم مجموعه $(A - B)' - A'$ کدام است؟

- (۱) $A \cap B$ (۲) $A' \cup B'$ (۳) $B \cup A'$ (۴) $B' \cup A$

۲۹- متمم مجموعه $(A \cup B) - A' \cap A$ کدام است؟

- (۱) $B' \cap A$ (۲) $B \cap A'$ (۳) A' (۴) B'

۳۰- ساده شده $(A - B)' \cup (B - A)'$ کدام است؟

- (۱) M (۲) $A \cup B$ (۳) $A' \cup B'$ (۴) $(A \cup B)'$

۳۱- اگر $A \subset B$ و $C' \subset B'$ ، حاصل $A' \cup C'$ کدام است؟

- (۱) A (۲) A' (۳) C (۴) C'

۳۲- اگر $A \cup B = A \cup C$ ، کدام گزینه الزاماً درست است؟

- (۱) $B = C$ (۲) $A - B' = A - C'$ (۳) $A' - B = A' - C$ (۴) $A - B = A - C$

۳۳- بین سه مجموعه ناتهی A ، B و C رابطه $A \cap B = B \cup C$ برقرار است. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) $A - B = \emptyset$ (۲) $C \subset A$ (۳) $C \subset B$ (۴) $B \subset A$

$A - B = D, B - C = E, D - E = F$

۳۴- برای سه مجموعه دلخواه A ، B و C داریم:

در این صورت کدام گزینه حتماً صحیح است؟

- (۱) $F \subseteq C$ (۲) $F \subseteq A \cap C$ (۳) $D \cap C \subseteq F$ (۴) $A \cap C \subseteq F$

۳۵- اگر مجموعه مرجع $M = \{1, 2, \dots, 20\}$ ، $A = \{1, 2, \dots, 15\}$ و $B = \{5, 6, \dots, 15\}$ ، کدام مجموعه عضو کم تری دارد؟

- (۱) $A \cup B'$ (۲) $A - B'$ (۳) $A' - B$ (۴) $(A - B)'$

۳۶- اگر $X = \{1, 2, \dots, 20\}$ و $Y = \{1, 2, \dots, 30\}$ ، مجموعه X کدام ویژگی را دارد؟

- (۱) حداقل ۱۰ و حداکثر ۲۰ عضو دارد. (۲) حداقل ۲۰ و حداکثر ۳۰ عضو دارد.

(۳) می تواند حداقل ۲۰ عضو داشته باشد و می تواند نامتنهای باشد. (۴) می تواند حداقل ۱۰ عضو داشته باشد و می تواند نامتنهای باشد.

۳۷- اگر $n(A) = 2n(B) = 4n(A \cap B)$ ، حاصل $\frac{n(A \cup B)}{n(A \cap B)}$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۳۸- اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند، حاصل $\frac{n(A) + n(B)}{n(A \cap B)}$ برابر کدام عدد می تواند باشد؟

- (۱) ۱ (۲) $1/25$ (۳) $1/75$ (۴) ۳

۳۹- اگر بدانیم $n((A - B) \cup (B - A)) = 5n(A \cap B)$ ، حاصل $\frac{n(A \cup B)}{n(A \cap B)}$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷



۴۰- از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه، ۷۰ نفر محصولات شرکت A و ۵۷ نفر محصولات شرکت B را انتخاب کرده‌اند. اگر ۳۲ نفر از هر دو شرکت خرید کرده باشند، تعداد کسانی که از هیچ شرکتی خرید نکرده باشند چند نفر است؟

- ۱۵ (۱) ۲۵ (۲) ۳۰ (۳) ۳۰ (۴)

۴۱- اگر مجموعه‌های A و B و $A - B$ به ترتیب ۱۵ و ۱۰ و ۱۲ عضو داشته باشند، مجموعه $(A \cup B) - A$ چند عضو دارد؟

- ۵ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)

۴۲- اگر $n(A) = 9$ و $n(A \cap B) = 2$ آن‌گاه تعداد اعضای مجموعه $A \cap (A \cap B)'$ کدام است؟

- ۲ (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۴ (۴) صفر

۴۳- اگر اعداد طبیعی دورقمی را مرجع در نظر بگیریم و اعداد مضرب ۴ را A و اعداد مضرب ۵ را B فرض کنیم، $n(A' \cup B')$ و $n((A \cup B)')$ چه قدر اختلاف دارند؟

- ۳۲ (۱) ۳۳ (۲) ۳۵ (۳) ۳۹ (۴)

۴۴- در یک کلاس ۷۰ نفری، ۴۰ نفر در المپیاد شیمی و ۵۵ نفر در المپیاد فیزیک شرکت کرده‌اند. لاقلاً چند نفر در هر دو المپیاد شیمی و فیزیک شرکت کرده‌اند؟ (ممکن است برخی افراد کلاس در هیچ المپادی نباشند.)

- ۳۰ (۱) ۲۵ (۲) ۳۵ (۳) ۲۰ (۴)

۴۵- هرگاه $n(A - B) = 7$ ، $n(B - A) = 10$ ، $n(A \cap B) = 13$ ، به طوری که از $n(A - B)$ ، ۳ واحد کم کنیم و به $n(A \cap B)$ ، k واحد اضافه کنیم به $n(A \cup B)$ ، ۲۰ واحد اضافه می‌شود، عدد k کدام است؟

- ۱۷ (۱) ۲۰ (۲) ۲۳ (۳) ۲۶ (۴)

۴۶- فرض کنید $n(A \cup B) = 20$ و $n(A \cap B) = 5$ ، اگر از $A \cup B$ به تعداد ۹ عضو برداریم از A، ۵ عضو و از B، ۶ عضو کم می‌شود. در این حالت جدید $n((A - B) \cup (B - A))$ کدام است؟

- ۶ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

۴۷- در یک مدرسه، ۵۵ نفر در رشته فوتبال، ۵۰ نفر در رشته والیبال و ۵۰ نفر در رشته بسکتبال شرکت کرده‌اند. اگر ۱۵ نفر فوتبال و والیبال، ۱۳ نفر والیبال و بسکتبال، ۱۱ نفر فوتبال و بسکتبال بازی کنند و کل ورزشکاران ۱۲۴ نفر باشند، چند نفر در هر سه رشته فعالیت می‌کنند؟

- ۶ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

۴۸- از بین ۳۸ دانش‌آموز، ۱۳ نفر عضو گروه A، ۱۰ نفر عضو گروه B و ۲۱ نفر عضو گروه C می‌باشند. اگر تعداد اعضای مشترک گروه‌های A و C، برابر تعداد اعضای مشترک گروه B و C باشند و هیچ دانش‌آموزی عضو مشترک A و B نباشد، آن‌گاه چند نفر تنها عضو گروه A هستند؟

- ۱۰ (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۷ (۴)

۴۹- در یک الگوی خطی، اختلاف جملات دهم و هفتم برابر ۱۲ است. اختلاف جمله ششم این دنباله از جمله اول آن چه قدر است؟

- ۲۰ (۱) ۲۴ (۲) ۱۵ (۳) ۱۸ (۴)

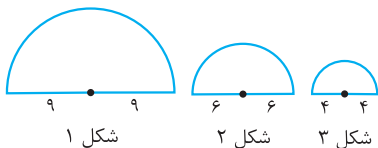
۵۰- در یک الگوی خطی $a_7 = n$ و $a_n = 20$. مقدار a_{n+2} چه عددی است؟

- ۱ (۱) صفر $n + 20$ (۲) $n - 20$ (۳) $2n - 20$ (۴)

۵۱- اگر $a_n = (k - 2)n^2 + (2k + 1)n - k$ یک الگوی خطی باشد، حاصل $a_7 - a_6$ کدام است؟

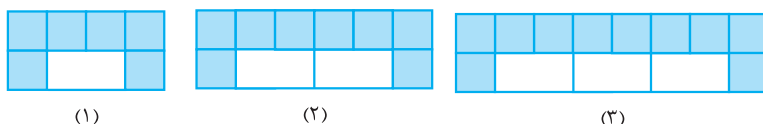
- ۱۸ (۱) ۲۰ (۲) ۳۸ (۳) ۲۴ (۴)

۵۲- در الگوی مقابل، محیط نیم‌دایره شکل هفتم چه قدر است؟



- ۶۴π (۱) $\frac{128\pi}{243}$ (۲) $\frac{64\pi}{81}$ (۳) $\frac{128\pi}{81}$ (۴)

۵۳- با توجه به الگوی زیر، در شکل دهم اختلاف تعداد کاشی سفید و رنگی چه عددی است؟

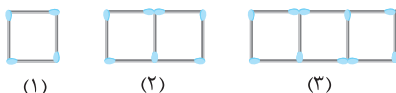


- ۱۲ (۱) ۱۴ (۲) ۱۸ (۳) ۲۴ (۴)

۵۴- در یک دنباله، $a_1 = a_2 = 1$ و $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ است. اگر $b_n = (a_{n+1})^2 - a_n a_{n+2}$ باشد، b_n برابر کدام گزینه است؟

- ۱ (۱) $(-1)^n$ $(-1)^{n+1}$ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴)

۵۵- با توجه به الگوی زیر، مجموع چوب‌کبریت‌های استفاده‌شده در ۲۰ شکل اول کدام است؟



- ۶۳۰ (۱) ۶۵۰ (۲) ۶۷۰ (۳) ۶۸۰ (۴)

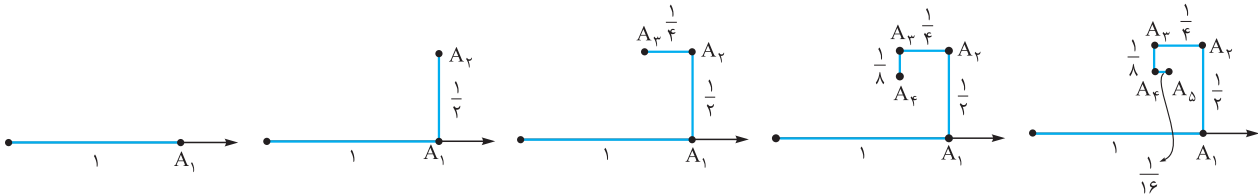


- ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶

۵۶- در الگوی زیر، جمع اعداد داخل مستطیل شکل دهم چه قدر است؟

- ۴۹۵ (۲) ۵۰۵ (۱)
۴۷۵ (۴) ۴۸۵ (۳)

۵۷- در الگوی زیر، طول تصویر نقطه A_1 روی محور چه قدر است؟



- $\frac{225}{512}$ (۴) $\frac{225}{256}$ (۳) $\frac{205}{256}$ (۲) $\frac{205}{512}$ (۱)

۵۸- در یک الگو با جمله عمومی $a_n = \frac{1}{n^2 + n}$ ، جمع صد جمله ابتدایی چه عددی است؟

- $\frac{99}{100}$ (۴) $\frac{101}{100}$ (۳) $\frac{100}{101}$ (۲) $\frac{99}{101}$ (۱)

۵۹- در یک دنباله حسابی، $a_{n-1} = 17$ و $a_{n+2} = 35$ می باشد. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

- ۴ (۴) ۳ (۳) ۶ (۲) ۵ (۱)

۶۰- جمله چندم دنباله حسابی با جمله عمومی $a_n = \frac{fn^2 + 11n + a}{n + 2}$ برابر ۸۳ می باشد؟

- ۱۹ (۴) ۲۳ (۳) ۲۱ (۲) ۲۰ (۱)

۶۱- اگر جمله اول دنباله عددی $a_n = 3 - 12n$ را ۳ واحد اضافه کنیم و از قدرنسبت ۲ واحد کم کنیم، جمله بیستم دنباله جدید با a_7 چه قدر اختلاف دارد؟

- ۲۵ (۴) ۲۸ (۳) ۳۸ (۲) ۳۵ (۱)

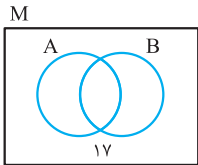
۶۲- در دنباله حسابی $... , 7, b, a, -2$ چند جمله کم تر از ۱۰۰ وجود دارد؟

- ۳۵ (۴) ۳۴ (۳) ۳۱ (۲) ۳۰ (۱)

۶۳- اگر $a_n = 4n$ و $b_n = 3n - 4$ دو دنباله حسابی باشند، جمله شانزدهم b_n با چندمین جمله a_n برابر است؟

- ۱۱ (۴) ۱۰ (۳) ۹ (۲) ۸ (۱)

۶۴- اگر x و y و z به ترتیب معرف تعداد اعضای مجموعه های $A - B$ ، $A \cap B$ ، $B - A$ باشند و $n(M) = 44$ به



طوری که $x, y, z, 17$ دنباله عددی تشکیل دهند، تعداد اعضای $A \cap B$ چه عددی است؟

- ۸ (۲) ۹ (۱)
۴ (۴) ۶ (۳)

۶۵- در یک دنباله حسابی $a_7 + a_8 + a_9 = 30$ اگر جمله اول نصف جمله چهارم باشد، حاصل $a_7^2 + a_8^2 + a_9^2$ کدام است؟

- ۳۶۵ (۴) ۲۴۵ (۳) ۲۸۵ (۲) ۳۰۲ (۱)

۶۶- اضلاع یک مثلث قائم الزاویه سه جمله متوالی یک دنباله حسابی اند. نسبت محیط این مثلث به طول کوچک ترین ضلع آن کدام است؟

- ۴ (۴) ۳ (۳) $\frac{5}{2}$ (۲) $\frac{7}{2}$ (۱)

۶۷- سه جمله اول یک دنباله حسابی به صورت $a - b, b - c, c - a$ می باشد. جمله چهاردهم این دنباله، چند برابر جمله ششم آن است؟

- ۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

۶۸- اضلاع و قطر یک مستطیل، دنباله عددی تشکیل می دهند. اگر محیط آن ۵۶ باشد، مساحت مستطیل چه عددی است؟

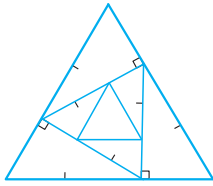
- ۲۵۶ (۴) ۱۹۲ (۳) ۹۶ (۲) ۶۴ (۱)

۶۹- در یک دنباله هندسی با جملات مثبت اگر $a_{n-1} = 9$ و $a_1 = 1$ ، مقدار a_{n+1} کدام است؟

- 3^{-1} (۴) 3^1 (۳) 3^9 (۲) 3^{-9} (۱)



۷۰- در شکل زیر، ضلع بزرگ‌ترین مثلث متساوی‌الاضلاع برابر ۹ می‌باشد. هر ضلع را به ۳ قسمت برابر تقسیم می‌کنیم و مثلث متساوی‌الاضلاع جدیدی پدید می‌آوریم. اگر همین عمل تکرار شود، ضلع پنجمین مثلث متساوی‌الاضلاع کدام است؟ (در هر مرحله سه مثلث کناری به وجود آمده قائم‌الزاویه‌اند.)



$\frac{81}{16}$ (۲)	$\frac{9}{16}$ (۱)
$\frac{1}{3}$ (۴)	۱ (۳)

۷۱- جمعیت یک شهر در ابتدای سال ۹۰، ۱۰۰۰۰۰ نفر بوده است. اگر سالانه ۲۰ درصد جمعیت شهر کاهش یابد، در ابتدای سال ۹۵ جمعیت شهر به چند نفر خواهد رسید؟

2^8 (۴)	2^{16} (۳)	2^{12} (۲)	2^{15} (۱)
-----------	--------------	--------------	--------------

۷۲- اگر به اعداد ۲، ۴ و ۲۲ عدد k را اضافه کنیم، سه عدد حاصل یک دنباله هندسی تشکیل می‌دهند. k کدام است؟

۷ (۴)	۶ (۳)	۵ (۲)	۴ (۱)
-------	-------	-------	-------

۷۳- بین دو عدد ۲ و ۱۶، پنج واسطه هندسی درج کرده‌ایم. حاصل ضرب ۵ واسطه کدام است؟

2048 (۴)	$1024\sqrt{2}$ (۳)	$4096\sqrt{2}$ (۲)	4096 (۱)
------------	--------------------	--------------------	------------

۷۴- حاصل ضرب ده جمله ابتدایی $9, 27, 81, \dots$ چند برابر جمله پنجم آن است؟

$\frac{1}{81}$ (۴)	۸۱ (۳)	$\frac{1}{243}$ (۲)	۲۴۳ (۱)
--------------------	--------	---------------------	---------

۷۵- حاصل ضرب پنجاه جمله ابتدایی $2, 4, 8, 16, \dots$ چه توانی از ۸ می‌باشد؟

435 (۴)	460 (۳)	425 (۲)	415 (۱)
-----------	-----------	-----------	-----------

۷۶- در یک دنباله هندسی جمله هفتم برابر $\sqrt[13]{2}$ است. حاصل ضرب ۱۳ جمله اول این دنباله کدام است؟

۴ (۴)	۳ (۳)	۲ (۲)	۱ (۱)
-------	-------	-------	-------

۷۷- در یک دنباله اگر $a_1 = 3$ و $a_n = 2a_{n-1} + 3$ ، مقدار $a_8 - a_7$ کدام است؟

384 (۴)	192 (۳)	256 (۲)	128 (۱)
-----------	-----------	-----------	-----------

۷۸- در یک دنباله، $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 1$. در این صورت $a_{16} - a_{15}$ کدام است؟

$(\frac{3}{4})^{15}$ (۴)	$(\frac{3}{4})^{14}$ (۳)	$\frac{1}{4}(\frac{3}{4})^{15}$ (۲)	$\frac{1}{4}(\frac{3}{4})^{14}$ (۱)
--------------------------	--------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------

۷۹- اگر در یک دنباله هر جمله از ۲ برابر جمله قبل ۲ واحد بیشتر باشد به طوری که جمله اول ۴ باشد، جمله چهارم چه عددی است؟

$6 \times 3^{40} - 2$ (۴)	$6 \times 2^{40} - 2$ (۳)	$3 \times 2^{40} - 2$ (۲)	$2 \times 3^{40} - 2$ (۱)
---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------

۸۰- اگر $2^{2x}, 8\sqrt{2}, 4^y$ جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند، واسطه عددی بین x و y کدام است؟

$\frac{7}{8}$ (۴)	$\frac{7}{4}$ (۳)	$\frac{7}{2}$ (۲)	۷ (۱)
-------------------	-------------------	-------------------	-------

۸۱- واسطه عددی $\frac{1}{x+3}$ و $\frac{1}{x}$ عدد $\frac{1}{4}$ است، واسطه هندسی $x+9$ و x کدام است؟

$\sqrt{24}$ (۴)	$\sqrt{18}$ (۳)	۴ (۲)	۶ (۱)
-----------------	-----------------	-------	-------

۸۲- اگر $3, a, b+3$ سه جمله متوالی یک دنباله حسابی و $2, a-1, 2b+2$ سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آن‌گاه $a+b$ کدام است؟

۱۵ (۴)	۱۴ (۳)	۱۳ (۲)	۱۲ (۱)
--------	--------	--------	--------

۸۳- اختلاف واسطه‌های حسابی و هندسی دو عدد مثبت برابر ۲ و مجموع آن دو عدد برابر ۳۴ است. اختلاف این دو عدد کدام است؟

۱۶ (۴)	۱۵ (۳)	۱۴ (۲)	۱۳ (۱)
--------	--------	--------	--------

۸۴- جملات سوم، هفتم و نهم از یک دنباله حسابی تشکیل دنباله هندسی می‌دهند. چندمین جمله این دنباله حسابی صفر است؟

۹ (۴)	۱۰ (۳)	۱۱ (۲)	۱۲ (۱)
-------	--------	--------	--------



پاسخ نامه نشریحی

$$\begin{cases} n+2=1 \Rightarrow n=-1 & (\text{چون } k \in \mathbb{N}) \\ n+2=3 \Rightarrow n=1 \\ n+2=5 \Rightarrow n=3 \\ n+2=15 \Rightarrow n=13 \end{cases}$$

۴- **گزینه ۲** **روش اول** از صورت و مخرج کسر، ضریب α را فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{3\alpha+k}{2\alpha-3} = \frac{3(\alpha+\frac{k}{3})}{2(\alpha-\frac{3}{2})}$$

اگر به ازای هر α که عددی گنگ است، کسر فوق عدد گویایی باشد، کافی است $\alpha + \frac{k}{3}$ برابر $\alpha - \frac{3}{2}$ باشد؛ در نتیجه $\frac{k}{3} = -\frac{3}{2}$ است و k برابر $-\frac{9}{2}$ خواهد بود. در این حالت حاصل کسر به ازای هر مقدار α برابر $\frac{3}{2}$ است.

روش دوم اگر فرض کنیم $\frac{3\alpha+k}{2\alpha-3}$ برابر عدد گویای β است، داریم:

$$\frac{3\alpha+k}{2\alpha-3} = \beta \Rightarrow 2\alpha\beta - 3\beta = 3\alpha + k$$

اگر β عدد گویای غیرصفر باشد، $2\alpha\beta$ عددی گنگ است. از طرفی 3α نیز عددی گنگ است. اعداد گویا را به یک سمت تساوی و اعداد گنگ را به سمت دیگر تساوی می‌بریم و داریم:

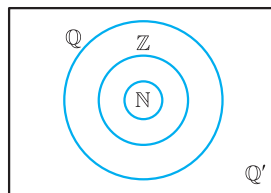
$$2\alpha\beta - 3\alpha = k + 3\beta \Rightarrow \underbrace{\alpha(2\beta - 3)}_{\text{گویا}} = \underbrace{k + 3\beta}_{\text{گویا}}$$

می‌دانیم حاصل ضرب هر عدد گویای غیرصفر در هر عدد گنگ، عددی گنگ است. با توجه به آن که فرض کردیم β عددی گویا است، پس $2\beta - 3$ نیز عددی گویا است؛ پس اگر $2\beta - 3$ عدد غیرصفر باشد، حاصل $\alpha(2\beta - 3)$ گنگ است که با توجه به تساوی فوق این تناقض است؛ زیرا $k + 3\beta$ عددی گویا است و اگر $2\beta - 3 \neq 0$ باشد، یک سمت تساوی عددی گنگ و سمت دیگر عددی گویا داریم. پس لازم است:

$$2\beta - 3 = 0 \Rightarrow \beta = \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha(2\beta - 3) = k + 3\beta$$

$$\Rightarrow k + \frac{9}{2} = 0 \Rightarrow k = -\frac{9}{2}$$

۱- **گزینه ۲** می‌دانیم \mathbb{N} مجموعه اعداد طبیعی، \mathbb{Z} مجموعه اعداد صحیح، \mathbb{Q} مجموعه اعداد گویا و \mathbb{R} مجموعه اعداد حقیقی است که در آن



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ است؛ پس $A = \mathbb{N}$ ، $B = \mathbb{Z}$ ، $C = \mathbb{Q}$ و $D = \mathbb{R}$ است. به صورت مقابل می‌توان این مجموعه‌ها را نشان داد:

می‌دانیم $\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{Q}'$ است. پس با توجه به آن که $\mathbb{R} = D$ و $\mathbb{Q} = C$ است؛ پس $D - C$ برابر مجموعه اعداد گنگ است.

۲- **گزینه ۴** **روش اول** با توجه به آن که اعداد همه گزینه‌ها

به صورت $\sqrt{2} + K$ است، پس K را طوری تعیین می‌کنیم که عبارت $\alpha^2 + 2\alpha$ به ازای $\sqrt{2} + K$ گویا باشد:

$$\alpha = \sqrt{2} + K \Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha = (\sqrt{2} + K)^2 + 2(\sqrt{2} + K) = 2 + 2\sqrt{2}K + K^2 + 2\sqrt{2} + 2K$$

اگر K عدد صحیح باشد، لازم است $K = -1$ باشد تا عبارت فوق برابر عدد گویا باشد:

$$\alpha^2 + 2\alpha = \underbrace{K^2 + 2K + 2}_{\text{گویا}} + \underbrace{2\sqrt{2}K + 2\sqrt{2}}_{\text{باید صفر باشد}} \Rightarrow K = -1$$

روش دوم به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای داریم:

$$(\alpha+1)^2 = \alpha^2 + 2\alpha + 1 \Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha = (\alpha+1)^2 - 1$$

پس عبارت $\alpha^2 + 2\alpha$ برابر $(\alpha+1)^2 - 1$ است که به ازای $\sqrt{2} - 1$ برابر عدد صحیح ۱ است.

۳- **گزینه ۳** به کمک تقسیم صورت کسر بر مخرج کسر، کسر

$$\frac{3n+21}{n+2} \text{ را به صورت زیر می‌نویسیم:}$$

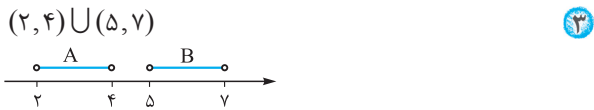
$$\frac{3n+21}{n+2} = \frac{3n+6}{n+2} + \frac{15}{n+2} = 3 + \frac{15}{n+2}$$

با توجه به آن که ۳، عدد طبیعی است، برای آن که عدد فوق، عددی طبیعی باشد، لازم است $\frac{15}{n+2}$ عددی صحیح باشد. با توجه به آن که $n \in \mathbb{N}$ است، مخرج کسر یعنی $n+2$ باید مقسوم‌علیه مثبتی از ۱۵ باشد. می‌دانیم مقسوم‌علیه‌های ۱۵ اعداد ۱، ۳، ۵ و ۱۵ هستند. در نتیجه برای n ، ۳ مقدار قابل قبول است.

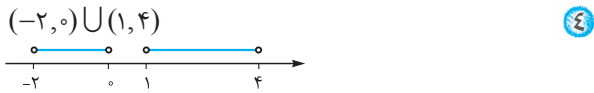


مجموعه، الگو و دنباله

پس این گزینه را نمی‌توان به صورت یک بازه نوشت.



با توجه به شکل، نمی‌توان این مجموعه را به صورت یک بازه نوشت.



با توجه به شکل، نمی‌توان این مجموعه را به صورت یک بازه نوشت.

در نتیجه ① صحیح است.

⑧ - گزینه ۲ چون $2 + \frac{3}{n}$ عضو بازه $(2, 2/0.5)$ است، پس

داریم: $2 < 2 + \frac{3}{n} < 2/0.5$

از نامساوی بالا می‌توان نتیجه گرفت:

$$0 < \frac{3}{n} < \frac{5}{1.0} \Rightarrow 0 < \frac{3}{n} < \frac{1}{2.0}$$

می‌دانیم $\frac{3}{6.0} = \frac{1}{2.0}$ است، پس باید $n > 6.0$ باشد تا $\frac{3}{n} < \frac{1}{2.0}$

باشد. پس حداقل مقدار n طبیعی، برابر ۶۱ است.

⑨ - گزینه ۲ باید داشته باشیم:

$$2 < 2 + \frac{1}{n\sqrt{2}} < \frac{2 + \frac{1}{4}}{\frac{9}{4}}$$

$$0 < \frac{1}{n\sqrt{2}} < \frac{1}{4}$$

پس باید:

اعداد ۱ و ۲ در نامعادله فوق صدق نمی‌کند؛ زیرا:

$$n = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{4}$$

$$n = 2 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{8}} > \frac{1}{4}$$

$$n = 3 \Rightarrow \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{18}} < \frac{1}{4}$$

در نتیجه $n \geq 3$ است و مقادیر ۱ و ۲ را اختیار نمی‌کند.

⑩ - گزینه ۴ اگر $x \in (a, b)$ باشد، داریم: $a < x < b$ در

$$13 - 2a < a + 1 < 2a - 3$$

نتیجه:

برای حل نامعادله فوق آن را به صورت دستگاه نامعادلات زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} 13 - 2a < a + 1 \Rightarrow 12 < 3a \Rightarrow 4 < a \\ a + 1 < 2a - 3 \Rightarrow 4 < a \end{cases} \Rightarrow 4 < a$$

پس a باید عددی بزرگ‌تر از ۴ باشد که در بین گزینه‌ها فقط ④

بزرگ‌تر از ۴ است.

⑤ - گزینه ۴ دو مجموعه A و B زمانی با یکدیگر برابرند

که هر عضو مجموعه A عضوی از مجموعه B باشد و برعکس هر عضو مجموعه B عضوی از مجموعه A نیز باشد. به عبارت دیگر باید $B \subset A$ و $A \subset B$ باشد.

با توجه به تساوی دو مجموعه $A = \{1, 2, m+1\}$ و $B = \{3, m-1, n-2\}$ چون $3 \in B$ است، باید $3 \in A$ نیز باشد؛ پس لازم است $m+1 = 3$ باشد. در نتیجه $m = 2$ است. پس:

$$m = 2: \begin{cases} A = \{1, 2, 3\} \\ B = \{3, 1, n-2\} \end{cases}$$

حال چون $2 \in A$ است پس باید $2 \in B$ باشد؛ پس باید $n-2 = 2$ باشد؛ در نتیجه $n = 4$ است. در نتیجه $m - n = -2$ است.

⑥ - گزینه ۲ اگر دو مجموعه با تعداد عضوهای متنهای با هم برابر باشند، حتماً تعداد اعضای این دو مجموعه با هم برابر است.

از طرفی می‌دانیم در هر مجموعه ۲ عدد یکسان، یک عضو حساب می‌شود. چون مجموعه $A = \{a, a^2\}$ و $B = \{b, b^2\}$ برابرند، پس هر دو مجموعه حداکثر ۲ عضو دارند. چون $1 \in B$ است، پس باید $1 \in A$ نیز باشد؛ پس یکی از اعداد a و a^2 برابر ۱ هستند.

اگر $a = 1$ باشد، داریم: $A = \{1, 1^2\} = \{1\}$

یعنی مجموعه A یک مجموعه تک‌عضوی با عضو یک است. پس B نیز باید همین شرایط را داشته باشد:

$$B = \{1, b, b^2\} = \{1\} \Rightarrow b = b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$$

اگر $a = -1$ باشد، داریم:

$$A = \{-1, (-1)^2\} = \{-1, 1\}$$

یعنی مجموعه A یک مجموعه ۲ عضوی با اعضای ۱ و -1 است.

پس B نیز باید همین شرایط را داشته باشد:

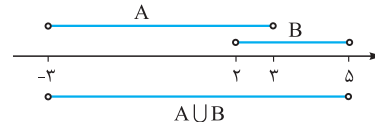
$$B = \{1, b, b^2\} = \{-1, 1\}$$

چون $b^2 > 0$ است، پس $b = -1$ است.

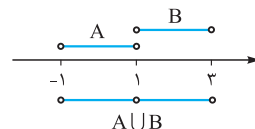
در نتیجه به ازای ۲ مقدار a مجموعه A و B برابرند.

⑦ - گزینه ۱ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

① $(2, 5) \cup (-3, 3) = (-3, 5)$



② $(1, 3) \cup (-1, 1) = (-1, 3) - \{1\}$





۱۱- گزینه ۲

اگر $x \in (a, b)$ باشد، $a < x < b$ است. پس:

$$-\frac{1}{n} < 3/1 < \frac{12n}{4n-1}$$

از طرفی چون n طبیعی است، پس نامساوی $3/1 < \frac{12n}{4n-1}$ همواره

$$3/1 < \frac{12n}{4n-1}$$

برقرار است، پس باید:

برای حل نامعادله بالا دو روش داریم:

روش اول با تقسیم $12n$ بر $4n-1$ داریم:

$$\frac{12n}{4n-1} = \frac{3(4n-1) + 3}{4n-1} = 3 + \frac{3}{4n-1}$$

$$3 + \frac{3}{4n-1} > 3 \Rightarrow 3/1 < 3 + \frac{3}{4n-1} \Rightarrow \frac{1}{10} < \frac{3}{4n-1}$$

پس اگر $4n-1 < 30$ باشد، $\frac{3}{4n-1}$ بزرگتر از $\frac{1}{10}$ است:

$$4n-1 < 30 \Rightarrow 4n < 31 \Rightarrow n < \frac{31}{4} = 7.75$$

پس n شامل اعداد طبیعی ۱ تا ۷ است.

روش دوم چون n طبیعی است $4n-1$ عددی مثبت است. با ضرب

طرفین نامساوی در $4n-1$ داریم:

$$3/1(4n-1) < 12n \Rightarrow 12/4n - 3/1 < 12n$$

$$\Rightarrow 0/4n < 3/1 \xrightarrow{\times 10} 4n < 31 \Rightarrow n < \frac{31}{4}$$

$$\xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

۱۲- گزینه ۲

مرکز بازه $(\frac{2}{3} - n, \frac{2}{3} + n)$ عدد $\frac{2}{3}$ است که

فاصله دو سر بازه از آن برابر n است. با توجه به شکل، چون فاصله $\frac{2}{3}$ از

اولین عدد صحیح بعد از آن یعنی ۱ کمتر از فاصله آن از اولین عدد

صحیح قبل از آن یعنی صفر کمتر است؛ پس بسته به انتخاب n تعداد

اعداد صحیح در بازه $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3} + n)$ یا برابر تعداد اعداد صحیح در

بازه $(\frac{2}{3} - n, \frac{2}{3})$ است یا ۱ واحد بیشتر است. پس با توجه به شکل اگر

از $\frac{2}{3}$ تا حداکثر -1 به عقب برویم، در بازه $(\frac{2}{3} - n, \frac{2}{3})$ فقط ۱ عدد

صحیح قرار می‌گیرد؛ اما اگر بیشتر عقب برویم، بیشتر از یک عدد صحیح

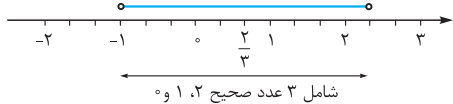
در این بازه قرار می‌گیرد و با توجه به این که در بازه $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3} + n)$ تعداد

اعداد صحیح حداقل برابر بازه $(\frac{2}{3} - n, \frac{2}{3})$ است.

پس تعداد نقاط در بازه $(\frac{2}{3} - n, \frac{2}{3} + n)$ حداقل برابر ۴ خواهد بود.

پس $\frac{2}{3} - n$ حداکثر برابر -1 است و در نتیجه:

$$\frac{2}{3} - n = -1 \Rightarrow n = \frac{5}{3}$$

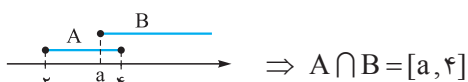


۱۳- گزینه ۱

اگر $a < 4$ باشد، مطابق شکل زیر $A \cap B$

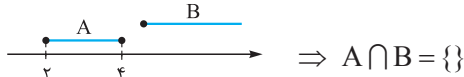
یک بازه خواهد بود. با توجه به آن که تعداد اعضای بازه‌ها نامتناهی

است، پس نباید $a < 4$ باشد:



پس باید $a \geq 4$ باشد تا مطابق شکل زیر $A \cap B$ یک مجموعه

متناهی باشد:



۱۴- گزینه ۲

مطابق شکل زیر، اگر $a < 4$ باشد،

مجموعه $A \cap B$ غیرتهی است و در نتیجه:



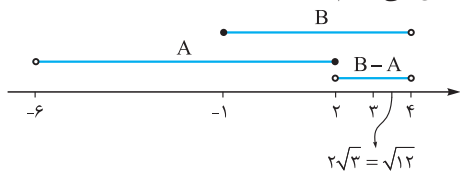
اگر $a = 0$ باشد، $A \cap B$ به صورت بازه $(0, 4)$ است که شامل ۴

عضو ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ خواهد بود.

۱۵- گزینه ۲

بازه‌های A و B و عدد $2\sqrt{3}$ را بر روی محور

اعداد حقیقی نمایش می‌دهیم:



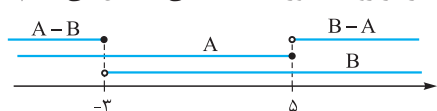
پس $2\sqrt{3}$ عضوی از مجموعه B است که در مجموعه A وجود

ندارد. پس $2\sqrt{3}$ عضو مجموعه $B - A$ است.

۱۶- گزینه ۱

بازه‌های A و B و سپس مجموعه‌های

$A - B$ و $B - A$ را بر روی محور اعداد حقیقی نمایش می‌دهیم:





مجموعه، الگو و دنباله

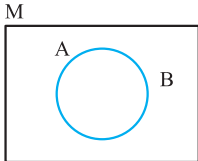
گزینه ۲۰

$A \cap B = \{2, 3, 4\}$
 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 $\Rightarrow \{2, 3, 4\} \subset M \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 مجموعه M حداقل دارای سه عضو ۲، ۳ و ۴ خواهد بود. از طرفی هر یک از اعداد ۱، ۵ و ۶ می‌توانند عضو مجموعه M باشند یا نباشند. در نتیجه حالات زیر را داریم:

$M = \{2, 3, 4\} \Rightarrow$ حالت ۱: M ۳ عضوی باشد:
 $M = \{2, 3, 4, 1\}$ یا $M = \{2, 3, 4, 5\}$ M ۴ عضوی باشد:
 حالت ۲: $M = \{2, 3, 4, 6\}$ یا $M = \{2, 3, 4, 1, 5\}$ M ۵ عضوی باشد:
 حالت ۳: $M = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ یا $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ M ۶ عضوی باشد:
 پس در نتیجه برای M ، $1 + 3 + 3 + 1 = 8$ مجموعه قابل تعریف است.

گزینه ۲۱

دو مجموعه A و B متمم یکدیگرند هرگاه اولاً اشتراکی نداشته باشند و ثانیاً اجتماع آن‌ها برابر مجموعه مرجع باشد:



$$\begin{cases} A \cap B = \emptyset \\ A \cup B = M \end{cases}$$

گزینه ۲۲

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱ نادرست است $\Rightarrow B \subset A \Rightarrow \Delta \in B, \Delta \notin A$
 ۲ متناهی $\Rightarrow A - B = \{2, 5\}$
 ۳ نادرست است $\Rightarrow A \subset B$
 ۴ $A - B = [2, 5] - \{2, 5\} = (2, 5)$
 نادرست است \Rightarrow نامتناهی است. صحیح است.

۳ نادرست است $\Rightarrow A \subset B$
 ۴ $A - B = [2, 5] - \{2, 5\} = (2, 5)$
 \Rightarrow نامتناهی است

گزینه ۲۳

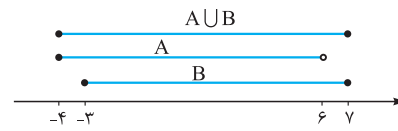
می‌دانیم اشتراک یک مجموعه متناهی با هر مجموعه دیگر (چه متناهی و چه نامتناهی) یک مجموعه متناهی است؛ زیرا باید مجموعه اشتراک، زیرمجموعه هر دو مجموعه باشد؛ از آنجا که مجموعه اشتراک زیرمجموعه مجموعه متناهی است؛ پس خود نیز متناهی است. از طرفی اگر A یک مجموعه نامتناهی باشد، A' می‌تواند یک مجموعه متناهی یا نامتناهی باشد. مثلاً اگر $A = \mathbb{Q}$ باشد، $A' = \mathbb{Q}'$ است که نامتناهی است.

با توجه به شکل، مجموعه $(A - B) \cup (B - A)$ شامل اعداد صحیح بازه $(-3, 5)$ نمی‌شوند که تعداد آن‌ها ۸ عدد است. این اعداد عبارتند از:

$$-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

گزینه ۱۷

اگر $A = [-a, 6)$ و $B = [-3, 7]$ باشد، چون $-4 \in A \cup B$ است و این عضو، کوچک‌ترین عضو مجموعه $A \cup B$ است؛ پس لازم است کوچک‌ترین عضو مجموعه A برابر -4 باشد؛ پس $-a = -4$ است. در نتیجه $a = 4$ است. از طرفی با توجه به آن که $7 \in B$ است و اعضای مجموعه A از ۶ کم‌ترند، پس $b = 7$ است. در نتیجه $a + b = 11$ است.



گزینه ۱۸

$$n = 1 \Rightarrow A_1 = \left[\frac{1-1}{2}, \frac{1+1}{4} \right] = \left[0, \frac{1}{4} \right]$$

$$n = 2 \Rightarrow A_2 = \left[\frac{1-2}{2}, \frac{1+2}{4} \right] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right]$$

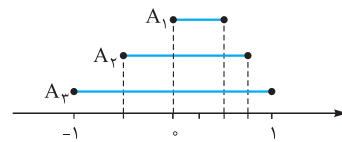
$$n = 3 \Rightarrow A_3 = \left[\frac{1-3}{2}, \frac{1+3}{4} \right] = [-1, 1]$$

با توجه به آن که

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A_3$$

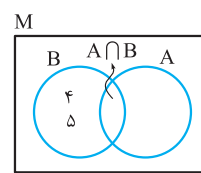
است.



گزینه ۱۹

طبق تعریف، اعضای مجموعه $B - A$

عضوهایی از مجموعه B هستند که در A وجود ندارند. پس B دارای دو عضو ۴ و ۵ است که در مجموعه A وجود ندارد:



مجموعه B از اجتماع دو مجموعه $B - A$ و $A \cap B$ به دست می‌آید. پس مجموعه $A \cap B$ می‌تواند هر عضوی به جز ۴ و ۵ را داشته باشد. چون $A = \{1, 2, 3\}$ پس $A \cap B$ فقط می‌تواند حداکثر سه عضو ۱، ۲ یا ۳ داشته باشد. هر کدام از این سه عدد می‌توانند عضوی از $A \cap B$ باشند یا نباشند؛ پس $2 \times 2 \times 2 = 8$ حالت برای $A \cap B$ وجود دارد. در نتیجه مجموعه B می‌تواند ۸ مجموعه مختلف داشته باشد.



از آن جا که دو مجموعه A' و B' می توانند نامتناهی باشند، در صورتی که یکی از آن ها نامتناهی باشد، اجتماع آن ها نامتناهی است. در نتیجه ④ می تواند یک مجموعه نامتناهی باشد.

تذکر

$$(B')' = B \text{ و } A - B = A \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

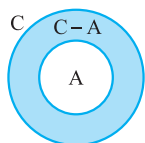
۲۵- گزینه ④ اگر A یک مجموعه متناهی و C یک مجموعه نامتناهی باشند، مجموعه B می تواند هم نامتناهی و هم متناهی باشد. به عنوان مثال اگر A مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی و C مجموعه اعداد صحیح باشد، B می تواند مجموعه اعداد طبیعی و یا مجموعه اعداد کم تر از ۱۰۰ باشد. پس B می تواند یک مجموعه متناهی و یا یک مجموعه نامتناهی باشد. با این توضیح به بررسی گزینه ها می پردازیم:

① چون C یک مجموعه نامتناهی است و از متناهی و نامتناهی بودن مجموعه B مطلع نیستیم، از روی $B \subset C$ نمی توان نتیجه گرفت B متناهی است یا نامتناهی. در نتیجه B' نیز مشخص نیست مجموعه ای است متناهی یا نامتناهی.

② می دانیم $B - A = B \cap A'$. از آن جا که مجموعه های B می توانند متناهی باشد، پس $B \cap A'$ ممکن است متناهی باشد. پس ② نادرست است.

③ اگر مجموعه ای نامتناهی باشد، متمم آن نیز ممکن است نامتناهی باشد، مثل مجموعه اعداد گویا که نامتناهی است و متمم آن مجموعه اعداد گنگ است و آن هم نامتناهی است. پس ③ نادرست است.

④ اگر از یک مجموعه نامتناهی تعداد مشخصی عضو حذف کنیم، آن مجموعه همچنان نامتناهی است. از آن جا که $A \subset C$ است، پس مجموعه $C - A$ یک مجموعه نامتناهی است؛ زیرا اعضای C در A هستند، هم چنان مجموعه نامتناهی است؛ زیرا تعداد اعضای A تعدادی متناهی هستند. این مطلب را می توان به صورت دقیق نیز اثبات کرد. با توجه به شکل مشخص است.



$$C = (C - A) \cup A$$

اگر فرض کنیم $C - A$ متناهی است، با

توجه به متناهی بودن A ، مجموعه $A \cup (C - A)$ که برابر C است، نیز متناهی است. در صورتی که می دانیم C نامتناهی است.

از طرف دیگر اگر B متناهی باشد، ممکن است B' نامتناهی باشد، اگر $B = \{1, 2, 3\}$ باشد، مجموعه متمم آن در مجموعه اعداد حقیقی نامتناهی است.

پس مجموعه های A' و B' می توانند نامتناهی باشند و اشتراک آن ها فقط با یک مجموعه متناهی قطعاً متناهی است، پس ③ صحیح است.

① ممکن است نامتناهی باشد. $B' \cap A \Rightarrow$

نامتناهی ممکن است نامتناهی باشد.

② ممکن است نامتناهی باشد. $A' \cap B' \Rightarrow$

هر دو ممکن است نامتناهی باشند.

④ اگر یک مجموعه، نامتناهی باشد، اجتماع آن با هر مجموعه ای نامتناهی است:

ممکن است نامتناهی باشد. $A' \cup B' \Rightarrow$

هر دو ممکن است نامتناهی باشند.

③ متناهی $\Rightarrow B \cap A'$

ممکن است نامتناهی باشد.

تذکر

متناهی = نامتناهی \cap متناهی

نامتناهی = نامتناهی \cup متناهی

۲۴- گزینه ④ می دانیم اشتراک هر مجموعه متناهی با هر مجموعه دیگری (چه متناهی و چه نامتناهی) یک مجموعه متناهی است. هم چنین اجتماع دو مجموعه متناهی یک مجموعه متناهی است. اگر A و B دو مجموعه متناهی باشند A' و B' ممکن است مجموعه هایی نامتناهی باشند.

از طرفی می دانیم $A - B = A \cap B'$ در نتیجه به کمک این رابطه به بررسی گزینه ها می پردازیم:

① $A - B' = A \cap (B')' = A \cap B$

اشتراک دو مجموعه متناهی، مجموعه ای متناهی است، پس $A \cap B$ یک مجموعه متناهی است.

② $B' - A' = B' \cap (A')' = B' \cap A$

چون A یک مجموعه متناهی است، اشتراک آن با هر مجموعه ای، یک مجموعه متناهی است.

③ بر طبق رابطه $(A \cap B)' = A' \cup B'$ داریم:

$$(A' - B)' = (A' \cap B')' = (A')' \cup (B')' = A \cup B$$

از طرفی اجتماع دو مجموعه متناهی، یک مجموعه متناهی است.

④ بر طبق رابطه $(A \cap B)' = A' \cup B'$ داریم:

$$(A - B)' = (A \cap (B')')' = (A \cap B)' = A' \cup B'$$



مجموعه، الگو و دنباله

۲۹- گزینه ۳ بر طبق قوانین (۱) $A - B = A \cap B'$ و

(۲) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ و

(۳) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ داریم:

$$(A \cup B) - A \stackrel{(1)}{=} (A \cup B) \cap A' \stackrel{(2)}{=} \underbrace{(A \cap A') \cup (B \cap A')}_{\emptyset}$$

$$= B \cap A' \Rightarrow ((A \cup B) - A)' = (B \cap A')' = B' \cup (A')'$$

$$= B' \cup A \Rightarrow \underbrace{((A \cup B) - A)'}_{B' \cup A} \cap A = (B' \cup A) \cap A$$

از طرفی می توان نشان داد $A \cap (A \cup C) = A$ است؛ زیرا همه اعضای A در مجموعه $A \cup C$ وجود دارند؛ پس اشتراک مجموعه A با مجموعه ای که شامل همه اعضای A است، همان مجموعه A است. پس:

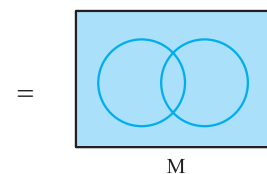
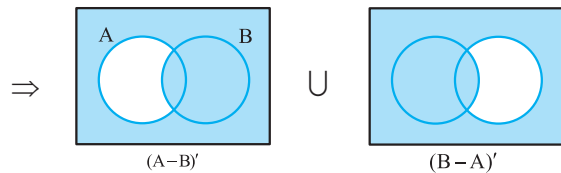
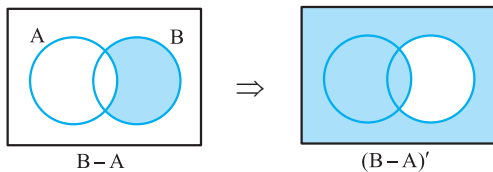
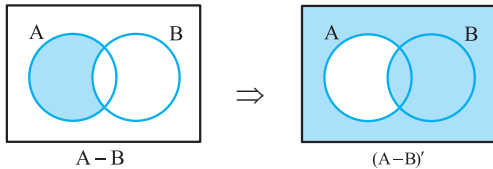
$$\underbrace{(B' \cup A)}_C \cap A = A$$

پس متمم مجموعه A یعنی A' جواب است.

تذکر در حالت کلی $\begin{cases} A \cap (A \cup B) = A \\ A \cup (A \cap B) = A \end{cases}$ که به این قوانین،

قوانین جذب گوئیم.

۳۰- گزینه ۱ روش اول به کمک نمودار ون داریم:



۲۶- گزینه ۳ شکل سایه خورده مجموعه $A - B$ را نشان

می دهد. از طرفی می دانیم $A - B = A \cap B'$ پس باید متمم مجموعه $A \cap B'$ را به دست آوریم. طبق خاصیت (دمورگان) داریم:

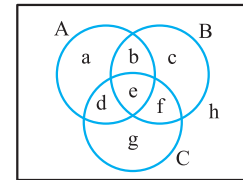
$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$(A \cap B')' = A' \cup (B')' = A' \cup B$$

تذکر

$$\begin{cases} A - B = A \cap B' \\ (A \cap B)' = A' \cup B' \\ (A \cup B)' = A' \cap B' \\ (B')' = B \end{cases}$$

۲۷- گزینه ۴ برای راحت تر شدن درک این مجموعه مطابق

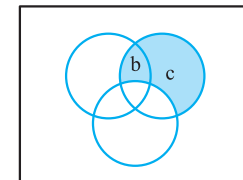


شکل، مجموعه های جدا از هم را (مجموعه هایی که اشتراک ندارند) اسم گذاری می کنیم.

پس مجموعه مرجع ما از ۸ زیرمجموعه ای که دوبه دو اشتراکی ندارند، تشکیل شده است. در نتیجه به کمک این نام گذاری داریم:

$$A - B = a \cup d \Rightarrow (A - B)' = b \cup c \cup e \cup f \cup g \cup h$$

$$B - C = b \cup c \Rightarrow (A - B)' \cap (B - C) = (b \cup c \cup e \cup f \cup g \cup h) \cap (b \cup c) = b \cup c$$



پس اجتماع دو مجموعه b و c جواب نهایی است.

۲۸- گزینه ۲ طبق قوانین (۱) $A - B = A \cap B'$ و

(۲) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (دمورگان) داریم:

$$(A - B)' \stackrel{(1)}{=} (A \cap B')' \stackrel{(2)}{=} A' \cup (B')' = A' \cup B = C$$

$$\Rightarrow (A - B)' - A' = \underbrace{(A' \cup B) - A'}_C \stackrel{(1)}{=} C \cap (A')'$$

$$= C \cap A = (A' \cup B) \cap A$$

بنابر خاصیت پخشی $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ داریم:

$$(A' \cup B) \cap A = \underbrace{(A' \cap A)}_{\emptyset} \cup (B \cap A) = \emptyset \cup (B \cap A)$$

$$= B \cap A$$

پس متمم $A \cap B$ را باید به دست آوریم:

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$



تذکر اگر بخواهیم بین دو مجموعه عمل تفریق را به اشتراک تبدیل کنیم، متمم یکی از مجموعه‌ها را از مجموعه دیگر کم می‌کنیم. مثلاً:

تبدیل به متمم
 $A \cap B = A - B'$
 تبدیل به تفریق

تبدیل به متمم
 $A \cap B = B - A'$
 تبدیل به تفریق

در حالت کلی $A - B' = B - A'$ است.

گزینه ۱ **روش اول** می‌توان به راحتی نشان داد $A \cup (A \cap B) = A$ و $A \cap (A \cup B) = A$ در نتیجه:

$$A \cap B = B \cup C \Rightarrow \underbrace{B \cup (A \cap B)}_B = \underbrace{B \cup (B \cup C)}_{B \cup C}$$

$$\Rightarrow B \cup C = B \Rightarrow C \subset B$$

$$A \cap B = B \cup C \Rightarrow \underbrace{B \cap (A \cap B)}_{A \cap B} = \underbrace{B \cap (B \cup C)}_B$$

$$\Rightarrow A \cap B = B \Rightarrow B \subset A$$

از طرفی اگر $\begin{cases} C \subset B \\ B \subset A \end{cases}$ باشد، داریم $C \subset A$. پس ۱، ۲ و ۳ و ۴ صحیح‌اند.

گزینه ۳

$$\begin{cases} A - B = D \Rightarrow A \cap B' = D \\ B - C = E \Rightarrow B \cap C' = E \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\cap} (A \cap B') \cap (B \cap C') = D \cap E$$

$$\Rightarrow A \cap \underbrace{(B' \cap B)}_{\emptyset} \cap C' = D \cap E$$

$$\Rightarrow \underbrace{A \cap C' \cap \emptyset}_{\emptyset} = D \cap E \Rightarrow D \cap E = \emptyset (*)$$

از طرفی می‌دانیم $A - B = A - (A \cap B)$ ؛ پس:

$$D - E = D - (D \cap E) \stackrel{(*)}{=} D - \emptyset \Rightarrow D - E = D$$

$$D \cap C = F \cap C \subseteq F \quad \text{بنا بر فرض داریم } D = F \text{ است؛ پس:}$$

گزینه ۳ تعداد عضوهای هر گزینه را به دست می‌آوریم:

۱

$$A = \{1, 2, \dots, 15\}$$

$$B' = \{1, 2, 3, 4, 16, 17, 18, 19, 20\} \Rightarrow n(A \cup B') = 20$$

روش دوم به کمک قوانین (۱) $A - B = A \cap B'$ و (۲) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ داریم:

$$(A - B)' \stackrel{(1)}{=} (A \cap B')' \stackrel{(2)}{=} A' \cup (B')' = A' \cup B$$

$$(B - A)' \stackrel{(1)}{=} (B \cap A')' \stackrel{(2)}{=} B \cup (A')' = B \cup A$$

$$\Rightarrow (A - B)' \cup (B - A)' = (A' \cup B) \cup (B' \cup A)$$

$$= \underbrace{(A' \cup A)}_M \cup \underbrace{(B \cup B')}_{M'} = M \cup M' = M$$

روش سوم

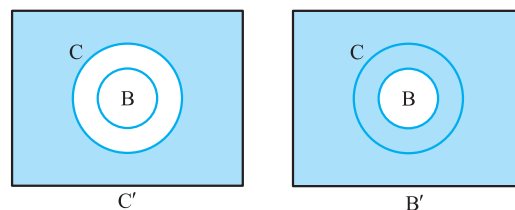
$$(A - B)' \cup (B - A)' = \underbrace{((A - B) \cap (B - A))'}_{\emptyset} = \emptyset' = M$$

$$\begin{cases} A' \cup B' = (A \cap B)' \\ A \cup A' = M \text{ و } (B')' = B \end{cases}$$

تذکر

گزینه ۲ اگر $C' \subset B'$ باشد، پس $B \subset C$ است.

درستی این نتیجه را می‌توان در شکل زیر نمایش داد:



$$\Rightarrow B \subset C \Leftrightarrow C' \subset B'$$

سپس $A \subset B$ و $B \subset C$ است؛ در نتیجه $A \subset C$ است:

$$\begin{cases} A \subset B \\ B \subset C \end{cases} \Rightarrow A \subset C$$

با توجه به آن که $A \subset C$ باشد، پس $C' \subset A'$ است، پس اجتماع دو مجموعه C' و A' مجموعه A' است.

$$\Rightarrow C' \cup A' = A'$$

تذکر اگر $A \subset B$ باشد، نتایج زیر را داریم:

$$A \cup B = B \quad ۲ \quad A \cap B = A \quad ۱$$

$$B' \subset A' \quad ۳$$

گزینه ۳ می‌دانیم $(A \cup B)' = A' \cap B'$ در نتیجه:

$$A \cup B = A \cup C \Rightarrow (A \cup B)' = (A \cup C)'$$

$$\Rightarrow A' \cap B' = A' \cap C'$$

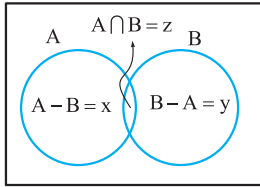
از طرفی می‌دانیم $A - B = A \cap B'$ پس:

$$\begin{cases} A' \cap B' = A' - (B')' = A' - B \\ A' \cap C' = A' - (C')' = A' - C \end{cases} \Rightarrow A' - B = A' - C$$



مجموعه، الگو و دنباله

۳۹- **گزینه ۳** **روش اول** مطابق نمودار ون زیر مشخص است که تعداد اعضای مجموعه $(A \cup B) - (A \cap B)$ برابر است با جمع تعداد اعضای مجموعه‌های $A - B$ و $B - A$.



از طرفی مطابق شکل، تعداد اعضای مجموعه $A \cup B$ برابر است با جمع تعداد اعضای مجموعه‌های x ، y و z . پس:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(A \cap B)} = \frac{\Delta n(A \cap B) + n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)}{n(A \cap B)}$$

$$= \frac{\Delta n(A \cap B) + n(A \cap B) + n(A \cap B)}{n(A \cap B)} = \frac{6n(A \cap B)}{n(A \cap B)} = 6$$

روش دوم می‌دانیم $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$ در نتیجه:

$$n((A \cup B) - (A \cap B)) = n(C) - n(C \cap D)$$

$$= n(A \cup B) - n((A \cup B) \cap (A \cap B))$$

$$= n(A) + n(B) - n(A \cap B) - n(A \cap B)$$

$$= n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)$$

با توجه به آن که $n((A \cup B) - (A \cap B)) = \Delta n(A \cap B)$ ، پس:

$$n(A) + n(B) - 2n(A \cap B) = \Delta n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(A \cup B)} = \frac{\Delta n(A \cap B)}{n(A \cup B)}$$

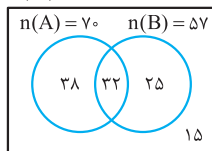
$$\Rightarrow n(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{\Delta n(A \cap B)} \Rightarrow \frac{n(A \cup B)}{n(A \cap B)} = 6$$

۴۰- **گزینه ۱** اگر C و D به ترتیب مجموعه افرادی باشند که شرکت A و B را انتخاب کرده باشند، داریم:

$$n(C \cap D) = 32 \text{ و } n(D) = 57, n(C) = 70$$

$$n(C \cup D) = n(C) + n(D) - n(C \cap D) = 70 + 57 - 32 = 95$$

$$n(M) = 110$$



پس تعداد افرادی که از هیچ شرکتی خرید نکرده‌اند $110 - 95 = 15$ است.

۴۱- **گزینه ۳** **روش اول** می‌دانیم $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$ ؛ پس:

$$15 - n(A \cap B) = 12 \Rightarrow n(A \cap B) = 3$$

۳۲ $\begin{cases} A - B' = A \cap B \Rightarrow n(A - B') = n(A \cap B) = 11 \\ B \subset A \Rightarrow A \cap B = B \end{cases}$

۳۳ $A' = \{16, 17, 18, 19, 20\}$

$B = \{5, 6, \dots, 15\}$

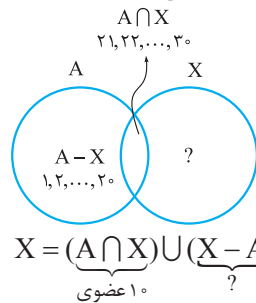
$A' - B = A' \Rightarrow n(A' - B) = n(A') = 5$

۳۴ $A - B = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow n(A - B) = 4$

$n((A - B)') = 20 - 4 = 16$

پس ۳۳ تعداد عضوهای کم‌تری دارد.

۳۶- **گزینه ۴** اگر $A = \{1, 2, \dots, 30\}$ و $B = \{1, 2, \dots, 20\}$ ، با توجه به آن که $A - X = B$ می‌توان نتیجه گرفت $A \cap X = \{21, 22, \dots, 30\}$ از طرفی مطابق شکل مشخص است $A \cap X \subset X$ است.



پس X حداقل ۱۰ عضو دارد و در مورد عضوهایی از X که در A نیستند، اطلاعاتی نداریم. پس X می‌تواند بی‌شمار عضو داشته باشد.

۳۷- **گزینه ۲** اگر $n(A) = 2n(B) = 4n(A \cap B)$ باشد، داریم:

$n(A) = 4n(A \cap B)$ و $n(B) = 2n(A \cap B)$

از طرفی می‌دانیم: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

پس: $n(A \cup B) = \frac{n(A)}{4n(A \cap B)} + \frac{n(B)}{2n(A \cap B)} - n(A \cap B) = \Delta n(A \cap B)$

$$\Rightarrow \frac{n(A \cup B)}{n(A \cap B)} = \frac{\Delta n(A \cap B)}{n(A \cap B)} = 5$$

۳۸- **گزینه ۴** می‌دانیم $\begin{cases} A \cap B \subset A \\ A \cap B \subset B \end{cases}$ است؛ یعنی تعداد عضوهای مجموعه $A \cap B$ همواره کوچک‌تر یا مساوی تعداد عضوهای مجموعه A و B است. (اگر A و B دو مجموعه متناهی باشند) یعنی $n(A) \geq n(A \cap B)$ و $n(B) \geq n(A \cap B)$ ؛ پس:

$$\frac{n(A) + n(B)}{n(A \cap B)} = \frac{n(A)}{n(A \cap B)} + \frac{n(B)}{n(A \cap B)} \geq 2$$

بزرگ‌تر یا مساوی ۱ بزرگ‌تر یا مساوی ۱

در بین گزینه‌ها فقط ۴ عددی بزرگ‌تر از ۲ است.



۴۳- **گزینه ۱** **روش اول** تعداد اعداد طبیعی مضرب K ، از ۱

تا n برابر است با بزرگ‌ترین عدد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی $\frac{n}{K}$.

یعنی از ۱ تا ۹۹، ۲۴ عدد مضرب ۴ داریم:

$$\frac{99}{4} = 24/...$$

\Rightarrow ۲۴ = تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰ مضرب ۴

پس ۲۴ عدد یک‌رقمی و دورقمی مضرب ۴ داریم که دوتای آن‌ها یک‌رقمی هستند.

$$\frac{9}{4} = 2/... \Rightarrow 2 = \text{تعداد اعداد یک‌رقمی مضرب ۴}$$

\Rightarrow ۲۲ = تعداد اعداد دورقمی مضرب ۴

$$\Rightarrow n(A) = 22$$

$$\frac{99}{5} = 19/...$$

\Rightarrow ۱۹ = تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰ مضرب ۵

$$\frac{9}{5} = 1/...$$

\Rightarrow ۱ = تعداد اعداد طبیعی یک‌رقمی مضرب ۵

\Rightarrow ۱۸ = تعداد اعداد دورقمی مضرب ۵

$$\Rightarrow n(B) = 18$$

از طرفی $n(A \cap B)$ برابر تعداد اعداد دورقمی مضرب ۴ و ۵ یعنی مضرب ۲۰ است. در نتیجه:

$$\frac{99}{20} = 4/... \Rightarrow 4 = \text{تعداد اعداد دورقمی مضرب ۲۰}$$

$$\Rightarrow n(A \cap B) = 4$$

از طرفی می‌دانیم $A' \cup B' = (A \cap B)'$ و

$n(A') = n(M) - n(A)$ که در آن $n(M)$ تعداد اعضای

مجموعه مرجع است که در این مسئله برابر تعداد اعداد دورقمی

است. پس $n(M) = 90$ است. در نتیجه:

$$n(A' \cup B') = n((A \cap B)') = n(M) - n(A \cap B)$$

$$= 90 - 4 = 86$$

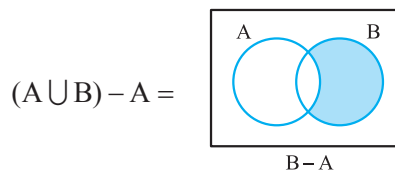
از طرفی می‌دانیم $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ پس:

$$n((A \cup B)') = n(M) - n(A \cup B)$$

$$= \underbrace{n(M)}_{90} - (\underbrace{n(A)}_{22} + \underbrace{n(B)}_{18} - \underbrace{n(A \cap B)}_4) = 90 - 36 = 54$$

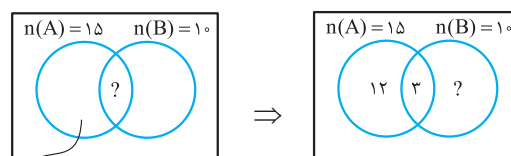
$$\Rightarrow 86 - 54 = 32$$

از طرفی مجموعه $(A \cup B) - A$ برابر مجموعه $B - A$ است:

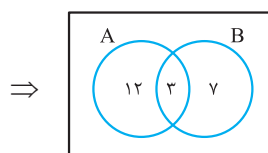


$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 10 - 3 = 7$$

روش دوم به کمک نمودار ون، تعداد اعضای هر یک از مجموعه‌های $A \cap B$ و $B - A$ را به دست می‌آوریم:



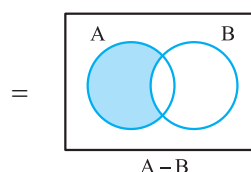
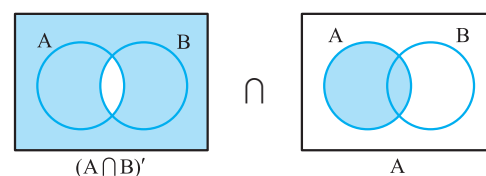
$$n(A - B) = 12$$



$$\Rightarrow n((A \cup B) - A) = n(B - A) = 7$$

۴۲- **گزینه ۳** مطابق شکل زیر، مجموعه $A \cap (A \cap B)'$

برابر مجموعه $A - B$ است:



پس باید $n(A - B)$ را به دست آوریم:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 9 - 2 = 7$$

تذکر به کمک قوانین مجموعه‌ها نیز می‌توان اثبات نمود مجموعه

$A \cap (A \cap B)'$ برابر $A - B$ است:

$$A \cap (A \cap B)' = A \cap (A' \cup B')$$

$$= \underbrace{(A \cap A')}_{\emptyset} \cup (A \cap B') = A \cap B' = A - B$$

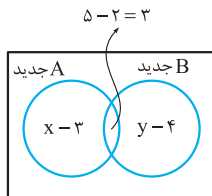
$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

تذکر



مجموعه، الگو و دنباله

پس ۲ عضو از اعضای حذف شده مشترک بوده‌اند. پس تعداد اعضای مشترک A و B از ۵ عضو به ۳ عضو می‌رسد. پس با توجه به آن که از مجموعه A، ۵ عضو کم شده و ۲ عضو آن مشترک با B است، پس از مجموعه A - B، ۳ عضو کم شده است. چون از مجموعه B، ۶ عضو کم شده و ۲ عضو آن مشترک با A است، پس از مجموعه B - A، ۴ عضو کم شده است. اگر تعداد اعضای اولیه



مجموعه A - B را با x و تعداد اعضای اولیه مجموعه B - A را با y نمایش دهیم، با توجه به نمودار ون داریم:

با توجه به آن که $n(A \cup B) = 20$ داریم:

$$x + y + 5 = 20 \Rightarrow x + y = 15$$

پس تعداد عضوهای مجموعه‌های A - B و B - A به ترتیب برابر ۳ - x و ۴ - y اند. در نتیجه:

$$\begin{aligned} & \text{تعداد عضوهای مجموعه جدید } (B - A) \cup (A - B) \\ &= x - 3 + y - 4 = x + y - 7 \\ &= 15 - 7 = 8 \end{aligned}$$

روش دوم زمانی که از مجموعه A و B به ترتیب ۵ و ۶ عضو حذف می‌شود و تنها ۹ عضو از اجتماع آن‌ها کم می‌شود، پس ۲ عضو از اعضای حذف شده از اعضای مشترک دو مجموعه بوده است. پس:

$$n(A \cup B)_{\text{جدید}} = 20 - 9 = 11$$

$$n(A \cap B)_{\text{جدید}} = 5 - 2 = 3$$

از طرفی می‌دانیم:

$$n((A - B) \cup (B - A)) = n(A \cup B) - n(A - B)$$

$$n((A - B) \cup (B - A)) = 11 - 3 = 8$$

پس:

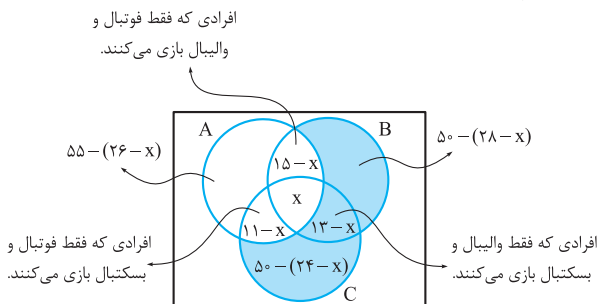
۴۷ - گزینه ۳ اگر فرض کنیم A و B و C به ترتیب

مجموعه شرکت‌کننده‌های رشته‌های فوتبال، والیبال و بسکتبال هستند، داریم: $n(A) = 55$, $n(B) = 50$, $n(C) = 50$

$$n(A \cap B) = 15, n(B \cap C) = 13, n(A \cap C) = 11$$

روش اول اگر فرض کنیم $n(A \cap B \cap C) = x$ به کمک نمودار

ون داریم:



افرادی که فقط فوتبال و والیبال بازی می‌کنند.

افرادی که فقط فوتبال و بسکتبال بازی می‌کنند.

افرادی که فقط والیبال و بسکتبال بازی می‌کنند.

روش دوم از آن جا که $n((A \cap B)') = n(M) - n(A \cap B)$ و $n((A \cup B)') = n(M) - n(A \cup B)$ پس اختلاف این دو عدد برابر است با:

$$\begin{aligned} & (n(M) - n(A \cap B)) - (n(M) - n(A \cup B)) \\ &= n(A \cup B) - n(A \cap B) = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B) \\ &= 22 + 18 - 8 = 32 \end{aligned}$$

در واقع محاسبه تعداد اعداد دورقمی در این سؤال لازم نبود.

۴۴ - گزینه ۲ اگر A و B به ترتیب مجموعه افرادی باشند که در المپیاد شیمی و فیزیک شرکت می‌کنند، داریم: $n(A) = 40$ و $n(B) = 55$

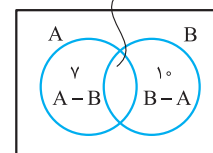
از طرفی تعداد کل افرادی که حداقل در یکی از دو المپیاد شرکت می‌کنند $(n(A \cup B))$ کوچک‌تر مساوی ۷۰ است؛ زیرا تعداد افراد کلاس ۷۰ نفر است؛ پس با توجه به رابطه $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ داریم:

$$\underbrace{n(A)}_{40} + \underbrace{n(B)}_{55} - n(A \cap B) \leq 70 \Rightarrow n(A \cap B) \geq 25$$

پس لازم است حداقل ۲۵ نفر در هر دو المپیاد شرکت کرده باشند.

۴۵ - گزینه ۳ در نمودار ون زیر، تعداد اعضای هر یک از

$$A \cap B = 13$$



مجموعه‌های A - B و B - A، A ∩ B نوشته شده است:

$$\Rightarrow n(A \cup B) = 7 + 13 + 10 = 30$$

حالا اگر از $n(A - B)$ ، ۳ واحد کم کنیم و به $n(A \cap B)$ ، k واحد اضافه کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} \Rightarrow n(A \cup B) &= 4 + 13 + k + 10 \\ &= 27 + k \end{aligned}$$

با توجه به آن که در این حالت تعداد اعضای $A \cup B$ ، ۲۰ واحد بیشتر است، داریم: $(27 + k) - 30 = 20 \Rightarrow k = 23$

۴۶ - گزینه ۳ **روش اول** اگر از اجتماع دو مجموعه A و B،

۹ عضو برداریم و از مجموعه A و B به ترتیب ۵ و ۶ عضو کم شود؛ پس ۲ عضو از اعضای مشترک دو مجموعه A و B برداشته شده است؛ زیرا حاصل جمع اعضای حذف شده از دو مجموعه A و B، ۱۱ عضو است. در حالی که از اجتماع آن‌ها ۹ عضو حذف شده است،



گزینه ۱ - ۴۹ می‌دانیم جمله عمومی یک الگوی خطی به صورت $t_n = an + b$ است. در نتیجه:

$$t_{10} - t_7 = (10a + b) - (7a + b) = 3a$$

$$\xrightarrow{t_{10} - t_7 = 12} t_{10} - t_7 = 3a = 12 \Rightarrow a = 4$$

در نتیجه:

$$a_6 - a_1 = (6a + b) - (a + b) = 5a = 20$$

تذکره در یک الگوی خطی با جمله عمومی $t_n = an + b$ داریم:

$$t_m - t_n = (m - n)a$$

گزینه ۱ - ۵۰ می‌دانیم هر الگوی خطی دارای جمله عمومی $a_m = am + b$ است که در آن $m \in \mathbb{N}$ است. در نتیجه:

$$a_{20} = 20a + b = n \xrightarrow{\text{تفاضل}} (20 - n)a = n - 20$$

$$a_n = an + b = 20$$

$$\Rightarrow a = \frac{n - 20}{20 - n} = -1$$

با توجه به آن که $a_{20} = 20a + b = n$ داریم:

$$-20 + b = n \Rightarrow b = n + 20$$

$$\Rightarrow a_m = -m + n + 20$$

اگر $m = n + 20$ باشد، داریم:

$$a_{n+20} = -(n + 20) + n + 20 = 0$$

گزینه ۲ - ۵۱ درجه یک الگوی خطی باید ۱ باشد، یعنی به

صورت کلی $a_n = an + b$ باشد، پس باید ضریب n^2 صفر باشد تا a_n یک الگوی خطی باشد:

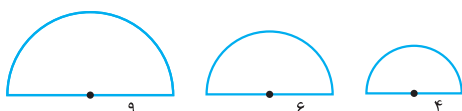
$$a_n = (k - 2)n^2 + (2k + 1)n - k \Rightarrow k - 2 = 0$$

$$\Rightarrow k = 2 \Rightarrow a_n = 5n - 2$$

$$\begin{cases} a_6 = 5 \times 6 - 2 = 28 \\ a_7 = 5 \times 7 - 2 = 33 \end{cases} \Rightarrow a_6 - a_7 = 28 - 33 = -5$$

گزینه ۳ - ۵۲ با توجه به الگوی شعاع‌های نیم‌دایره‌ها، در هر

مرحله شعاع نیم‌دایره $\frac{2}{3}$ مرحله قبلی است. در نتیجه:



دنباله شعاع‌ها: ۹, ۶, ۴, ...

$$\times \frac{2}{3} \quad \times \frac{2}{3}$$

باید تعداد کل افراد در ۳ دایره نمودار ون رسم شده ۱۲۴ نفر باشد. با توجه به شکل در دایره A می‌دانیم ۵۵ نفر حاضرند، پس باید تعداد افراد مناطق سایه‌خورده با تعداد افراد درون A برابر ۱۲۴ شود:

$$55 + (50 - (28 - x)) + (13 - x) + (50 - (24 - x)) = 124$$

$$55 + 50 - 28 + x + 13 - x + 50 - 24 + x = 124$$

$$\Rightarrow x = 124 - 116 = 8$$

روش دوم اگر A و B و C سه مجموعه باشند، داریم:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

پس در این سؤال می‌خواهیم $n(A \cap B \cap C)$ را حساب کنیم.

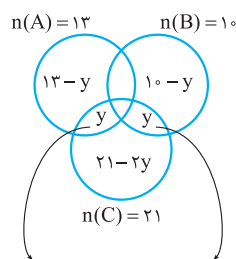
پس داریم:

$$124 = 55 + 50 + 50 - 15 - 13 - 11 + n(A \cap B \cap C)$$

$$\Rightarrow n(A \cap B \cap C) = 8$$

گزینه ۱ - ۴۸ به کمک نمودار ون در هر یک از

مجموعه‌های مجزا در نمودار تعداد اعضای آن‌ها را می‌نویسیم. با



تعداد عضوهای این دو مجموعه باید برابر باشند تا تعداد عضوهای مجموعه‌های $A \cap C$ و $B \cap C$ برابر باشند.

توجه به آن که مجموعه $A \cap B$ عضو ندارد، پس مجموعه $A \cap B \cap C$ نیز عضو ندارد. با توجه به آن که تعداد اعضای مشترک گروه‌های A و C برابر اعضای مشترک گروه‌های B و C است؛ پس مطابق شکل تعداد عضوهای آن‌ها را برابر y قرار داده‌ایم.

باید مجموع اعضای مناطق شکل بالا برابر ۳۸ باشد، پس:

$$13 - y + y + 10 - y + y + 21 - 2y = 38$$

$$44 - 2y = 38 \Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow y = 3$$

با توجه به شکل، تعداد اعضایی که فقط در A هستند برابر $13 - y$

است، پس این مجموعه دارای $13 - 3 = 10$ عضو است.

روش دوم اگر A، B و C سه مجموعه باشند، داریم:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

در این مسئله داریم: $n(A) = 13$, $n(B) = 10$, $n(C) = 21$

$$n(A \cap B) = 0, n(A \cap C) = n(B \cap C) = y$$

$$n(A \cap B \cap C) = 0$$

$$38 = 13 + 10 + 21 - 2y + 0 \Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow y = 3$$

$$\Rightarrow n(A - ((A \cap B) \cup (A \cap C))) = 13 - 3 = 10$$



مجموعه، الگو و دنباله

گزینه ۱ - ۵۴

جملات دنباله a_n را بر طبق رابطه داده شده می‌نویسیم. دنباله با جمله عمومی a_n ، دنباله‌ای است که دو جمله ابتدایی آن ۱ و جملات بعدی از حاصل جمع دو جمله قبلی حاصل می‌شوند. در نتیجه:

$$a: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

دنباله‌ای با جمله عمومی b_n ، دنباله‌ای است که جملات آن از تفاضل مربع هر جمله دنباله a از حاصل ضرب دو جمله قبل و بعد آن ایجاد می‌شود. یعنی:

$$b_1 = 1^2 - 1 \times 2 = -1 = (-1)^1$$

$$b_2 = 2^2 - 1 \times 3 = 4 - 3 = 1 = (-1)^2$$

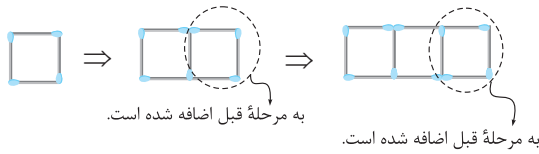
$$b_3 = 3^2 - 2 \times 5 = 9 - 10 = -1 = (-1)^3$$

$$b_4 = 5^2 - 3 \times 8 = 25 - 24 = 1 = (-1)^4$$

با توجه به گزینه‌ها پس جمله عمومی برابر $b_n = (-1)^n$ باید باشد. البته می‌توان نشان داد جمله عمومی دنباله به صورت $b_n = (-1)^n$ است که البته اثبات آن ساده نیست!

گزینه ۲ - ۵۵

با توجه به الگوی زیر، هر بار به تعداد ۳ چوب کبریت به مرحله قبل اضافه می‌شود:



پس الگوی فوق یک الگوی خطی است که دنباله آن به صورت زیر است:

$$4, 12, 24, \dots, 1 + 20 \times 3$$

تعداد چوب‌کبریت‌های شکل بیستم

می‌توانیم به صورت زیر جملات را بنویسیم و با هم جمع کنیم:

$$a_1 = 1 + 3$$

$$a_2 = 1 + 2 \times 3$$

$$a_3 = 1 + 3 \times 3$$

⋮

$$a_{20} = 1 + 20 \times 3$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{20} = 20 \times 1 + 3(1 + 2 + 3 + \dots + 20)$$

$$\frac{20 \times 21}{2} = 210$$

$$= 20 + 630 = 650$$

تذکر: مجموع n عدد اول طبیعی برابر است با:

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

پس اگر جمله عمومی شعاع‌ها را a_n بنامیم داریم:

$$a_1 = 9, a_2 = 9 \times \frac{2}{3}, a_3 = 9 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2, \dots, a_7 = 9 \times \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

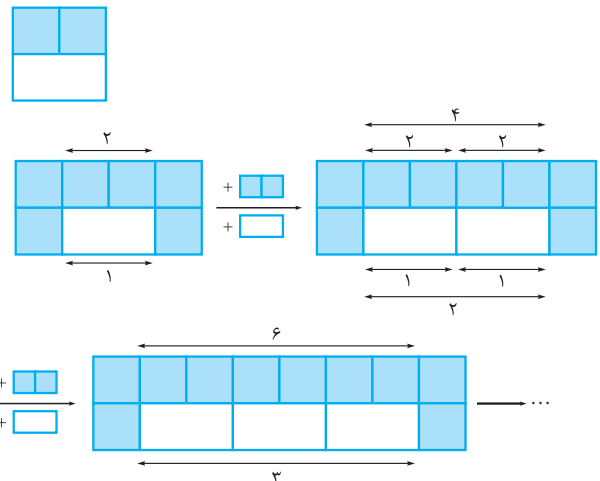
پس شعاع نیم‌دایره مرحله هفتم برابر $9 \times \left(\frac{2}{3}\right)^6$ است. در نتیجه محیط آن برابر است با:

$$\text{محیط دایره مرحله هفتم} = \pi a_7 = \pi \times 9 \times \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \pi \times 3^2 \times \frac{2^6}{3^6}$$

$$= \frac{2^6 \pi}{3^4} = \frac{64\pi}{81}$$

گزینه ۲ - ۵۳

با توجه به شکل زیر مشخص است در هر مرحله دو کاشی به صورت: به کاشی‌های وسطی اضافه می‌شوند و به ازای آن در زیر آن یک کاشی سفید که طول آن برابر ۲ کاشی رنگی است، اضافه می‌شود.



پس مطابق الگوی فوق در هر مرحله ۲ واحد به تعداد کاشی‌های رنگی و ۱ واحد به تعداد کاشی‌های سفید اضافه می‌شوند. پس الگوی هر دوی آن‌ها خطی است.

دنباله تعداد کاشی‌های رنگی:

$$6, 8, 10, 12, \dots \xrightarrow{\text{دنباله خطی}} a_n = 2n + 4$$

+2 +2 +2

تعداد کاشی‌های سفید:

$$1, 2, 3, 4, \dots \xrightarrow{\text{دنباله خطی}} b_n = n$$

+1 +1 +1

پس اختلاف تعداد کاشی‌های هر مرحله نیز یک دنباله خطی می‌سازند:

$$c_n = a_n - b_n = (2n + 4) - n = n + 4$$

$$c_{10} = 10 + 4 = 14$$



گزینه ۱ - ۵۶

اولین عدد نوشته شده داخل مربع، در هر مرحله، برابر تعداد مربع‌های به کار رفته در مراحل قبل به اضافه ۱ است. مثلاً در مرحله ۳ اولین عدد نوشته شده ۴ است؛ زیرا تعداد مربع‌های مرحله ۱ و ۲ برابر ۳ = ۱ + ۲ است. پس اولین عدد در این مرحله ۴ است. یا در مرحله ۴ اولین عدد نوشته شده ۷ خواهد بود که به صورت ۷ = ۱ + ۲ + ۳ است. به دست می‌آید. پس اولین عدد نوشته شده در مرحله ۱۰م برابر است با:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 9 + 1 = \frac{9 \times 10}{2} + 1 = 46$$

و آخرین عدد هر مرحله برابر مجموع n عدد طبیعی ابتدایی است. پس آخرین عدد مرحله دهم برابر است با:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 10 = \frac{10 \times 11}{2} = 55$$

پس باید حاصل جمع ده عدد طبیعی متوالی از ۴۶ تا ۵۵ را حساب کنیم.

$$46 + 47 + 48 + \dots + 55 = \frac{10(46 + 55)}{2} = 5 \times 101 = 505$$

تذکر: حاصل جمع تعدادی عدد طبیعی متوالی برابر است با:

$$\frac{\text{عدد آخر} + \text{عدد اول}}{2} \times \text{تعداد}$$

گزینه ۲ - ۵۷

مطابق الگوی داده شده، طول نقطه A_1 ، A_2 است. از نقطه A_1 به A_2 طول تصویر ثابت می‌ماند. از A_2 به A_3 طول نقطه، $\frac{1}{4}$ کاهش می‌یابد و از ۱ به $\frac{3}{4}$ می‌رسد. سپس از A_3 به A_4 دوباره طول نقطه ثابت می‌ماند و از A_4 به A_5 ، $\frac{1}{4}$ مسافت طی شده قبلی در راستای محور Xها به طول نقطه، اضافه می‌شود. در نتیجه مختصات نقطه A_n که در آن n عددی فرد است، دنباله زیر را ایجاد می‌کند:

$$1, 1 - \frac{1}{4}, 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16}, 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64}, \dots$$

\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow
 x_{A_1} x_{A_3} x_{A_5} x_{A_7}

از طرفی مطابق الگوی داده شده طول نقطه A_n که در آن n زوج است، با طول نقطه A_{n-1} برابر است، یعنی $x_{A_2} = x_{A_1}$ ، $x_{A_4} = x_{A_3}$ ، $x_{A_6} = x_{A_5}$ و ... و $x_{A_{n-1}} = x_{A_n}$ پس طول نقطه A_1 برابر طول نقطه A_9 است. در نتیجه مطابق الگوی فوق داریم:

$$x_{A_9} = 1 - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^4$$

$$= \frac{4^4 - 4^3 + 4^2 - 4 + 1}{4^4} = \frac{256 - 64 + 16 - 4 + 1}{256} = \frac{205}{256}$$

گزینه ۲ - ۵۸

می‌توانیم عبارت $\frac{1}{n^2 + n}$ را به صورت زیر بنویسیم:

$$a_n = \frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$a_1 = 1 - \frac{1}{2}$$

پس:

$$a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$a_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

⋮

$$a_{100} = \frac{1}{100} - \frac{1}{101}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{100} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{100} - \frac{1}{101}$$

$$= 1 - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}$$

گزینه ۱ - ۵۹

اگر a_p و a_q دو جمله از یک دنباله حسابی باشند، داریم:

$$a_p - a_q = (p - q)d$$

$$a_{n+2} - a_{n-1} = ((n+2) - (n-1))d = 3d$$

در نتیجه:

$$\frac{a_{n+2} - 35}{a_{n-1} - 17} = 3 \Rightarrow 35 - 17 = 3d \Rightarrow 3d = 18 \Rightarrow d = 6$$

گزینه ۱ - ۶۰

جمله عمومی یک دنباله حسابی از درجه یک است (اگر قدرنسبت صفر نباشد) و به صورت $t_n = an + b$ است که در آن a همان قدرنسبت است.

برای آن که a_n یک چندجمله‌ای از درجه یک باشد، باید $4n^2 + 11n + a$ بر $n + 2$ بخش پذیر باشد؛ یعنی باقی مانده تقسیم $4n^2 + 11n + a$ بر $n + 2$ صفر باشد:

$$\begin{array}{r} 4n^2 + 11n + a \quad | \quad n + 2 \\ \underline{4n^2 + 8n} \\ 3n + a \\ \underline{3n + 6} \\ a - 6 \end{array} \Rightarrow a - 6 = 0 \Rightarrow a = 6$$

$$a_n = \frac{4n^2 + 11n + 6}{n + 2} = 4n + 3$$

پس:

پس باید ببینیم به ازای چه مقداری از a_n برابر ۸۳ است:

$$a_n = 83 \Rightarrow 4n + 3 = 83 \Rightarrow 4n = 80 \Rightarrow n = 20$$



مجموعه، الگو و دنباله

چون $x + z = 2y$ است؛ پس:

$$x + y + z = 3y = 27 \Rightarrow y = 9$$

پس $n(A \cap B) = 9$ است.

می‌دانیم اگر a و b و c سه جمله متوالی از

گزینه ۱ -۶۵

یک دنباله حسابی باشند، داریم:

$$\frac{a+c}{2} = b \Rightarrow a+c = 2b$$

چون a_7 و a_8 و a_9 سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی اند، پس:

$$a_7 + a_9 = 2a_8 \Rightarrow a_7 + a_8 + a_9 = 3a_8 = 30 \Rightarrow a_8 = 10$$

با توجه به آن که جمله اول، نصف جمله چهارم است، داریم:

$$a_1 = \frac{a_4}{3} \Rightarrow 2a_1 = a_4 \Rightarrow 2a_1 = a_1 + 3d \Rightarrow a_1 = 3d$$

از طرفی $a_8 = 10$ است؛ پس:

$$\begin{cases} a_8 = 10 \\ a_1 = 3d \end{cases} \Rightarrow a_1 + 7d = 10 \xrightarrow{a_1=3d} 10d = 10 \Rightarrow d = 1$$

می‌دانیم $a_9 = a_8 + d$ و $a_7 = a_8 - d$

$$a_7^2 + a_8^2 + a_9^2 = (a_8 - d)^2 + a_8^2 + (a_8 + d)^2$$

$$= a_8^2 - 2a_8d + d^2 + a_8^2 + a_8^2 + 2a_8d + d^2 = 3a_8^2 + 2d^2$$

با توجه به آن که $a_8 = 10$ و $d = 1$ است؛ پس:

$$a_7^2 + a_8^2 + a_9^2 = 3a_8^2 + 2d^2 = 3 \times 10^2 + 2 = 302$$

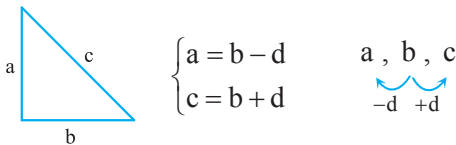
تذکر

$$\frac{a_8 - d}{a_7}, a_8, \frac{a_8 + d}{a_9}$$

اگر a ، b و c سه جمله متوالی از یک دنباله

گزینه ۱ -۶۶

حسابی با قدرنسبت d باشند، داریم:



از طرفی بنا بر قضیه فیثاغورس داریم $a^2 + b^2 = c^2$ ؛ پس:

$$(b-d)^2 + b^2 = (b+d)^2 \Rightarrow b^2 + d^2 - 2bd + b^2$$

$$= b^2 + d^2 + 2bd \Rightarrow b^2 = 4bd \xrightarrow{\div b} b = 4d$$

پس طول اضلاع برحسب d به صورت زیر است:

$$a = b - d = 3d, b = 4d, c = b + d = 5d$$

$$\frac{\text{نسبت محیط}}{\text{طول ضلع کوچک}} = \frac{3d + 4d + 5d}{3d} = \frac{12d}{3d} = 4 \quad \text{در نتیجه:}$$

در هر دنباله عددی با جمله عمومی a_n

گزینه ۱ -۶۱

جمله عمومی به صورت $a_n = an + b$ است که در آن ضریب n

همان قدرنسبت است. زیرا:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = a_1 + nd - d = \underset{a}{d}n + \underset{b}{(a_1 - d)}$$

پس در دنباله حسابی با جمله اول $a_1 = 3 - 12n$ ، قدرنسبت

برابر -12 است. از طرفی $a_1 = -9$ است. پس جمله اول دنباله

جدید -6 و قدرنسبت آن -14 است. اگر جمله عمومی دنباله

جدید را a'_n بنامیم، داریم:

$$\begin{cases} d' = -14 \\ a' = -6 \end{cases} \Rightarrow a'_n = -6 - 14(n-1) = 8 - 14n$$

$$\Rightarrow a_n - a'_n = (3 - 12n) - (8 - 14n) = 2n - 5$$

$$a_{20} - a'_{20} = 2 \times 20 - 5 = 35$$

ابتدا جمله عمومی دنباله را به دست می‌آوریم.

گزینه ۱ -۶۲

جمله اول این دنباله -2 و جمله چهارم آن 7 است. پس:

$$a_4 = 7 \Rightarrow a_4 - a_1 = 3d \Rightarrow 7 - (-2) = 3d$$

$$a_1 = -2$$

$$\Rightarrow 3d = 9 \Rightarrow d = 3$$

پس جمله عمومی این دنباله به صورت زیر است:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = -2 + 3(n-1) = 3n - 5$$

پس باید ببینیم به ازای چه مقدار از n ، $a_n < 100$ است:

$$a_n < 100 \Rightarrow 3n - 5 < 100 \Rightarrow 3n < 105 \Rightarrow n < 35$$

پس به ازای هر عدد طبیعی کوچکتر از 35 ، a_n کمتر از 100 است.

پس 34 عدد طبیعی ابتدایی باعث می‌شوند که $a_n < 100$ باشد.

ابتدا جمله شانزدهم دنباله با جمله

گزینه ۱ -۶۳

عمومی b_n را حساب می‌کنیم:

$$b_n = 3n - 4 \Rightarrow b_{16} = (3 \times 16) - 4 = 44$$

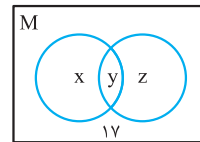
حال n را طوری می‌یابیم که a_n برابر 44 باشد:

$$a_n = 44 \Rightarrow 4n = 44 \Rightarrow n = 11$$

چون x, y, z دنباله عددی تشکیل می‌دهند،

گزینه ۱ -۶۴

$$\text{پس } \frac{x+z}{2} = y \text{ در نتیجه } x+z = 2y$$



از طرفی مطابق شکل $n(M)$ برابر است با:

$$n(M) = n(A-B) + n(A \cap B) + n(B-A) + 17$$

$$\Rightarrow n(M) = x + y + z + 17$$

$$\xrightarrow{n(M)=44} x + y + z = 27$$



گزینه ۶۹ - می دانیم جمله عمومی یک دنباله هندسی با

قدرنسبت q و جمله اول a_1 برابر $a_n = a_1 q^{n-1}$ است، پس:

$$\frac{a_{n-1}}{a_{n+1}} = \frac{a_1 \times q^{(n-1)-1}}{a_1 \times q^{(n+1)-1}} = \frac{q^{n-2}}{q^n} = q^{-2} = 9 \Rightarrow q^2 = \frac{1}{9}$$

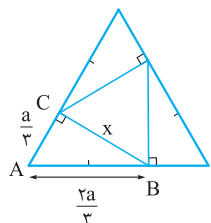
$$\Rightarrow q = \pm \frac{1}{3}$$

چون جملات دنباله، همگی مثبت اند، پس قدرنسبت نمی تواند منفی باشد. پس $q = \frac{1}{3}$ است. در نتیجه:

$$a_{10} = a_1 q^9 = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^9 = 3^{-9}$$

گزینه ۷۰ - اگر طول ضلع مثلث متساوی الاضلاع اولیه را

a بنامیم، می توانیم طول ضلع مثلث متساوی الاضلاع دوم را بر حسب a حساب کنیم.



در مثلث قائم الزاویه ABC داریم:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2a}{3}\right)^2 = \left(\frac{a}{3}\right)^2 + x^2$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{4a^2}{9} - \frac{a^2}{9} \Rightarrow x^2 = \frac{3a^2}{9} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}a}{3}$$

پس طول هر مثلث متساوی الاضلاع داخلی، $\frac{\sqrt{3}a}{3}$ برابر طول هر ضلع مثلث متساوی الاضلاع خارجی است. پس طول اضلاع، تشکیل دنباله هندسی با قدرنسبت $\frac{\sqrt{3}}{3}$ و جمله اول a می دهند:

$$a : 9 \times \frac{\sqrt{3}a}{3} : 9 \times \left(\frac{\sqrt{3}a}{3}\right)^2 : \dots$$

در نتیجه، جمله پنجم آن برابر است با:

$$a_5 = 9 \times \left(\frac{\sqrt{3}a}{3}\right)^4 = 3^2 \times \frac{1}{3^2} = 1$$

گزینه ۷۱ - زمانی که جمعیت اولیه برابر a است، پس از یک

سال با کاهش 20% جمعیت، جمعیت به 80% جمعیت اولیه می رسد. پس بعد از یک سال جمعیت برابر $8a$ است. در سال دوم با کاهش 20% جمعیت باز جمعیت 80% سال قبل خود ($8a$) خواهد بود. پس بعد از ۲ سال، جمعیت $8a \times 80\%$ یعنی $8^2 a$ خواهد بود. پس داریم:

سال	۱۳۹۰	۱۳۹۱	۱۳۹۲	۱۳۹۳
جمعیت	1.0^5	0.8×1.0^5	$0.8^2 \times 1.0^5$	$0.8^3 \times 1.0^5$

$$\begin{matrix} \xrightarrow{\times 0.8} & \xrightarrow{\times 0.8} & \xrightarrow{\times 0.8} \end{matrix}$$

گزینه ۶۷ - اگر x, y و z سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی

باشند، داریم: $\frac{x+z}{2} = y$. پس با توجه به آن که $b-c, c-a$ و $a-b$ سه جمله اول یک دنباله حسابی اند، داریم:

$$\frac{(a-b) + (c-a)}{2} = b-c \Rightarrow \frac{c-b}{2} = (b-c)$$

$$\Rightarrow c-b = 2(b-c) \Rightarrow 2(b-c) + b-c = 0$$

$$\Rightarrow 3(b-c) = 0 \Rightarrow b=c$$

پس $b=c$ است. در نتیجه سه جمله اول دنباله به صورت زیر است:

$$c-a, \underbrace{b-c}_{b-a}, a-b \Rightarrow b-a, 0, a-b$$

پس قدرنسبت این دنباله برابر $a-b$ و جمله اول آن $b-a$ است. پس:

$$a_{14} = a_1 + 13d = (b-a) + 13(a-b) = 12(a-b)$$

$$a_6 = a_1 + 5d = (b-a) + 5(a-b) = 4(a-b)$$

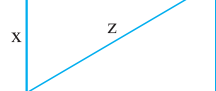
$$\Rightarrow \frac{a_{14}}{a_6} = \frac{12(a-b)}{4(a-b)} = 3$$

گزینه ۶۸ - اگر x و y و z به ترتیب عرض، طول و قطر

مستطیل باشند و تشکیل دنباله حسابی با قدرنسبت d دهند، داریم:

$$\begin{matrix} x, y, z \Rightarrow \\ \xrightarrow{-d} \quad \xrightarrow{+d} \\ x = y - d \\ z = y + d \end{matrix}$$

از طرفی بنا بر قضیه فیثاغورس داریم:



$$x^2 + y^2 = z^2$$

در نتیجه:

$$(y-d)^2 + y^2 = (y+d)^2 \Rightarrow y^2 - 2yd + d^2 + y^2 = y^2 + 2yd + d^2$$

$$\Rightarrow y^2 = 4yd \xrightarrow{\div y} y = 4d$$

پس با توجه به آن که $z = y + d$ و $x = y - d$ است، داریم:

$$x = 4d - d = 3d, z = 4d + d = 5d$$

با توجه به آن که محیط مستطیل برابر ۵۶ است، پس $2(x+y) = 56$ است و در نتیجه $x+y = 28$ است. با توجه به آن که $x = 3d$ و $y = 4d$ است، داریم:

$$x+y = 28 \Rightarrow 3d+4d = 28 \Rightarrow 7d = 28 \Rightarrow d = 4$$

پس $x = 12$ و $y = 16$ است و مساحت مستطیل برابر $12 \times 16 = 192$ است.



مجموعه، الگو و دنباله

پس حاصل ضرب 5^0 جمله اول آن به صورت زیر است:

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_{50} = 2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times \dots \times 2^{50} \\ = 2^{1+2+3+\dots+50}$$

می‌دانیم مجموع n جمله ابتدایی اعداد طبیعی ابتدایی برابر $\frac{n(n+1)}{2}$ است، پس:

$$2^{1+2+3+\dots+50} = 2^{\frac{50 \times 51}{2}} = 2^{25 \times 51}$$

این عدد را باید در پایه ۸ بنویسیم. می‌دانیم $51 = 3 \times 17$ پس:

$$2^{25 \times 51} = 2^{25 \times 3 \times 17} = (2^3)^{25 \times 17} = 8^{25 \times 17} = 8^{425}$$

۷۶- گزینه ۲

$$a_1 a_2 a_3 \times \dots \times a_{13} = a_1 \times a_1 q \times a_1 q^2 \times \dots \times a_1 q^{12} \\ = a_1^{13} \times q^{1+2+3+\dots+12}$$

می‌دانیم حاصل جمع n عدد اول طبیعی برابر $\frac{n(n+1)}{2}$ است، پس:

$$1+2+3+\dots+12 = \frac{12 \times 13}{2} = 6 \times 13$$

در نتیجه:

$$a_1 a_2 a_3 \times \dots \times a_{13} = a_1^{13} q^{6 \times 13} = (a_1 q^6)^{13}$$

از طرفی می‌دانیم $a_7 = a_1 q^6$ پس:

$$a_1 a_2 a_3 \times \dots \times a_{13} = a_7^{13} = (\sqrt[13]{2})^{13} = 2$$

۷۷- گزینه ۴ جملات دنباله را با توجه به رابطه داده شده

می‌نویسیم:

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 2 \times 3 + 3 = 3(2+1)$$

$$a_3 = 2 \times 3(2+1) + 3 = 3(2^2 + 2 + 1)$$

$$a_4 = 2 \times 3(2^2 + 2 + 1) + 3 = 3(2^3 + 2^2 + 2 + 1)$$

در نتیجه می‌توان نشان داد:

$$a_n = 3(2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 1)$$

پس:

$$a_8 - a_7 = 3(2^7 + 2^6 + \dots + 1) - 3(2^6 + 2^5 + \dots + 1)$$

$$= 3 \times 2^7 = 3 \times 128 = 384$$

تذکره در حالت کلی در این دنباله می‌توان اثبات کرد:

$$a_n - a_{n-1} = 3 \times 2^{n-1}$$

پس در ابتدای سال ۱۳۹۵ جمعیت برابر $1.8^5 \times 10^5$ است، یعنی:

$$1.8^5 \times 10^5 = 8^5 = (2^3)^5 = 2^{15}$$

۷۲- گزینه ۲ می‌دانیم اگر سه عدد a ، b و c سه جمله متوالی

از یک دنباله هندسی باشند، داریم: $ac = b^2$. پس اگر k و $k-2$ ، k و $k+4$ و $22+k$ تشکیل دنباله هندسی دهند، داریم:

$$(k+22)(k-2) = (k+4)^2 \Rightarrow k^2 + 20k - 44 \\ = k^2 + 8k + 16 \Rightarrow 12k = 60 \Rightarrow k = 5$$

۷۳- گزینه ۲ اگر بین ۲ و ۱۶ پنج عدد طوری قرار دهیم که

۷ عدد حاصل تشکیل دنباله هندسی دهند، جمله اول دنباله، ۲ و جمله هفتم آن خواهد بود. پس:

$$\begin{matrix} 2 & & & & & & 16 \\ \downarrow & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \downarrow \\ a_1 & & & & & & a_7 \end{matrix}$$

$$a_7 = a_1 q^6 \Rightarrow \frac{a_7}{a_1} = q^6 \Rightarrow \frac{16}{2} = q^6 \Rightarrow q^6 = 8$$

$$\Rightarrow q^3 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

در نتیجه حاصل ضرب ۵ واسطه به صورت زیر است:

$$a_2 \times a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 = a_1 q \times a_1 q^2 \times a_1 q^3 \times a_1 q^4 \times a_1 q^5 \\ = a_1^5 \times q^{1+2+3+4+5} = a_1^5 q^{15} = 2^5 \times (q^3)^5 = 2^5 \times (2\sqrt{2})^5 \\ = 2^5 \times 2^5 \times \sqrt{2}^5 = 2^{10} \times 2^2 \times \sqrt{2} = 2^{12} \times \sqrt{2} = 4096\sqrt{2}$$

۷۴- گزینه ۲ دنباله زیر دنباله هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{3}$ و

جمله اول ۸۱ است. پس:

$$81, 27, 9, \dots \Rightarrow a_n = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 3^4 \times 3^{1-n} = 3^{5-n}$$

$$\Rightarrow a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_{10} = 3^4 \times 3^3 \times 3^2 \times \dots \times 3^{-5} \\ = 3^{4+3+2+\dots-4-5} = 3^{-5}$$

از طرفی $a_5 = 3^{5-5} = 1$. پس حاصل ضرب ده جمله اول 3^{-5} برابر جمله پنجم است؛ یعنی:

$$\frac{a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_{10}}{a_5} = \frac{3^{-5}}{1} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}$$

۷۵- گزینه ۲ دنباله داده شده یک دنباله هندسی با جمله اول

و قدرنسبت ۲ است. پس جمله عمومی آن به صورت زیر است:

$$a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$$



گزینه ۷۸

جملات دنباله را با توجه به رابطه داده شده

می نویسیم:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = \frac{3}{4} \times 1 + 1$$

$$a_3 = \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4} + 1 \right) + 1 = \left(\frac{3}{4} \right)^2 + \left(\frac{3}{4} \right)^1 + 1$$

$$a_4 = \frac{3}{4} \left(\left(\frac{3}{4} \right)^2 + \left(\frac{3}{4} \right) + 1 \right) + 1 = \left(\frac{3}{4} \right)^3 + \left(\frac{3}{4} \right)^2 + \frac{3}{4} + 1$$

در نتیجه می توان نشان داد:

$$a_n = \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1} + \left(\frac{3}{4} \right)^{n-2} + \dots + 1$$

پس:

$$a_{16} = \left(\frac{3}{4} \right)^{15} + \left(\frac{3}{4} \right)^{14} + \dots + 1$$

$$a_{15} = \left(\frac{3}{4} \right)^{14} + \left(\frac{3}{4} \right)^{13} + \dots + 1$$

$$a_{16} - a_{15} = \left(\frac{3}{4} \right)^{15}$$

گزینه ۷۹

اگر a_n جمله n ام و a_{n-1} جمله $n-1$ ام

باشد، داریم:

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = 2a_{n-1} + 2 \quad n \geq 2 \end{cases}$$

در نتیجه دنباله به صورت زیر خواهد بود:

$$a_1 = 2^2$$

$$a_2 = 2 \times 2^2 + 2 = 2^3 + 2$$

$$a_3 = 2(2^3 + 2) + 2 = 2^4 + 2^2 + 2$$

$$a_4 = 2(2^4 + 2^2 + 2) + 2 = 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2$$

در نتیجه جمله چهارم به صورت زیر است:

$$a_4 = 2^{4+1} + 2^{3+1} + 2^{2+1} + 2 + 2$$

اگر عدد ۲ را به جمله فوق اضافه کنیم، داریم:

$$a_4 + 2 = 2^{4+1} + 2^{3+1} + 2^{2+1} + \dots + 2^2 + 2 + 2$$

می توانیم نشان دهیم حاصل $2 + 2 + 2^{3+1} + 2^{2+1} + \dots + 2^{3+1}$ برابر 2^{4+1} است:

$$2 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{3+1} = 2^{4+1}$$

$$\underbrace{2^2}_{2^2} + \underbrace{2 \times 2^2}_{2 \times 2^2 = 2^3} + \underbrace{2 \times 2^3}_{2 \times 2^3 = 2^4} + \dots + 2^{3+1} = 2^{4+1}$$

پس:

$$a_{40} + 2 = 2^{41} + 2^{40} \Rightarrow a_{40} + 2 = 2 \times 2^{40} + 2^{40} = 3 \times 2^{40}$$

$$\Rightarrow a_{40} = 3 \times 2^{40} - 2$$

گزینه ۸۰

اگر a و b و c جملات متوالی یک دنباله

هندسی باشند، داریم: $b^2 = ac$ ؛ پس:

$$4^y \times 2^{2x} = (8\sqrt{2})^2 \Rightarrow 2^{2y} \times 2^{2x} = (2^3 \times \sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow 2^{2x+2y} = 2^6 \times 2 = 2^7 \Rightarrow 2^{2x+2y} = 2^7$$

$$\Rightarrow 2x + 2y = 7 \Rightarrow 2(x+y) = 7 \Rightarrow x+y = \frac{7}{2}$$

واسطه عددی x و y برابر $\frac{x+y}{2}$ است. پس واسطه عددی آن‌ها

$$\text{برابر } \frac{\frac{7}{2}}{2} = \frac{7}{4} \text{ است.}$$

گزینه ۸۱

واسطه عددی دو عدد a و b برابر $\frac{a+b}{2}$ و

واسطه هندسی دو عدد a و b برابر \sqrt{ab} است. پس:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x+3+x}{x(x+3)} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+3}{x^2+3x} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x+3 = \frac{1}{2}(x^2+3x) \Rightarrow x^2-x-6=0$$

عبارت بالا را به کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه می کنیم:

$$(x-3)(x+2) = 0$$

حاصل ضرب دو عدد زمانی صفر است که یکی از آن‌ها صفر باشد، پس

یا $x-3 = 0$ صفر است و یا $x+2 = 0$. پس $x = 3$ است یا $x = -2$.

اگر $x = -2$ باشد، دو عدد x و $x+9$ به ترتیب -2 و 7 خواهند بود

که چون حاصل ضرب آن‌ها منفی است، واسطه هندسی برای آن‌ها تعریف

نمی شود. پس $x = 3$ است. اگر $x = 3$ باشد، دو عدد x و $x+9$ به

ترتیب برابر 3 و 12 خواهد بود که واسطه هندسی آن‌ها 6 است:

$$\sqrt{3 \times 12} = \sqrt{36} = 6$$

گزینه ۸۲

$$3, a, b+3 \xrightarrow{\text{جمله متوالی دنباله حسابی}} \frac{b+3+3}{2} = a$$

$$\Rightarrow b+6 = 2a \Rightarrow b = 2a - 6$$

$$2, a-1, 2b+2 \xrightarrow{\text{جمله متوالی دنباله هندسی}} 2(2b+2) = (a-1)^2$$



پس داریم:

$$\begin{cases} a+b=34 \Rightarrow (a+b)^2=34^2 \Rightarrow a^2+b^2+2ab=34^2 (*) \\ \sqrt{ab}=15 \Rightarrow \sqrt{ab}^2=15^2 \Rightarrow ab=15^2 \end{cases}$$

اگر از دو طرف تساوی (*)، $-4abc$ را کم کنیم، می‌توانیم اتحاد $(a-b)^2$ را ایجاد کنیم:

$$\underbrace{a^2+b^2+2ab-4ab}_{a^2+b^2-2ab} = 34^2 - 4ab$$

$$\Rightarrow (a-b)^2 = 34^2 - 4ab$$

$$\xrightarrow{ab=15^2} (a-b)^2 = 34^2 - 4 \times 15^2 = 34^2 - 3 \times 15^2$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (a-b)^2 = \underbrace{(34-30)}_4 \underbrace{(34+30)}_{64}$$

$$= 256 = 16^2 \Rightarrow |a-b| = 16$$

۸۴- **گزینه ۲** می‌دانیم اگر a ، b و c سه جمله متوالی از

یک دنباله هندسی باشند، داریم: $ac = b^2$. پس با توجه به آن که a_3, a_7, a_9 تشکیل دنباله هندسی می‌دهند، داریم:

$$a_7 a_9 = a_3^2 \Rightarrow (a_1 + 6d)(a_1 + 8d) = (a_1 + 2d)^2$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 10a_1d + 16d^2 = a_1^2 + 12a_1d + 4d^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{a_1 + 10d}_{a_{11}} = 0 \Rightarrow a_{11} = 0$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} b = 2a - 6 \\ 4(b+1) = (a-1)^2 \Rightarrow 4(2a-6+1) = (a-1)^2 \end{cases}$$

$$(a-1)^2 = 8a - 20 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 8a - 20$$

$$\Rightarrow a^2 - 10a + 21 = 0$$

به کمک اتحاد جمله مشترک، $a^2 - 10a + 21$ را تجزیه می‌کنیم. در نتیجه:

$$(a-3)(a-7) = 0$$

برای آن که حاصل ضرب دو عدد صفر باشد، لازم است حداقل یکی از آن‌ها صفر باشد؛ پس یا $a-3=0$ باید صفر باشد یا $a-7=0$. بنابراین یا $a=3$ است و یا $a=7$. اگر $a=3$ باشد:

$$b = 2a - 6 \xrightarrow{a=3} b = 0$$

اگر $a=7$ باشد:

$$b = 2a - 6 \xrightarrow{a=7} b = 8$$

پس اگر $a=3$ باید $b=0$ باشد و $a+b=3$ است که در بین گزینه‌ها نیست. اگر $a=7$ باشد، $b=8$ است و $a+b=15$ است.

۸۳- **گزینه ۴** واسطه حسابی و هندسی دو عدد مثبت a و

b به ترتیب $\frac{a+b}{2}$ و \sqrt{ab} است. پس:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = 2 \\ a+b=34 \end{cases} \Rightarrow \frac{34}{2} - \sqrt{ab} = 2 \Rightarrow \sqrt{ab} = 15$$