

خرید کتاب های کنکور

با تخفیف ویژه

و

ارسال رایگان

Medabook.com



مدابوک



یک جله تماس تلفنی رایگان

با مشاوران رتبه برتر

برای انتخاب بهترین منابع

دبیرستان و کنکور

۰۲۱ ۲۸۴۲۵۲۱۰



فصل ۲ فضیله نالسن، نشابه وکاربردهای آن

نسبت و تناسب در هندسه

به طور کلی در این فصل با نسبت و تناسب سروکار داریم. تناسب، تساوی دو کسر مثل $\frac{x}{t} = \frac{z}{y}$ است. ما در هندسه بیشتر با نسبت طول پاره‌ها و مساحت و این‌چیزها روبه‌رو هستیم. به عنوان مثالی از تناسب در هندسه بیایید مساحت یک مثلث را در نظر بگیریم. مثلاً مساحت مثلث ABC برابر $\frac{1}{2} a \cdot h_a$ یا $\frac{1}{2} b \cdot h_b$ است، پس $a \cdot h_a = b \cdot h_b$ که نتیجه آن تناسب $\frac{a}{h_b} = \frac{b}{h_a}$ است. تناسب ویژگی‌هایی دارد که خیلی کارراه‌انداز هستند، مثل طرفین وسطین و جابه‌جایی که همه شما با آن‌ها آشنا هستید. اما دو خاصیت هم هست که کم‌تر دیده‌اید و خیلی مفیدند؛ یکی این‌که شما در هر تناسب می‌توانید صورت را کنار مخرج یا مخرج را کنار صورت بنویسید؛ یعنی از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ، تناسب‌های $\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$ و $\frac{a}{b \pm a} = \frac{c}{d \pm c}$ به دست می‌آیند. یک خاصیت دیگر هم این است که $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$. البته این خاصیت برای بیش از دو کسر هم کاربرد دارد؛ یعنی $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$ و ...

یک تعریف هم بیاوریم و آن هم میانگین یا واسطه هندسی است. در تناسب $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ ، واسطه هندسی a و c است که به صورت $b^2 = ac$ هم نوشته می‌شود.

مثال اگر b واسطه هندسی بین a و c باشد، نشان دهید $\frac{a+b}{b+c} = \frac{a}{b}$.

پاسخ b واسطه هندسی a و c است، پس $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ و این یعنی $\frac{a+b}{b} = \frac{a+b}{b+c} \cdot \frac{b+c}{b}$. به همین راحتی!!

مثال اگر $\frac{2a}{b} = \frac{2c}{d} = k$ ، حاصل $\frac{4a^2 + 16c^2}{b^2 + 16d^2}$ را بیابید.

پاسخ از تناسب داده‌شده نتیجه می‌گیریم که $\frac{4a^2}{b^2} = k^2$ و $\frac{16c^2}{16d^2} = k^2$. پس به کمک خاصیت تناسب‌ها به این می‌رسیم که:

$$\frac{4a^2}{b^2} = \frac{16c^2}{16d^2} = \frac{4a^2 + 16c^2}{b^2 + 16d^2} = k^2$$

مثال مطابق شکل، سه نقطه A، B و C روی یک خط قرار دارند. اگر $\frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$ باشد، آن‌گاه $\frac{AB}{BC}$ را بیابید.

پاسخ کسر $\frac{AB}{BC}$ برابر است با $\frac{AB}{AC - AB}$ که می‌شود $\frac{2}{3-2}$ یعنی ۲.

در این فصل در سه قسمت کلی با تناسب کار داریم: ۱- نسبت مساحت‌ها، ۲- تالس، ۳- تشابه

نسبت مساحت‌ها

۱ هر گاه ارتفاع دو مثلث یکسان باشد، نسبت مساحت‌ها برابر نسبت قاعده‌های متناظر این ارتفاع‌هاست.

۲ هر گاه دو مثلث قاعده مشترک داشته باشند، نسبت مساحت‌ها برابر نسبت ارتفاع‌های متناظر این قاعده‌هاست.

مثال در مثلث ABC، نقطه D روی ضلع AB به گونه‌ای قرار دارد که $\frac{AD}{DB} = \frac{2}{1}$ و نقطه E روی ضلع AC به گونه‌ای قرار دارد که $\frac{AE}{EC} = \frac{1}{2}$.

مساحت مثلث ADE چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

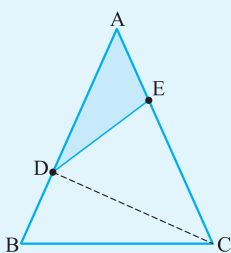
پاسخ در این سؤال ما دنبال مساحت قسمت رنگی این شکل هستیم. بیایید D را به C وصل کنیم.

حالا دو مثلث ACD و ABC را می‌بینیم که دارای ارتفاع مشترک‌اند، پس $\frac{S_{ACD}}{S_{ABC}} = \frac{AD}{AB}$ برابر است با $\frac{2}{3}$ که

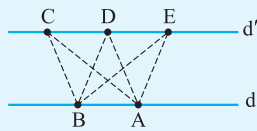
می‌شود $\frac{2}{3}$ ، چون $\frac{AD}{DB} = \frac{2}{1}$ و در نتیجه $\frac{AD}{AB} = \frac{AD}{DB+AD} = \frac{2}{1+2}$. پس از آن به دو مثلث ADE و ADC نگاه

کنید. باز هم ارتفاع مشترک است، بنابراین $\frac{S_{ADE}}{S_{ADC}} = \frac{AE}{AC}$ برابر است با $\frac{1}{3}$ و این نسبت هم مساوی $\frac{1}{3}$ است،

چون $\frac{AE}{EC} = \frac{1}{2}$ و در نهایت ما دنبال $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}$ بودیم که می‌شود $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$.



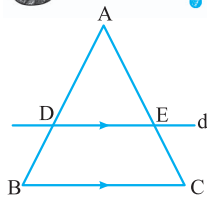
مثال دو خط d و d' با هم موازی اند. نقاط A و B روی خط d و نقاط C, D, E روی خط d' هستند. نسبت مساحت سه مثلث ABD, ABC و ABE را بیابید.



پاسخ سه مثلث گفته شده دارای قاعده مشترکی هستند، پس باید به دنبال نسبت ارتفاعها بگردیم. اما ارتفاع هر سه مثلث برابر با فاصله دو خط d و d' است و این یعنی ارتفاعها نیز برابر است. بنابراین مساحت این سه مثلث برابر خواهد بود: $S_{ABC} = S_{ABD} = S_{ABE}$.

در مورد مساحت، در فصل (۳) بیشتر صحبت می‌کنیم. در واقع در این فصل مساحت برای ما ابزاری است که به کمک آن قضیه تالس را اثبات می‌کنیم، اما در مورد خود مساحت، به طور مفصل در فصل بعدی حرف می‌زنیم و مسئله حل می‌کنیم.

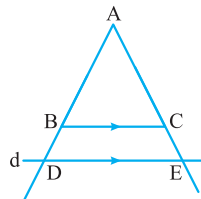
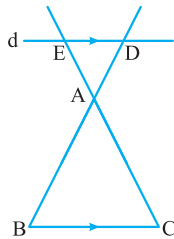
قضیه تالس



مثل شکل مقابل، در هر مثلثی که بخواهید، اگر خطی بکشید که موازی یکی از اضلاع باشد و دو ضلع دیگر را هم قطع کند، تناسب‌های زیر را داریم:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}, \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}, \quad \frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC} = \frac{BC - DE}{BC}$$

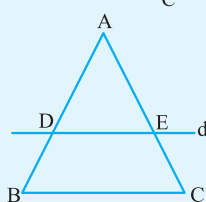
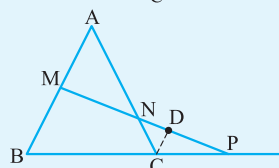
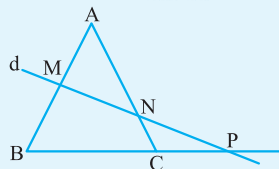
دقت کنید که این خط موازی حتی می‌تواند امتداد دو ضلع را قطع کند و ما باز هم این تناسب‌ها را داریم. یعنی دو شکل مقابل:



در مسائل کمی پیچیده، ما به راحتی نمی‌دانیم که از کدام نسبت استفاده کنیم و در واقع این هنر ماست که بفهمیم کدام تناسب برای ما کاربرد دارد و چه پاره‌خط‌هایی مورد نیاز است. یک چیز دیگر هم که کار را سخت‌تر می‌کند، این است که بعضی وقت‌ها ما را اذیت می‌کنند و آن خط موازی را نمی‌دهند. یعنی این شما هستید که باید خط موازی را پیدا کنید و بکشید.

مثال (قضیه منلائوس) در شکل مقابل خط d ، دو ضلع AB و AC و امتداد ضلع BC را به ترتیب در

نقاط M, N, P قطع کرده است. نشان دهید: $\frac{AM}{MB} \times \frac{BP}{PC} \times \frac{CN}{NA} = 1$.



پاسخ این سؤال از همان‌هایی است که ما خط موازی را نمی‌بینیم. برای حل مسئله باید از رأس C خطی موازی ضلع AB بکشیم تا پاره‌خط CD دیده شود. حالا آن خط موازی را داریم. برویم سراغ اثبات.

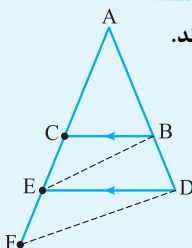
در مثلث MBP طبق قضیه تالس، $\frac{BP}{PC}$ برابر است با $\frac{MB}{DC}$. در مثلث AMN ، طبق تالس، $\frac{CN}{NA}$ برابر است

با $\frac{DC}{AM}$. پس به جای $\frac{AM}{MB} \times \frac{BP}{PC} \times \frac{CN}{NA}$ بیاید قرار بدهیم $\frac{AM}{MB} \times \frac{MB}{DC} \times \frac{DC}{AM}$ که برابر ۱ می‌شود.

عکس قضیه تالس هم درست است. یعنی اگر در شکل زیر هر کدام از تناسب‌های گفته شده برقرار باشد، خط d با ضلع BC موازی است.

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow d \parallel BC$$

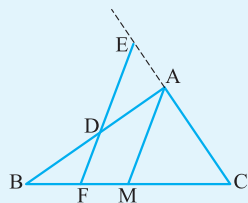
مثال در شکل مقابل پاره‌خط AE میانگین هندسی دو پاره‌خط AC و AF است. نشان دهید خطوط BE و DF موازی اند.



پاسخ با توجه به فرض $AE^2 = AC \cdot AF$ ، پس: $\frac{AE}{AF} = \frac{AC}{AE}$.

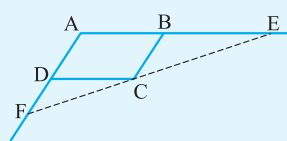
از طرفی طبق تالس $\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD}$ و این یعنی $\frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AD}$. پس طبق عکس قضیه تالس دو خط BE و DF موازی هستند.

مثال در مثلث ABC از نقطه F واقع بر ضلع BC خطی موازی میانه AM رسم می‌کنیم تا خطوط AB و امتداد AC را به ترتیب در نقاط D و E قطع کند. نشان دهید $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$.



پاسخ شکل مسئله را به صورت روبه‌رو می‌کشیم. حالا طبق قضیه تالس در مثلث‌های FEC و AMB (دنبال مثلث‌های دیگری هستید؟) به رابطه‌های $\frac{AD}{AB} = \frac{MF}{MB}$ و $\frac{AC}{AE} = \frac{CM}{MF}$ می‌رسیم. حواستان باشد که در نوشتن تالس، پاره‌خط‌هایی را انتخاب کنید که در حکم مسئله دیده می‌شوند. حالا چون $CM = MB$ است، نتیجه می‌گیریم که $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ و از آنجا $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$ می‌شود.

مثال متوازی‌الاضلاع ABCD مفروض است. از رأس C و در خارج متوازی‌الاضلاع، خطی چنان عبور می‌دهیم که امتداد اضلاع AB و AD را به ترتیب در E و F قطع کند. ثابت کنید $\frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = 1$.

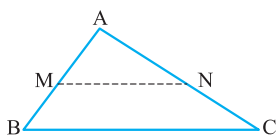


پاسخ بیاید شکل مسئله را رسم کنیم. حالا با توجه به BC و DC، دو جور تالس در مثلث AEF داریم. یعنی $\frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = \frac{FC + CE}{FE}$ بنابرین $\frac{AD}{AF} = \frac{CE}{FE}$ و $\frac{AB}{AE} = \frac{FC}{FE}$ است که می‌شود ۱.

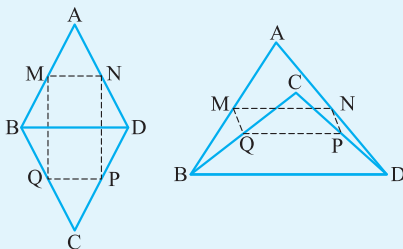
مهم‌ترین کاربردهای قضیه تالس

قضیه میان خط

نشان دهید که اگر در هر مثلث وسط دو ضلع را به هم وصل کنیم، پاره‌خطی به دست می‌آید که موازی ضلع سوم و مساوی نصف آن است. اثبات: فرض کنید در مثلث ABC، وسط دو ضلع AB و AC را به هم وصل کرده‌ایم. پس $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = 1$ و در نتیجه به کمک عکس قضیه تالس به موازی بودن MN و BC می‌رسیم. حالا به کمک خود قضیه تالس $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB}$ یا $\frac{AN}{AC}$ است، پس $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$.

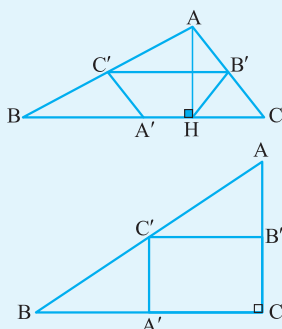


مثال مثلث‌های ABD و BCD مفروض‌اند. M، N، P و Q به ترتیب وسط اضلاع AB، AD، CD و BC را به ترتیب وسط اضلاع AB، AD، CD و BC از این دو مثلث هستند. نشان دهید این چهار نقطه رئوس یک متوازی‌الاضلاع‌اند.



پاسخ دو مثلث گفته‌شده در سؤال در ضلع BD مشترک‌اند. پس شکل مسئله دو حالت دارد. در هر دو شکل اگر دقت کنیم، طبق قضیه میان خط در مثلث‌های ABD و BCD، پاره‌خط‌های MN و PQ موازی و مساوی نصف BD هستند. پس MN و PQ با هم موازی و مساوی‌اند. همه‌شما خوب می‌دانید که اگر دو ضلع روبه‌روی یک چهارضلعی موازی و مساوی باشند، متوازی‌الاضلاع است.

مثال نشان دهید در هر مثلث اگر وسط‌های سه ضلع و پای یک ارتفاع، چهار رأس یک چهارضلعی باشند، آن چهارضلعی دوزنقه متساوی‌الساقین یا مستطیل است.

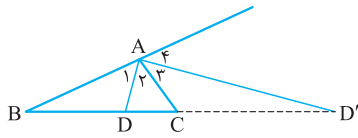


پاسخ در مثلث ABC، نقاط A'، B' و C' وسط سه ضلع مثلث هستند و AH ارتفاع مثلث است. طبق قضیه میان خط، B'C' موازی خط BC یعنی موازی A'H است. پس A'C'B'H دوزنقه است. در مثلث قائم‌الزاویه AHC، HB' میانه وارد بر وتر است، پس $HB' = \frac{AC}{2}$ و طبق قضیه میان خط $A'C' = \frac{AC}{2}$ و این یعنی دوزنقه A'B'C'H متساوی‌الساقین است. حالا اگر مثلث ABC در رأس C قائم‌الزاویه باشد، ارتفاع AH بر ضلع AC منطبق شده و دوزنقه ما تبدیل به مستطیل می‌شود.

هندسه پیشرفته دهم فصل دوم

قضیه نیمساز داخلی و خارجی

اگر در مثلث ABC، نیمساز زوایای داخلی و خارجی رأس A را بکشیم، روی ضلع BC و امتداد آن پاره‌خط‌هایی درست می‌شود که با دو ضلع AB و AC متناسب‌اند، یعنی:

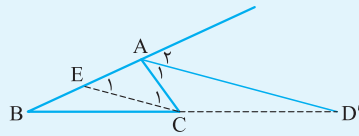


$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}, \hat{A}_3 = \hat{A}_4 \Rightarrow \frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC}$$

بیا باید قضیه مربوط به نیمساز خارجی را در مثال زیر اثبات کنیم.

مثال در مثلث ABC، نیمساز زاویه خارجی رأس A، امتداد ضلع BC را در D' قطع می‌کند. ثابت کنید $\frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC}$.

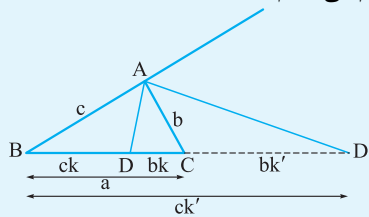
پاسخ بیا یک شکل مسئله را بکشیم. یادتان باشد در مسائل مربوط به نیمساز، خطی موازی نیمساز که از یکی از رئوس مثلث عبور کند مفید است! پس این‌جا خط CE را می‌کشیم که موازی AD' است. حالا دقت کنید که $\hat{C}_1 = \hat{A}_1$ و $\hat{E}_1 = \hat{A}_2$ می‌شود و چون $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ است، به $\hat{C}_1 = \hat{E}_1$ می‌رسیم که نتیجه آن می‌شود $AE = AC$. اگر در مثلث خطی موازی ضلع سوم ببینیم،



نامردی است که یاد تالس نیفتیم! پس در مثلث ABD' تالس را می‌نویسیم؛ یعنی $\frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AE}$ و چون $AE = AC$ است، به حکم مسئله می‌رسیم. یعنی $\frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC}$.

مثال اگر در مثلث ABC، AD و AD' به ترتیب نیمساز زوایای داخلی و خارجی A باشند، طول پاره‌خط‌های BD، CD، CD' و DD' را برحسب اضلاع مثلث بیا بید.

پاسخ با توجه به خاصیت نیمسازهای داخلی و خارجی گفته‌شده، نام‌گذاری‌های زیر را در شکل انجام می‌دهیم:

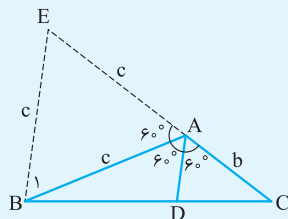


پس $k(b+c) = a$ و $k'(c-b) = a$ ، در نتیجه $k = \frac{a}{b+c}$ و $k' = \frac{a}{c-b}$. با به دست آمدن k و k'

همه قطعاتی که خواسته شده به دست می‌آیند: $BD = ck = \frac{ac}{b+c}$ ، $CD = bk = \frac{ab}{b+c}$

$$CD' = \frac{ab}{c-b}, DD' = CD + CD' = \frac{ab}{c+b} + \frac{ab}{c-b} = \frac{2abc}{c^2 - b^2}$$

مثال در مثلث ABC، $\hat{A} = 120^\circ$ ، ثابت کنید $\frac{1}{d_a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ (d_a نیمساز رأس A است).



پاسخ از رأس B خطی موازی نیمساز AD می‌کشیم تا امتداد ضلع AC را در E قطع کند.

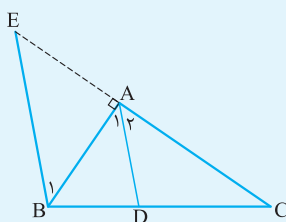
بنابراین $\hat{B}_1 = 60^\circ$. از طرفی $\hat{B}_2 = 60^\circ$ ، پس مثلث ABE متساوی‌الاضلاع است و این یعنی

$BE = AE = c$. حالا در مثلث BCE، تالس به ما می‌گوید $\frac{AD}{BE} = \frac{AC}{EC}$ و در نتیجه $\frac{d_a}{c} = \frac{b}{b+c}$.

$$\text{بنابراین } \frac{1}{d_a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \text{ یا } \frac{1}{d_a} = \frac{b+c}{bc}$$

باز هم می‌گوییم یادتان باشد که همیشه در مسائل مربوط به نیمساز، خطی که از یک رأس موازی نیمساز رسم می‌شود مشکل‌گشا است.

مثال در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) نیمساز AD را رسم می‌کنیم. ثابت کنید $\frac{\sqrt{2}}{AD} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AB}$.



پاسخ اگر شکل سؤال را رسم کنید و از رأس B خط BE را موازی نیمساز AD نکشید، ناراحت می‌شوم.

گفتم در مسئله‌های نیمساز، خطی موازی نیمساز از رأس دیگر بکشید. حالا زوایای $\hat{A}_1$ ، $\hat{A}_2$ ، $\hat{B}_1$ و $\hat{E}$ همگی 45° اند.

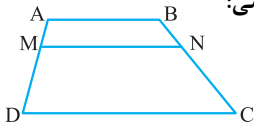
(چرا؟) پس $BE = \sqrt{2}AB$ و $AE = AB$. در مثلث BCE تالس می‌نویسیم که می‌شود $\frac{AD}{BE} = \frac{AC}{CE}$ و با

جای‌گذاری‌های $BE = \sqrt{2}AB$ و $CE = AC + AE = AC + AB$ به رابطه $\frac{AD}{\sqrt{2}AB} = \frac{AC}{AC+AB}$ می‌رسیم.

حالا دو تا کسر را معکوس کنید و سپس رابطه را بر AB تقسیم نمایید تا حکم به دست آید.

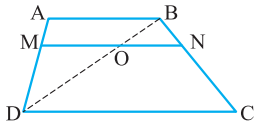
قضیه تالس در دوزنقه

اگر در یک دوزنقه خطی موازی قاعده‌ها، ساق‌ها را قطع کند، روی ساق‌ها پاره‌خط‌های متناسب به وجود می‌آورد. یعنی:

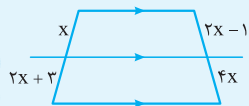


$$MN \parallel AB \parallel CD \Rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$$

اثبات: در مسئله‌های مربوط به دوزنقه، رسم یک قطر بسیار مفید است. بیایید قطر BD را بکشیم و نقطه برخورد آن با MN را O بنامیم.



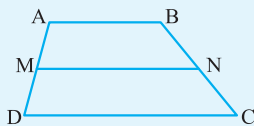
حالا در مثلث‌های ABD و BCD، $MO \parallel AB$ و $ON \parallel DC$ است. پس می‌توانیم در این مثلث‌ها از تالس استفاده کنیم؛ یعنی $\frac{AM}{MD} = \frac{BO}{OD}$ و $\frac{BN}{NC} = \frac{BO}{OD}$. با کنار هم گذاشتن دو رابطه آخر به $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$ می‌رسیم.



مثال در شکل مقابل x را بیابید.

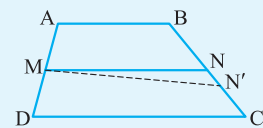
پاسخ خب به راحتی تالس در دوزنقه را می‌نویسیم و به این می‌رسیم که $\frac{x}{2x+3} = \frac{2x-1}{4x}$ و از آنجا x می‌شود $\frac{3}{4}$.

مثال نشان دهید عکس قضیه تالس هم در دوزنقه برقرار است. یعنی اگر خطی ساق‌های دوزنقه را قطع کند و روی آن‌ها پاره‌خط‌های متناسب ایجاد کند، با قاعده‌ها موازی است.



$$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC} \Rightarrow MN \parallel AB, CD$$

پاسخ اگر MN موازی قاعده‌ها نباشد، خطی مثل MN' را رسم می‌کنیم که موازی قاعده‌ها باشد. حالا طبق



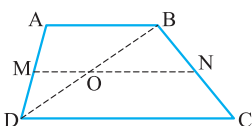
تالس در دوزنقه رابطه $\frac{AM}{MD} = \frac{BN'}{N'C}$ را داریم. از طرفی $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$ و این یعنی $\frac{BN'}{N'C} = \frac{BN}{NC}$. پس N و N' بر هم منطبق‌اند یا MN همان MN' است در نتیجه MN موازی قاعده‌هاست.

مثلث، در دوزنقه هم قضیه میان خط داریم. در مثال زیر این قضیه را ثابت می‌کنیم.

قضیه میان خط در دوزنقه

اگر وسط دو ساق یک دوزنقه را به هم وصل کنیم، پاره‌خطی به دست می‌آید که با قاعده‌ها موازی است و طول آن برابر میانگین طول دو قاعده است.

اثبات: فرض کنید در دوزنقه ABCD، M و N وسط دو ساق AD و BC باشند. پس $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC} = 1$. حالا طبق عکس قضیه تالس در دوزنقه نتیجه می‌گیریم که MN موازی قاعده‌هاست. قطر BD را می‌کشیم تا نقطه O به دست آید. حالا در دو مثلث ABD و BCD از قضیه

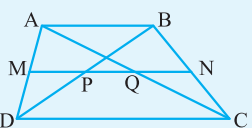


تالس استفاده می‌کنیم، چرا که $MO \parallel AB$ و $ON \parallel CD$. بنابراین $\frac{MO}{AB} = \frac{MD}{AD} = \frac{1}{2}$ و $\frac{ON}{CD} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2}$ و در

نتیجه $MO = \frac{1}{2}AB$ و $ON = \frac{1}{2}CD$ ، پس $MN = MO + ON = \frac{1}{2}(AB + CD)$.

مثال ثابت کنید دو قطر دوزنقه بر خطی که از وسط یک ساق موازی دو قاعده رسم شود، پاره‌خطی جدا می‌کنند که اندازه آن مساوی نصف تفاضل اندازه‌های دو قاعده است.

پاسخ اگر M وسط ساق AD از دوزنقه ABCD باشد و MN موازی قاعده‌ها رسم شود، طبق تالس نتیجه می‌گیریم که P وسط

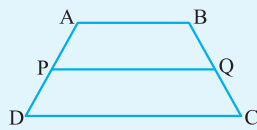


قطر BD، Q وسط قطر AC و N وسط ساق BC است. حالا بیایید در مثلث‌های ABD و ABC قضیه

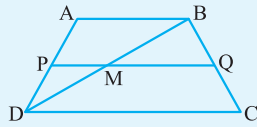
میان خط را بنویسیم، پس MP و QN نصف AB اند. در مثلث BCD هم به $PN = \frac{DC}{2}$ می‌رسیم،

پس $PQ = PN - QN$ و این یعنی $PQ = \frac{DC - AB}{2}$. نتایجی که در این مسئله به دست آمد مهم است: $MP = QN = \frac{AB}{2}$ و $PQ = \frac{DC - AB}{2}$.

هندسه پیشرفته دهم فصل دوم



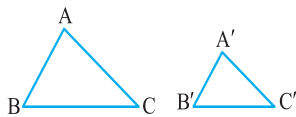
مثال در دوزنقه شکل روبه‌رو، پاره‌خط PQ موازی قاعده‌هاست. اگر $\frac{AP}{PD} = \frac{m}{n}$ ، نشان دهید $PQ = \frac{n \cdot AB + m \cdot CD}{m + n}$.



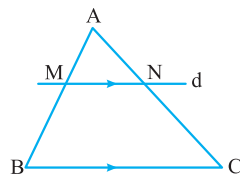
پاسخ قطر BD را بکشیم، نقطه M نمایان می‌شود. حالا در دو مثلث دیده‌شده از تالس کمک می‌گیریم. پس $\frac{PM}{AB} = \frac{PD}{AD} = \frac{n}{m+n}$ و $\frac{MQ}{DC} = \frac{BQ}{BC} = \frac{m}{m+n}$. بنابراین PQ برابر است با $PM + MQ$ که می‌شود $\frac{n \cdot AB + m \cdot CD}{m + n}$.

تشابه مثلث‌ها

شما خیلی خوب معنای تشابه مثلث‌ها را می‌دانید. دو مثلث متشابه دارای سه زاویهٔ دویه‌دو برابر و اضلاع متناسب هستند.



$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}' \\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \end{cases}$$



قضیهٔ اساسی تشابه به ما می‌گوید که اگر خطی موازی یک ضلع مثلث رسم شود و دو ضلع دیگر را قطع کند، مثلث به وجود آمده با مثلث اصلی متشابه است.

ما سه حالت داریم که در آن‌ها دو مثلث متشابه‌اند. یعنی هر کدام از سه حالت تشابه که اتفاق بیفتد ما می‌توانیم دو مثلث را در شرایط قضیهٔ اساسی تشابه قرار دهیم. این سه حالت به صورت زیر هستند:

۱ حالت دو زاویهٔ برابر

۲ حالت سه ضلع متناسب

۳ حالت دو ضلع متناسب و زاویهٔ بین برابر

وقتی دو مثلث متشابه می‌شوند، بین آن‌ها می‌توانیم یک تناسب بنویسیم که مقدار تناسب همان نسبت تشابه است. مثلاً اگر $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ باشد، تناسب $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k$ را داریم که عدد k و طبیعتاً $\frac{1}{k}$ نسبت تشابه دو مثلث است.

چند نکته

۱ اضلاع یک کسر در نسبت تشابه باید روبه‌روی زاویه‌های برابر باشند.

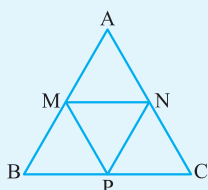
۲ در دو مثلث متشابه، نسبت هر دو جزء فرعی برابر k است. فقط باید دقت کنید که دو جزء فرعی باید متناظر هم باشند. مثلاً ارتفاع‌های AH و A'H'، نیمسازهای AD و A'D'، میانه‌های AM و A'M' که معنایش تناسب $\frac{AH}{A'H'} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{AM}{A'M'} = \dots = k$ است.

۳ نسبت محیط دو مثلث متشابه k و نسبت مساحت آن‌ها برابر k^2 است.

مثال در مثلث ABC، نقاط M، N و P نقاط وسط سه ضلع مثلث هستند:

الف) نشان دهید $\triangle MNP \sim \triangle ABC$.

ب) نشان دهید محیط مثلث MNP، نصف محیط مثلث ABC و مساحت مثلث MNP، یک چهارم مساحت مثلث ABC است.

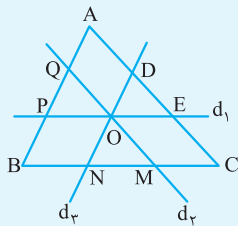


پاسخ الف) طبق قضیهٔ میان خط، پاره‌خط‌های MN، NP و MP نصف اضلاع BC، AB و AC هستند، پس

$$\frac{MP}{AC} = \frac{NP}{AB} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$$

ب) نسبت تشابه دو مثلث $\frac{1}{2}$ است، پس نسبت محیط‌ها $\frac{1}{2}$ و نسبت مساحت‌ها $\frac{1}{4}$ می‌شود.

مثال یک نقطه دلخواه داخل مثلثی با مساحت S در نظر بگیرید. از این نقطه خطوطی موازی اضلاع مثلث رسم می‌کنیم تا مثلث به شش ناحیه تقسیم شود. مساحت سه مثلث ایجاد شده را S_1 ، S_2 و S_3 می‌نامیم. نشان دهید: $S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$.



پاسخ بیاید شکل این سؤال را بکشیم که این جور می‌شود:

$$S_{\triangle OPQ} = S_3, S_{\triangle OMN} = S_2, S_{\triangle ODE} = S_1, S_{\triangle ABC} = S$$

حالا اگر به موازی بودن خطوط d_1 و d_2 با اضلاع مثلث دقت کنید، متوجه می‌شوید که مثلث‌های OPQ و OMN ، ODE با مثلث ABC متشابه هستند (چرا؟) پس بیاید نسبت تشابه‌ها را بنویسیم و رابطه

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{OD}{AB}\right)^2, \frac{S_2}{S} = \left(\frac{ON}{AB}\right)^2, \frac{S_3}{S} = \left(\frac{PQ}{AB}\right)^2$$

بین مساحت‌ها را پیدا کنیم:

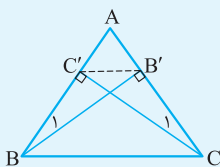
چهارضلعی‌های $ADOQ$ و $PONB$ متوازی‌الاضلاع‌اند، پس $OD = AQ$ و $ON = BP$. حالا با جای‌گذاری در رابطه بین مساحت‌ها می‌رسیم به

$$\sqrt{\frac{S_1}{S}} + \sqrt{\frac{S_2}{S}} + \sqrt{\frac{S_3}{S}} = \frac{AQ}{AB} + \frac{BP}{AB} + \frac{PQ}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{AQ + BP + PQ}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1$$

رابطه مقابل:

$$\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} \text{ می‌رسیم که همان حکم مسئله است.}$$

مثال در مثلث ABC ، ارتفاع‌های AA' ، BB' و CC' را کشیده‌ایم. نشان دهید مثلث‌های $AB'C'$ و $A'BC'$ و $A'B'C'$ با مثلث ABC متشابه‌اند. (همهٔ زاویه‌های مثلث ABC حاده‌اند).



پاسخ در مثلث ABC ، ارتفاع‌های BB' و CC' را کشیده‌ایم. دو مثلث ABB' و ACC' متشابه‌اند،

چون $\hat{B}_1 = \hat{C}_1 = \hat{A} + \hat{C}_1 = 90^\circ$ در نتیجه $\hat{B}_1 = \hat{C}_1$. از طرفی دو زاویهٔ 90° هم که دارند و این یعنی طبق حالت

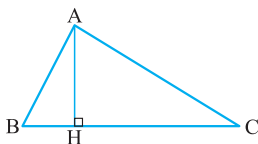
دو زاویه متشابه‌اند. حالا نسبت تشابه را برایشان می‌نویسیم که می‌شود $\frac{AB'}{AC'} = \frac{AB}{AC}$. از این نسبت تشابه،

تناسب $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$ را بیرون می‌کشیم که نتیجه‌اش تشابه دو مثلث $AB'C'$ و ABC طبق حالت (ض‌ض) است.

است. بقیهٔ تشابه‌ها هم مثل همین راه اثبات می‌شوند.

یک نکتهٔ مهم از تشابه برای مثلث‌های قائم‌الزاویه

اگر ارتفاع AH را در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) بکشیم، دو مثلث به وجود می‌آید که با مثلث ABC متشابه‌اند (چرا؟) و از نوشتن نسبت تشابه‌ها نتایج زیر به دست می‌آیند:



$$\begin{aligned} \triangle ABH &\sim \triangle ABC \\ \triangle ACH &\sim \triangle ABC \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} AH^2 = BH \cdot HC \\ AB^2 = BH \cdot BC \\ AC^2 = HC \cdot BC \end{cases}$$

جالب است که با جمع کردن رابطهٔ دوم و سوم به رابطهٔ فیثاغورس می‌رسیم.

مثال در مثلث ABC ، $AB = 3$ ، $AC = 4$ و $BC = 5$ ، اگر ارتفاع AH را رسم کنیم، طول پاره‌خط‌های BH و HC را پیدا کنید.

پاسخ از اضلاع مثلث ABC ، معلوم می‌شود که قائم‌الزاویه است و $\hat{A} = 90^\circ$ ، چون اضلاع آن فیثاغورسی‌اند! ($3^2 + 4^2 = 5^2$)، پس ارتفاع AH

وارد بر وتر است و در نتیجه روابط $AB^2 = BH \cdot BC$ و $AC^2 = CH \cdot BC$ را برای این مثلث داریم. با محاسبات ساده مقدار BH و HC به

$$\frac{9}{5} \text{ و } \frac{16}{5} \text{ به دست می‌آیند.}$$

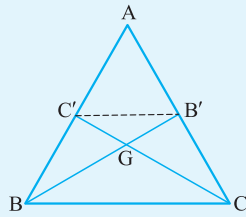
مثال حکم کلی زیر را در صورت درستی اثبات کنید و اگر نادرست است برای آن مثال نقض بیاورید:

«اگر سه زاویه و دو ضلع از مثلثی با سه زاویه و دو ضلع از مثلث دیگر برابر باشد، این دو مثلث هم‌نهشت‌اند.»

پاسخ این حکم نادرست است. دو مثلث با اضلاع (۸، ۱۲، ۱۸) و (۱۲، ۱۸، ۲۷) را در نظر بگیرید. این دو مثلث متشابه‌اند (چرا؟) پس هر

سه زاویه در دو مثلث برابرند. دو ضلع ۱۲ و ۱۸ هم در این دو مثلث یکسان هستند، اما مشخص است که هم‌نهشت نیستند.

مثال الف) نشان دهید در هر مثلث، هر دو میانه از مثلث، همدیگر را به نسبت ۱ به ۲ قطع می‌کنند.

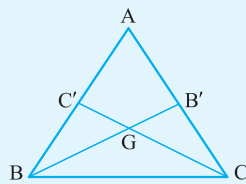


ب) نشان دهید میانه‌های هر مثلث هم‌مس‌اند.

پاسخ الف) فرض کنیم در مثلث ABC، میانه‌های BB' و CC' را کشیده‌ایم. طبق قضیه میانه خط BB' موازی BC و مساوی نصف آن است. پس مثلث‌های BGC و B'GC' متشابه‌اند (چرا؟)، حالا اگر نسبت تشابه را بنویسیم به $\frac{BG}{B'G} = \frac{CG}{C'G} = \frac{BC}{B'C'}$ می‌رسیم که $BC = 2B'C'$ و این یعنی $CG = 2C'G$ و $BG = 2B'G$ ، پس میانه‌های BB' و CC' همدیگر را به نسبت ۱ به ۲ قطع کرده‌اند.

ب) در قسمت الف دیدیم که هر دو میانه همدیگر را به نسبت ۱ به ۲ قطع می‌کنند. پس اگر در مثلث ABC، به جای میانه CC'، میانه AA' را هم بکشیم، باید AA' در نقطه G، BB' را قطع کند تا داشته باشیم $BG = 2B'G$. این یعنی هر سه میانه از نقطه G عبور کرده و هم‌مس‌اند. به نقطه‌ی G، مرکز ثقل مثلث گفته می‌شود.

مثال از مثلث ABC، طول ضلع BC و میانه‌های BB' و CC' داده شده است. توضیح دهید که چگونه می‌توانیم این مثلث را رسم کنیم.

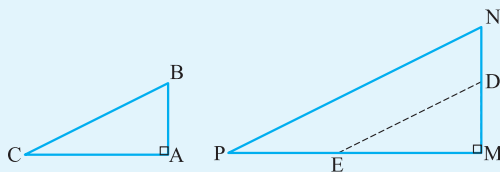


پاسخ فرض کنیم این مثلث را کشیده‌ایم. به شکل روبه‌رو نگاه کنید:

مثلث BGC را با داشتن سه ضلع می‌توانیم رسم کنیم. دقت کنید که $BG = \frac{2}{3}BB'$ و $CG = \frac{2}{3}CC'$. پس از رسم مثلث BGC، اضلاع BG و CG را به اندازه $\frac{1}{3}BB'$ و $\frac{1}{3}CC'$ ادامه می‌دهیم تا به B' و C' برسیم. حالا CB' و BC' را رسم کرده و ادامه می‌دهیم تا همدیگر را در A قطع کنند.

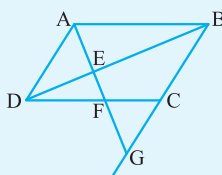
مثال ثابت کنید اگر وتر و یک ضلع دیگر از مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر و یک ضلع از مثلث قائم‌الزاویه دیگری متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

پاسخ فرض کنیم برای دو مثلث ABC و MNP داشته باشیم $\hat{M} = \hat{A} = 90^\circ$ و $\frac{BC}{NP} = \frac{AB}{MN}$ ، روی ضلع MN، نقطه D را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $MD = AB$. هم‌چنین روی ضلع MP نقطه E را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $ME = AC$. پس مثلث MDE با مثلث ABC



هم‌نهشت است. حالا با توجه به فرض، رابطه $\frac{DE}{NP} = \frac{MD}{MN}$ را داریم که طبق عکس قضیه تالس، DE با NP موازی می‌شود. پس مثلث‌های MDE و MNP متشابه‌اند که نتیجه آن تشابه ABC و MNP است.

مثال متوازی‌الاضلاع ABCD را در نظر بگیرید. از A خطی رسم می‌کنیم تا قطر BD، ضلع CD و امتداد ضلع BC را به ترتیب در E، F و G قطع کند. نشان دهید $AE^2 = EF \cdot EG$.

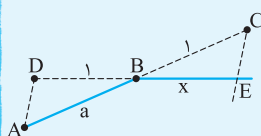


پاسخ بیاید قبل از هر چیز شکل درست مسئله را رسم کنیم:

حالا از تشابه مثلث‌های ABE و DEF به $\frac{AE}{EF} = \frac{BE}{ED}$ و از تشابه مثلث‌های ADE و BEG به $\frac{EG}{AE} = \frac{BE}{ED}$ می‌رسیم. پس $\frac{AE}{EF} = \frac{EG}{AE}$ یعنی $AE^2 = EF \cdot EG$.

مثال توضیح دهید چگونه می‌توانیم با داشتن پاره‌خطی به طول a، پاره‌خطی به طول $\frac{1}{a}$ رسم کنیم.

پاسخ فرض کنید پاره‌خط AB را به طول a داریم و می‌خواهیم پاره‌خطی به طول $\frac{1}{a}$ بکشیم. AB را تا نقطه C ادامه می‌دهیم که $BC = 1$ باشد. پاره‌خط دلخواه BD را به طول ۱ رسم می‌کنیم. حالا BD را از طرف B امتداد می‌دهیم و از نقطه C خطی موازی AD می‌کشیم تا



خط DB را در E قطع کند. طول BE برابر $\frac{1}{a}$ است، چون دو مثلث ABD و BCE متشابه‌اند و با توجه به نسبت تشابه، رابطه $\frac{AB}{BC} = \frac{DB}{BE}$ را داریم. پس $\frac{a}{1} = \frac{1}{x}$ و در نتیجه $x = \frac{1}{a}$.

مثال در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. اگر D ، D_1 و D_2 به ترتیب محل هم‌رسی نیم‌سازهای داخلی مثلث‌های ABC ، ABH و ACH باشند، نشان دهید $AD = D_1D_2$.

پاسخ دو مثلث ABH و ABC متشابه‌اند، پس نسبت تمام قطعات فرعی متناظرشان برابر نسبت تشابه است.

در نتیجه $\frac{HD_1}{AD} = \frac{AB}{BC}$. دقیقاً به همین شکل برای دو مثلث ACH و ABC می‌توانیم بگوییم $\frac{HD_2}{AD} = \frac{AC}{BC}$.

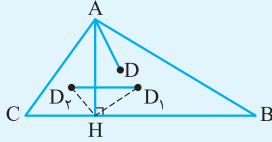
به دو نکته دقت کنید:

۱. مثلث ABC قائم‌الزاویه است، پس $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

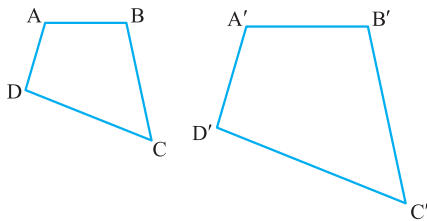
۲. $\angle D_1HD_2 = 90^\circ$ (چرا؟)، پس $D_1D_2^2 = HD_1^2 + HD_2^2$.

با توجه به این نکته‌ها می‌توانیم رابطه زیر را بنویسیم:

$$\left(\frac{HD_1}{AD}\right)^2 + \left(\frac{HD_2}{AD}\right)^2 = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 \Rightarrow \frac{HD_1^2 + HD_2^2}{AD^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2} = 1 \Rightarrow \underbrace{HD_1^2 + HD_2^2}_{D_1D_2^2} = AD^2 \Rightarrow D_1D_2 = AD$$



چندضلعی‌های متشابه



اگر دو چندضلعی متشابه باشند، همه زاویه‌های آن‌ها دو به دو با هم برابرند و اضلاع متناسب هستند. مثلاً اگر چهارضلعی‌های $ABCD$ و $A'B'C'D'$ متشابه باشند، $\hat{A} = \hat{A}'$ ، $\hat{B} = \hat{B}'$ ، $\hat{C} = \hat{C}'$ و $\hat{D} = \hat{D}'$ است و می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}$$

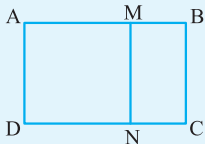
نسبت محیط‌ها مثل مثلث‌ها برابر نسبت تشابه و نسبت مساحت‌ها برابر مجذور نسبت تشابه است.

مثال در مستطیل $ABCD$ ، نقاط M و N را روی اضلاع AB و DC به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $BMNC$ مستطیل و با مستطیل $ABCD$ متشابه باشد. اگر $\frac{AB}{AD} = k$ باشد، حاصل $\frac{AM}{MB}$ را بیابید.

پاسخ وقتی دو مستطیل $ABCD$ و $BMNC$ متشابه‌اند، پس $\frac{AB}{MN} = \frac{AD}{MB}$.

از آنجایی که $AD = MN$ است، به این می‌رسیم که $\frac{AD}{MB} = k$ ، پس $\frac{AB}{MB} = \frac{AD}{MB} = k$ ، چون AB برابر k برابر AD است، پس MB برابر k برابر AD است. بنابراین $\frac{AM}{MB} = \frac{AB - MB}{MB} = \frac{k^2 - 1}{k^2}$.

حواستان باشد که گفتیم $\frac{AB}{MB} = \frac{k^2}{1}$.



پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- اگر $\frac{a_1}{1} = \frac{a_2}{2} = \dots = \frac{a_n}{n}$ ، آنگاه حاصل $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ چند برابر a_1 است؟

- (۱) n (۲) $n(n+1)$ (۳) $\frac{n(n+1)}{2}$ (۴) $2n$

۲- اگر b واسطه هندسی بین a و c باشد، کدام رابطه نادرست است؟

- (۱) $\frac{a+b}{b+c} = \frac{a}{b}$ (۲) $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b}$ (۳) $\frac{b-c}{a-b} = \frac{b}{c}$ (۴) $\frac{b+c}{a+b} = \frac{c}{b}$

۳- اگر $\frac{a}{b} = \frac{rc}{rd} = k$ ، آنگاه حاصل $\frac{\sqrt{a^2 + 8a^2c^2 + 16c^2}}{b^2 + 9d^2}$ کدام است؟

- (۱) k (۲) $2k$ (۳) k^2 (۴) $4k^2$

۴- اگر $k > 0$ ، $\frac{a}{2b} = \frac{rc}{d} = \frac{re}{2f} = k$ ، حاصل $\frac{\sqrt{a^2 + 9c^2 + 9e^2}}{\sqrt{4b^2 + d^2 + 4f^2}}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{k}$ (۲) k (۳) $2\sqrt{k}$ (۴) $4k$

۵- اگر $AB = a$ و $\frac{MA}{MB} = k$ ($k > 1$)، طول پاره خط MB کدام است؟ (M بین A و B)

- (۱) $\frac{ka}{k+1}$ (۲) $\frac{a}{k+1}$ (۳) $\frac{a}{k-1}$ (۴) $\frac{ka}{k-1}$

۶- اگر $AB = a$ و $\frac{NA}{NB} = k$ ($k > 1$)، طول NA کدام است؟ (N روی امتداد AB)

- (۱) $\frac{ka}{k+1}$ (۲) $\frac{a}{k+1}$ (۳) $\frac{a}{k-1}$ (۴) $\frac{ka}{k-1}$

۷- اگر $AB = a$ و N نقطه‌ای روی امتداد AB باشد به گونه‌ای که $\frac{NA}{NB} = k$ ($k < 1$)، طول NB کدام است؟

- (۱) $\frac{ka}{1+k}$ (۲) $\frac{a}{1+k}$ (۳) $\frac{a}{1-k}$ (۴) $\frac{ka}{1-k}$

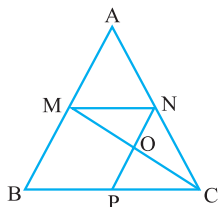
۸- اگر AB و MN دو پاره خط باشند که روی یک خط قرار دارند، $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = k$ و طول پاره خط $AB = a$ ، آنگاه طول پاره خط MN کدام است؟

- (۱) $\frac{ak}{k^2-1}$ (۲) $\frac{2ak}{k^2-1}$ (۳) $\frac{ak}{1-k^2}$ (۴) $\frac{2ak}{|1-k^2|}$

۹- در شکل مقابل، $MNPB$ متوازی‌الاضلاع است. اگر مساحت مثلث OMN ، ۶۰ درصد مساحت مثلث AMN باشد،

نسبت PC به MN کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) 2



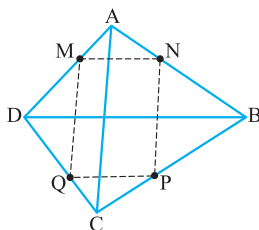
۱۰- وسط‌های اضلاع هر چهارضلعی الزاماً رؤس کدام چهارضلعی هستند؟

- (۱) لوزی (۲) متوازی‌الاضلاع (۳) مستطیل (۴) مربع

۱۱- در شکل مقابل، $MNPQ$ یک لوزی است که اضلاع آن موازی قطرهای $ABCD$ است. اگر $\frac{AM}{MD} = \frac{3}{5}$ ، نسبت

قطر AC به BD کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{5}{3}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{5}{2}$



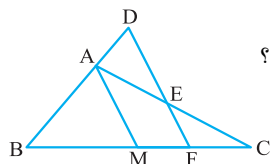
۱۲- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، مربعی چنان محاط کرده‌ایم که یک رأس آن روی وتر مثلث و یک رأس آن روی رأس A قرار دارد. اگر

ضلع مربع x باشد، آن گاه حاصل $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$ کدام است؟

- (۱) x (۲) $\frac{1}{x}$ (۳) $2x$ (۴) $\frac{2}{x}$

۱۳- در مثلث ABC ، از نقطه M وسط ضلع BC ، خطی به موازات نیمساز داخلی A رسم می‌کنیم تا اضلاع AB و AC یا امتداد آن‌ها را به ترتیب در نقاط E و F قطع کند. اگر $AC = 9$ و $BE = 8$ ، طول CF کدام است؟

- (۱) 5 (۲) 6 (۳) 7 (۴) 8



۱۴- در شکل مقابل، AM میانه مثلث ABC است. اگر $AM \parallel DF$ ، $\frac{AD}{AE} = \frac{2}{3}$ و $AB = 9$ ، اندازه ضلع AC کدام است؟

(۲) ۹

(۱) ۶

(۴) ۱۵

(۳) ۱۳/۵

۱۵- در مثلث ABC، نقطه M را روی AB به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که $\frac{AM}{MB} = k$. از M خطی به موازات BC رسم می‌کنیم تا AC را در N قطع کند

و از N موازی AB رسم می‌کنیم تا BC را در P قطع کند، از P نیز موازی AC رسم می‌کنیم تا نقطه Q روی AB به دست آید. نسبت $\frac{AM}{BQ}$ کدام است؟

(۴) $\frac{1}{k+1}$

(۳) $\frac{k-1}{k+1}$

(۲) $\frac{k+1}{k-1}$

(۱) ۱

۱۶- در شکل مقابل، پاره‌خط‌های M_1M_2 و M_2M_3 با ضلع BC، پاره‌خط‌های M_2M_3 و M_3M_4 با ضلع AB و

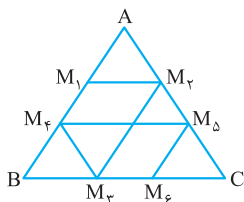
پاره‌خط M_3M_4 با ضلع AC موازی هستند. اگر $AC = 5$ و $M_2M_3 = 2$ ، فاصله M_1 از M_4 کدام است؟

(۱) ۳

(۲) ۳/۵

(۳) ۴

(۴) ۴/۵



۱۷- در مثلث ABC، نقطه‌ای مانند D_1 را بر ضلع BC انتخاب می‌کنیم و از آن خطی موازی ضلع AC رسم می‌کنیم تا ضلع AB را در نقطه D_2 قطع کند.

از D_2 خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در نقطه D_3 قطع کند و این عمل را تکرار می‌کنیم. پس از چند مرحله به نقطه D_1 برمی‌گردیم؟

(۴) ممکن است به D_1 نرسیم.

(۳) حداکثر ۶

(۲) ۶

(۱) ۳

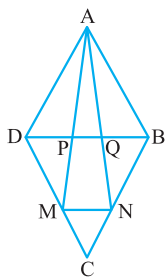
۱۸- در لوزی شکل مقابل، $MN \parallel BD$ است. اگر $\frac{PQ}{BD} = x$ باشد، $\frac{CM}{MD}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1-x}{x}$

(۲) $\frac{1-x}{2x}$

(۳) $\frac{x}{1-x}$

(۴) $\frac{2x}{1-x}$



۱۹- در مثلث ABC، D نقطه وسط ضلع AB و E نقطه‌ای روی BC است به طوری که $BE = 2EC$. اگر $\hat{ADC} = \hat{BAE}$ ، آنگاه زاویه BAC کدام است؟

(المپیاد ۸۰)

(۴) 120°

(۳) 90°

(۲) 75°

(۱) 60°

۲۰- در مثلث ABC، M وسط ضلع AB است. ضلع BC را به اندازه خودش از طرف C امتداد می‌دهیم تا نقطه N به دست آید. پاره‌خط MN

ضلع AC را در E قطع می‌کند. AE چند برابر CE است؟

(۴) $\frac{3}{2}$

(۳) $\frac{2}{3}$

(۲) $\frac{1}{2}$

(۱) ۲

(المپیاد ۸۱)

۲۱- بزرگ‌ترین مربعی که بتواند در مثلثی به مساحت ۱ محاط شود، چه مساحتی دارد؟

(۴) $\frac{2}{3}$

(۳) $\frac{1}{4}$

(۲) $\frac{1}{3}$

(۱) $\frac{1}{4}$

۲۲- در شکل مقابل، اضلاع AC و BC به سه قسمت مساوی و ضلع AB به چهار قسمت مساوی تقسیم شده

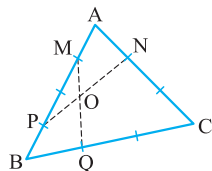
است. نسبت مساحت چهارضلعی AMON به BPOQ کدام است؟

(۲) $\frac{3}{2}$

(۱) $\frac{2}{3}$

(۳) ۱

(۴) به نوع مثلث وابسته است.



۲۳- در مثلثی به اضلاع a، b و c که $c > b > a$ ، طول قطعه کوچک‌تری که نیمساز زاویه متناظر به بزرگ‌ترین ضلع روی آن ایجاد می‌کند کدام است؟

(۴) $\frac{ab}{b+c}$

(۳) $\frac{bc}{a+b}$

(۲) $\frac{ac}{a+b}$

(۱) $\frac{ab}{a+c}$

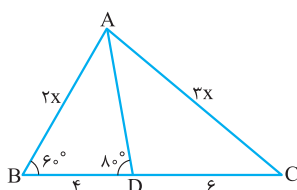
۲۴- در شکل مقابل، اندازه AD کدام است؟

(۱) ۴

(۲) ۶

(۳) $\frac{3}{2}$

(۴) ۳



۲۵- در مثلث به اضلاع $a > b > c$ ، طول قطعه‌ای که نیمساز کوچک‌ترین زاویه خارجی روی امتداد ضلع روبه‌روی آن به وجود می‌آورد، کدام است؟

(۱) $\frac{ac}{b-c}$ (۲) $\frac{bc}{a-b}$ (۳) $\frac{ab}{a-c}$ (۴) $\frac{ac}{a-b}$

۲۶- در مثلث ABC، میانه AM و نیمسازهای دو زاویه AMD و AMB را رسم می‌کنیم تا دو ضلع AB و AC را به ترتیب در D و E قطع کند. اگر $AM = 4$ و $BC = 6$ ، حاصل $\frac{DE}{BC}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{4}{5}$

۲۷- در مثلث ABC، محل برخورد نیمسازهاست. اگر $AI = \frac{2}{3}d_a$ باشد، محیط مثلث برحسب ضلع a کدام است؟ (d_a نیمساز مربوط به رأس A است.)

(۱) $\frac{2}{5}a$ (۲) $3a$ (۳) $\frac{3}{5}a$ (۴) $4a$

۲۸- در یک مثلث قائم‌الزاویه، نیمساز وارد بر وتر روی آن قطعاتی به اندازه a و b به وجود می‌آورد. مساحت این مثلث کدام است؟

(۱) $\frac{(a+b)^2}{2(a^2+b^2)}$ (۲) $\frac{(a+b)^2 ab}{2(a^2+b^2)}$ (۳) $\frac{(a+b)ab}{a^2+b^2}$ (۴) $\frac{(a+b)ab}{2(a^2+b^2)}$

۲۹- در مثلث ABC داریم $AB > AC$. پای نیمساز زاویه‌های داخلی و خارجی A را به ترتیب D و D' می‌نامیم. مقدار $\frac{DD'}{CD} - \frac{DD'}{BD}$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۱ (۳) $\frac{AB}{AC}$ (۴) $\frac{AC}{AB}$

۳۰- در مثلث ABC، $\hat{A} = 2\hat{B}$. کدام رابطه بین سه ضلع این مثلث برقرار است؟

(۱) $a^2 = bc$ (۲) $b^2 = ac$ (۳) $a^2 - b^2 = bc$ (۴) $a^2 - c^2 = bc$

۳۱- در مثلث ABC، $\hat{A} = 90^\circ$ ، $c = 3$ و $b = 4$ است. ارتفاع AH و نیمساز داخلی AD رسم شده است. اندازه DH کدام است؟

(۱) $\frac{15}{28}$ (۲) $\frac{5}{14}$ (۳) $\frac{7}{15}$ (۴) $\frac{12}{35}$

۳۲- در مثلث ABC، $\hat{A} = 120^\circ$. اگر $AC = 6$ و $AB = 3$ ، طول نیمساز AD کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۳- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، اگر اضلاع قائم ۳ و ۶ باشند، طول نیمساز AD کدام است؟

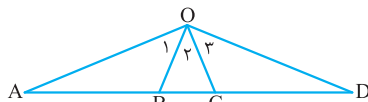
(۱) $\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) ۲ (۴) ۴

۳۴- در مثلث ABC، $\hat{A} = 2\hat{C}$ و $BC = 2 + AB$ و $AC = 5$. محیط مثلث کدام است؟

(۱) ۱۲ (۲) ۱۵ (۳) ۱۶ (۴) ۱۸

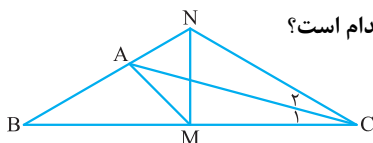
۳۵- در شکل مقابل، $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \hat{O}_3 = 45^\circ$ و $OA = OD$. اگر $AB = 4$ ، BC کدام است؟

(۱) ۱ (۲) $2(\sqrt{2}-1)$ (۳) ۲ (۴) $4(\sqrt{2}-1)$



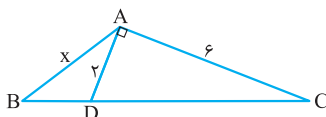
۳۶- در شکل مقابل، $\hat{C}_1 = \hat{C}_2 = 15^\circ$ و $\hat{B} = 30^\circ$. اگر AM میانه مثلث ABC باشد، اندازه زاویه AMB کدام است؟

(۱) 30° (۲) 45° (۳) 60° (۴) 75°



۳۷- در مثلث ABC، به اضلاع $AB = 5$ ، $AC = 12$ و $BC = 13$ ، نقطه M را روی ضلع AC به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که از رأس A و ضلع BC به یک فاصله باشد. مساحت مثلث AMB چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

(۱) $\frac{5}{18}$ (۲) $\frac{5}{36}$ (۳) $\frac{5}{26}$ (۴) $\frac{10}{26}$



۳۸- در مثلث ABC، $\hat{A} = 135^\circ$ و $AB < AC = 6$. اگر طول AD برابر ۲ باشد، طول ضلع AB کدام است؟

(۱) $3\sqrt{2}$ (۲) ۳ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) ۲

۳۹- در مثلث ABC، $AB = 4$ ، $AC = 6$ و $\hat{A} = 120^\circ$ است. اگر AD نیمساز داخلی زاویه A باشد، اندازه AD کدام است؟

(۱) $\frac{2}{2}$ (۲) $\frac{2}{4}$ (۳) $\frac{2}{6}$ (۴) $\frac{2}{8}$

۴۰- در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$)، نیمساز زاویه C مثلث را به دو مثلث متساوی‌الساقین دیگر تقسیم کرده است. نسبت $\frac{BC}{AB}$ کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (المپیاد ۸۳)

سؤالات نشریه‌ی

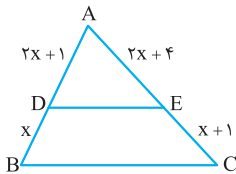
۱- a, b, c, d, e, f اعدادی حقیقی‌اند، به طوری که $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$. هم‌چنین p, q, r اعداد حقیقی‌اند که هم‌زمان صفر نیستند و n عدد طبیعی

است. نشان دهید $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{pa^n + qc^n + re^n}{pb^n + qd^n + rf^n}$.

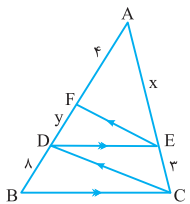
۲- نشان دهید بر هر پاره‌خط AB و بر امتداد آن دو نقطه منحصر به فرد M و N وجود دارند به طوری که $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = k$ (k عددی مثبت و مخالف ۱)

۳- اگر $AB = a$ و $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = k$ ، طول پاره‌خط‌های MA, MB, NA, NB و نسبت‌های $\frac{MA}{NB}$ و $\frac{MB}{NA}$ را برحسب a و k محاسبه کنید.

۴- در شکل مقابل، پاره‌خط‌های DE و BC موازی‌اند. مقدار x را بیابید.

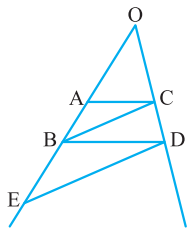


۵- در شکل مقابل، مقدار x و y را بیابید.



۶- توضیح دهید که چگونه یک پاره‌خط را می‌توانیم به سه قسمت مساوی تقسیم کنیم (دقت داشته باشید که امکانات اندازه‌گیری نداریم).

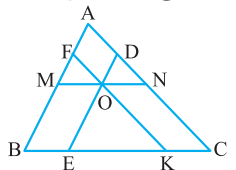
۷- در مثلث ABC نقطه‌ای مانند D_1 را بر ضلع BC انتخاب می‌کنیم و از آن خطی موازی ضلع AC رسم می‌کنیم تا ضلع AB را در نقطه D_2 قطع کند. از D_2 خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در نقطه D_3 قطع کند و این عمل را مرتباً تکرار می‌کنیم. ثابت کنید پس از چند مرحله به نقطه D_1 برمی‌گردیم.



۸- در شکل مقابل $BC \parallel ED$ و $AC \parallel BD$ است. نشان دهید: $OB^2 = OA \cdot OE$.

۹- در مثلث ABC از نقطه M وسط ضلع BC ، خطی موازی نیمساز درونی زاویه A رسم می‌کنیم. این خط ضلع AC را در نقطه P و امتداد ضلع AB را در نقطه Q قطع می‌کند. ثابت کنید $BQ = CP$.

۱۰- از نقطه O واقع در داخل مثلث ABC مطابق شکل خطوط DE, FK و MN را به ترتیب موازی اضلاع AB, CA, BC رسم می‌کنیم. نشان دهید:



الف) $\frac{AF}{AB} + \frac{BE}{BC} + \frac{CN}{CA} = 1$

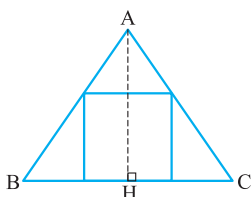
ب) $\frac{BF}{AB} + \frac{CE}{BC} + \frac{AN}{CA} = 2$

۱۱- در شکل مقابل AD و BE موازی هستند. نشان دهید:

الف) $BE \cdot DC = CF \cdot BD$

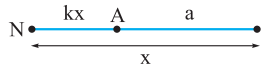
ب) $\frac{1}{AD} = \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF}$

۱۲- در شکل زیر اندازه ضلع مربع را برحسب a و h_a محاسبه کنید (a ضلع BC و h_a ارتفاع وارد بر آن است).



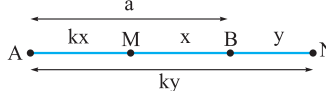
پاسخ نامه پرسش های چهارگزینه ای

۷- **گزینه ۳** این بار N نزدیک A است، چون $k < 1$. پس شکل ما به صورت روبه رو است:



از شکل مشخص می شود که $x - kx = a$ و این یعنی $x = \frac{a}{1-k}$.

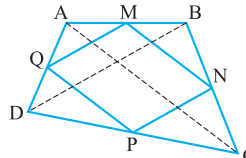
۸- **گزینه ۴** دیدیم که یک نقطه باید داخل پاره خط AB و یک نقطه بیرون آن قرار بگیرد. حالا یک بار فرض می کنیم $k > 1$ و یک بار $k < 1$. اگر



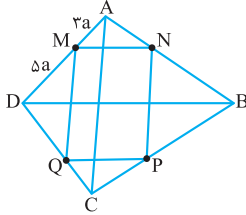
$k > 1$ باشد، شکل بالا را داریم که $x = \frac{a}{k+1}$ و $y = \frac{a}{k-1}$ و در نتیجه $MN = x + y = \frac{2ak}{k^2 - 1}$. اگر $k < 1$ باشد، N سمت A قرار دارد و به رابطه $MN = \frac{2ak}{1 - k^2}$ می رسیم، پس $MN = \frac{2ak}{|1 - k^2|}$.

۹- **گزینه ۳** این مسئله خیلی راحت تر از شکل پیچیده اش است. فقط باید یک چیزی را خوب دقت کنید و آن هم این است که در نسبت مساحت ها چگونه به نسبت پاره خط های مناسب برسید. در این جا مساحت OMN ، ۶۰ درصد مساحت AMN است، پس $\frac{ON}{AM} = \frac{3}{5}$ ، چون ارتفاع ها مشترک اند (فاصله دو خط موازی). خوب مسئله تمام است، چون $\frac{PC}{BC} = \frac{NC}{AC}$ و $\frac{NC}{AC} = \frac{ON}{AM}$ پس $\frac{PC}{BC} = \frac{3}{5}$ و در نتیجه $\frac{PC}{BP} = \frac{3}{2}$ که $BP = MN$.

۱۰- **گزینه ۲** در شکل زیر اگر قطرهای $ABCD$ را بکشیم، در هر مثلث طبق قضیه میان خط به این نتیجه می رسیم که PN و MQ و AC موازی و $MNPQ$ متوازی الاضلاع است.



۱۱- **گزینه ۱** در هر مثلثی که دلتان بخواهد می توانید تالس بنویسید. در مثلث ABD رابطه $\frac{MN}{DB} = \frac{AM}{AD} = \frac{3}{8}$ و در مثلث ACD رابطه $\frac{MQ}{AC} = \frac{MD}{AD} = \frac{5}{8}$ را داریم. پس با توجه به این که $MN = MQ$ می شود $\frac{3}{5}$.



۱- **گزینه ۳** به کمک خاصیت تناسب ها به رابطه $\frac{a_1}{1} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{1 + 2 + \dots + n}$ می رسمیم. پس جواب مسئله $\frac{n(n+1)}{2}$ است که می شود $\frac{n(n+1)}{2}$.

اگر نمی دانید مجموع اعداد ۱ تا n برابر $\frac{n(n+1)}{2}$ می شود، به روابط مقابل دقت کنید:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = A$$

$$n + (n-1) + \dots + 3 + 2 + 1 = A$$

حالا همه اعداد را با هم جمع می کنیم و اعداد سمت چپ دوبره دو $n+1$ می سازند. پس سمت چپ n تا $n+1$ داریم که نتیجه آن می شود $n(n+1) = 2A$.

۲- **گزینه ۳** وقتی b واسطه هندسی a و c است، یعنی $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ ، در نتیجه $\frac{a \pm b}{b \pm c} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$. این تناسب درستی گزینه های ۱، ۲ و ۴ را نشان می دهد. اما برای گزینه ۳، یک مثال نقض بزنیم که خیال شما هم راحت باشد. فرض کنید $a=1$ ، $b=2$ ، $c=4$ باشد، پس $\frac{b-c}{a-b} = \frac{2-4}{1-2} = 2$ و $\frac{b}{c} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

۳- **گزینه ۳** مقدار $a^4 + 8a^2c^2 + 16c^4$ برابر است با $(a^2 + 4c^2)^2$ و در نتیجه صورت کسر $a^2 + 4c^2$ می شود. حالا در تناسبی که سؤال داده اگر همه چیز را به توان ۲ برسانیم به $\frac{a^2}{b^2} = \frac{4c^2}{9d^2} = k^2$ می رسیم. از خاصیت تناسب ها استفاده می کنیم و می نویسیم $\frac{a^2}{b^2} = \frac{4c^2}{9d^2} = \frac{a^2 + 4c^2}{b^2 + 9d^2}$ و در نتیجه کسر داده شده برابر k^2 است.

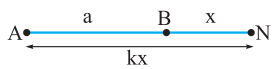
۴- **گزینه ۲** کافی است همه کسرها را در تناسب داده شده به توان ۲ برسانید که به رابطه $k^2 = \frac{9e^2}{4f^2} = \frac{9c^2}{4b^2}$ می رسید. حالا با استفاده از خاصیت تناسب ها می توانیم بگوییم $\frac{a^2 + 9c^2 + 9e^2}{4b^2 + d^2 + 4f^2} = k^2$ کسر داده شده در صورت سؤال جذر کسری است که این جا پیدا کرده ایم، پس جواب k است.

۵- **گزینه ۲** پاره خط AB را به شکل زیر نام گذاری می کنیم:



پس $kx + x = a$ یعنی $x = \frac{a}{k+1}$ ، بنابراین $MB = x = \frac{a}{k+1}$.

۶- **گزینه ۴** روی شکل نام گذاری های زیر را انجام می دهیم. پس $kx - x = a$ و این یعنی $x = \frac{a}{k-1}$ ، بنابراین $NA = kx = \frac{ka}{k-1}$ دقت کنید که چون $k > 1$ است، N باید از دورتر باشد.



قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن

گزینه ۲ - ۱۲

حالا اگر این دو تناسب را جمع کنیم،

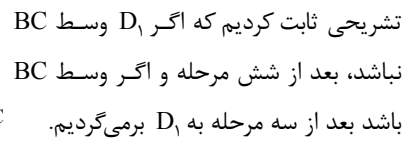
$$\frac{x}{AB} + \frac{x}{AC} = \frac{BD+DC}{BC} = 1$$

را می‌بینیم،

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{x}$$

پس

۱۷- گزینه ۳



پس حداکثر پ

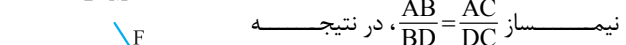


گزینہ ۴ - ۱۸

۱۳- گزینه ۴

را بنویسیم. از این دو رابطه نتیجه می‌گیریم

که $BE = \frac{AB}{BD} \times BM$ و $CF = \frac{AC}{DC} \times MC$.



شکل را به صورت مقابل هم کشید که در این حالت به $9 > 8$ می‌رسیدیم!!

گزینه ۳ - ۱۴

دست می‌آید روابط $\frac{AB}{AD} = \frac{BM}{MF}$ و $\frac{CM}{MF} = \frac{AC}{AE}$ هستند.

از آن جایی که $BM = CM$ می‌توانیم بگوییم $\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD}$ و

در نتیجه $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$. بنابراین با

توجه به این که $\frac{AD}{AE} = \frac{2}{3}$

۱۵- گزینه ۱

۱۵- گزینه ۱

صورت روبه‌رو می‌شود که به راحتی

می‌توانیم با نام‌گذاری مناسب جواب مسئله

را پیدا کنیم.

حالا طبق تالس $\frac{BQ}{OA} = k$ به دست می آید، پس $BQ = x$ و $AQ = x$.

این یعنی $BQ = AM$ ، پس $\frac{AM}{BO}$ برابر ۱ می شود.

۱۶- گزینہ ۱

موازی AC است.

۱۹- گزینه ۳

از نقطه D خطی به موازات AE می کشیم

زیرا D وسط AB است. از طرفی چون $BE = 2EC$ می‌فهمیم

که $DF = FC$. مثلث AFD را اگر ببینید از برابری زاویه‌های A_1 و D_1

مثثل ADC ، AF که میانه است برابر

نصف DC است. در نتیجه مثلث ADC

قائم الزاویه و $\hat{BAC} = 90^\circ$ می شود.

سازمان اسناد و کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران

۲۰- گزینه ۱

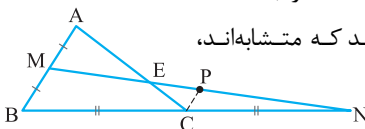
نقطه C خط موازی AB ممکشم تا با خط CP را بسنم. د.

شماره ۱۳۰: BMN | شماره ۱۳۱: PC | شماره ۱۳۲: MB

یعنی PC نصف AM است. حالا اگر به AME

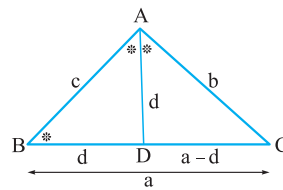
و PCE نگاه کنید. ببینید که متشابه‌اند،

$$\frac{AE}{CE} = \frac{AM}{BC} = 2 \text{ یس}$$



۳۰- گزینه ۳

در شکل زاویه‌های ستاره‌دار با هم برابرند.

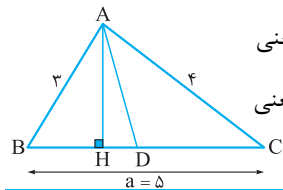


دو مثلث ABC و ADC با هم متشابه‌اند، پس $\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{BC}$ و در نتیجه $\frac{BD}{AB} = \frac{AC}{BC}$

بنابراین $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$ و این یعنی $ad = bc$. از طرفی طبق قضیه نیمساز $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$ ، پس $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$ یا $\frac{a-d}{b} = \frac{b}{a}$ که نتیجه‌اش می‌شود $a^2 - ad = b^2$. حالا اگر به جای ad مقدار bc را قرار دهیم، به رابطه $a^2 - bc = b^2$ یا $a^2 = b^2 + bc$ یا $a^2 - b^2 = bc$ می‌رسیم.

۳۱- گزینه ۴

در مثلث ABC، $AB^2 = BH \times BC$ است،



پس $BH = \frac{9}{5}$. از طرفی $BD = \frac{3}{5} BC$ یعنی

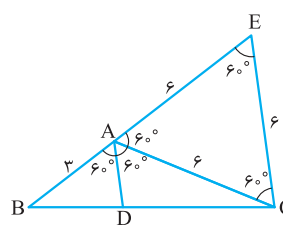
$BD = \frac{15}{7}$ بنابراین $DH = BD - BH$ یعنی

$$DH = \frac{15}{7} - \frac{9}{5} = \frac{12}{35}$$

۳۲- گزینه ۲

اگر از رأس C خط موازی AD

بکشیم، مثلث ACE پیدا می‌شود که متساوی‌الاضلاع است، چون همه زاویه‌های آن 60° هستند ($\angle ACE = \angle CAD$ و $\angle AEC = \angle BAD$)، بنابراین



$AE = EC = 6$. حالا در مثلث BCE تالس را می‌نویسیم و AD را

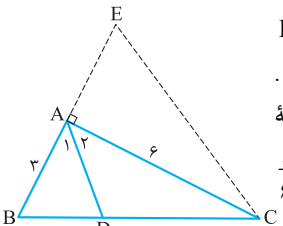
پیدا می‌کنیم. پس $\frac{AD}{EC} = \frac{AB}{BE}$ و

در نتیجه $\frac{AD}{6} = \frac{3}{9}$ که از آن $AD = 2$ می‌شود.

۳۳- گزینه ۲

مثلث ABC را به همراه خط موازی CE موازی

نیمساز می‌کشیم. دیگر با خط CE کاملاً آشنا می‌شویم. خوب دقت کنید که



$\hat{E} = \hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 45^\circ$ ، پس $\hat{E} = \hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 45^\circ$ و این یعنی $AE = 6$ و $CE = 6\sqrt{2}$.

بنابراین با نوشتن تالس به رابطه

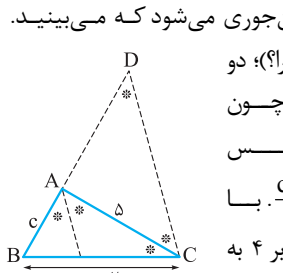
$$\frac{AD}{6\sqrt{2}} = \frac{AB}{BE} \quad \text{یا همان} \quad \frac{AD}{6\sqrt{2}} = \frac{AB}{BE}$$

می‌رسیم، در نتیجه $AD = 2\sqrt{2}$.

۳۴- گزینه ۲

از آنجایی که $\hat{A} = 2\hat{C}$ ، نیمساز زاویه A به

ما زوایایی می‌دهد که با زاویه C برابرند. پس نیمساز این زاویه را می‌کشیم و وقتی در مسئله نیمساز دیده شد، خطی از رأس C موازی نیمساز می‌کشیم. پس شکل مسئله این‌جوری می‌شود که می‌بینید.



زاویه‌های ستاره‌دار با هم برابرند (چرا؟)؛ دو مثلث ABC و BCD متشابه‌اند، چون

$\hat{B} = \hat{B}$ و $\hat{B} = \hat{A}$ پس $\frac{BC}{AB} = \frac{BD}{BC}$ در نتیجه $\frac{c+2}{c} = \frac{5+c}{c+2}$ یا

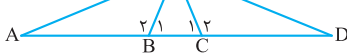
طرفین وسطین کردن و حل معادله، C برابر 4 به دست می‌آید. بنابراین محیط مثلث می‌شود 15.

۳۵- گزینه ۲

اول از همه دقت کنید که مثلث‌های OAB

و OCD همنهشت‌اند، چون $OA = OD$ پس $\hat{A} = \hat{D}$ و در نتیجه $AB = CD$. اگر مثلث OAC را نگاه کنید، OB نیمساز زاویه داخلی O و OD نیمساز زاویه خارجی O است (چرا؟)؛ پس می‌توانیم بنویسیم $\frac{AD}{CD} = \frac{OA}{OC}$ و $\frac{AB}{BC} = \frac{OA}{OC}$ در نتیجه $\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BC}$.

دقت کنید که اگر $BC = x$ باشد، AD می‌شود $x + 4$. پس $\frac{x+4}{x} = \frac{4}{x}$ و از این‌جا $x^2 + 4x - 16 = 0$ که مقدار x برابر $4\sqrt{2} - 4$ به دست می‌آید، پس $x = 4\sqrt{2} - 4$.



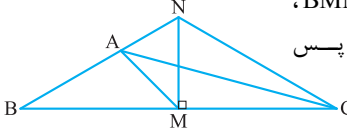
۳۶- گزینه ۲

در مثلث NBC، CA، نیمساز است، پس

$$\frac{BA}{AN} = \frac{CB}{CN}$$

متساوی‌الساقین است ($\hat{N} = \hat{C}$). پس در مثلث قائم‌الزاویه MNC، MN نصف CN است (چرا؟)؛ از طرفی MB هم نصف CB است، بنابراین $\frac{MB}{MN} = \frac{CB}{CN}$ این‌ها یعنی $\frac{BA}{AN} = \frac{MB}{MN}$ و

در نتیجه در مثلث BMN، خط MA نیمساز است، پس $\hat{AMB} = \frac{90^\circ}{2}$.



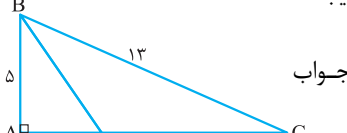
۳۷- گزینه ۱

این مثلث قائم‌الزاویه است، چون اضلاع آن

به قول خودمان فیثاغورسی‌اند، پس $\hat{A} = 90^\circ$. وقتی می‌گوییم M از رأس A و ضلع BC به یک فاصله است، یعنی M روی نیمساز

زاویه B است (چرا؟)؛ بنابراین $\frac{AM}{MC} = \frac{5}{13}$ و به جای MC می‌گذاریم $13 - AM$ ، پس $\frac{AM}{13 - AM} = \frac{5}{13}$ از این‌جا AM برابر $\frac{10}{3}$ به دست می‌آید. در نتیجه

$\frac{S_{AMB}}{S_{ABC}} = \frac{AM}{AC} = \frac{10}{12}$ پس جواب $\frac{5}{18}$ یا $\frac{10}{36}$ است.

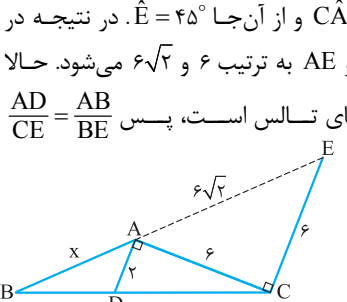


۳۸- گزینه ۲

بیا از رأس C خطی به موازات AD

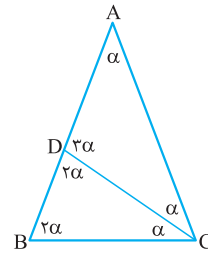
بکشیم تا امتداد AB را در E قطع کند. اگر می‌پرسید چرا، باید بگوییم که در این فصل کار ما کشیدن خطوطی است که از رأس می‌گذرد و موازی پاره‌خطی است که درون مثلث داده شده است. چون با این کار شرایط نوشتن برای تالس دوست‌داشتنی فراهم می‌شود. حالا دقت کنید که $\hat{B} = 45^\circ$ ، پس $\hat{C} = 45^\circ$ و از آن‌جا $\hat{E} = 45^\circ$. در نتیجه در مثلث ACE طول اضلاع CE و AE به ترتیب 6 و $6\sqrt{2}$ می‌شود. حالا

وقت نوشتن رابطه زیبای تالس است، پس $\frac{AD}{CE} = \frac{AB}{BE}$ و در نتیجه $\frac{2}{6} = \frac{x}{x + 6\sqrt{2}}$ از این معادله، مقدار x برابر $3\sqrt{2}$ می‌شود.



۳۹- گزینه ۲

در مثلث ABC، از رأس B خطی به موازات نیمساز AD می کشیم تا BE به وجود آید. دیگر با این کار آشنایی کامل دارید. پس مثلث ABE متساوی الاضلاع می شود (چرا؟)؛ حالا در مثلث BCE تالس می نویسیم که می شود $\frac{AD}{4} = \frac{6}{6+4}$ و این یعنی $AD = 2/4$.



۴۰- گزینه ۲ با توجه به

توضیحات سؤال، اندازه زاویه های درون مثلث باید مثل شکل روبه رو باشد (چرا؟) بنابراین می توانیم بگوییم

$AB=AC=b$ ، $AD=DC=BC=a$

و $BD=b-a$. حالا از قضیه نیمساز

داخلی رابطه $\frac{BD}{AD} = \frac{BC}{AC}$ را داریم که نتیجه آن می شود $\frac{b-a}{a} = \frac{a}{b}$.

اگر به خواسته سؤال دقت کنید، ما به دنبال $\frac{a}{b}$ هستیم، پس

می توانیم $\frac{a}{b}$ را برابر x قرار دهیم که نتیجه آن معادله $x - 1 = \frac{1}{x}$ است.

بنابراین $x^2 + x - 1 = 0$ است که مقدار x می شود $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

۴۱- گزینه ۱

در شکل زیر ضلع BA را تا نقطه D ادامه

می دهیم به طوری که $CDA = 3\alpha$ ، پس $CAD = 3\alpha$ و $ACD = \alpha$.

چون $18^\circ = 3\alpha$ ، در نتیجه $BD = DC$ (چون $\angle DBC = \angle DCB$) و

$AC = DC$. حالا در مثلث BCD، CA نیمساز زاویه C

است و این یعنی $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$ ، پس

$\frac{b-c}{c} = \frac{b}{a}$ و در نتیجه $a = \frac{bc}{b-c}$.



۴۲- گزینه ۳

در شکل روبه رو

مثلث ACD را جداگانه نگاه کنید. اضلاع

این مثلث همان سه پارامتری است که در

سؤال درگیر هستند. حالا به زوایای زیر

توجه کنید:

$$\hat{B} = \frac{(7-2) \times 18^\circ}{7} = \frac{5 \times 18^\circ}{7} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1 = \frac{18^\circ}{7} \Rightarrow \hat{C}_7 = \frac{4 \times 18^\circ}{7}$$

$$\hat{A}_7 = \hat{C}_7 = \frac{18^\circ}{7} \Rightarrow ABCD \Rightarrow \text{دوزنقه متساوی الساقین}$$

پس $\hat{D}_1 = \frac{2 \times 18^\circ}{7}$ می شود. این ها یعنی زوایای مثلث ACD با

اعداد ۴، ۲ و ۱ متناسب اند، بنابراین این سؤال مثل سؤال قبلی

می شود. در آن جا به این رسیدیم که:

$$\frac{d_1 - a}{a} = \frac{d_1}{d_7} \Rightarrow \frac{d_1}{a} - 1 = \frac{d_1}{d_7} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_7}$$

$$\text{در نتیجه } a = \frac{d_1 d_7}{d_1 + d_7}$$

۴۳- گزینه ۳

اگر قطر BD را رسم کنیم، دو مثلث

می بینیم که می توانیم در آن ها تالس بنویسیم. در مثلث ABD،

رابطه $\frac{MO}{AB} = \frac{2a}{3a}$ و در مثلث BCD، رابطه $\frac{ON}{DC} = \frac{b}{3b}$ را داریم. پس

$MO = \frac{2}{3} \times 3 = 2$ و $ON = \frac{1}{3} \times 6 = 2$ و در نتیجه $MN = 4$.

در حالت کلی طول پاره خط MN برابر است با $\frac{n \cdot AB + m \cdot DC}{m + n}$ که در

آن $\frac{AM}{MD} = \frac{m}{n}$. این رابطه را در سؤال های تشریحی ثابت کردیم.

۴۴- گزینه ۳ نسبت مساحت دو مثلث گفته شده برابر

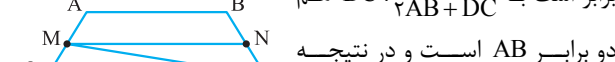
است با نسبت پاره خط های QP به MN، زیرا ارتفاع دو مثلث یکسان

است. از طرفی $QP = \frac{2DC + AB}{3}$ و $MN = \frac{2AB + DC}{3}$ ، پس $\frac{QP}{MN}$

برابر است با $\frac{2DC + AB}{2AB + DC}$. DC هم

دو برابر AB است و در نتیجه

حاصل کسر $\frac{5}{4}$ می شود.



۴۵- گزینه ۲ اگر قاعده کوچک را a و قاعده بزرگ را b

بنامیم، طبق آن چیزی که ثابت کردیم $MN = \frac{3a + 2b}{5}$. حالا باید

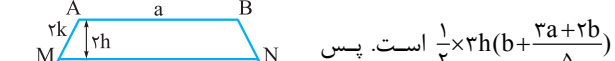
نسبت مساحت ها را به کار بگیریم. مساحت دوزنقه ABNM با توجه

به شکل برابر $\frac{1}{2} \times 2h(a + \frac{3a + 2b}{5})$ و مساحت دوزنقه MNDC برابر

$\frac{1}{2} \times 2h(b + \frac{3a + 2b}{5})$ است. پس

$2(a + \frac{3a + 2b}{5}) = \frac{2}{3}(b + \frac{3a + 2b}{5})$

و با ساده کردن این رابطه می رسیم به $13b = 23a$.



۴۶- گزینه ۲

در مثلث

ABD به رابطه $\frac{MP}{AB} = \frac{MD}{AD} = \frac{1}{3}$ و

در مثلث ADC به $\frac{MQ}{DC} = \frac{AM}{AD} = \frac{2}{3}$

می رسیم.

در نتیجه $MP = 1$ و $MQ = 6$ که مقدار PQ برابر $6 - 1 = 5$ می شود.

۴۷- گزینه ۳ ارتفاع دوزنقه های ABQP و PQCD برابرند

(چرا؟) پس باید به دنبال نسبت مجموع قاعده های آن ها باشیم. دیدیم

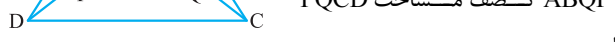
که $PQ = \frac{DC - AB}{2}$. اگر بگیریم $AB = a$ ، $DC = 3a$ می شود و از آن جا

$PQ = a$. در نتیجه $AB + PQ = 2a$

و $PQ + DC = 4a$ ؛ بنابراین مساحت

ABQP نصف مساحت PQCD

است.



پاسخ نامه سؤالات نشریحی

پس $y = \frac{a}{k-1}$ و در نتیجه $NA = \frac{ka}{k-1}$ و $NB = \frac{a}{k-1}$ ، هم چنین

$$MN = \frac{yak}{k^2-1} \text{ یعنی } MN = x + y$$

اگر $k < 1$ باشد، شکل مسئله این جوری است:

$$(k+1)x = a \Rightarrow x = \frac{a}{k+1} \Rightarrow MA = \frac{ka}{k+1}, MB = \frac{a}{k+1}$$

$$(1-k)y = a \Rightarrow y = \frac{a}{1-k} \Rightarrow NA = \frac{ka}{1-k}, NB = \frac{a}{1-k}$$

هم چنین $MN = y - x$

در حالت اول $MN = \frac{yak}{k^2-1}$ و در حالت دوم $MN = \frac{yak}{1-k^2}$ به دست

می آید.

برای نسبت های $\frac{MA}{NA}$ و $\frac{MB}{NB}$ باید بنویسیم:

$$\frac{MA}{NA} = \frac{MB}{NB} = \frac{x}{y} = \frac{k-1}{k+1}$$

حالت اول

$$\frac{MA}{NA} = \frac{MB}{NB} = \frac{x}{y} = \frac{1-k}{1+k}$$

حالت دوم

۴- طبق رابطه تالس در مثلث می رسمیم به $\frac{2x+1}{x} = \frac{2x+4}{x+1}$ ،

پس $2x^2 + 3x + 1 = 2x^2 + 4x$ ؛ در نتیجه $x = 1$.

۵- در دو مثلث ABC و ADC با نوشتن تالس به رابطه زیر

می رسمیم:

$$\frac{4}{y} = \frac{x}{3} \text{ و } \frac{4+y}{8} = \frac{x}{3}$$

در نتیجه $\frac{4}{y} = \frac{4+y}{8}$ و با طرفین وسطین کردن، معادله

$$y^2 + 4y - 32 = 0 \text{ به دست می آید. با تجزیه این معادله}$$

به $(y-4)(y+8) = 0$ می رسمیم که حاصل آن $y = 4$ است. پس x هم

برابر ۳ به دست می آید.

۶- فرض کنید می خواهیم پاره خط AB را به سه قسمت مساوی

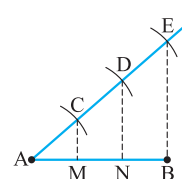
تقسیم کنیم. خطی دلخواه رسم می کنیم که از نقطه A عبور کند. حالا

کمان دلخواهی به مرکز A می کشیم تا نقطه C پیدا شود. بعد از آن

کمانی با همان شعاع و مرکز C می زنیم تا به نقطه D برسیم و به

همین شکل نقطه E را کشف می کنیم! پس $AC = CD = DE$. حالا

از E به B وصل کرده و از D و C موازی EB می کشیم تا نقاط M



و N به دست آیند. به شما قول می دهم

که $AM = MN = NB$ چون طبق تالس

$$\frac{AN}{AB} = \frac{AD}{AE} = \frac{2}{3} \text{ و } \frac{AM}{AB} = \frac{AC}{AE} = \frac{1}{3}$$

۱- کسره های $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ را به توان n می رسانیم، پس تناسب برقرار

است، یعنی $\frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n} = \frac{e^n}{f^n}$. حالا صورت و مخرج کسر $\frac{a^n}{b^n}$ را در p ،

کسر $\frac{c^n}{d^n}$ را در q و کسر $\frac{e^n}{f^n}$ را در r ضرب می کنیم. قبول دارید که کسرها

تکان نمی خورند؟ پس باید بنویسیم $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{pa^n}{pb^n} = \frac{qc^n}{qd^n} = \frac{re^n}{rf^n}$ و در

نتیجه با توجه به خاصیت تناسب، همه صورت ها را با هم و همه مخرج ها را با هم جمع می کنیم و به حکم می رسمیم.

حواستان باشد که هر کدام از اعداد p ، q و r که صفر باشد، کسر مربوط به آن را از بازی خارج می کنیم.

۲- برای دو حالت $k > 1$ و $k < 1$ مسئله را حل می کنیم.

حالت اول

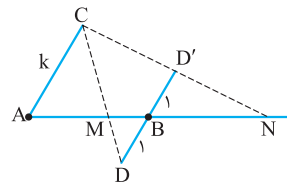
$k > 1$: مانند شکل روبه رو

پاره خط AC را به اندازه k واحد

رسم می کنیم. سپس خط DD' را

موازی AC می کشیم و روی آن دو

پاره خط BD و BD' را به اندازه ۱



واحد جدا می کنیم. حالا C را به D و D' وصل می کنیم و ادامه

می دهیم تا خط AB را در M و N قطع کند. دقت کنید که

مثلث های AMC و BMD متشابه اند (چرا؟)؛ پس $\frac{MA}{MB} = \frac{AC}{BD} = k$

و طبق تالس در مثلث ACN، $\frac{NB}{NA} = \frac{BD'}{AC} = \frac{1}{k}$ است که این

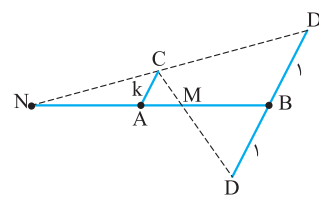
$$\text{یعنی } \frac{NA}{NB} = k$$

حالت دوم

$k < 1$: روش کار

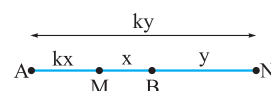
کاملاً مشابه است و فقط شکل

مسئله کمی فرق دارد!



۳- در دو حالت $k > 1$ و $k < 1$ مسئله را حل می کنیم.

اگر $k > 1$ باشد، شکل پاره خط AB و M و N به صورت روبه رو است:



حالا $\frac{MA}{MB} = k$ است. پس بیایید MA را برابر kx و MB را برابر x

بگیریم. از این جا AB برابر $(k+1)x$ به دست می آید. یعنی

$(k+1)x = a$ و این یعنی $x = \frac{a}{k+1}$. پس $MA = kx = \frac{ka}{k+1}$ و

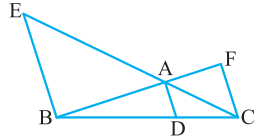
$MB = x = \frac{a}{k+1}$. دقیقاً با همین روش NA و NB به دست می آید.

$$NA = ky, NB = y$$

$$\Rightarrow AB = NA - NB = (k-1)y \Rightarrow a = (k-1)y$$

۱۱- الف) دو مثلث برای تالس نوشتن دیده می شود. پس سریع برویم

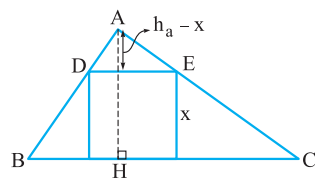
سراغ رابطه شیرین تالس! $\frac{AD}{CF} = \frac{BD}{BC}$ و $\frac{AD}{BE} = \frac{DC}{BC}$. حالا با توجه به



این دو رابطه و طرفین وسطین در آن ها، رابطه $BE \cdot DC = CF \cdot BD$ به دست می آید.

ب) این جا دو رابطه به دست آمده از تالس ها را با هم جمع می کنیم که می شود $\frac{AD}{BE} + \frac{AD}{CF} = 1$ پس $\frac{AD}{BE} + \frac{AD}{CF} = \frac{BD+DC}{BC}$ بر AD تقسیم کنیم همان رابطه خواسته شده دیده می شود.

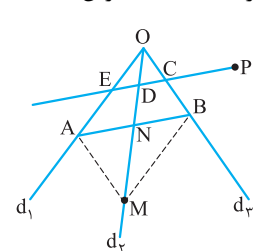
۱۲- در این شکلی که ما کشیده ایم، x را ضلع مربع می نامیم. پس



طبق تشابه مثلث های ADE و ABC و نوشتن نسبت تشابه به $\frac{h_a - x}{h_a} = \frac{x}{a}$ می رسمیم و این

یعنی $\frac{1}{x} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{a}$ پس $\frac{1}{x} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{a}$. این رابطه را بد نیست به خاطر داشته باید که از آن x می شود $\frac{a \cdot h_a}{a + h_a}$.

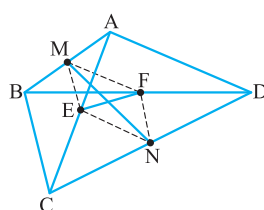
۱۳- فرض کنید سه خط d_1 و d_2 و d_3 در نقطه O هم رس باشند.



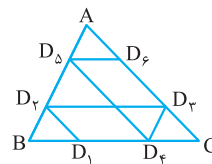
نقطه دلخواهی روی d_3 انتخاب کنید و اسم آن را M بگذارید. حالا از M موازی d_1 و d_2 خطوطی رسم کنید تا نقاط A و B به دست آیند: چهارضلعی $OAMB$ متوازی الاضلاع است،

پس $AN = NB$. حالا از P خطی موازی AB بکشید. این خط همان جواب مسئله است، چون طبق تالس $\frac{ED}{AN} = \frac{OD}{ON}$ و $\frac{CD}{NB} = \frac{OD}{ON}$ که با توجه به $AN = NB$ به $ED = DC$ می رسمیم.

۱۴- در چهارضلعی $ABCD$ ، بیایید ثابت کنیم MN از وسط EF می گذرد. M و N وسط دو ضلع AB و CD و E و F وسط دو قطر AC و BD هستند. به مثلث های ABD و ACD نگاه کنید. قضیه میان خط به ما می گوید که MF و EN موازی و مساوی نصف AD هستند، پس MF و EN با هم موازی و مساوی اند. این یعنی چهارضلعی $MFNE$ متوازی الاضلاع است. حالا یادتان هست که قطره های متوازی الاضلاع همدیگر را نصف می کنند؛ در نتیجه MN از



وسط FE عبور می کند. دقیقاً به روش مشابه می توانید بگویید پاره خطی که وسط اضلاع AD و BC را به هم وصل می کند نیز از وسط EF می گذرد.



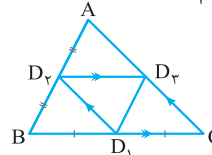
۷- در مثلث ABC ، نقطه D_1 را که وسط BC است، انتخاب می کنیم و کار گفته شده در مسئله را انجام می دهیم تا به D_6 برسیم.

D_6 یک جوری است که انگار یک مرحله دیگر، کار را ادامه بدهیم، به D_1 برمی گردیم. بیایید این را ثابت کنیم. با کمک گرفتن از قضیه تالس و نوشتن یک سری تناسب به رابطه $\frac{BD_1}{D_1C} = \frac{AD_6}{D_6C}$ می رسمیم که با توجه به عکس قضیه تالس نتیجه می گیریم D_6D_1 موازی AB است. پس بعد از شش مرحله به D_1 می رسمیم.

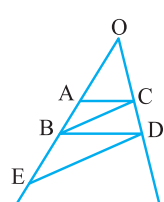
$$D_1D_2 \parallel AC \Rightarrow \frac{BD_1}{D_1C} = \frac{BD_2}{D_2A}, D_5D_6 \parallel BC \Rightarrow \frac{AD_5}{D_5B} = \frac{AD_6}{D_6C}$$

$$D_2D_3 \parallel BC \Rightarrow \frac{BD_2}{D_2A} = \frac{CD_3}{D_3A}, D_4D_5 \parallel AC \Rightarrow \frac{CD_4}{D_4B} = \frac{AD_5}{D_5B}$$

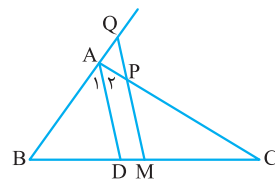
$$D_3D_4 \parallel AB \Rightarrow \frac{CD_3}{D_3A} = \frac{CD_4}{D_4B}$$



حالا اگر D_1 وسط BC باشد، پس از سه مرحله به جای اولمان می رسمیم.



۸- در مثلث های OBD و ODE تالس را بنویسید. رابطه های $\frac{OB}{OE} = \frac{OC}{OD}$ و $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$ نتیجه کار شماست، پس $\frac{OB}{OE} = \frac{OA}{OB}$ و در نتیجه $OB^2 = OA \cdot OE$.



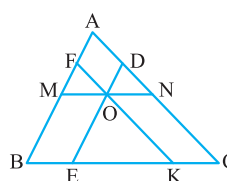
۹- شکل این سؤال به صورت روبه رو است. مثلث های BMQ و ACD برای نوشتن تالس داد می زند! پس منتظرشان نمی گذاریم، فقط باید حواسمان به انتخاب پاره خطها باشد.

$$\frac{AB}{BQ} = \frac{BD}{BM} \Rightarrow BQ = \frac{BM \times AB}{BD}$$

$$\frac{CP}{AC} = \frac{MC}{DC} \Rightarrow CP = \frac{MC \times AC}{DC}$$

M وسط ضلع BC است، پس $BM = MC$ و AD نیمساز است، پس $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ یا بهتر بگوییم $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC}$ ، در نتیجه $BQ = CP$.

۱۰- الف) FK موازی AC است، پس طبق تالس $\frac{AF}{AB} = \frac{KC}{BC}$. $OKCN$ متوازی الاضلاع است، پس $NC = OK$. مثلث OEK با ABC متشابه است (چرا؟)؛ پس $\frac{OK}{AC} = \frac{EK}{BC}$. پس به



جای $\frac{AF}{AB}$ می گذاریم $\frac{KC}{BC}$ و به جای $\frac{CN}{CA}$ قرار می دهیم $\frac{OK}{AC}$ که می شود $\frac{EK}{BC}$. پس حاصل جمع این سه کسر برابر ۱ می شود.

ب) $\frac{BF}{AB}$ می شود $1 - \frac{AF}{AB}$ ، $\frac{CE}{BC}$ می شود $1 - \frac{BE}{BC}$ و $\frac{AN}{AC}$ می شود $1 - \frac{CN}{CA}$ ؛ بنابراین جمع این سه کسر می شود $3 - 1 = 2$.