

خرید کتاب های کنکور

با تخفیف ویژه

و
ارال رایگان

Medabook.com



مدابوک



پک جامه ناس تلفنی، رایگان

با مشاوران رتبه برتر

برای انتخاب بهترین منابع

دبیرستان و کنکور

۰۲۱ ۳۸۴۳۵۲۱۰



فهرست

۷	فصل اول: هندسه تحلیلی و جبر
۷۹	فصل دوم: هندسه
۱۱۶	فصل سوم: تابع
۱۷۸	فصل چهارم: مثلثات
۲۲۵	فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی
۲۶۹	فصل ششم: حد و پیوستگی
۳۲۱	فصل هفتم: آمار و احتمال



حل معادله درجه دو

در سال قبل با معادله درجه دوم و روش های حل آن آشنا شدیم. روش هایی که بیشتر از بقیه به کار می آیند، «حل معادله درجه دوم به روش تجزیه» و «حل معادله درجه دوم به روش کلی» هستند.

معادله درجه دوم در حالت کلی به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ (با شرط $a \neq 0$) است.

ریشه های این معادله در حالت کلی از رابطه $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ محاسبه می شوند که دلتای معادله از رابطه $\Delta = b^2 - 4ac$ به دست می آید.

با توجه به این که مقدار عددی دلتا باید زیر رادیکال قرار گیرد، تعداد ریشه های معادله درجه دوم بستگی به علامت دلتا دارد:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

۱) اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز است:

$$x = -\frac{b}{2a} \quad \text{اگر } \Delta = 0 \quad \text{باشد، معادله دارای یک ریشه مضاعف است:}$$

۲) اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله ریشه حقیقی ندارد.

دو حالت از معادله درجه دوم کاربرد زیادی دارند و خوب است آنها را بدلاً باشیم:

$$1) \text{ اگر } a + b + c = 0 \text{ باشد، آن‌گاه ریشه های معادله ۱ و } -\frac{c}{a} \text{ هستند.}$$

$$2) \text{ اگر } a - b + c = 0 \text{ باشد، آن‌گاه ریشه های معادله } -1 \text{ و } \frac{c}{a} \text{ هستند.}$$

تست مجموع بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین ریشه معادله $= 0 = (5x^2 + 27x + 22)(5x^2 - 17x + 14)$ کدام است؟

$$\frac{17}{3}(4)$$

$$\frac{11}{3}(3)$$

$$\frac{4}{15}(2)$$

$$-\frac{17}{5}(1)$$

پاسخ گزینه «۳» جواب های معادله $= 0 = (5x^2 + 27x + 22)(5x^2 - 17x + 14)$ از حل دو معادله زیر به دست می آیند:

$$5x^2 + 27x + 22 = 0, \quad 5x^2 - 17x + 14 = 0$$

در معادله $= 0 = 5x^2 - 17x + 14$ بر قرار است، پس ریشه ها برابر با 1 و $\frac{14}{5}$ هستند.

در معادله $= 0 = 5x^2 + 27x + 22$ هم رابطه $a + b + c = 0$ برقرار است، پس ریشه ها -1 و $-\frac{22}{5}$ هستند. بزرگ‌ترین ریشه $\frac{14}{5}$ و کوچک‌ترین

ریشه $-\frac{22}{5}$ است که مجموعشان برابر است با:

تست در ضرب دو عدد طبیعی که یکی از دیگری 6 واحد کوچک‌تر است اشتباہی رخ می‌دهد. در نتیجه رقم دهگان 3 واحد کوچک‌تر می‌شود.

برای آزمایش، حاصل ضرب را بر عدد کوچک‌تر تقسیم می‌کنیم. خارج قسمت 29 و باقی‌مانده 20 می‌شود. مجموع این دو عدد کدام است؟

$$59(4)$$

$$58(3)$$

$$57(2)$$

$$56(1)$$

پاسخ گزینه «۱» دو عدد را $x + 6$ و $x + 20$ می‌گیریم. ضرب صحیح آنها $(x + 6)(x + 20) = x^2 + 6x - 30$ است.

در ضرب اشتباہشان، رقم دهگان، 3 واحد کوچک‌تر حساب شده، پس عدد از مقدار واقعی‌اش 30 واحد کم‌تر شده است:

برای آزمایش، حاصل ضرب اشتباہ (یعنی $x^2 + 6x - 30$) را بر عدد کوچک‌تر (یعنی x) تقسیم کردی‌ایم؛ خارج قسمت 29 و باقی‌مانده 20 شده است:

$$\begin{array}{r} x \\ \hline x^2 + 6x - 30 \\ \hline 29 \end{array}$$

20

رابطه تقسیم را برای تقسیم بالا می‌نویسیم:

$$x^2 + 6x - 30 = 29(x) + 20$$



معادله صفحه قبل را حل می کنیم تا عدد کوچکتر (یعنی x) به دست آید:

$$x^2 + 6x - 3 = 29x + 2 \Rightarrow x^2 - 23x - 5 = 0 \Rightarrow (x - 25)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 25 \\ x = -2 \end{cases}$$

چون در سؤال گفته هر دو عدد، طبیعی هستند پس فقط $-x$ قابل قبول است. در این حالت عدد بزرگتر برابر با $31 = 25 + 6$ است و در نتیجه مجموع دو عدد برابر است با: $25 + 31 = 56$.

تست اگر معادله $0 = ((m+1)x^2 + 4x + m - 2)$ دارای ۳ ریشه متمایز باشد، m چند مقدار صحیح می تواند داشته باشد؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)

پاسخ گزینه «۲» برای آن که معادله فوق دارای ۳ ریشه متمایز باشد، باید معادله $0 = (m+1)x^2 + 4x + m - 2$ دارای ۲ ریشه متمایز

باشد که هیچ کدام از آنها $x = -\frac{4}{3}$ نباشند؛ پس دو شرط زیر را باید لحاظ کنیم:

(۱) دلتای معادله $0 = (m+1)x^2 + 4x + m - 2$ باید مثبت باشد:

$$\Delta > 0 \Rightarrow 4^2 - 4(m+1)(m-2) > 0 \xrightarrow{\div 4} 4 - (m+1)(m-2) > 0 \Rightarrow 4 - m^2 + m + 2 > 0 \Rightarrow m^2 - m - 6 < 0 \Rightarrow (m-3)(m+2) < 0 \Rightarrow -2 < m < 3$$

(۲) معادله $0 = (m+1)x^2 + 4x + m - 2$ داشته باشد (زیرا در این صورت با ریشه عبارت $(3x+4)$ مشترک شده و

معادله در مجموع دارای ۲ ریشه می شود)، پس:

$$(m+1)x^2 + 4x + m - 2 = 0 \xrightarrow{x = -\frac{4}{3}} (m+1)\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + 4\left(-\frac{4}{3}\right) + m - 2 = 0 \Rightarrow \frac{16}{9}(m+1) - \frac{16}{3} + m - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\times 9} 16m + 16 - 48 + 9m - 18 = 0 \Rightarrow 25m - 5 = 0 \Rightarrow m = 2 \quad \text{پس } m \text{ باید } 2 \text{ باشد}$$

حالا بین دو شرط بالا اشتراک می گیریم:

$$(1) \cap (2) = (-2 < m < 3) \cap (m \neq 2) \Rightarrow m \in (-2, 3) - \{2\} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = \{-1, 0, 1\}$$

پس m سه مقدار صحیح می تواند داشته باشد.

مجموع، تفاضل و حاصل ضرب ریشه های معادله درجه دو

ریشه های معادله درجه دوم $0 = ax^2 + bx + c$ از رابطه $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ است. می خواهیم «مجموع

ریشه ها $(\alpha + \beta)$ »، «قدر مطلق تفاضل ریشه ها $(|\alpha - \beta|)$ » و «حاصل ضرب ریشه ها $(\alpha\beta)$ » را بحسب ضرایب معادله درجه دو (یعنی a و b)

$$(c) \text{ به دست آوریم، اگر فرض کنیم } \beta = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } \alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ است، آن گاه داریم:}$$

$$1: S = \alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a} = -\frac{b}{a} \Rightarrow S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$2: P = \alpha\beta = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{(-b)^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \Rightarrow P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$3: M = |\alpha - \beta| = \left| \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \Rightarrow M = |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \sqrt{S^2 - 4P}$$



تست اگر یکی از ریشه‌های معادله $2x^3 + kx + 32 = 0$ ، مکعب ریشه دیگر باشد، مقدار مثبت k کدام است؟

۴۰ (۴)

۳۰ (۳)

۲۰ (۲)

۱۰ (۱)

پاسخ گزینه «۲» ریشه‌های معادله را α و β در نظر می‌گیریم. یکی از آن‌ها مکعب دیگری است. پس $\beta = \alpha^3$. حال S و P را به دست

$$S = -\frac{b}{a} \Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{k}{2} \Rightarrow \alpha + \alpha^3 = -\frac{k}{2}$$

می‌آوریم:

$$P = \frac{c}{a} \Rightarrow \alpha\beta = \frac{32}{2} \Rightarrow \alpha\alpha^3 = 16 \Rightarrow \alpha^4 = 16$$

با حل معادله دوم مقدار α را به دست می‌آوریم و در معادله اول قرار می‌دهیم:

$$\alpha^4 = 16 \Rightarrow \alpha = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 : \alpha + \alpha^3 = -\frac{k}{2} \Rightarrow 2 + 8 = -\frac{k}{2} \Rightarrow k = -20 & \text{☒} \\ \alpha = -2 : \alpha + \alpha^3 = -\frac{k}{2} \Rightarrow -2 - 8 = -\frac{k}{2} \Rightarrow k = 20 & \checkmark \end{cases}$$

مثال اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $2x^3 - 4x + 1 = 0$ باشند، بدون حل معادله، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. ($\alpha > \beta$)

- | | | |
|--|---|-----------------------------------|
| ۱) $\alpha + \beta$ | ۲) $\alpha\beta$ | ۳) $\beta - \alpha$ |
| ۴) $\alpha^2 + \beta^2$ | ۵) $\alpha^2 + \beta^2$ | ۶) $\alpha^4 + \beta^4$ |
| ۷) $\alpha^{\Delta} + \beta^{\Delta}$ | ۸) $\alpha^{\sigma} + \beta^{\sigma}$ | ۹) $\alpha^{\tau} - \beta^{\tau}$ |
| ۱۰) $\alpha^{\Gamma} - \beta^{\Gamma}$ | ۱۱) $\frac{\alpha+1}{\beta} - \frac{\beta+1}{\alpha}$ | ۱۲) $2\alpha^{\tau} - 4\alpha$ |
| ۱۳) $2\alpha^{\tau} + 4\beta$ | ۱۴) $\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}$ | |

در معادله $2x^3 - 4x + 1 = 0$ با ضرایب $b = -4$, $a = 2$, $c = 1$, ابتدا جمع، تفیق و ضرب ریشه‌ها را در سه قسمت اول به دست

می‌آوریم و در قسمت‌های بعدی از آن‌ها کمک می‌گیریم. برای بعضی از قسمت‌ها که کاربرد زیادی دارند، رابطه‌شان را هم بیان می‌کنیم.

$$1) \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{4}{2} = -2 \Rightarrow S = 2$$

$$2) \alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow \alpha\beta = \frac{1}{2} \Rightarrow P = \frac{1}{2}$$

$$3) |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{(-4)^2 - 4(2)(1)}}{|2|} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \xrightarrow{\alpha > \beta} \alpha - \beta = \sqrt{2} \Rightarrow \beta - \alpha = -\sqrt{2}$$

$$4) \alpha^2 + \beta^2 = (\underbrace{\alpha + \beta}_{S})^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P = (-2)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) = 4 - 1 = 3 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 3$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$$

مجموع مربعات ریشه‌های معادله درجه دو زیاد استفاده می‌شود، پس رابطه آن را بلد باشید:

$$5) \alpha^4 - \beta^4 = (\alpha + \beta)^4 - 4\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta(\alpha + \beta) = (\underbrace{\alpha + \beta}_{S})^4 - 4\underbrace{\alpha\beta}_{P}(\underbrace{\alpha + \beta}_{S}) = S^4 - 4PS = (-2)^4 - 4\left(\frac{1}{2}\right)(2) = 16 - 8 = 8 \Rightarrow \alpha^4 + \beta^4 = 8$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2PS$$

مجموع مکعبات ریشه‌های معادله درجه دو هم زیاد استفاده می‌شود! آن را هم بلد باشید:

$$6) \alpha^6 + \beta^6 = (\alpha^2 + \beta^2)^3 - 3\alpha^2\beta^2(\alpha^2 + \beta^2) = (\alpha^2 + \beta^2)^3 - 3(\alpha^2 + \beta^2)P = (3)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 27 - \frac{3}{8} = \frac{213}{8} \Rightarrow \alpha^6 + \beta^6 = \frac{213}{8}$$



برای به دست آوردن $\alpha^{\Delta} + \beta^{\Delta}$, از دو تساوی $\alpha^r + \beta^r = 5$ و $\alpha^r + \beta^r = 3$ کمک می‌گیریم. آنها را در هم ضرب می‌کنیم و امیدواریم

$$\left. \begin{aligned} (\alpha^r + \beta^r) &= 5 \\ (\alpha^r + \beta^r) &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\alpha^r + \beta^r)(\alpha^r + \beta^r) = (3)(5) \Rightarrow \alpha^{\Delta} + \alpha^r \beta^r + \alpha^r \beta^r + \beta^{\Delta} = 15$$

بعدش اتفاق‌های خوبی بیفتند!

$$\Rightarrow \alpha^{\Delta} + \beta^{\Delta} + \alpha^r \beta^r (\alpha + \beta) = 15 \Rightarrow \alpha^{\Delta} + \beta^{\Delta} + \left(\frac{1}{r}\right)^r (2) = \alpha^{\Delta} + \beta^{\Delta} + \frac{1}{r} = 15 \Rightarrow \alpha^{\Delta} + \beta^{\Delta} = \frac{29}{r}$$

از تساوی $a^r + b^r = (a+b)^r - 2ab$ استفاده می‌کنیم

$$\alpha^{\Delta} + \beta^{\Delta} = (\alpha^r + \beta^r)^r - 2\alpha^r \beta^r = (\alpha^r + \beta^r)^r - 2(\alpha \beta)^r = 5^r - 2\left(\frac{1}{r}\right)^r = 25 - \frac{1}{4} = \frac{99}{4}$$

عبارت داده شده را با کمک اتحاد چاق و لاغر تجزیه می‌کنیم و با استفاده از قسمت‌های قبل، حاصل آن را به دست می‌آوریم:

$$\alpha^r - \beta^r = \underbrace{(\alpha - \beta)}_{\sqrt{r}} \underbrace{(\alpha^r + \beta^r + \alpha \beta)}_{r} = \sqrt{r} \left(\frac{\gamma}{r} \right) = \frac{\gamma}{r} \sqrt{r} \Rightarrow \alpha^r - \beta^r = \frac{\gamma}{r} \sqrt{r}$$

عبارت داده شده را با اتحاد مزدوج در دو مرحله تجزیه می‌کنیم:

$$\alpha^r - \beta^r = (\alpha^r - \beta^r)(\alpha^r + \beta^r) = \underbrace{(\alpha - \beta)}_{\sqrt{r}} \underbrace{(\alpha + \beta)}_{r} \underbrace{(\alpha^r + \beta^r)}_{r} = (\sqrt{r})(r)(r) = r\sqrt{r} \Rightarrow \alpha^r - \beta^r = r\sqrt{r}$$

$$\text{III. } \frac{\alpha+1}{\beta} - \frac{\beta+1}{\alpha} = \frac{\alpha(\alpha+1) - \beta(\beta+1)}{\alpha\beta} = \frac{\alpha^r + \alpha - \beta^r - \beta}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha^r - \beta^r) + (\alpha - \beta)}{\alpha\beta} = \frac{\underbrace{(\alpha - \beta)}_{\frac{1}{r}} \underbrace{(\alpha + \beta)}_{r} \underbrace{(\alpha^r + \beta^r)}_{r}}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{r\sqrt{r} + \sqrt{r}}{\frac{1}{r}} = \frac{r\sqrt{r}}{\frac{1}{r}} = r \times r\sqrt{r} \Rightarrow \frac{\alpha+1}{\beta} - \frac{\beta+1}{\alpha} = r\sqrt{r}$$

α جواب معادله است، پس در معادله صدق می‌کند و می‌توانیم آن را جای x قرار دهیم:

$$2x^r - 4x + 1 = 0 \xrightarrow{x=\alpha} 2\alpha^r - 4\alpha + 1 = 0 \Rightarrow 2\alpha^r - 4\alpha = -1$$

$$2\alpha^r - 4\alpha + 1 = 0 \Rightarrow 2\alpha^r = 4\alpha - 1$$

مشابه قسمت (۱۲) داریم:

پس می‌توانیم جای $2\alpha^r$, عبارت $-1 - 4\alpha$ را جای‌گذاری کنیم:

$$2\alpha^r + 4\beta = 4\alpha - 1 + 4\beta = 4 \underbrace{(\alpha + \beta)}_{2} - 1 = 8 - 1 = 7 \Rightarrow 2\alpha^r + 4\beta = 7$$

برای محاسبه $\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta}$ آن را برابر با یک حرف (مثلث A) قرار می‌دهیم و با توان دو رساندن دو طرف، حاصل عبارت خواسته شده را به دست می‌آوریم، در اینجا چون $\alpha > \beta$ است، پس $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}$ عددی منفی است. ما حاصل $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}$ را به دست می‌آوریم و سپس آن را قرینه می‌کنیم:

$$A = \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} \xrightarrow{\text{توان ۲}} A^2 = \underbrace{\alpha + \beta}_{2} - 2 \underbrace{\sqrt{\alpha\beta}}_{\frac{1}{r}} \Rightarrow A^2 = 2 - 2\sqrt{\frac{1}{r}} \Rightarrow A^2 = 2 - \sqrt{\frac{4}{r}} = 2 - \sqrt{2} \Rightarrow A = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha} = -\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

بنکته: اگر $\alpha > \beta > 0$ باشد، آن‌گاه:



تست مجموعه مقادیر m که به ازای آنها معادله $(m+2)x^2 + 4x + m = 1$ دارای دو ریشه حقیقی منفی باشد، کدام است؟

$$1 < m < 2 \quad (۱)$$

$$-3 < m < 3 \quad (۲)$$

$$-3 < m < 2 \quad (۳)$$

$$-2 < m < 1 \quad (۴)$$

پاسخ گزینه «۴» معادله را به شکل $(m+2)x^2 + 4x + (m-1) = 0$ می‌نویسیم.

برای آن که معادله درجه دو، دارای دو ریشه حقیقی منفی باشد، باید سه شرط $S < 0$, $\Delta > 0$ و $P > 0$ را داشته باشد:

۱) چون معادله دارای دو جواب حقیقی است، دلتا باید مثبت باشد:

$$\Delta > 0 \Rightarrow 16 - 4(m+2)(m-1) > 0 \xrightarrow{+4} 4 - (m+2)(m-1) > 0 \Rightarrow 4 - m^2 - m + 2 > 0 \Rightarrow m^2 + m - 6 < 0$$

$$\Rightarrow (m+3)(m-2) < 0 \Rightarrow -3 < m < 2$$

۲) چون هر دو ریشه منفی هستند، باید جمع ریشه‌ها منفی باشد:

$$S < 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{b}{a} > 0 \Rightarrow \frac{4}{m+2} > 0 \Rightarrow m+2 > 0 \Rightarrow m > -2$$

$$P > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{m-1}{m+2} > 0 \Rightarrow m > 1 \text{ یا } m < -2 \quad (۳)$$

حالا باید بین سه شرط بالا اشتراک بگیریم:

تست اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 4x + 2 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^3 + 8\alpha^{-3}$ کدام است؟

$$-36 \quad (۱)$$

$$-40 \quad (۲)$$

$$-44 \quad (۳)$$

$$-48 \quad (۴)$$

$$P = \frac{c}{a} \Rightarrow \alpha\beta = 2$$

پاسخ گزینه «۳» حاصل ضرب ریشه‌های معادله را به دست می‌آوریم:

$$\alpha\beta = 2 \Rightarrow \beta = \frac{\gamma}{\alpha}$$

β را بحسب α به دست می‌آوریم:

پس می‌توانیم به جای α , β را قرار دهیم. حالا عبارت خواسته شده را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\alpha^3 + 8\alpha^{-3} = \alpha^3 + \frac{8}{\alpha^3} = \alpha^3 + \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^3 = \alpha^3 + \beta^3$$

می‌دانیم مجموع مکعبات ریشه‌ها از رابطه $\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS$ به دست می‌آید، پس:

$$\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS = (-4)^3 - 3(2)(-4) = -64 + 24 = -40$$

تست اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 4x - 3 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^7\beta - 3\beta^7$ کدام است؟

$$66 \quad (۱)$$

$$-66 \quad (۲)$$

$$30 \quad (۳)$$

$$-30 \quad (۴)$$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 4 \Rightarrow S = 4$$

پاسخ گزینه «۳» در معادله $x^2 - 4x - 3 = 0$ با ریشه‌های α و β داریم:

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = -3 \Rightarrow P = -3$$

عبارت داده شده را ساده‌تر می‌کنیم و از تساوی‌های بالا در آن استفاده می‌کنیم:

$$\alpha^7\beta - 3\beta^7 = (\underbrace{\alpha\beta}_{-3})\alpha^6 - 3\beta^6 = -3\alpha^6 - 3\beta^6 = -3(\alpha^6 + \beta^6) = -3(S^3 - 3P) = -3(4^3 - 2(-3)) = -3(64 + 6) = -66$$

حل معادله به روش تغییر متغیر

برخی معادلات هستند که شاید قیافه ترسناکی داشته باشند ولی قلب کوچکی دارند و فیلی راهت را می‌شنون و آن‌ها را می‌کنیم! در این معادلات با جای‌گذاری t به جای یک عبارت بحسب x می‌توان معادله را به شکل یک معادله ساده‌تر درآورد؛ پس معادله را بحسب t حل کرده و مقادیر t را به دست می‌آوریم. در نهایت باید عبارتی که جای آن t قرار داده‌ایم را مساوی با جواب‌های t قرار دهیم و آن‌ها را حل کنیم و مجھول اصلی یعنی x را به دست آوریم. قسمتی از سوالات «حل معادله به روش تغییر متغیر» را در قسمت «معادلات گویا و گنگ» بررسی خواهیم کرد.



مثال معادله‌های زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } (x^r - 1)^t + (x^r - 1)^t - 2 = 0$$

$$t = (x^r - 1)^t$$

$$\text{ب) } (x^r - 3x - 2)^t - 1 \cdot (x^r - 3x) + 36 = 0$$

پاسخ الف) بهترین انتخاب برای تغییر متغیر این است که $(x^r - 1)^t$ را بگیریم:

$$(x^r - 1)^t + (x^r - 1)^t - 2 = 0 \xrightarrow{(x^r - 1)^t = t} t^r + t - 2 = 0 \Rightarrow (t-1)(t+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-2 \end{cases}$$

حالا با جای‌گذاری $t = 1$ و $t = -2$, مقدار x را به دست می‌آوریم:

$$t=1 \Rightarrow (x^r - 1)^r = 1 \Rightarrow x^r - 1 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x^r - 1 = 1 \Rightarrow x^r = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt[2]{2} \\ x^r - 1 = -1 \Rightarrow x^r = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

$$t = -2 \Rightarrow (x^r - 1)^{-2} = -2 \quad (\text{جواب ندارد})$$

همواره ثانمنی

پس معادله دارای سه جواب $x = -\sqrt[2]{2}$, $x = \sqrt[2]{2}$ و $x = 0$ است.

$$x^r - 3x - 2 = t$$

$$x^r - 3x - 2 = t \Rightarrow x^r - 3x = t + 2$$

پس $x^r - 3x$ برابر است با:

با جای‌گذاری تساوی‌های بالا، معادله را بر حسب t حل می‌کنیم:

$$(x^r - 3x - 2)^t - 1 \cdot (x^r - 3x) + 36 = 0 \Rightarrow t^r - 1 \cdot (t+2) + 36 = 0 \Rightarrow t^r - 1 \cdot t + 16 = 0 \Rightarrow (t-2)(t+8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=-8 \end{cases}$$

با جای‌گذاری $t = 2$ و $t = -8$ در رابطه $x^r - 3x - 2 = t$, مقدار x را به دست می‌آوریم:

$$x^r - 3x - 2 = t \xrightarrow{t=2} x^r - 3x - 2 = 2 \Rightarrow x^r - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-1 \end{cases}$$

$$x^r - 3x - 2 = t \xrightarrow{t=-8} x^r - 3x - 2 = -8 \Rightarrow x^r - 3x + 6 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-2 \end{cases}$$

پس این معادله دارای چهار ریشه $x = 4$, $x = -1$, $x = 5$ و $x = -2$ است.

تست به ازای کدام مجموعه مقادیر m , معادله $mx^r - 2(m-3)x^r + m + 2 = 0$ جواب حقیقی متمایز است؟

$$m < -2$$

$$-2 < m < 3$$

$$m > 3 \text{ یا } m < -2$$

$$-2 < m < \frac{9}{\lambda}$$

پاسخ گزینه «۴» معادله $ax^r + bx^r + c = 0$ با تغییر متغیر $t = x^r$ به معادله درجه‌دوم $at^r + bt + c = 0$ تبدیل می‌شود. فقط جواب‌های

مثبت (یا صفر) t به درد ما می‌خورند. به ازای هر جواب مثبت برای t , معادله اولیه دارای دو جواب $x = \pm\sqrt[t]{t}$ است، پس اگر بخواهیم معادله

دارای چهار جواب متمایز باشد، باید معادله $at^r + bt + c = 0$ دارای دو جواب مثبت باشد.

معادله $mx^r - 2(m-3)x^r + (m+2) = 0$ با تغییر متغیر $t = x^r$ به معادله $mt^r - 2(m-3)t + (m+2) = 0$ تبدیل می‌شود. برای

آنکه این معادله دارای دو ریشه مثبت باشد، باید هر سه شرط زیر را داشته باشد:

$$1) \Delta > 0 \Rightarrow 4(m-3)^2 - 4m(m+2) > 0 \xrightarrow{\div 4} mt^2 - 6m + 9 - mt^2 - 2m > 0 \Rightarrow m < \frac{9}{\lambda}$$

$$2) S > 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow \frac{2(m-3)}{m} > 0 \Rightarrow m > 3 \text{ یا } m < 0$$

$$3) P > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{m+2}{m} > 0 \Rightarrow m > 0 \text{ یا } m < -2$$

حالا بین سه شرط بالا اشتراک می‌گیریم تا محدوده m به دست آید:



تست به ازای کدام محدوده برای m معادله $mx - (2m+1)\sqrt{x} + m + 2 = 0$ دارای یک جواب حقیقی است؟

$$(-2, 0) \cup \left\{ \frac{1}{4} \right\} \quad (4)$$

$$(-2, \frac{1}{4}) \quad (3)$$

$$(-2, 0) \quad (2)$$

$$(0, \frac{1}{4}) \quad (1)$$

پاسخ گزینه «۴» معادله $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ با تغییر متغیر $t = \sqrt{x}$ به معادله درجه دوم $at^2 + bt + c = 0$ تبدیل می‌شود. فقط جواب‌های مثبت (یا صفر) t به درد ما می‌خورند. به ازای هر جواب مثبت برای t معادله اولیه دارای یک جواب $x = t^2$ است. پس اگر بخواهیم معادله $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ دارای یک جواب باشد، باید معادله $at^2 + bt + c = 0$ دارای یک جواب مثبت باشد ($c \neq 0$).

معادله $mt^2 - (2m+1)t + (m+2) = 0$ با تغییر متغیر $t = \sqrt{x}$ به معادله $mx - (2m+1)\sqrt{x} + (m+2) = 0$ آنکه این معادله دارای یک جواب باشد، باید یکی از دو حالت زیر رخ دهد:

(۱) معادله یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی داشته باشد:

$$\begin{aligned} \Delta > 0 \Rightarrow (2m+1)^2 - 4m(m+2) > 0 \Rightarrow -4m+1 > 0 \Rightarrow m < \frac{1}{4} \\ P < 0 \Rightarrow \frac{m+2}{m} < 0 \Rightarrow -2 < m < 0 \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{اشترک}} -2 < m < 0$$

$$\begin{aligned} \Delta = 0 \Rightarrow -4m+1 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{4} \\ S > 0 \Rightarrow \frac{2m+1}{m} > 0 \Rightarrow m > 0 \text{ یا } m < -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{اشترک}} m = \frac{1}{4}$$

پس m می‌تواند در محدوده $\left\{ \frac{1}{4} \right\} \cup (-2, 0)$ باشد.

تست اگر ریشه‌های معادله $x^2 + kx^2 + 9 = 0$ ، چهار جملهٔ متولی یک دنبالهٔ حسابی باشند، ریشه کوچک‌تر کدام است؟

$$-9 \quad (4)$$

$$-3 \quad (3)$$

$$-2 \quad (2)$$

$$-1 \quad (1)$$

پاسخ گزینه «۳» ریشه‌های معادله $x^2 + kx^2 + 9 = 0$ حتماً به صورت $\pm\alpha$ و $\pm\beta$ هستند. (چون اگر $x = \alpha$ در این معادله صدق کند، حتماً $x = -\alpha$ هم صدق می‌کند). اگر فرض کنیم $\alpha > \beta > 0$ باشد، آن‌گاه ترتیب ریشه‌ها از کوچک به بزرگ به صورت زیر است: $-\alpha, -\beta, \beta, \alpha$

چون این ۴ عدد، جملات متولی یک دنبالهٔ حسابی‌اند، پس تفاضل هر دو جملهٔ متولی آن برابر قدرنسبت است:

$$\begin{aligned} d = \alpha - \beta \\ d = \beta - (-\beta) = 2\beta \end{aligned} \quad \Rightarrow \alpha - \beta = 2\beta \Rightarrow \alpha = 3\beta$$

با تغییر متغیر $t = \sqrt{x}$ ، معادله به شکل $t^2 + kt + 9 = 0$ درمی‌آید که ریشه‌های آن هم α^2 و β^2 هستند؛ بنابراین حاصل‌ضرب آن‌ها را

$P = \frac{c}{a} \Rightarrow \alpha^2 \beta^2 = 9 \xrightarrow{\alpha=3\beta} 9\beta^4 = 9 \Rightarrow \beta^4 = 1 \xrightarrow{\beta>0} \beta = 1$ می‌نویسیم:

پس $\alpha = 3\beta = 3$ است و ریشه‌های معادله اولیه به صورت $-3, -1, 1, 3$ هستند که کوچک‌ترین آن‌ها -3 است.

نوشتن معادلهٔ درجه دوم با داشتن S و P

فرض کنید می‌خواهیم یک معادلهٔ درجه دو بنویسیم که ریشه‌هایش α و β باشند. این معادله به صورت $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ است که اگر آن

$(x - \alpha)(x - \beta) = 0 \Rightarrow x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha\beta = 0 \Rightarrow x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ را باز کنیم، خواهیم داشت:

$x^2 - (\underbrace{\alpha + \beta}_{S})x + \underbrace{\alpha\beta}_{P} = 0 \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$ با جای‌گذاری $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$ ، معادله بالا به شکل رو به رو درمی‌آید:

پس یک معادلهٔ درجه دو که مجموع ریشه‌هایش S و حاصل‌ضرب آن‌ها P باشد به این صورت است:



مثال معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش $\sqrt{5} \pm 3$ باشند.

$$S = \alpha + \beta = (3 + \sqrt{5}) + (3 - \sqrt{5}) = 6$$

پاسخ با فرض $\alpha = 3 + \sqrt{5}$ و $\beta = 3 - \sqrt{5}$ ، مقدار S و P را به دست می‌آوریم:

$$P = \alpha\beta = (3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5}) = 9 - 5 = 4$$

الان که مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را داریم، آن‌ها را در معادله $x^2 - Sx + P = 0$ جای‌گذاری می‌کنیم تا معادله موردنظر به دست آید:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 4 = 0$$

تست در مستطیلی به محیط 13 cm و مساحت 10 cm^2 ، تفاضل طول و عرض چند سانتی‌متر است؟

$$2/5(4)$$

$$2(3)$$

$$1/5(2)$$

$$1(1)$$

پاسخ گزینه «۲» طول و عرض مستطیل را به ترتیب α و β در نظر می‌گیریم، پس:

$$\text{مساحت} = 10 \Rightarrow \alpha\beta = 10$$

$$= 13 \Rightarrow 2(\alpha + \beta) = 13 \Rightarrow \alpha + \beta = 6/5$$

پس اگر α و β را ریشه‌های یک معادله درجه دو در نظر بگیریم، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های این معادله را داریم:

$$\alpha\beta = 10 \Rightarrow P = 10$$

$$\alpha + \beta = 6/5 \Rightarrow S = 6/5$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 6/5x + 10 = 0$$

معادله درجه دو موردنظر را با داشتن S و P می‌نویسیم و آن را حل می‌کنیم:

$$\Delta = (-6/5)^2 - 4(1)(10) = 42/25 - 40 = 2/25$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6/5 \pm \sqrt{2/25}}{2} = \frac{6/5 \pm 1/5}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{6/5 + 1/5}{2} = 4 \\ \beta = \frac{6/5 - 1/5}{2} = 2/5 \end{cases}$$

$$\alpha - \beta = 4 - 2/5 = 1/5$$

پس تفاضل طول و عرض این مستطیل برابر است با:

البته می‌توانستیم معادله را حل نکنیم. چون سؤال تفاضل α و β را می‌خواهد، از رابطه $|\alpha - \beta| = \sqrt{\Delta / |a|}$ استفاده می‌کنیم:

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{2/25}}{1} = 1/5$$

ساختن معادله درجه دوم جدید از روی معادله موجود

فرض کنید یک معادله درجه دو به ما می‌دهند و از ما معادله‌ای می‌خواهند که ریشه‌های معادله اولیه رابطه‌ای خاص را داشته باشد.

برای به دست آوردن معادله درجه دو جدید باید با استفاده از روابط بین ریشه‌ها S و P معادله جدید را به دست آوریم و در نهایت با جای‌گذاری

در معادله $x^2 - S'x + P' = 0$ به معادله موردنظر برسیم. به تست زیر دقت کنید:

تست معادله درجه دومی که ریشه‌هایش از دو برابر ریشه‌های معادله $x^2 - 4x - 6 = 0$ یک واحد کم‌تر باشند، کدام است؟

$$x^2 + 8x - 33 = 0 \quad (4)$$

$$x^2 - 8x - 33 = 0 \quad (3)$$

$$x^2 + 6x - 31 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 - 6x - 31 = 0 \quad (1)$$

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 4$$

پاسخ گزینه «۱» را حل‌اول ریشه‌های معادله اول را α و β می‌گیریم، پس داریم:

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -6$$

ریشه‌های معادله جدید از دو برابر ریشه‌های معادله اول یک واحد کم‌ترند، پس آن‌ها را $2\alpha - 1$ و $2\beta - 1$ می‌گیریم. S و P جدید را حساب

$$S' = (2\alpha - 1) + (2\beta - 1) = 2(\alpha + \beta) - 2 = 2(4) - 2 = 6$$

می‌کنیم:

$$P' = (2\alpha - 1)(2\beta - 1) = 4\alpha\beta - 2\alpha - 2\beta + 1 = 4\alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 1 = 4(-6) - 2(4) + 1 = -31$$

$$x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 - 6x - 31 = 0$$

حالاً S' و P' را در معادله $x^2 - S'x + P' = 0$ جای‌گذاری می‌کنیم:



راهنده ۴ اگر x را ریشه معادله اول و در نظر بگیریم که ریشه معادله جدید باید از دو برابر آن یک واحد کمتر باشد، یعنی باید به صورت $x = \frac{x'+1}{2}$ باشد. کافی است x را برحسب x' پتوییسیم و در معادله اول جایگذاری کنیم:

$$x^2 - 4x - 6 = 0 \xrightarrow{x=\frac{x'+1}{2}} \left(\frac{x'+1}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{x'+1}{2}\right) - 6 = 0 \xrightarrow{\times 4} x'^2 + 2x' + 1 - 8x' - 8 - 24 = 0 \Rightarrow x'^2 - 6x' - 31 = 0$$

پس معادله جدید به صورت $x'^2 - 6x' - 31 = 0$ یا $x = \frac{x'+1}{2}$ است.

دست ۱ اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x - 4 = 0$ باشند و $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha}$ و $\beta^2 + \frac{1}{\beta}$ ریشه‌های معادله $2x^2 + mx + n = 0$ باشند، مقدار $m - n$ کدام است؟

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{3}{4}$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow \alpha\beta = -\frac{4}{4} = -1$$

$$21(3)$$

$$-1(2)$$

$$1(1)$$

پاسخ گزینه «۴» در معادله $2x^2 - 3x - 4 = 0$ ، مقدار S و P را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} S' &= (\alpha^2 + \frac{1}{\beta}) + (\beta^2 + \frac{1}{\alpha}) = (\alpha^2 + \beta^2) + (\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}) = ((\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta) + (\frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta}) = S^2 - 2P + \frac{S}{P} = (\frac{3}{4})^2 - 2(-1) + \frac{\frac{3}{4}}{-1} \\ &= \frac{9}{16} + 4 - \frac{3}{4} = \frac{22}{16} = \frac{11}{8} \end{aligned}$$

$$P' = (\alpha^2 + \frac{1}{\beta})(\beta^2 + \frac{1}{\alpha}) = \alpha^2\beta^2 + \alpha + \beta + \frac{1}{\alpha\beta} = P^2 + S + \frac{1}{P} = (-1)^2 + \frac{3}{4} + \frac{1}{-1} = 4 + \frac{3}{4} - \frac{1}{1} = 5$$

$$x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{11}{8}x + 5 = 0 \xrightarrow{\times 8} 8x^2 - 11x + 40 = 0 \Rightarrow S' = \frac{11}{8}$$

با داشتن $P' = 5$ و $S' = \frac{11}{8}$ ، معادله جدید را می‌نویسیم:

$$m - n = -21$$

پس $m = 11$ و $n = -5$ است و در نتیجه:

دست ۲ اگر α و β ریشه‌های معادله $3x^2 - x = 0$ باشند، ریشه کدامیک از معادله‌های زیر $(3\alpha + 2)^2$ و $(3\beta + 2)^2$ است؟

$$9x^2 - 49x + 43 = 0 \quad (1) \quad 9x^2 - 43x + 49 = 0 \quad (2) \quad 9x^2 - 48x + 43 = 0 \quad (3) \quad 9x^2 - 43x + 48 = 0 \quad (4)$$

پاسخ گزینه «۳» چون α و β ریشه‌های معادله $3x^2 - x = 0$ هستند؛ پس در معادله صدق می‌کنند:

$$(3\beta + 2)^2 - \beta = 3 \Rightarrow (3\beta + 2)^2 = \beta + 3 \quad (3\alpha + 2)^2 - \alpha = 3 \Rightarrow (3\alpha + 2)^2 = \alpha + 3$$

پس معادله‌ای که ریشه‌هایش $(3\alpha + 2)^2$ و $(3\beta + 2)^2$ باشند، با معادله‌ای که ریشه‌هایش $\alpha + 3$ و $\beta + 3$ باشند، یکسان است.

$$(3x + 2)^2 - x = 3 \Rightarrow 9x^2 + 11x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{11}{9} \\ P = \alpha\beta = \frac{1}{9} \end{cases}$$

ابتدا S و P معادله اولیه را حساب می‌کنیم:

$$S' = (\alpha + 3) + (\beta + 3) = (\alpha + \beta) + 6 = -\frac{11}{9} + 6 = \frac{43}{9}$$

حالا S و P جدید را حساب می‌کنیم:

$$P' = (\alpha + 3)(\beta + 3) = \alpha\beta + 3(\alpha + \beta) + 9 = \frac{1}{9} + 3\left(-\frac{11}{9}\right) + 9 = \frac{1 - 33 + 81}{9} = \frac{49}{9}$$

$$x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{43}{9}x + \frac{49}{9} = 0 \xrightarrow{\times 9} 9x^2 - 43x + 49 = 0$$

با داشتن S' و P' معادله جدید را می‌نویسیم:



ماکسیمم یا مینیمم تابع درجه دو (سهمی)

ضابطه کلی تابع درجه دو به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ با شرط $a \neq 0$ است.

$$\text{مختصات رأس سهمی به صورت } S = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) \text{ است.}$$

مقدار $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ برابر با $\left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{4a}\right)$ می‌شود، پس مختصات رأس سهمی را به صورت $S = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ نیز می‌توانیم نشان دهیم.

اگر $a > 0$ باشد، دهانه سهمی رو به بالا است و سهمی در $x = -\frac{b}{2a}$ دارد.

کمترین (مینیمم) مقدار خود است که برابر با $\left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{4a}\right)$ است:



اگر $a < 0$ باشد، دهانه سهمی رو به پایین است و سهمی در $x = -\frac{b}{2a}$ دارد.

بیشترین (ماکسیمم) مقدار خود است که برابر با $\left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{4a}\right)$ است:

پس اگر $a > 0$ ، سهمی دارای Min و اگر $a < 0$ ، سهمی دارای Max است و هر دو مقدار برابر با $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ هستند.

نوبت ۱ اگر بیشترین مقدار تابع $f(x) = x(4-x) + k$ باشد، k کدام است؟

-۲ (۴)

۲ (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)

پاسخ گزینه «۲» را حل کنید: اول معادله سهمی را به شکل استاندارد می‌نویسیم:

$$f(x) = x(4-x) + k = 4x - x^2 + k \Rightarrow f(x) = -x^2 + 4x + k$$

چون ضریب x^2 منفی است، پس سهمی دارای ماکسیمم است (البته اینو فور سوال هم گفت).

ماکسیمم و مینیمم تابع درجه دو در رأس آن رخ می‌دهد. اول طول رأس سهمی را به دست می‌آوریم:

حالا با جایگذاری $x = 2$ در $f(x) = -x^2 + 4x + k$ ، مقدار ماکسیمم را به دست می‌آوریم و آن را با 3 برابر قرار می‌دهیم:

$$\text{Max}(f) = f(2) = -(2)^2 + 4(2) + k = k + 4 \Rightarrow k + 4 = 3 \Rightarrow k = -1$$

نوبت ۲ ماکسیمم تابع درجه دو برابر با $\frac{\Delta}{4a}$ است، پس آن را با 3 برابر قرار می‌دهیم:

$$-\frac{\Delta}{4a} = 3 \Rightarrow \Delta = -12a \Rightarrow b^2 - 4ac = -12a \Rightarrow 4^2 - 4(-1)(k) = -12(-1) \Rightarrow 16 + 4k = 12 \Rightarrow 4k = -4 \Rightarrow k = -1$$

در برخی از سوالات، تابع درجه دو را مستقیماً سوال به ما نمی‌دهد و باید با اطلاعاتی که در اختیارمان قرار می‌دهد تابع درجه دو موردنظر را بنویسیم و ماکسیمم یا مینیمم آن را به دست آوریم. به تست‌های بعدی دقت کنید.

نوبت ۳ مینیمم مجموع مربعات ریشه‌های معادله $x^2 + (k-3)x - (2k-1) = 0$ چه قدر است؟

۶ (۴)

۷ (۳)

۸ (۲)

۹ (۱)

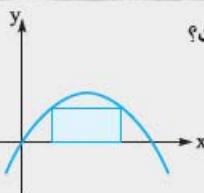
پاسخ گزینه «۴» می‌دانیم مجموع مربعات ریشه‌های معادله درجه دو از رابطه $\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$ به دست می‌آید، پس در اینجا داریم:

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = \left(\frac{-(k-3)}{1}\right)^2 - 2\left(\frac{-(2k-1)}{1}\right) = (k-3)^2 + 2(2k-1) = k^2 - 6k + 9 + 4k - 2$$

$$= k^2 - 2k + 7$$

$$\text{Min}(f) = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(4-4(1)(7))}{4} = \frac{24}{4} = 6 \quad \text{پس باید مینیمم تابع } f(k) = k^2 - 2k + 7 \text{ را به دست آوریم:}$$

توجه کنید که در معادله اولیه به ازای هر مقدار k حاصل Δ مثبت است یعنی معادله همواره دارای ۲ ریشه متمایز است.



تست بیشترین محیط مستطیلی که بین سهی $f(x) = -x^2 + 6x$ و محور x ها مطابق شکل قرار دارد، کدام است؟

۱۸ (۳)

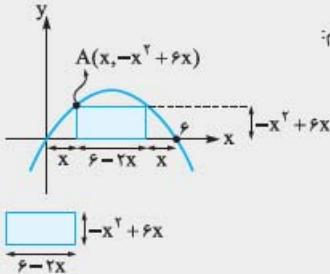
۲۴ (۴)

۱۶ (۱)

۲۰ (۳)

پاسخ گزینه «۳» سهی $f(x) = -x^2 + 6x$ محور x ها را در نقاطی به طول $0 - x - 6$ قطع می‌کند:

$$-x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(-x + 6) = 0 \Rightarrow x = 0, 6$$



چون نقطه A روی سهی است، پس مختصات آن را می‌توانیم به صورت $(x, -x^2 + 6x)$ بنویسیم:

طول و عرض مستطیل رنگی را برحسب x می‌نویسیم:

$$\text{محیط} = 2((-x^2 + 6x) + (6 - 2x)) = -2x^2 + 8x + 12$$

محیط این مستطیل را می‌نویسیم:

$$\text{Max}(g) = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{-(64 - 4(-2)(12))}{-8} = \frac{64 + 96}{8} = \frac{160}{8} = 20$$

می‌خواهیم ماکسیمم تابع $g(x) = -2x^2 + 8x + 12$ را حساب کنیم:

تست کمترین فاصله نقاط منحنی $y = x^2$ از خط $y = 2x - 6$ است؟

۲۷ (۴)

۲۶ (۲)

۲۵ (۲)

۲ (۱)

پاسخ گزینه «۲» مختصات پارامتری هر نقطه روی منحنی $y = x^2$ را می‌توانیم به صورت (α, α^2) در نظر بگیریم.

$$\text{می‌دانیم فاصله نقطه } A(\alpha, \alpha^2) \text{ از خط } ax + by + c = 0 \text{ به دست می‌آید، پس فاصله نقطه } A(x_0, y_0) \text{ از خط } ax + by + c = 0 \text{ به دست می‌آید:}$$

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|\alpha^2 - 2\alpha + 6|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|\alpha^2 - 2\alpha + 6|}{\sqrt{5}}$$

خط $2x - y - 6 = 0$ برابر است با:

برای به دست آوردن Min عبارت بالا، کافی است Min عبارت داخل قدرمطلق را حساب کنیم (زیرا مخرج عددی ثابت است).

$$\text{Min} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-2)^2 - 4(1)(6)}{4(1)} = \frac{20}{4} = 5$$

مینیمم عبارت داخل قدرمطلق

پس Min کل عبارت برابر با $\frac{5}{\sqrt{5}}$ یعنی $\sqrt{5}$ است.

صفرهای تابع درجه دو

نقاط برخورد یک تابع با محور x ها، نقاط با اهمیتی برای ما هستند. طول این نقاط را «صفرهای تابع» می‌نامیم.

همچنین محل برخورد یک تابع با محور y ها هم برای ما مهم است. عرض این نقطه برابر با $f(0)$ است. در تابع درجه دو $f(0) = c$ است و نقطه برخورد آن با محور y ها، نقطه $(0, c)$ است.

تعداد صفرهای یک تابع درجه دو را به کمک علامت Δ می‌توان تشخیص داد:

۱) $\Delta > 0$ \Rightarrow تابع دارای ۲ صفر متمایز است \Rightarrow ۲) $\Delta = 0$ \Rightarrow تابع دارای یک صفر است \Rightarrow ۳) $\Delta < 0$ \Rightarrow تابع صفر ندارد!

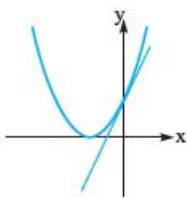
اگر نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ را داشته باشیم، می‌توانیم علامت ضرایب a , b و c را تعیین کنیم:

علامت a : اگر دهانه سهی رو به بالا باشد، $a > 0$ و اگر دهانه سهی رو به پایین باشد، $a < 0$ است.

علامت c : عرض نقطه برخورد تابع با محور y ها است! خیلی راحت مثبت یا منفی بودن آن را تشخیص می‌دهیم.

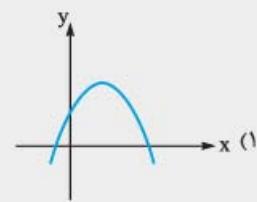
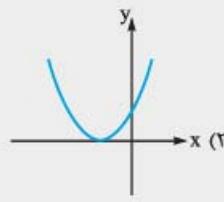
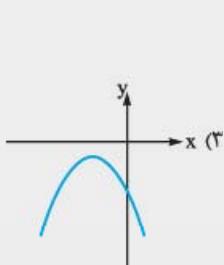
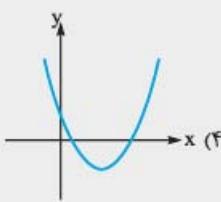


◀ علامت b : طول رأس سهمی از رابطه $x_S = -\frac{b}{2a}$ به دست می‌آید. چون علامت a و x_S را می‌دانیم، می‌توانیم علامت b را هم تعیین کنیم.



نکله برای تشخیص علامت b می‌توانیم از علامت شیب خط مماس بر سهمی در محل نقطه تقاطع سهمی با محور y استفاده کنیم. مثلاً در نمودار زیر، چون شیب خط مماس بر سهمی در نقطه برخورد آن با محور y اعدی مثبت است، پس $b > 0$ است.

تست در هر گزینه نمودار یک سهمی به معادله $f(x) = ax^2 + bx + c$ عددی مثبت است؟

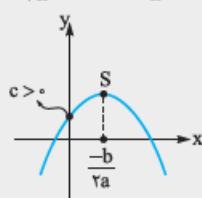


پاسخ گزینه «۳» تک تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ دهانه سهمی رو به پایین است، پس $a < 0$.

سهمی محور y را در بالای محور x قطع کرده، پس $c > 0$. طول رأس سهمی عددی مثبت است، پس:

$$-\frac{b}{2a} > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} < 0 \xrightarrow{a < 0} b > 0.$$



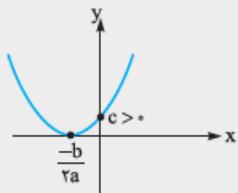
$$\begin{matrix} - & + \\ \uparrow & \uparrow \\ abc\Delta < 0 \\ \downarrow & \downarrow \\ + & + \end{matrix}$$

پس داریم:

۲ دهانه سهمی رو به بالا است، پس $a > 0$.

سهمی محور y را در بالای محور x قطع کرده، پس $c > 0$. طول رأس سهمی عددی منفی است، پس:

$$-\frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow \frac{b}{a} > 0 \xrightarrow{a > 0} b > 0.$$



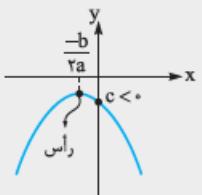
$$\begin{matrix} + & + \\ \uparrow & \uparrow \\ abc\Delta = 0 \\ \downarrow & \downarrow \\ + & + \end{matrix}$$

پس داریم:

۳ دهانه سهمی رو به پایین است، پس $a < 0$.

سهمی محور y را در پایین محور x قطع کرده، پس $c < 0$. طول رأس سهمی عددی منفی است، پس:

$$-\frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow \frac{b}{a} > 0 \xrightarrow{a < 0} b < 0.$$



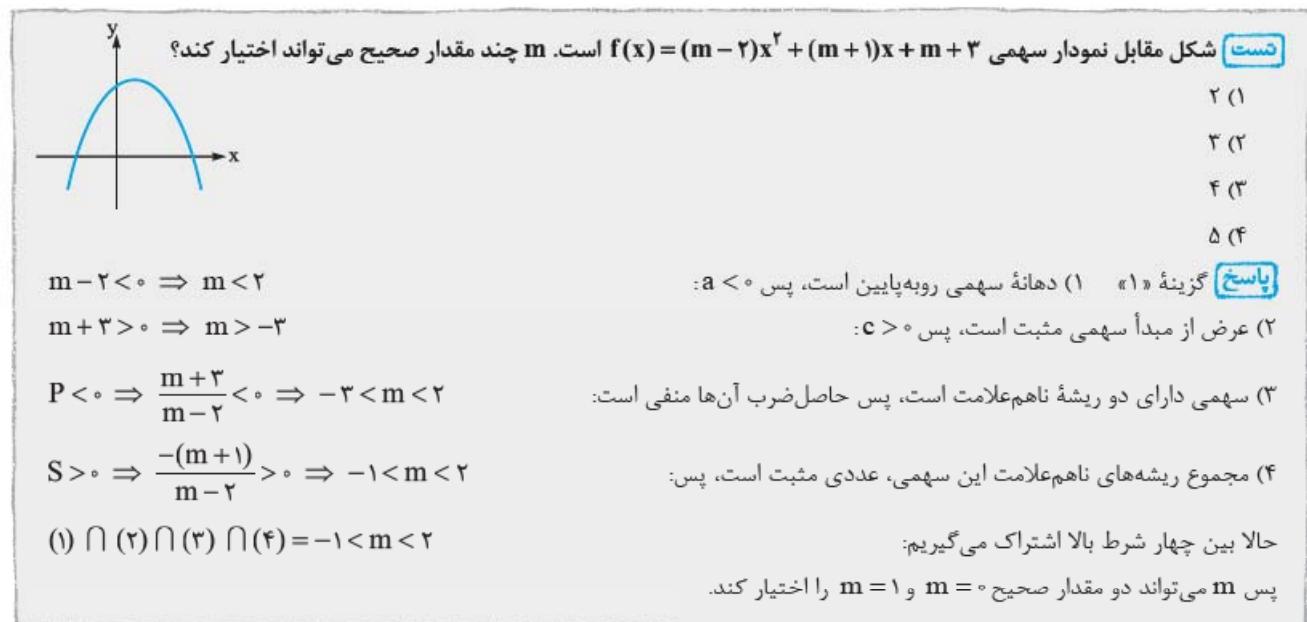
$$\begin{matrix} - & - \\ \uparrow & \uparrow \\ abc\Delta > 0 \\ \downarrow & \downarrow \\ - & - \end{matrix}$$

پس داریم:

۴ دهانه سهمی رو به بالا است، پس $a > 0$.

سهمی محور y را در بالای محور x قطع کرده، پس $c > 0$. طول رأس سهمی عددی مثبت است، پس:

$$-\frac{b}{2a} > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} < 0 \xrightarrow{a > 0} b < 0.$$



نوشتن معادله سهمی

برای نوشتن معادله سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ از روی نمودار آن نیاز به داشتن ۳ معادله داریم تا به کمک آنها سه مجهول a , b و c را به دست آوریم.

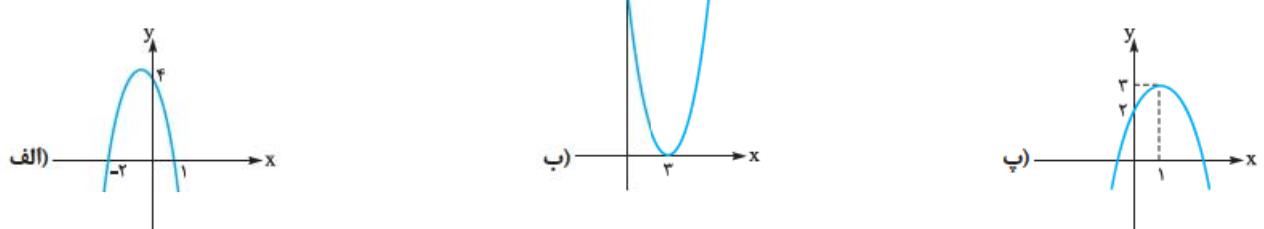
بد نیست حواسمن به موارد زیر باشد:

◀ عرض نقطه برخورد سهمی با محور y ها، همان c است.

◀ اگر مختصات رأس سهمی را داشتیم، یعنی دو معادله داریم؛ مثلاً اگر نقطه $(2, 5)$ رأس سهمی باشد، آن‌گاه دو معادله $2 = f(2) = 5$ و $-\frac{b}{2a} = 2$ را داریم.

◀ مقدار تابع در ریشه‌ها برابر صفر است، یعنی اگر f محور طولها را در α قطع کند، آن‌گاه $f(\alpha) = 0$.

مثال معادله سهمی‌های زیر را بنویسید.





پاسخ الف) راه حل اول سهمی از سه نقطه $(-2, 0)$, $(0, 4)$ و $(1, 0)$ می‌گذرد، پس برای $f(x) = ax^2 + bx + c$ سه معادله زیر را داریم:

$$(-2, 0) \in f \Rightarrow f(-2) = 0 \Rightarrow 4a - 2b + c = 0$$

$$(0, 4) \in f \Rightarrow f(0) = 4 \Rightarrow c = 4$$

$$(1, 0) \in f \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$$

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ c = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a - 2b + 4 = 0 \\ a + b + 4 = 0 \\ c = 4 \end{cases} \xrightarrow{\div 2} \begin{cases} 2a - b = -2 \\ a + b = -4 \\ c = 4 \end{cases} \quad \text{با جایگذاری } c = 4 \text{ در دو معادله اول، مقدار } a \text{ و } b \text{ را حساب می‌کنیم:}$$

$$a + b = -4 \xrightarrow{a = -2} -2 + b = -4 \Rightarrow b = -2$$

حالا با جایگذاری $a = -2$, مقدار b را به دست می‌آوریم:

پس معادله سهمی به شکل $f(x) = -2x^2 - 2x + 4$ در می‌آید.

نکته معادله سهمی که دارای ریشه‌های α و β باشد، به صورت $f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$ است.

راه حل دوم با استفاده از نکته بالا، معادله این سهمی که محور x را در نقاطی به طول -2 و 1 قطع کرده به صورت $f(x) = a(x - 1)(x - (-2))$ است. حالا فقط کافی است نقطه $(0, 4)$ را روی آن قرار دهیم تا a به دست آید:

$$f(x) = a(x - 1)(x + 2) \xrightarrow{(0, 4) \in f} 4 = a(0 - 1)(0 + 2) \Rightarrow -2a = 4 \Rightarrow a = -2$$

پس معادله f به صورت $f(x) = -2(x - 1)(x + 2)$ است.

پ) سهمی بر محور x ها در نقطه 3 مماس شده است، پس دارای ریشه مضاعف 3 است و معادله آن به صورت $x = 3$ است. از نقطه $(1, 18)$ کمک می‌گیریم و مقدار a را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = a(x - 3)^2 \xrightarrow{(1, 18) \in f} 18 = a(1 - 3)^2 \Rightarrow 9a = 18 \Rightarrow a = 2$$

پس معادله سهمی به صورت $f(x) = 2(x - 3)^2$ است.

نکته اگر سهمی در نقطه‌ای به طول α بر محور x ها مماس شود، معادله آن به صورت $f(x) = a(x - \alpha)^2$ خواهد بود.

پ) راه حل اول اولاً سهمی محور y را در نقطه‌ای به عرض 2 قطع کرده، پس $c = 2$.

حالا از رأس سهمی دو معادله خواهیم داشت:

$$\frac{-b}{2a} = 1 \Rightarrow -b = 2a \Rightarrow 2a + b = 0 \quad \text{اولاً طول رأس آن } 1 \text{ است:}$$

$$f(x) = ax^2 + bx + 2 \xrightarrow{f(1) = 0} 0 = a + b + 2 \Rightarrow a + b = -2 \quad \text{ثانیاً سهمی از نقطه } (1, 0) \text{ می‌گذرد:}$$

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases} \quad \text{حالا دو معادله به دست آمده را حل می‌کنیم:}$$

پس معادله سهمی به شکل $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ است.

نکته معادله سهمی با رأس $S(\alpha, \beta)$ به صورت $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ است.

راه حل دوم با استفاده از نکته بالا چون رأس سهمی $(1, 3)$ است، پس معادله آن به صورت $f(x) = a(x - 1)^2 + 3$ است. حالا با جایگذاری نقطه

$$f(x) = a(x - 1)^2 + 3 \xrightarrow{(0, 2) \in f} 2 = a(0 - 1)^2 + 3 \Rightarrow a + 3 = 2 \Rightarrow a = -1 \quad \text{در } f, \text{ مقدار } a \text{ را به دست می‌آوریم:}$$

پس معادله سهمی به صورت $f(x) = -(x - 1)^2 + 3$ است.

تنت سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$, محور y را در نقطه‌ای به عرض 5 و محور x را در نقطه‌ای به طول 1 قطع می‌کند. اگر خط $y = 9$ بر این سهمی مماس باشد، معادله محور تقارن آن کدام است? ($a < -5$)

$$x = -2 \quad (\text{۴})$$

$$x = 2 \quad (۳)$$

$$x = -\frac{2}{5} \quad (۲)$$

$$x = \frac{2}{5} \quad (۱)$$



پاسخ گزینه ۲ سهمی محور y را در نقطه‌ای به عرض ۵ قطع کرده است، پس $c = 5$.
این سهمی محور X را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع کرده است، پس $f(-1) = 0$:

$$f(x) = ax^2 + bx + 5 \Rightarrow a - b + 5 = 0 \Rightarrow b = a + 5$$

همچنین خط $y = 9$ بر این سهمی مماس است، پس عرض رأس سهمی برابر با ۹ است:

$$y_S = 9 \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a} = 9 \Rightarrow -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = 9 \Rightarrow -\frac{b^2 - 20a}{4a} = 9 \Rightarrow b^2 + 16a = 0$$

حالا کافی است $b = a + 5$ را در معادله بالا جای گذاری کنیم تا a به دست آید:

$$b^2 + 16a = 0 \Rightarrow (a + 5)^2 + 16a = 0 \Rightarrow a^2 + 26a + 25 = 0 \Rightarrow (a + 25)(a + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 & \text{X} \\ a = -25 & \checkmark \end{cases}$$

$$b = a + 5 = -25 + 5 = -20$$

با شرط $-5 < a = -25 < 0$ ، فقط قابل قبول است. مقدار b هم برابر است با:

$$\text{پس معادله سهمی به صورت } f(x) = -25x^2 - 20x + 5 \text{ است.}$$

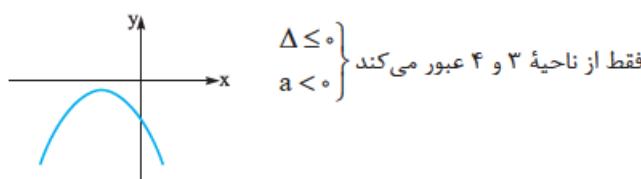
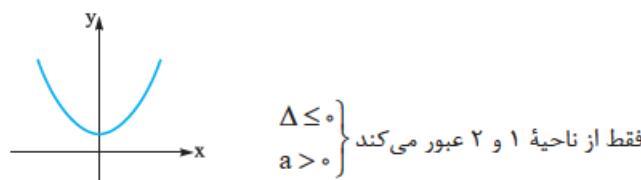
$$\text{معادله محور تقارن هر سهمی به صورت } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-20}{5} = 4 \text{ است که در اینجا به صورت } x = -\frac{b}{2a} \text{ خواهد بود.}$$

سهمی در نواحی مختصات

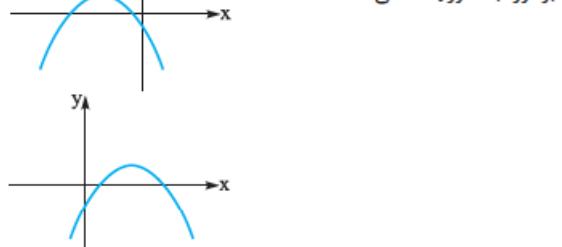
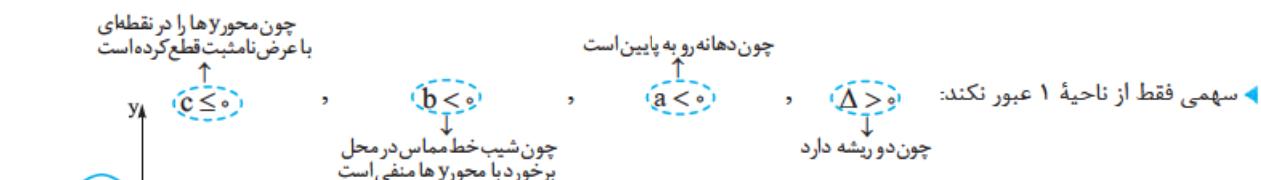
یک وقت‌هایی از ما می‌خواهند که یک پارامتر را طوری تعیین کنیم تا «سهمی از ناحیه‌ای خاص عبور نکند» یا «سهمی از نواحی خاصی عبور کند». در این گونه سوال‌ها باید حواسمن به همه چیز باشد، علامت a ، علامت Δ ، علامت S ، علامت P ، مختصات رأس سهمی و ...

در کل، سهمی می‌تواند از ۲ یا ۳ یا ۴ ناحیه دستگاه مختصات عبور کند. آن‌ها را با هم بررسی می‌کنیم:

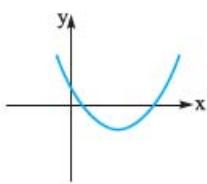
۱ سهمی فقط از دو ناحیه عبور کند: در این حالت سهمی یا فقط از نواحی ۱ و ۲ یا فقط از نواحی ۳ و ۴ عبور می‌کند و در هر دو حالت محور x را قطع نمی‌کند و باید دلتای آن منفی یا صفر باشد.



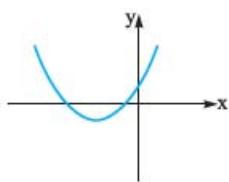
۲ سهمی دقیقاً از سه ناحیه عبور کند (یعنی فقط از یکی از نواحی عبور نکند) این قسمت شامل ۴ حالت است:



سهمی فقط از ناحیه ۲ عبور نکند: $c \leq 0, b > 0, a < 0, \Delta > 0$.



◀ سهمی فقط از ناحیه ۳ عبور نکند: $c \geq 0, b < 0, a > 0, \Delta > 0$



◀ سهمی فقط از ناحیه ۴ عبور نکند: $c \geq 0, b > 0, a > 0, \Delta > 0$

۳ سهمی از هر ۴ ناحیه عبور کند:

اگر سهمی دارای دو ریشه ناهم علامت باشد، حتماً از هر ۴ ناحیه عبور می‌کند، پس شرط آن که سهمی از ۴ ناحیه عبور کند آن است که $a < 0$ یا این که بگوییم a و c ناهم علامت باشند ($ac < 0$).

تست به ازای چه مقادیری از k سهمی $f(x) = (k-2)x^2 + 2kx + k + 1$ فقط از ناحیه اول محور مختصات عبور نمی‌کند؟

$$-2 < k \leq 0 \quad (۱)$$

$$-2 < k \leq -1 \quad (۲)$$

$$-1 \leq k < 2 \quad (۳)$$

$$0 < k < 2 \quad (۴)$$

پاسخ گزینه «۳» همان‌طور که گفتیم برای آن که سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ فقط از ناحیه اول عبور نکند، باید هر ۴ شرط زیر را داشته باشد:

$$1) \Delta > 0 \Rightarrow (2k)^2 - 4(k-2)(k+1) > 0 \Rightarrow 4k + 8 > 0 \Rightarrow k > -2$$

$$2) a < 0 \Rightarrow k-2 < 0 \Rightarrow k < 2$$

$$3) b < 0 \Rightarrow 2k < 0 \Rightarrow k < 0$$

$$4) c \leq 0 \Rightarrow k+1 \leq 0 \Rightarrow k \leq -1$$

$$-2 < k \leq -1$$

با اشتراک‌گرفتن بین ۴ شرط بالا، محدوده k به دست می‌آید:



پرسش‌های هارگز پنهان نمایند

-۵۴- اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x - 4 = 0$ باشند، حاصل $\alpha\beta^2 + \beta\alpha^2$ کدام است؟

$$\frac{4}{3} \quad (۱)$$

$$-\frac{4}{3} \quad (۳)$$

$$3 \quad (۲)$$

$$-3 \quad (۱)$$

-۵۵- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند، حاصل $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ کدام است؟

$$2 \quad (۱)$$

$$\sqrt{6} \quad (۳)$$

$$\sqrt{5} \quad (۲)$$

$$\sqrt{3} \quad (۱)$$

-۵۶- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 4x + 2 = 0$ باشند ($\alpha > \beta$)، حاصل $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ کدام است؟

$$-\sqrt{2+\sqrt{2}} \quad (۱)$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2}} \quad (۳)$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2}} \quad (۲)$$

$$-\sqrt{2-\sqrt{2}} \quad (۱)$$

-۵۷- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x(x-3)=1$ باشند، حاصل $\frac{x_1}{x_1-1} + \frac{x_2}{x_2-1}$ کدام است؟

$$-\frac{17}{6} \quad (۱)$$

$$\frac{13}{6} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$-\frac{11}{3} \quad (۱)$$

-۵۸- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - \sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$ باشند ($\alpha > \beta$)، حاصل $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{4}{(\beta+1)^2}$ کدام است؟

$$\frac{1}{3} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۳)$$

$$1 \quad (۲)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۱)$$

-۵۹- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - 5x + 3 = 0$ باشند ($x_1 > x_2$)، حاصل $x_1^2 - x_2^2$ کدام است؟

$$11\sqrt{13} \quad (۱)$$

$$22\sqrt{13} \quad (۳)$$

$$44 \quad (۲)$$

$$88 \quad (۱)$$

-۶۰- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 4x - 2 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^2 - \beta^2 - 3\alpha^2 - \beta^2$ کدام است؟ ($\alpha > \beta$)

$$20 - 16\sqrt{6} \quad (۱)$$

$$20 + 16\sqrt{6} \quad (۳)$$

$$12 - 16\sqrt{2} \quad (۲)$$

$$12 + 16\sqrt{2} \quad (۱)$$

-۶۱- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^7 + \beta^7$ کدام است؟

$$858 \quad (۱)$$

$$854 \quad (۳)$$

$$846 \quad (۲)$$

$$843 \quad (۱)$$

-۶۲- در معادله درجه دوم $x^2 + 2x - 1 = 0$ ، حاصل $x_1^3 + (2x_1 - 1)x_2$ چه قدر است؟

$$34 \quad (۱)$$

$$31 \quad (۳)$$

$$33 \quad (۲)$$

$$32 \quad (۱)$$

-۶۳- به ازای کدام مقدار m ، بین ریشه‌های معادله $x^2 - mx - 2 = 0$ رابطه $x_1 x_2 + 2x_1 x_2 = 4$ برقرار است؟

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad (۱)$$

$$\frac{\sqrt{5}-3}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{5}+3}{2} \quad (۱)$$

-۶۴- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - x - 1 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^3 + 2\beta^3$ کدام است؟

$$7 \quad (۱)$$

$$5 \quad (۳)$$

$$3 \quad (۲)$$

$$1 \quad (۱)$$

-۶۵- اگر β و α ریشه‌های معادله $x^2 - 5x + 3 = 0$ باشند، حاصل $\frac{\alpha^4 + \alpha^2 + 81}{\alpha^2}$ کدام است؟

$$353 \quad (۱)$$

$$344 \quad (۳)$$

$$334 \quad (۲)$$

$$325 \quad (۱)$$

-۶۶- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 2x - 5 = 0$ باشند، حاصل $\frac{\alpha}{(\alpha+2)^2} + \frac{\beta}{(\beta+2)^2}$ کدام است؟

$$0/88 \quad (۱)$$

$$-0/88 \quad (۳)$$

$$1/52 \quad (۲)$$

$$-1/52 \quad (۱)$$



-۶۷- اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 + 4x + 1 = 0$ باشند، حاصل $\frac{(\alpha-1)(\alpha+3)}{(\beta+1)^2}$ کدام است؟

 $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$ (۳)

-۳ (۲)

-۲ (۱)

-۶۸- به ازای کدام مقدار m بین ریشه‌های معادله $x - m = m^2 + 1$ رابطه $= 4|\alpha| - |\beta|$ برقرار است؟

-۶ (۴)

۸ (۳)

-۴ (۲)

۳ (۱)

-۶۹- اگر شیب خط‌های L_1 و L_2 جواب‌های معادله $m^2x^2 - m(x-1) = 6$ باشند، به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، دو خط بر هم عمودند؟

۴) هیچ مقدار

-۳ (۳)

{۲, -۳} (۲)

{-۲, ۳} (۱)

-۷۰- به ازای کدام مقدار m معادله $mx^2 + 5x + m^2 - 6 = 0$ دو ریشه حقیقی و معکوس هم دارد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

-۲ (۲)

-۳ (۱)

-۷۱- به ازای کدام مقدار m ، عدد $\sqrt{2}$ واسطه هندسی بین ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2 - 5x + m^2 - 3 = 0$ است؟

-۳ (۴)

۳ (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)

-۷۲- به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2 - (m+2)x + 5 = 0$ ، برابر ۶ می‌باشد؟

 $-\frac{9}{5}$ (۴) $-\frac{9}{5}$ ۱ (۳)

۱ (۲)

 $-\frac{9}{5}$ (۱)

-۷۳- مجموع معکوس مربع سه ریشه معادله $(x+2)(x+a)(x+2) = 0$ برابر $-\frac{a}{3}$ است. a کدام است؟

-۶ (۴)

۴ (۳)

-۳ (۲)

۲ (۱)

-۷۴- به ازای چه حدودی از m ، عدد ۲ بین ریشه‌های معادله $mx^2 - x - 2 = 0$ قرار دارد؟

۰ (۴)

(-۱, ۰) (۳)

 $\mathbb{R} - [0, 1]$ (۲)

(0, 1) (۱)

-۷۵- اگر α و β ریشه‌های معادله $m(x^2 - 1) = x + 1 < \beta < \alpha$ ، حدود m کدام است؟

 $(-\frac{1}{3}, +\infty)$ (۴) $(-\infty, \frac{1}{3})$ (۳) $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ (۲) $(-\frac{1}{3}, 0)$ (۱)

-۷۶- به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، ریشه‌های معادله $\sqrt{\cos \alpha} + \sqrt{\sin \alpha} = 0$ است؟

۰) هیچ مقدار

 $\pm 2\sqrt{5}$ (۳) $-2\sqrt{5}$ (۲) $2\sqrt{5}$ (۱)

-۷۷- اگر یکی از ریشه‌های معادله $ax^2 - 2ax + k = 0$ از مذکور ریشه دیگر ۴ واحد کم تر باشد، کوچک‌ترین ریشه معادله کدام می‌تواند باشد؟

-۴ (۴)

-۱ (۳)

-۲ (۲)

-۳ (۱)

-۷۸- اگر α و β ریشه‌های معادله $(\frac{x}{\cos a})^2 - x - \tan^2 a = 0$ کدام است؟ ($\alpha > \beta$)

 $\cot^2 \alpha$ (۴) $\tan^2 \alpha$ (۳) $\cos^2 \alpha$ (۲) $\sin^2 \alpha$ (۱)

-۷۹- در معادله $\frac{a+4c}{b} = 2$ بین ضرایب برقرار است. کدامیک از گزینه‌های زیر یک ریشه معادله است؟

 $-\frac{4c}{a}$ (۴) $\frac{4c}{a}$ (۳) $-\frac{2b}{c}$ (۲) $\frac{1b}{c}$ (۱)

-۸۰- معادله درجه‌دومی که ریشه‌های آن مربع ریشه‌های معادله $x^2 - 5x + 2 = 0$ باشد، کدام است؟

 $x^2 + 21x - 4 = 0$ (۴) $x^2 + 21x + 4 = 0$ (۳) $x^2 - 21x - 4 = 0$ (۲) $x^2 - 21x + 4 = 0$ (۱)

-۸۱- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3x - 2 = 0$ باشند، به ازای کدام مقدار k معادله‌ای که ریشه‌های آن به صورت $\alpha^2 + 2\beta$ است، به صورت $(\alpha < \beta) x^2 - kx + b = 0$

 $14 - \sqrt{233}$ (۴) $42 - \sqrt{297}$ (۳) $14 + \sqrt{233}$ (۲) $42 + \sqrt{297}$ (۱)



-۸۲- اگر ریشه‌های معادله $4x^3 - 12x + m = 0$ از k برابر مکعب ریشه‌های معادله $x^3 - 2x - 1 = 0$ واحد کم‌تر باشد، m کدام است؟

- ۳۹ (۴) -۴۱ (۳) ۸ (۲) ۷ (۱)

-۸۳- اگر مجموع مجذور ریشه‌های حقیقی معادله $x^3 + (x^3 - x)(x + 1 - m) = 0$ برابر ۴ باشد، m کدام است؟

- ۶ (۴) ۳ (۳) ۱ (۲) -۲ (۱)

-۸۴- اگر α, β و γ ریشه‌های معادله $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = 5x + 4 = 0$ باشند، حاصل کدام است؟

- $\frac{9}{16}$ (۴) $\frac{25}{16}$ (۳) $\frac{16}{9}$ (۲) $\frac{25}{9}$ (۱)

-۸۵- حاصل ضرب ریشه‌های معادله $x(x+1)(x+2)(x+3) = 0$ کدام است؟

- ۳ (۴) -۳ (۳) -۱ (۲) ۱ (۱)

-۸۶- مجموع ریشه‌های معادله $x^3 - 9x^2 + 8 = 0$ کدام است؟

- ۱ (۴) ۳ (۳) ۷ (۲) ۹ (۱)

-۸۷- مجموع مکعبات ریشه‌های معادله $(x^3 - x)^2 - 2x^2 + 2x - 8 = 0$ کدام است؟

- ۱۱ (۴) -۱۳ (۳) ۱۳ (۲) -۱۱ (۱)

-۸۸- در معادله $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ مجموع توان چهارم ریشه‌ها چه قدر است؟

- ۱۴ (۴) ۱۲ (۳) ۷ (۲) ۶ (۱)

-۸۹- معادله $x^4 - 6x^3 - 6x^2 - 4 = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

- ۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱) صفر

-۹۰- معادله $x^3 - 3x^2 - 3x^2 + 1 = 0$ چند ریشه دارد و مجموع مجذورات ریشه‌ها چه قدر است؟

- ۴) چهار ریشه و شش ۳) دو ریشه و شش ۲) دو ریشه و سه ۱) دو ریشه و سه

-۹۱- یکی از ریشه‌های معادله $x^3 - mx^2 - m^2 = 1$ ، چهار واحد از ریشه دیگر بیشتر است. مجموع تمام مقادیر m کدام است؟

- ۴ (۴) ۴ (۳) -۱۵ (۲) ۱۵ (۱)

(تهری) -۹۲- اگر معادله $x^3 - (m+2)x^2 + m + 5 = 0$ دارای ۴ ریشه حقیقی متمایز باشد، مجموع مقادیر m به کدام صورت است؟ (۸۵)

- $m < -4$ (۴) $-4 < m < 4$ (۳) $m > 4$ (۲) $m < -4$ (۱)

-۹۳- کوچک‌ترین ریشه معادله $x^3 + 12x = 3x^2 + 10$ کدام است؟

- ۱ (۴) -۱ (۳) $2 - \sqrt{2}$ (۲) $-1 - \sqrt{2}$ (۱)

-۹۴- نمودار تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ به صورت مقابل است. کدام گزینه صحیح است؟

$$ab < 0 \quad (1)$$

$$ac < 0 \quad (2)$$

$$a - b > 0 \quad (3)$$

$$b + c < 0 \quad (4)$$

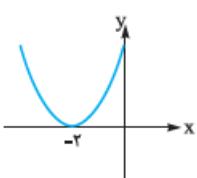
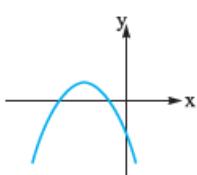
-۹۵- اگر نمودار تابع $f(x) = ax^3 + 4x + b$ به صورت مقابل باشد، مقدار b کدام است؟

$$2 \quad (1)$$

$$3 \quad (2)$$

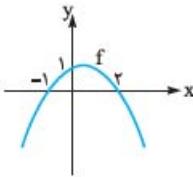
$$4 \quad (3)$$

$$5 \quad (4)$$



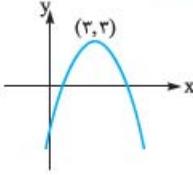


۹۶- با توجه به نمودار تابع درجه دوم زیر، قدر مطلق تفاضل ریشه های معادله $x^2 + f(x) = 0$ کدام است؟



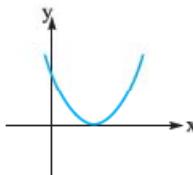
- (۱) ۵
(۲) ۴
(۳) ۶
(۴) ۳

۹۷- نمودار سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ که در آن $a = 1$ است، به صورت زیر می باشد. عرض از مبدأ منحنی کدام است؟



- (۱) -۳
(۲) -۴
(۳) -۵
(۴) -۶

۹۸- اگر نمودار تابع $f(x) = a(x^2 + x) - 3x + 1$ به صورت مقابل باشد، مجموعه مقادیر a کدام است؟



- (۱) فقط ۱
(۲) فقط ۹
(۳) {1, 9}
(۴) Ø

۹۹- به ازای کدام مقدار a حداقل فاصله نقاط منحنی $y = ax^2 - 2\sqrt{2}x + a$ از خط $y = 4$ برابر ۳ است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

 $\frac{1}{2}$ (۲)

-۱ (۱)

۱۰۰- فقط سه نقطه روی منحنی $y = -x^2 + 4x - 7$ وجود دارد که فاصله آنها از خط $L = y = L$ برابر ۲ باشد. اگر خط، منحنی را در نقاطی به

طول های x_1 و x_2 قطع کند، حاصل $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ کدام است؟

۸/۵ (۴)

۸ (۳)

۷/۵ (۲)

۷ (۱)

۱۰۱- مجموع طول نقاط برخورد خط $y = 5$ با منحنی $f(x) = ax^2 + bx + c$ برابر ۲ است. اگر فاصله رأس سهمی از این خط برابر ۲ باشد، مجموع معکوس ریشه های معادله $f(x) = 6$ برابر کدام است؟

-۱/۵ (۴)

۱/۵ (۳)

-۲/۵ (۲)

۲/۵ (۱)

۱۰۲- در یک زمین گلخانه ای، اگر با فاصله یکسان ۴۰ بوته گوجه فرنگی کاشته شود، به طور متوسط از هر بوته ۸ کیلو محصول به دست می آید.

به ازای هر بوته اضافی که کاشته می شود، به مقدار $\frac{1}{8}$ کیلو از میانگین کل محصول کاسته می شود. در این صورت بیشترین محصول برداشتی چند کیلوگرم است؟

۳۴۲ (۴)

۳۴۰ (۳)

۳۳۸ (۲)

۳۳۶ (۱)

۱۰۳- در بین تمام مستطیل های محاط در نیم دایره ای به شعاع ۱، بیشترین مساحت ممکن کدام است؟

 $\frac{1}{2}$ (۴)

۱ (۳)

 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۱)

۱۰۴- کوتاه ترین فاصله نقطه $A(4, 0)$ از نقاط منحنی به معادله $y = \sqrt{2x + 9}$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

 $2\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۱)

۱۰۵- بیشترین مساحت از زمینی را که می توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور کرد، چند متر مربع است؟ (ریاضی فارج ۹۱)

۹۸۸ (۴)

۹۷۸ (۳)

۹۶۸ (۲)

۹۵۸ (۱)



۱۰۶- بیشترین مساحت زمینی مستطیل شکل را که می‌توان توسط یک طناب از زمینی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود، متر 648 مربع است. طول طناب چند متر است؟
(ریاضی فارج ۱۰۵)

۷۲ (۴)

۷۱ (۳)

۷۰ (۲)

۶۸ (۱)

۱۰۷- کمترین فاصله نقاط منحنی $y = x^3 + 2x$ از خط $y = 2x - 3$ کدام است؟

 $2\sqrt{5}$ (۴) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (۳) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۱)

۱۰۸- منحنی به معادله $y = mx$ نقطه مشترک ندارد. مجموعه مقادیر m کدام است؟
(ریاضی ۱۱۱)
 $5 < m < 13$ (۴) $7 < m < 15$ (۳) $15 < m < 23$ (۲) $9 < m < 25$ (۱)

۱۰۹- خطی که از نقطه $(1, 0)$ می‌گذرد، منحنی $f(x) = x^3 - 4x + 2$ را در دو نقطه با طول‌های α و β قطع می‌کند. اگر 2 آن‌گاه خط، محور x را با چه طولی قطع می‌کند؟
(ریاضی ۱۱۵)

 $-\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$ (۳)

۲ (۲)

-۲ (۱)

۱۱۰- به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، منحنی به معادله $y = (m-2)x^3 - 2(m+1)x + 12$ محور x را در دونقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟
(ریاضی ۱۱۵)
 m هر مقدار (۴) $m > 2$ (۱)

۱۱۱- حدود m کدام باشد تا منحنی $y = mx^3 + (2m-8)x + 2$ فقط از ناحیه سوم محورهای مختصات نگزدد?
(ریاضی ۱۱۲)
 \emptyset (۴) $(0, 2)$ (۳) $\mathbb{R} - [0, 2]$ (۲) \mathbb{R} (۱)

۱۱۲- به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = (a-3)x^3 + ax - 1$ ، از ناحیه اول محورهای مختصات نگزدد?
(ریاضی ۱۱۲)
 $0 < a < 3$ (۴) $2 < a < 3$ (۳) $0 < a \leq 2$ (۲) $a \leq 2$ (۱)

۱۱۳- برد تابع b $f(x) = -2x^3 + ax + b$ با دامنه $\mathbb{R} - \{a-3\}$ برابر $(-\infty, a-1)$ است. $f(a-b)$ کدام است?
(ریاضی ۱۱۳)
۴ (۴) ۱ (۳) -۵ (۲) -۳ (۱)

۱۱۴- نمودار دو تابع $f(x) = -x^3 + ax + 4$ و $g(x) = x^3 - 2x + b$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. اگر خط $y = 1$ محور تقارن شکل حاصل باشد، حاصل $f(2) + g(-2)$ کدام است؟
(ریاضی ۱۱۴)

۱۰ (۴) ۷ (۳) ۳ (۲) -۱ (۱)

۱۱۵- خط $y = k$ نمودار تابع $x^3 - x$ را در دو نقطه A و B قطع می‌کند. اگر مثلث OAB قائم‌الزاویه باشد، مساحت آن کدام است؟
(ریاضی ۱۱۵)

 $2\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{3}$ (۳) $2\sqrt{5}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۱)

۱۱۶- برد تابع $f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 + bx}{|x|}$ (۱) $b \in \mathbb{Z}$ ، چهار عدد صحیح را شامل نمی‌شود. $f(b)$ کدام است?
(ریاضی ۱۱۶)

۱۲ (۴) ۹ (۳) ۶ (۲) ۳ (۱)



- ۵۴ گزینه ۱ با استفاده از معادله $2x^2 - 3x - 4 = 0$

مجموع و حاصل ضرب ریشه ها را داریم:

$$2x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2} \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

حالا عبارت موردنظر:

$$\alpha\beta^r + \beta\alpha^r = \alpha\beta(\alpha + \beta) = PS = -2 \times \frac{3}{2} = -3$$

- ۵۵ گزینه ۲ عبارت $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ را بر حسب مجموع و

حاصل ضرب دو ریشه می نویسیم:

$$\begin{aligned} (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 &= (\sqrt{\alpha})^2 + (\sqrt{\beta})^2 + 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} \\ &= \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = S + 2\sqrt{P} \Rightarrow \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}} \end{aligned}$$



معادله را به صورت **گزینه ۳۸**

$$x^2 - (1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$$

$\alpha = \frac{c}{a} = \sqrt{3}$ استاندارد می‌نویسیم.

با کمی دقت، مجموع ضرایب صفر است؛ پس ریشه‌ها $\alpha > \beta$ است؛ پس:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{4}{(\beta+1)^2} = \frac{1}{(\sqrt{3})^2} + \frac{4}{(1+1)^2} = \frac{1}{3} + \frac{4}{4} = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

با استفاده از اتحاد $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ داریم:

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + x_2)$$

در معادله $x^2 - 5x + 3 = 0$ داریم:

$$P = x_1 x_2 = 3 \quad S = x_1 + x_2 = 5$$

اختلاف دو ریشه در معادله درجه‌دوم برابر است با:

$$x_1 - x_2 = \sqrt{S^2 - 4P}$$

مجموع مربعات ریشه‌ها هم برابر است با:

پس داریم:

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + x_2) = \sqrt{S^2 - 4P} (S - \frac{4P}{-P})$$

$$= \sqrt{5^2 - 4 \times 3} (5 - 3) = 22\sqrt{13}$$

راحل اول با توجه به این‌که عبارت **گزینه ۳۹**

نسبت به α و β متقارن نیست و نیز ظاهر گزینه‌ها، به نظر می‌رسد استفاده از خود جواب‌ها مفید باشد:

$$x^2 - 4x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 + \sqrt{6} \\ \beta = 2 - \sqrt{6} \end{cases}$$

$$3\alpha^2 - \beta^2 = 3(2 + \sqrt{6})^2 - (2 - \sqrt{6})^2 = 3(10 + 4\sqrt{6}) - (10 - 4\sqrt{6}) = 20 + 16\sqrt{6}$$

راحل دوم با کمی خلاصت می‌نویسیم:

$$3\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha^2 + \beta^2) + 2(\alpha^2 - \beta^2)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P \quad \text{حالا:}$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = S\sqrt{S^2 - 4P}$$

$$x^2 - 4x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = 4 \\ P = \alpha\beta = -2 \end{cases} \quad \text{پس داریم:}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = 4^2 - 2(-2) = 20$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = S\sqrt{S^2 - 4P} = 4\sqrt{4^2 - 4(-2)} = 4\sqrt{24} = 8\sqrt{6}$$

$$20 + 2(8\sqrt{6}) = 20 + 16\sqrt{6} \quad \text{و جواب می‌شود:}$$

با توجه به معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ ، مقادیر S و P عبارت‌اند از:

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{-3}{1} = 3 \quad P = \frac{c}{a} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}} = \sqrt{3 + 2\sqrt{1}} = \sqrt{5} \quad \text{و بنابراین:}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\beta}} \quad \text{عبارت} \quad \text{به صورت مجموع و} \quad \text{گزینه ۴۰}$$

حاصل ضرب ریشه‌ها بیان کیم:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{P}}$$

برای عبارت $\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}$ دقت کنید که $\alpha > \beta$ است و این عبارت منفی خواهد بود. پس می‌نویسیم:

$$\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha} = -(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}) = -\sqrt{(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2}$$

$$= -\sqrt{\alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta}} = -\sqrt{S - 2\sqrt{P}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{-\sqrt{S - 2\sqrt{P}}}{\sqrt{P}} \quad \text{پس داریم:}$$

$$S = 4, P = 2 \quad \text{حالا در معادله} \quad x^2 - 4x + 2 = 0 \quad \text{داریم:}$$

و بنابراین:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\beta}} = -\frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = -\sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{2}}{2}} = -\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

گزینه ۴۱ معادله را به صورت استاندارد

$$x^2 - 3x - 1 = 0 \quad \text{در می‌آوریم.}$$

چون مخرج‌ها $x_1 - 1$ و $x_2 - 1$ هستند و در معادله $x^2 - 3x - 1 = 0$ می‌بینیم، از صدق کردن ریشه‌ها در معادله استفاده می‌کنیم:

$$x_1 - 3x_1 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 - 1 = 3x_1$$

$$x_2 - 3x_2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 - 1 = 3x_2$$

$$x_1 - 1 = 3x_2$$

حالا در عبارت موردنظر سؤال قرار می‌دهیم:

$$\frac{x_1}{x_1 - 1} + \frac{x_2}{x_2 - 1} = \frac{x_1}{3x_2} + \frac{x_2}{3x_1} = \frac{1}{3} \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{S^2 - 2P}{P} \right)$$

$$\text{با توجه به معادله} \quad x^2 - 3x - 1 = 0 \quad \text{و داریم:} \quad S = 3, P = -1$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{3^2 - 2 \times (-1)}{-1} \right) = -\frac{11}{3}$$



$$\alpha^r - \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha^r = \alpha + 1$$

$$\xrightarrow{\times a} \alpha^r = \frac{\alpha^r}{\alpha+1} + \alpha = \alpha + 1 + \alpha$$

$$\alpha^r = 2\alpha + 1$$

$$2\beta^r = 2(\beta + 1) = 2\beta + 2$$

$$\alpha^r + 2\beta^r = 2\alpha + 1 + 2\beta + 2 = 2(\alpha + \beta) + 3 = 2S + 3$$

$$\xrightarrow{S = \frac{-b}{a} = 1} = 2 \times 1 + 3 = 5$$

$$\frac{\alpha^r + \alpha^r + 1}{\alpha^r} \text{ را ساده‌تر کنید}$$

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{\text{تفکیک}} \frac{\alpha^r}{\alpha^r} + \frac{\alpha^r}{\alpha^r} + \frac{1}{\alpha^r} = \alpha^r + 1 + \frac{1}{\alpha^r} \\ &= (\alpha^r + \frac{1}{\alpha^r})^r - 18 + 1 = (\alpha^r + \frac{1}{\alpha^r})^r - 17 \\ &\quad \underbrace{\alpha^r + \frac{1}{\alpha^r}}_{\alpha^r + \frac{1}{\alpha^r}} \end{aligned}$$

$$\text{حالا } \alpha^r + \frac{1}{\alpha^r} \text{ را هم به صورت اتحاد درمی‌آوریم:}$$

$$\alpha^r + \frac{1}{\alpha^r} = (\alpha + \frac{3}{\alpha})^r - 2 \times \alpha \times \frac{3}{\alpha} = (\alpha + \frac{3}{\alpha})^r - 6$$

$$\alpha \Rightarrow \alpha^r - 5\alpha + 3 = 0 \quad \text{از معادله صورت سؤال داریم:}$$

$$\xrightarrow{\div a} \alpha - 5 + \frac{3}{\alpha} = 0 \Rightarrow \alpha + \frac{3}{\alpha} = 5 \quad \text{در معادله صدق می‌کند.}$$

$$\alpha^r + \frac{1}{\alpha^r} = (\alpha + \frac{3}{\alpha})^r - 6 = 5^r - 6 = 19 \quad \text{بنابراین:}$$

$$(\alpha^r + \frac{1}{\alpha^r})^r - 17 = 19^r - 17 = 361 - 17 = 344 \quad \text{و در نتیجه:}$$

$$\text{معادله را به صورت } x(x+2) = 5 \text{ می‌نویسیم.}$$

$$x + 2 = \frac{5}{x} \quad \text{پس داریم:}$$

$$\beta + 2 = \frac{5}{\beta} \quad \text{و } \alpha + 2 = \frac{5}{\alpha} \quad \text{بنابراین:}$$

حالا در عبارت صورت سؤال قرار می‌دهیم:

$$\frac{\alpha}{(\alpha+2)^r} + \frac{\beta}{(\beta+2)^r} = \frac{\alpha}{(\frac{5}{\alpha})^r} + \frac{\beta}{(\frac{5}{\beta})^r} = \frac{\alpha^r + \beta^r}{25}$$

پادکشی مجموع مکعبات ریشه‌ها در معادله درجه‌دوم برابر است با:

$$\alpha^r + \beta^r = S^r - 2PS$$

گزینه ۳۴

$$x^r - 3x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = 3 \\ P = \alpha\beta = 1 \end{cases}$$

گزینه ۳۱

می‌کنیم: $\alpha^r + \beta^r$ را محاسبه می‌کنیم و آنها را در هم ضرب

$$\alpha^r + \beta^r = (\alpha^r + \beta^r)^r - 2\alpha^r\beta^r = (S^r - 2P)^r - 2P^r$$

$$= (3^r - 2(1))^r - 2(1)^r = 47$$

$$\alpha^r + \beta^r = S^r - 2PS = 3^r - 2(1)(3) = 18$$

$$\Rightarrow (\alpha^r + \beta^r)(\alpha^r + \beta^r) = \alpha^r + \beta^r + \alpha^r\beta^r + \beta^r\alpha^r$$

$$\Rightarrow 47 \times 18 = \alpha^r + \beta^r + \alpha^r\beta^r(\alpha + \beta)$$

$$\Rightarrow 846 = \alpha^r + \beta^r + P^r(S)$$

$$\Rightarrow 846 = \alpha^r + \beta^r + (1)(3) \Rightarrow \alpha^r + \beta^r = 843$$

گزینه ۳۲ - ۱ $2x_2$ شبیه خود معادله است، پس سراغ

صدق کردن ریشه در خود معادله می‌رویم: x_2 در معادله صدق می‌کند. $\Rightarrow x_2$ ریشه معادله است.

$$\Rightarrow x_1^r + 2x_2 - 1 = 0 \Rightarrow 2x_2 - 1 = -x_1^r$$

$$x_1^r + (2x_2 - 1)^r = x_1^r + (-x_1^r)^r = x_1^r + x_2^r \quad \text{بنابراین: حاصل مجموع توان چهارم ریشه‌ها برابر است با:}$$

$$x_1^r + x_2^r = (x_1^r + x_2^r)^r - 2x_1^rx_2^r = (S^r - 2P)^r - 2P^r$$

در این معادله $S = -2$ و $P = -1$ است و داریم: $x_1^r + x_2^r = ((-2)^r - 2(-1))^r - 2(-1)^r = 6^r - 2 = 34$

اول ظاهر $4 x_1 x_2 + 2 x_1^r x_2^r$ را تغییر دهیم:

$$\underbrace{x_1 x_2}_{P} (x_2 + 2x_1) = 4 \xrightarrow{P = \frac{c}{a} = -2} x_2 + 2x_1 = \frac{4}{-2} = -2$$

$$2x_1 + x_2 = -2 \quad \text{پس داریم:}$$

$$x_1 + x_2 = S = \frac{-b}{a} = m$$

$$\underbrace{x_1 + x_2 + x_2}_{m} = -2 \quad \text{پس داریم:}$$

$$x_1 = -m - 2 \quad \text{يعني:}$$

پس باید $-m - 2$ در معادله صدق کند:

$$\xrightarrow{x_1 = -m - 2} (-m - 2)^r - m(-m - 2) - 2 = 0$$

$$\Rightarrow m^r + 4m + 4 + m^r + 2m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2m^r + 6m + 2 = 0 \Rightarrow m = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$



که دلتای آن منفی است و ریشه ندارد؛ پس $m = 3$ قابل قبول نیست. برای $m = -2$ ، معادله $x^2 + 5x - 2 = 0$ دو ریشه دارد و آن را می‌پذیریم.

عدد $\sqrt{2}$ واسطه هندسی x_1 و x_2 است گزینه ۷۱

$$B^r = AC \Rightarrow \sqrt{2} = x_1 x_2 \quad \text{یعنی:}$$

$B^r = AC$ واسطه هندسی دو عدد هم علامت C و A . از شرط پذیری به دست می‌آید. پس داریم: $P = x_1 x_2 = 2$ یعنی ضرب دو ریشه حقیقی معادله، ۲ است:

$$P = \frac{c}{a} = \frac{m^r - 3}{m} = 2 \Rightarrow m^r - 2m - 3 = 0$$

$$\Rightarrow m = -1 \text{ یا } 3$$

اما برای $m = 3$ معادله $x^2 - 5x + 6 = 0$ ریشه حقیقی ندارد پس فقط -1 را می‌پذیریم (معادله به صورت $-x^2 - 5x - 2 = 0$ ریشه حقیقی دارد)

مجموع مربعات ریشه‌های معادله برابر است با: گزینه ۷۲

$$x_1^r + x_2^r = S^r - 2P$$

$$\text{پس در معادله } mx^2 - (m+3)x + 5 = 0 \text{ داریم:}$$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{m+3}{m}, P = \frac{5}{m}$$

$$\Rightarrow x_1^r + x_2^r = \left(\frac{m+3}{m}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{m}\right) = 6$$

$$\xrightarrow{\times m^r} (m+3)^2 - 1 \cdot m = 6m^r \Rightarrow 5m^r + 4m - 6 = 0$$

$$\text{مجموع ضرایب صفر است.} \rightarrow m = +1 \text{ یا } -\frac{9}{5}$$

اما واضح است که به ازای $m = 1$ معادله $x^2 - 4x + 5 = 0$ ریشه

$$\text{حقیقی ندارد، پس فقط مقدار } m = -\frac{9}{5} \text{ را می‌پذیریم.}$$

ریشه پرانتر اول -2 است؛ پس داریم: گزینه ۷۳

$$\frac{1}{(-2)^2} + \frac{1}{x_1^r} + \frac{1}{x_2^r} = \frac{1}{x_1^r x_2^r} = \text{مجموع معکوس مربع سه ریشه}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{x_1^r + x_2^r}{x_1^r x_2^r}$$

x_1 و x_2 ریشه‌های پرانتر دوم یعنی ریشه‌های معادله $x^2 + ax + 2 = 0$ هستند؛ پس داریم:

$$\frac{x_1^r + x_2^r}{x_1^r x_2^r} = \frac{S^r - 2P}{P^r} = \frac{(-a)^r - 2(\frac{2}{1})}{(\frac{2}{1})^2} = \frac{a^r - 4}{4} = \frac{a^r}{4} - 1$$

$$S = \frac{-b}{a} = -2, P = \frac{c}{a} = -5 \Rightarrow x^2 + 2x - 5 = 0 \text{ داریم:}$$

$$\frac{\alpha^r + \beta^r}{25} = \frac{S^r - 2PS}{25} = \frac{(-2)^r - 2(-2)(-5)}{25}$$

$$= \frac{-8 - 30}{25} = \frac{-38}{25} \xrightarrow{\times 4} = -1/52$$

گزینه ۷۴

$$\text{عبارت} = \frac{(\alpha - 1)(\alpha + 3)}{(\beta + 1)^2} = \frac{\alpha^r + 2\alpha - 3}{\beta^r + 2\beta + 1} \quad (*)$$

در معادله صدق می‌کنند: α و β

$$\begin{cases} 2\alpha^r + 4\alpha + 1 = 0 \Rightarrow 2(\alpha^r + 2\alpha) = -1 \\ \Rightarrow \alpha^r + 2\alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\beta^r + 4\beta + 1 = 0 \Rightarrow \beta^r + 2\beta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{-\frac{1}{2} - 3}{-\frac{1}{2} + 1} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = -3$$

گزینه ۷۵ معادله را به صورت $x^r - mx - (m^r + 1) = 0$

می‌نویسیم. ضرب دو ریشه 1 عددی منفی است،

پس دو ریشه هم علامت نیستند و داریم:

$$|\alpha| - |\beta| = |\alpha - (-\beta)| = |\alpha + \beta| = |S|$$

$|S| = |m| = 4 \Rightarrow m = \pm 4$ بنابراین:

گزینه ۷۶ دو خط بر هم عمودند یعنی حاصل ضرب

شیبها -1 است، پس باید ضرب ریشه‌ها -1 باشد:

$$m^r x^r - m(x-1) - 6 = 0 \Rightarrow m^r x^r - mx + m - 6 = 0$$

$$P = \frac{c}{a} = -1 \Rightarrow \frac{m-6}{m^r} = -1 \Rightarrow m^r + m - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (m+3)(m-2) = 0 \Rightarrow m = -3 \text{ یا } 2$$

دقت کنید که در این شرایط $\Delta > 0$ است و از وجود دو ریشه متمایز مطمئن هستیم.

گزینه ۷۷ برای دو ریشه معکوس هم باید ضرب ریشه‌ها

$$x_1 = \frac{1}{x_2} \Rightarrow P = x_1 x_2 = 1 \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{m^r - 6}{m} = 1 \quad 1 \text{ باشد:}$$

$$m^r - m - 6 = 0 \Rightarrow (m-2)(m+2) = 0 \quad \text{بنابراین:}$$

$$\Rightarrow m = 3 \text{ یا } -2$$

اما به ازای $m = 3$ معادله به صورت $3x^r + 5x + 3 = 0$ در می‌آید



$$\text{باشد و شرط } x_1^2 + x_2^2 = 1 \text{ برقرار شود:}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2 = 1$$

$$\frac{S=\frac{a}{2}}{P=\frac{f}{2}} \rightarrow ((-\frac{a}{2})^2 - 2 \times \frac{f}{2})^2 - 2(\frac{f}{2})^2 = 1$$

$$(\frac{a^2}{4} - f^2) - 8 = 1 \Rightarrow (\frac{a^2}{4} - f^2)^2 = 9 \Rightarrow \frac{a^2}{4} - f^2 = \pm 3$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{4} = 7 \text{ یا } 1 \Rightarrow a^2 = 4 \text{ یا } 28 \Rightarrow a = \pm 2 \text{ یا } \pm 2\sqrt{7}$$

برای وجود دو ریشه حقیقی مثبت باید $S > 0$ ، $\Delta > 0$ و $a > 0$ باشند پس $\Delta = a^2 - 32 > 0$ و در نتیجه $a^2 > 32$ که در هیچ یک از جوابها صدق نمی‌کند.

-77 شرط صورت سؤال به شکل **گزینه ۱**

$x_1 = x_2 - 4$ قابل بیان است. چون جمع ریشه‌های معادله

$$x_1 + x_2 = -\frac{x}{x^2} \text{ است، سعی می‌کنیم } S = -\frac{-2a}{a^2} = -\frac{-2a}{a} = 2$$

$$x_1 = x_2 - 4 \xrightarrow{+x_2} \underbrace{x_1 + x_2}_{\text{این می‌شود}} = x_2 + x_2 - 4 \quad \text{بسازیم:}$$

$$\Rightarrow x_2 + x_2 - 6 = 0$$

$$\Rightarrow x_2 = \begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 - 4 = \begin{cases} 9 - 4 = 5 \\ 4 - 4 = 0 \end{cases}$$

ریشه کوچکتر معادله در حالت اول -3 و در حالت دوم صفر است.

$$-\tan^2 a - 1, \frac{1}{\cos^2 a} \quad \text{ضرایب این معادله} \quad \text{ب} \quad \text{گزینه ۲} \quad \text{است.} \quad -78$$

$$\frac{1}{\cos^2 a} = 1 + \tan^2 a, \quad \text{جمع ضرایب}$$

$$\text{صفراست: پس یک ریشه } x_1 = 1 = \alpha \text{ و دیگری } x_2 = \frac{c}{a} \text{ یعنی}$$

$$x_2 = \frac{-\tan^2 a}{1 + \tan^2 a} = \beta \quad \text{است. بنابراین } \alpha^2 + \beta^2 = 1 \text{ برابر است با:}$$

$$1 + \frac{-\tan^2 a}{1 + \tan^2 a} = \frac{1}{1 + \tan^2 a} = \cos^2 a$$

از شرط صورت سؤال داریم:

$$\frac{a+fc}{b} = 2 \Rightarrow a + fc - 2b = 0$$

$$\xrightarrow{\div f} a(\frac{1}{f}) + b(-\frac{1}{f}) + c = 0$$

بنابراین:

$$\frac{1}{4} + \frac{a^2}{4} - 1 = -\frac{a}{2}$$

$$\xrightarrow{\times 4} 1 + a^2 - 4 = -2a$$

$$\Rightarrow a^2 + 2a - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -3 \end{cases} \xrightarrow{\Delta < 0} \text{غیرقیمتی}$$

-79 **گزینه ۱** از بحث تعیین علامت در ریاضیات دهم،

جدول زیر را به یاد داریم:

x	x ₁	x ₂
مخالف علامت a	موافق a	موافق a

پس وقتی عددی بین دو ریشه قرار دارد، علامت عبارت درجه دوم، مخالف علامت a است. یعنی اگر عدد k بین دو ریشه معادله $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ باشد، آن‌گاه $f(k) < 0$ است.

$$f(x) = mx^2 - x - 2 \Rightarrow f(2) = 4m - 2 - 2 = 4m - 4$$

$$\times (ضریب x^2) \Rightarrow 2 < 0 \quad \text{بين دو ریشه است.}$$

$$\Rightarrow m(4m - 4) < 0 \Rightarrow m \in (0, 1)$$

	0	1
m(4m - 4)	+	-

جدول را بینید:

گزینه ۱ ریشه‌های این معادله را می‌توانیم پیدا کنیم:

(۱) $x+1$ رابه طرف چپ می‌آوریم و برای $-1 - x^2$ ، مزدوج می‌نویسیم.

$$m(x^2 - 1) = x + 1 \Rightarrow m(x - 1)(x + 1) - (x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow (x + 1)(mx - m - 1) = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ یا } x = \frac{m+1}{m}$$

پس خواسته سؤال به صورت زیر قابل بیان است:

$$(دقت کنید که \alpha \text{ از } -2 \text{ کمتر است پس حتماً } \alpha = \frac{m+1}{m} \text{ است.})$$

$$\frac{m+1}{m} < -2 < -1 < 1 \Rightarrow \frac{m+1}{m} < -2$$

$$\Rightarrow \frac{m+1}{m} + 2 < 0 \Rightarrow \frac{m+1+2m}{m} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{3m+1}{m} < 0 \xrightarrow{\text{بین دوری}} m \in (-\frac{1}{3}, 0)$$

گزینه ۲ اعداد مثبتاند و $\sqrt{\cos \alpha}$ و $\sqrt{\sin \alpha}$

مجموع توان چهارم آن‌ها ۱ است:

$$x_1^4 + x_2^4 = \sqrt{\sin \alpha}^4 + \sqrt{\cos \alpha}^4 = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1$$

پس باید معادله $2x^2 + ax + 4 = 0$ دو ریشه حقیقی مثبت داشته



ریشه‌های معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ را و α و β کنیم. گزینه ۳ -۸۲

می‌نامیم، پس ریشه‌های معادله $4x^2 - 12x + m = 0$ اعداد $\alpha^2 - 2$ و $\beta^2 - 2$ هستند. به جمع و ضرب ریشه‌های هر دو

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = S = 2 \\ \alpha\beta = P = -1 \end{cases}$$

معادله نگاه کنید:

$$4x^2 - 12x + m = 0 \Rightarrow \begin{cases} k\alpha^2 - 2 + k\beta^2 - 2 = -\frac{12}{4} = 3 \\ (k\alpha^2 - 2)(k\beta^2 - 2) = \frac{m}{4} \end{cases}$$

خب! عبارت مجموع ریشه‌ها را مرتب تر کنیم: 3

$$k(\alpha^2 + \beta^2) - 4 = 3 \Rightarrow k(S^2 - 2(-1)(2)) = 7$$

$$\Rightarrow k = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{k=1}{4} \rightarrow \frac{m}{4} = (\frac{1}{2}\alpha^2 - 2)(\frac{1}{2}\beta^2 - 2)$$

حالا مقدار m را در

$$\xrightarrow{\times 4} m = 4(\frac{\alpha^2}{2} - 2)(\frac{\beta^2}{2} - 2) = (\alpha^2 - 4)(\beta^2 - 4)$$

$$= \alpha^2\beta^2 - 4(\alpha^2 + \beta^2) + 16 = P^2 - 4(S^2 - 2PS) + 16$$

$$= (-1)^2 - 4(2^2 - 2(-1)(2)) + 16$$

$$= -1 - 4(14) + 16 = -41$$

معادله را کمی مرتب تر کنیم:

گزینه ۱ -۸۳

$$x^2 + (x^2 - x)(x + 1 - m) = 0$$

$$\Rightarrow x(x^2 + (x-1)(x+1-m)) = 0$$

$$\Rightarrow x(x^2 + x^2 - 1 - mx + m) = 0$$

$$\Rightarrow x(2x^2 - mx + (m-1)) = 0$$

پس یک ریشه $x_3 = 0$ و مجموع مجدورات دو ریشه دیگر برابر است

$$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P = \left(-\frac{m}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{m-1}{2}\right) = 4$$

با:

$$\Rightarrow \frac{m^2}{4} - (m-1) = 4$$

$$\xrightarrow{\times 4} m^2 - 4m + 4 = 16 \Rightarrow m^2 - 4m - 12 = 0$$

$$\Rightarrow m = 6 \text{ یا } -2$$

اما به ازای $m = 6$ معادله به صورت $2x^2 - 6x + 5 = 0$ ریشه ندارد

و مجموع مجدورات ریشه‌های عبارت می‌شود $= 0$ که قابل قبول

نیست پس فقط $m = -2$ را می‌پذیریم.

این همان معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ است که در آن

$$x_1 = \frac{-1}{2} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-1}{2}$$

قرار داده شده؛ پس یک ریشه معادله است

$$P = \frac{c}{a} = x_1 x_2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{-2c}{a}$$

و داریم:

گزینه ۱ راه حل اول اگر ریشه‌های معادله

$\alpha^2 - 5x + 2 = 0$ را و β بنامیم، معادله‌ای با ریشه‌های α و β می‌خواهیم. از معادله اولیه می‌دانیم $\alpha + \beta = 5$ و $\alpha\beta = 2$.

حالا جمع و ضرب ریشه‌های جدید:

$$S = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 5^2 - 2 \times 2 = 21$$

$$P = \alpha^2 \times \beta^2 = (\alpha\beta)^2 = 2^2 = 4$$

پس معادله جدید با مجموع و حاصل ضرب 21 و 4 ، به صورت

$$x^2 - 21x + 4 = 0$$

راه حل دوم ریشه‌های جدید $X = \sqrt{X}$ هستند، پس $x = \sqrt{X}$ را در

معادله اولیه قرار می‌دهیم:

$$x^2 - 5x + 2 = 0 \xrightarrow{x=\sqrt{X}} (\sqrt{X})^2 - 5\sqrt{X} + 2 = 0$$

$$\Rightarrow X + 2 = 5\sqrt{X} \xrightarrow{\text{بتوان ۲}} X^2 + 4X + 4 = 25X$$

$$\Rightarrow X^2 - 21X + 4 = 0$$

گزینه ۱ ریشه‌های معادله $x^2 - 3x - 6 = 0$ اعداد

α و β هستند پس داریم:

$$\alpha^2 - 3\alpha - 6 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = 3\alpha + 6$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = 3\alpha + 6 = 3(\alpha + 2)$$

پس معادله جدید با ریشه‌های α^2 و β^2 در واقع با ریشه‌های $\alpha + 2$ و $\beta + 2$ نوشته می‌شود. مجموع ریشه‌های جدید را برآورد کنید:

$$x_1 + x_2 = 3(\alpha + 2) + \beta + 2 = 3\alpha + \beta + 8$$

$$= 2(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta) + 8 = 2 \times 3 + (\alpha - \beta) + 8$$

اختلاف ریشه‌های جمع ریشه‌های

$$S = 3(\alpha + 2) + \beta + 2 = 3\alpha + \beta + 8$$

$$k = 14 + (\alpha - \beta)$$

فقط دقت کنید که $\alpha < \beta$ است، حاصل $\alpha - \beta$ ، قرینه

اختلاف دو ریشه است:

$$\alpha - \beta = -\sqrt{S^2 - 4P} = -\sqrt{3^2 - 4(-6)} = -\sqrt{9 + 24} = -\sqrt{33}$$

$$k = 14 - \sqrt{33}$$

و جواب می‌شود:

پادل اختلاف دو ریشه معادله درجه دوم $\sqrt{S^2 - 4P}$ است.



پس مجموع مکعبات ریشه‌های معادله، همان مجموع مکعبات ریشه‌های معادله $x^3 - x - 4 = 0$ است:

$$x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3PS \quad \begin{matrix} S = -b \\ P = \frac{c}{a} \end{matrix} \rightarrow 1^3 - 3(1)(-4) = 13$$

$$t^3 - 3t + 1 = 0 \quad \text{داریم:} \quad \text{گزینه ۸۸}$$

این معادله دو ریشه t_1 و t_2 دارد که هر دو مثبتاند (چون $x^3 = t_1, x^3 = t_2$ و $S > 0$ و $P > 0$) پس داریم:

یعنی جوابها $\pm\sqrt{t_1}$ و $\pm\sqrt{t_2}$ هستند. سؤال از ما مجموع توان چهارم ریشه‌ها را خواسته:

$$\begin{aligned} (+\sqrt{t_1})^4 + (-\sqrt{t_1})^4 + (+\sqrt{t_2})^4 + (-\sqrt{t_2})^4 \\ = t_1^2 + t_1^2 + t_2^2 + t_2^2 = 2(t_1^2 + t_2^2) \end{aligned}$$

مجموع مربعات
ریشه‌های معادله
برحسب ۱

$$= 2(S^2 - 2P) \quad \begin{matrix} S = -b \\ P = \frac{c}{a} \end{matrix} \rightarrow = 2(1^3 - 2 \times 1) = 2 \times 2 = 14$$

$$t^3 - 3t + 1 = 0 \quad \text{اگر } x^2 = t \quad \text{باشد معادله به صورت} \quad \text{گزینه ۸۹}$$

$t^3 - 6t - 4 = 0$ در می‌آید که دو ریشه حقیقی مختلف العلامه (یکی مثبت و یکی منفی) دارد (چون $P < 0$ است) پس $x^2 = t_1 > 0$ و $x^2 = t_2 < 0$: بنابراین فقط دو ریشه $\pm\sqrt{t_1}$ داریم.

$$t^3 - 3t + 1 = 0 \quad \text{با انتخاب } x^2 = t \quad \text{داریم:} \quad \text{گزینه ۹۰}$$

از این معادله دو مقدار مثبت t_1 و t_2 به دست می‌آیند، پس:

$$x^2 = t_1, \quad x^2 = t_2$$

و جواب‌های معادله صورت سؤال $\pm\sqrt{t_1}$ و $\pm\sqrt{t_2}$ هستند (یعنی ۴ جواب دارد). مجموع مجنون جواب‌ها برابر است با:

$$\begin{aligned} (\sqrt{t_1})^2 + (-\sqrt{t_1})^2 + (\sqrt{t_2})^2 + (-\sqrt{t_2})^2 \\ = t_1 + t_1 + t_2 + t_2 = 2(t_1 + t_2) = 2S = 2 \times 3 = 6 \end{aligned}$$

جمع ریشه‌های معادله
 $t^3 - 3t + 1 = 0$

$$t^3 - mt - (m^2 + 1) = 0 \quad \text{با تغییر متغیر } x^2 = t \quad \text{این معادله به} \quad \text{گزینه ۹۱}$$

صورت $t^3 - mt - (m^2 + 1) = 0$ در می‌آید که برای t دو جواب مختلف العلامه دارد ($m > 0$ است).

$$x = \pm\sqrt{t_1} \quad \text{پس فقط جواب مثبت قابل قبول است و داریم:}$$

اختلاف دو ریشه می‌شود $2\sqrt{t_1}$ که باید 4 باشد؛ پس داریم:

$$2\sqrt{t_1} = 4 \Rightarrow \sqrt{t_1} = 2 \Rightarrow t_1 = 4$$

-۸۴- گزینه ۳۳: x در این معادله صدق می‌کند، پس می‌توانیم

آن را به صورت زیر تجزیه کنیم:

$$x^3 - 5x + 4 = (x - 1)(x^2 + x - 4) = 0$$

ریشه‌این
ریشه‌های این
و α هستند.
 $\gamma = 1$ است.

حالا را حساب کنیم: $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 \beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{S^2 - 2P}{P^2} + 1$$

$$\begin{matrix} S = -b \\ P = \frac{c}{a} \end{matrix} \rightarrow \frac{(-1)^2 - 2(-4)}{(-4)^2} + 1 = \frac{1+8}{16} + 1 = \frac{25}{16}$$

-۸۵- گزینه ۲۲: معادله را با کمی تغییر حل می‌کنیم:

در هم ضرب می‌کنیم.

$$x(x+1)(x+2)(x+3) - 3 = 0$$

در هم ضرب می‌کنیم.

$$\Rightarrow (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) - 3 = 0$$

$$\xrightarrow{x^2 + 3x = t} t(t+2) - 3 = 0$$

$$\Rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 3x = 1 \\ x^2 + 3x = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 1 = 0 \\ x^2 + 3x + 3 = 0 \end{cases}$$

در معادله اول $P = -1$ است و در معادله دوم ریشه حقیقی نداریم ($\Delta < 0$ است) پس ضرب ریشه‌ها می‌شود -1 .

-۸۶- گزینه ۳۳: x^3 در نظر بگیریم داریم:

$$t^2 - 9t + 8 = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ یا } 8 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } 8 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } 2$$

$$\Rightarrow S = 1 + 2 = 3$$

-۸۷- گزینه ۲۲: می‌خواهیم $x^3 - x$ را t بگیریم. پس در $x^3 - x - 2x^2 + 2x$ دیده شود:

$$(x^2 - x)^2 - 2x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - x)^2 - 2(x^2 - x) - 8 = 0$$

$$\xrightarrow{x^2 - x = t} t^2 - 2t - 8 = 0 \Rightarrow t = 4 \text{ یا } -2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - x = 4 \Rightarrow x^2 - x - 4 = 0 \\ x^2 - x = -2 \Rightarrow x^2 - x + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta < 0$$



- ۹۶ **کمینه:** نمودار f محور x را در طول های ۲ و -۱ قطع کرد: پس:

$$f(x) = a(x-2)(x+1)$$

چون عرض از مبدأ نمودار ۱ است، باید $a = 1$ باشد:

$$f(0) = a(-2)(1) = -2a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$\text{پس } f(x) = \frac{-1}{2}(x-2)(x+1) \text{ و معادله } 2 + f(x) = 0 \text{ را}$$

می توانیم تشکیل دهیم:

$$2 + \left(\frac{-1}{2}\right)(x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3 = 0$$

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{S^2 - 4P} = \sqrt{1^2 - 4(-6)} = 5$$

با داشتن رأس سهمی، معادله اش به صورت

کمینه:

$$y = a(x - x_S)^2 + y_S$$

$$y = a(x - 3)^2 + 3$$

حالا سؤال می گوید $a^2 = 1$ و چون سهمی ماکسیمم دارد $a < 0$

$$y = -(x-3)^2 + 3$$

است. پس $a = -1$ و معادله سهمی به صورت

است و عرض از مبدأ آن برابر است با:

$$\underset{x=0}{\longrightarrow} y = -(0-3)^2 + 3 = -9 + 3 = -6$$

- ۹۷ **کمینه:** منحنی بر سمت راست محور x ها مماس است

و مینیمم دارد پس باید $\Delta = 0$ بوده، ضریب x^2 مثبت باشد و مقدار ریشه مضاعف نیز مثبت باشد.

$$y = a(x^2 + x) - 3x + 1 = ax^2 + (a-3)x + 1 = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow (a-3)^2 - 4a = a^2 - 10a + 9 = 0 \Rightarrow a = 1 \text{ یا } 9$$

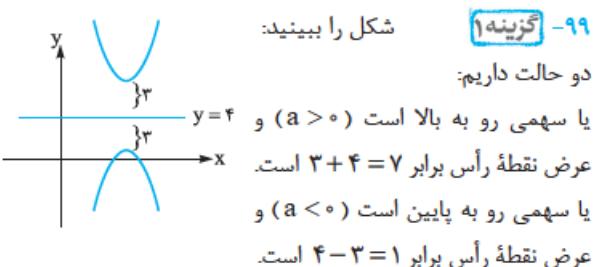
$$\text{ضریب } x^2 \text{ مینیمم: } x_1 = x_2 = -\frac{a-3}{2a} = -\frac{a-3}{2} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{a-3}{2a} < 0$$

پس فقط $a = 1$ قابل قبول است (به ازای $a = 9$ ، شرط $a > 0$ برقرار نیست).

شکل را بینید:

کمینه:



دو حالت داریم:

یا سهمی رو به بالا است ($a > 0$) و

عرض نقطه رأس برابر $3+4=7$ است.

یا سهمی رو به پایین است ($a < 0$) و

عرض نقطه رأس برابر $1-3=-2$ است.

$$y_S = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{1-4a^2}{4a} = 7 \Rightarrow \frac{a^2-2}{a} = 7 \quad a > 0$$

(الف)

یعنی ریشه مثبت معادله برحسب t ، باید 4 باشد:

$$t^2 - mt - (m^2 + 1) = 0 \xrightarrow{t=4} 16 - 4m - (m^2 + 1) = 0$$

$$\Rightarrow m^2 + 4m - 15 = 0 \Rightarrow m = \frac{-b}{a} = \frac{-b}{-4} = -4$$

- ۹۸ **کمینه:** با قراردادن $t^2 = x^2$ به معادله

$$t^2 - (m+2)t + m+5 = 0 \text{ می رسمیم. این معادله باید برای } t \text{ دو جواب مثبت بدهد تا برای } X \text{ چهار جواب داشته باشیم.}$$

$S > 0$, $P > 0$, $\Delta > 0$ شرایط دو جواب مثبت عبارت اند از:

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{m+2}{1} > 0 \Rightarrow m > -2$$

$$P = \frac{c}{a} = m+5 > 0 \Rightarrow m > -5$$

$$\Delta = (m+2)^2 - 4(m+5) = m^2 - 16 > 0 \Rightarrow |m| > 4$$

واز اشتراک این شرایط $m > 4$ قبول است.

- ۹۹ **کمینه:** برای تغییر متغیر باید عبارات یکسانی بینیم

تا بتوانیم آنها را t بگیریم و به معادله درجه دوم برسیم. پس سعی می کنیم عبارت های شبیه هم بسازیم!

$$(x-2)^4 + 12x = 3x^2 + 10 \Rightarrow (x-2)^4 = 3x^2 - 12x + 10$$

$$= 3(x^2 - 4x) + 10 = 3((x-2)^2 - 4) + 10 = 3(x-2)^2 - 2$$

حالا خوب شد. اگر $(x-2)^2$ را t بنامیم داریم:

$$t = 1 \text{ یا } 2 \quad \text{پس: } t = 3t - 2 \text{ و در نتیجه:}$$

$$\begin{cases} (x-2)^2 = 1 \Rightarrow x-2 = \pm 1 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } 3 \\ (x-2)^2 = 2 \Rightarrow x-2 = \pm \sqrt{2} \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{2} \end{cases}$$

پس کوچکترین ریشه معادله $2 - \sqrt{2}$ است.

- ۱۰ **کمینه:** سهمی رو به پایین است $a < 0$.

جمع ریشه ها منفی است $p < 0$ و با توجه به منفی بودن a باید $b < 0$ باشد.

ضرب ریشه ها مثبت است $p < 0 > c$ و در نتیجه $c < 0$. بنابراین

$b+c < 0$ مجموع ۲ عدد منفی است:

- ۱۱ **کمینه:** ریشه مضاعف معادله $f(x) = 0$ در شکل،

$x = -2$ داده شده، پس داریم:

$$ax^2 + 4x + b = 0 \Rightarrow a(x+2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow a(x^2 + 4x + 4) = 0$$

حالا چون ضریب x باید $a > 0$ بشود حتماً $a > 0$ بوده و داریم:

$$b = 4a = 4$$



$$\Rightarrow f(x) = -5(x-1)^2 + 7 \Rightarrow f(x) = -5x^2 + 10x + 2$$

حالا معادله $f(x) = 6$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x) = 6 \Rightarrow -5x^2 + 10x + 2 = 6$$

$$\Rightarrow -5x^2 + 10x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{2}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{2} = 2.5$$

اگر $x_1 + x_2 = 2.5$ بوده بکاریم از میانگین کل

محصول (یعنی از ۸ کیلوگرم) $\frac{x}{8}$ کم می‌شود یعنی میانگین تولید

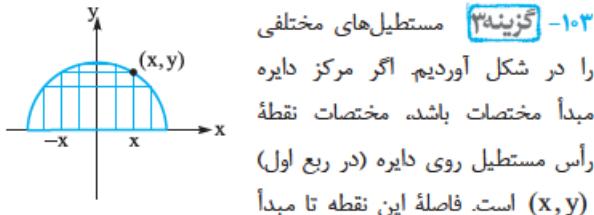
$\frac{x}{8}$ است؛ پس مقدار محصول برابر است با:

$$(x_1 + x_2)(x_1 x_2) = 2.5 \times \frac{4}{5} = 2$$

$$= 320 + 8x - 5x - \frac{x^2}{8} = -\frac{x^2}{8} + 3x + 320$$

$$\text{ماکسیمم این عبارت به ازای } x = -\frac{3}{2a} = -\frac{3}{2(-\frac{1}{8})} = 12 \text{ به دست می‌آید و برابر است با:}$$

$$-\frac{144}{8} + 3 \times 12 + 320 = \frac{-144}{8} + 36 + 320 = 338$$



مساحت مستطیل $y \times 2x$ است و باید به بیشترین مقدار برسد. چون

جمع y^2 و x^2 ثابت و برابر ۱ است، y^2 زمانی حداقل می‌شود که $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ باشد و حداقل مساحت $\frac{1}{2} \times 2 = 1$ است.

دقیق کنید که y و x اعداد مثبت‌اند و اگر y^2 ماقسیمم شود، xy نیز ماقسیمم می‌شود.

فاصله نقاط $M(x, \sqrt{2x+9})$ از نقطه $A(4, 0)$ برابر است با:

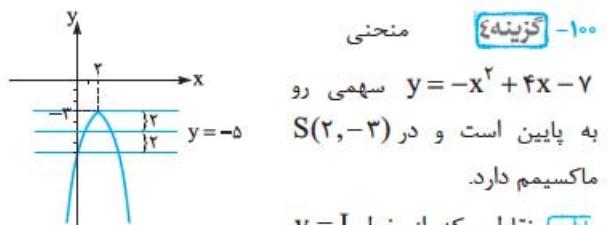
$$AM = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{2x+9}-0)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 - 8x + 16 + 2x + 9} = \sqrt{x^2 - 6x + 25}$$

$$\Rightarrow a^2 - 4a - 2 = 0 \quad \xrightarrow{a > 0} \quad a = \frac{4 + \sqrt{52}}{2}$$

$$y_S = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{4 - 4a^2}{4a} = 1 \Rightarrow \frac{a^2 - 2}{a} = 1 \quad a < 0$$

$$\Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \quad \xrightarrow{a < 0} \quad a = -1$$

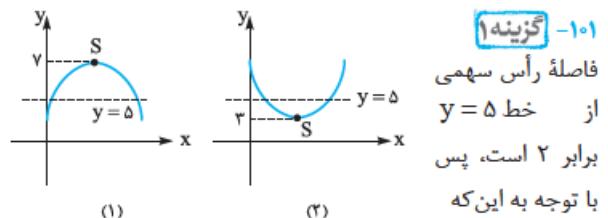


نقطی که از خط $y = L$ به فاصله ۲ باشند روی خط‌های $y = L - 2$ و $y = L + 2$ (یعنی روی دو خط افقی موازی آن) قرار دارند. سؤال می‌گوید این دو خط افقی، یک سهمی را در ۲ نقطه قطع کرده‌اند پس حتماً یکی از رأس سهمی گذشته است؛ پس خط $y = L$ در واقع $y = -5$ بوده و دو خط بالا و پایین $y = -3$ و $y = -7$ هستند. حالا دنبال نقاط تلاقی خط $y = -5$ با منحنی هستیم:

$$-x^2 + 4x - 7 = -5 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow S = 4, P = 2$$

$$(x_1 + \frac{1}{x_1})(x_2 + \frac{1}{x_2}) = x_1 x_2 + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{1}{x_1 x_2} \\ = P + \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} + \frac{1}{P} = P + \frac{1}{P} + \frac{S^2 - 2P}{P}$$

$$= 2 + \frac{1}{2} + \frac{4^2 - 2 \times 2}{2} = 8/5$$



با توجه به این که عرض از مبدأ سهمی ۲ است، حالت (۲) صحیح نیست و فقط حالت (۱) می‌تواند درست باشد. مجموع طول نقاط تلاقی خط $y = 5$ با منحنی،

$$\alpha + \beta = 2 \Rightarrow \text{طول رأس سهمی} = \frac{\alpha + \beta}{2} = 1$$

$$\Rightarrow S(1, 1) \Rightarrow f(x) = a(x-1)^2 + 1$$

$$\xrightarrow{f(1)=1} a + 1 = 1 \Rightarrow a = -1$$



معادله خطی که از نقطه $A(0, 1)$ می‌گذرد گزینه ۱۰۹

$y = mx + 1$ یا $y - 1 = m(x - 0)$ است. پس تلاقی آن با سهمی $y = mx$ است.

معادله $x^2 - (4+m)x + 1 = 0$ به شکل $x^2 - 4x + 2$ می‌گوید.

ریشه‌هایش α و β هستند. صورت سؤال می‌گوید $\alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 = PS$

پس داریم:

$$\frac{P=c}{a} = 1 \Rightarrow 1(4+m) = 2 \Rightarrow m = -2$$

$$\frac{S=\frac{-b}{a}}{a} = -2 \Rightarrow S = -2(m+1) = -2(-2+1) = 2$$

پس داریم: $y = -2x + 1$ که محور x را در $\frac{1}{2}$ قطع می‌کند.

محور x را در دو نقطه به طول‌های منفی گزینه ۱۱۰

قطع می‌کند یعنی معادله $y = 0$ دو ریشه منفی دارد:

$$(m-2)x^2 - 2(m+1)x + 12 = 0$$

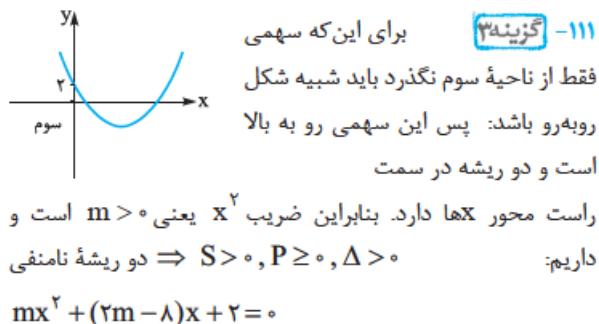
$$\begin{cases} S < 0 \Rightarrow \frac{2(m+1)}{m-2} < 0 \Rightarrow -1 < m < 2 \\ \Delta > 0 \Rightarrow 4(m+1)^2 - 4(12)(m-2) > 0 \\ P > 0 \Rightarrow \frac{12}{m-2} > 0 \Rightarrow m > 2 \end{cases}$$

شرط دلتا را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\frac{+4}{(m+1)^2 - 12(m-2) = m^2 + 2m + 1 - 12m + 24}$$

$$= m^2 - 10m + 25 = (m-5)^2 > 0 \Rightarrow m \neq 5$$

پس هیچ مقداری برای m نداریم (اشتراکی بین $m < -1$ و $m > 2$ نیست).



$$\left\{ \begin{array}{l} S = -\frac{2m-8}{m} > 0 \Rightarrow \frac{2m-8}{m} < 0 \Rightarrow 0 < m < 4 \\ P = \frac{2}{m} \geq 0 \Rightarrow m \geq 0 \end{array} \right.$$

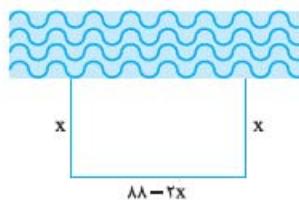
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta = (2m-8)^2 - 4(m)(2) = 4m^2 - 32m + 64 - 8m \\ = 4m^2 - 40m + 64 = 4(m^2 - 10m + 16) \\ = 4(m-2)(m-8) > 0 \Rightarrow \begin{cases} m > 8 \\ m < 2 \end{cases} \end{array} \right.$$

از اشتراک این شرط‌ها $m < 2 < 0$ است.

عبارت زیر رادیکال همواره مثبت است، پس وقتی زیر رادیکال مینیم باشد جواب هم مینیم است:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = -\frac{-6}{2(1)} = 3 \Rightarrow y_{\min} = 3^2 - 6(3) + 25 = 16$$

$$\Rightarrow \min(AM) = \sqrt{16} = 4$$



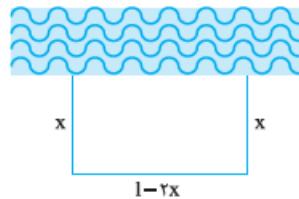
به شکل توجه کنید: مساحت مستطیل مقابل گزینه ۱۰۵

ماکسیمم شود:

$$y = -2x^2 + 88x$$

$$x_S = \frac{-b}{2a} = -\frac{88}{2(-2)} = 22 \Rightarrow y_{\max} = -2(22)^2 + 88(22)$$

$$= -2(22)^2 + 4(22)^2 = 2(22)^2 = 2(484) = 968$$



اگر طول طناب 1 باشد داریم: مساحت $= x(1-2x)$

$$y = -2x^2 + 1x$$

$$y_{\max} = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{1^2 - 4(-2)(0)}{4(-2)} \Rightarrow 648 = \frac{1^2}{8}$$

$$\Rightarrow 1^2 = 8 \times 648 \Rightarrow 1^2 = 8^2 \times 9^2 \Rightarrow 1 = 8 \times 9 = 72$$

فاصله نقاط $A(x, x^2 + 2x)$ از خط گزینه ۱۰۷

برابر است با: $y = 2x - 3$

$$\left. \begin{array}{l} A(x, x^2 + 2x) \\ 2x - y - 3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d = \frac{|2x - (x^2 + 2x) - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|-x^2 - 3|}{\sqrt{5}} = \frac{|x^2 + 3|}{\sqrt{5}} = \frac{x^2 + 3}{\sqrt{5}}$$

کمترین مقدار آن به ازای $x = \frac{3}{\sqrt{5}}$ برابر است با:

سوال می‌گوید معادله $y_1 = y_2$ یعنی گزینه ۱۰۸

($2x+1$) ($x+\lambda$) = mx ریشه حقیقی ندارد.

$$2x^2 + 17x + \lambda = mx \Rightarrow 2x^2 + (17-m)x + \lambda = 0$$

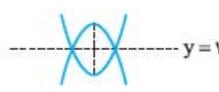
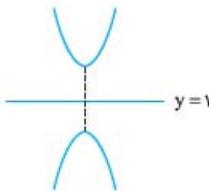
$$\frac{\Delta < 0}{(17-m)^2 - 4(2)(\lambda) < 0} \Rightarrow (17-m)^2 < 64$$

$$\Rightarrow -8 < 17-m < 8 \Rightarrow -25 < -m < -9$$

$$\Rightarrow 9 < m < 25$$



نمودار دو سهمی رو به بالا و پایین، وقتی نسبت به خط افقی $y = 1$ تقارن دارد که طول رأس‌های آنها برابر باشد و $y = 1$ معدل عرض رأس‌ها باشد:



$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 + ax + 4 \Rightarrow x_{S_1} = \frac{a}{2} \\ g(x) = x^2 - 2x + b \Rightarrow x_{S_2} = 1 \end{array} \right\} \text{برابر است.} \quad \text{طول رأسها} = \frac{a}{2} = 1$$

$$\Rightarrow a = 2$$

حالا عرض رأس‌ها را حساب کنیم: $y_{S_1} = f(1) = -1 + \frac{a}{2} + 4 = 5$

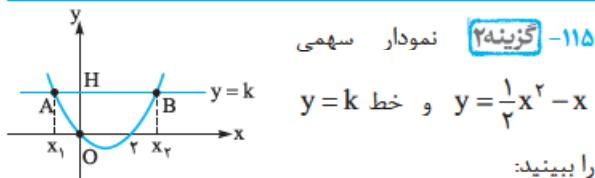
$$y_{S_2} = g(1) = 1 - 2 + b = b - 1$$

گفته‌یم $y = 1$ باید معدل y_{S_1} و y_{S_2} باشد:

$$\frac{5+b-1}{2} = 1 \Rightarrow 4+b=2 \Rightarrow b=-2$$

$$f(2) + g(-2) = -4 + 2\frac{a}{2} + 4 + 4 + 4 + \frac{b}{-2} = 10$$

و در پایان: $y = x^2 - 2x - 2$



x_1 و x_2 طول نقاط تلاقی دو نمودار یعنی ریشه‌های معادله

$$\frac{1}{2}x^2 - x - k = 0$$

است. مختصات نقاط برخورد $A(x_1, k)$ و $B(x_2, k)$

است. با توجه به شکل، مثلث OAB می‌تواند در رأس $B(x_2, k)$

$$\text{ OA } = \frac{y_O - y_A}{x_O - x_A} = \frac{k}{x_1} \quad \text{ OB } = \frac{y_B - y_O}{x_B - x_O} = \frac{k}{x_2}$$

قائمه باشد.

$$\text{OA} \perp \text{OB} \Rightarrow \frac{k}{x_1} \times \frac{k}{x_2} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{k^2}{x_1 x_2} = -1 \quad \xrightarrow{x_1 x_2 = -4k} \quad \frac{k^2}{-4k} = -1 \Rightarrow k = 2$$

$$\frac{1}{2}x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 4 = 0$$

پس داریم:

$$AB = |x_1 - x_2| = \sqrt{S^2 - 4P} = \sqrt{2^2 - 4(-4)} = \sqrt{20}$$

$$S_{OAB} = \frac{AB \times OH}{2} = \frac{\sqrt{20} \times 2}{2} = 2\sqrt{5}$$

۱۱۵- گزینه

دو حالت وجود دارد:
الف) سهمی فقط در نواحی سوم و چهارم است و مقادیر $(a-3)x^2 + ax - 1 \leq 0$ نامثبت دارد: $\begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a-3 < 0 \end{cases}$

$$1) a^2 - 4(a-3)(-1) \leq 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 12 \leq 0$$

$$\Rightarrow (a+6)(a-2) \leq 0 \quad \xrightarrow{\text{بین دوریشه}} -6 \leq a \leq 2$$

$$2) a-3 < 0 \Rightarrow a < 3$$

ب) سهمی فقط از ناحیه اول نگذشته و در ناحیه دوم می‌آید: پس باید دو ریشه منفی یا صفر داشته باشد؛ بنابراین:

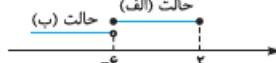
$$\Delta > 0 \Rightarrow a^2 - 4(a-3)(-1) > 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 12 > 0$$

بیرون دوریشه $\Rightarrow a < -6$ یا $a > 2$

$$S < 0 \Rightarrow S = -\frac{a}{a-3} < 0 \Rightarrow \frac{a}{a-3} > 0 \Rightarrow a > 3 \text{ یا } a < 0$$

$$P \geq 0 \Rightarrow \frac{-1}{a-3} \geq 0 \Rightarrow a-3 < 0 \Rightarrow a < 3$$

از اشتراک این شرط‌ها $-6 < a < 3$ است.



پس در کل $2 \leq a$ جواب است.

۱۱۶- گزینه

در سهمی به خاطر تقارن، هر مقدار از y ، دو بار به دست می‌آید. مثلاً در شکل بالا اگر x_1 از دامنه برداشته شود برد تغییری نمی‌کند چون بالأخره در طول x_2 همان عرض به دست می‌آید.

پس حتماً نقطه‌ای با طول $a-3$ رأس سهمی بوده که برداشتن آن، برد را به صورت بازه باز درآورده: $S(a-3, a-1)$ رأس سهمی است.

$$y = -2x^2 + ax + b \Rightarrow x_S = -\frac{a}{2(-2)} = \frac{a}{4} = a-3$$

$$\Rightarrow a = 4 \Rightarrow x_S = 1, y_S = 3$$

$$y_S = f(1) = 3 \Rightarrow -2 + \frac{a}{4} + b = 3 \Rightarrow b = 1$$

و در پایان:

$$f(a-b) = f(4-1) = f(3) = -2(3)^2 + \frac{a}{4}(3) + \frac{b}{1}$$

$$= -18 + 12 + 1 = -5$$



این تابع برای $x > 0$ و $x < 0$ به صورت های

گزینه ۱۱۶

زیر است:

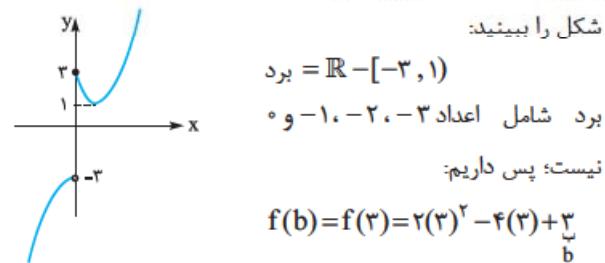
$$\xrightarrow{x>0} f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 + bx}{x} = 2x^2 - 4x + b$$

$$\xrightarrow{x<0} f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 + bx}{-x} = -2x^2 + 4x - b$$

رأس این سهمی ها در $x=1$ و عرض رأس ها به ترتیب $-b-2$ و $-b-3$ است.

شکل را ببینید: برد تابع شامل اعداد $b+1, -b-3, \dots, -b-1$ نیست. تعداد این اعداد $(b-3)-(-b)$

یعنی $2-b$ است: پس داریم:



شکل را ببینید: $b = 3$

برد شامل اعداد $-3, -2, -1, 0$ و

نیست: پس داریم:

$$f(b) = f(3) = 2(3)^2 - 4(3) + \frac{3}{b}$$

$$= 18 - 12 + 3 = 9$$