

خرید کتاب های کنکور

با تخفیف ویژه

و

ارسال رایگان

Medabook.com

+



یک جله تماس تلفنی رایگان

با مشاوران رتبه برتر

برای انتخاب بهترین منابع

دبیرستان و کنکور

۰۲۱ ۲۸۴۲۵۲۱۰





آزمون (۱) نوبت اول

۱	هر یک از جاهای خالی را با کلمه‌های مناسب پر کنید. الف) اگر صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل ..... است. ب) اگر صفحه P هر دو تنگه بالا و پایین یک مقطع مخروطی را قطع کند، فصل مشترک صفحه و سطح مقطع مخروطی یک ..... است.	۱
۲	اگر A و B ماتریس‌های $3 \times 3$ و تعویض پذیر باشند $(A \times B = B \times A)$ ، ثابت کنید: الف) $(A + B)^T = A^T + 2AB + B^T$ ب) $(A - B)(A + B) = A^T - B^T$	۲
۱/۲۵	اگر $A = \begin{bmatrix} 2x-y & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $A = B$ در این صورت حاصل $(x+y+z)$ را بیابید.	۳
۱/۲۵	اگر ماتریس $AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس B را به دست آورید.	۴
۲	فرض کنید A ماتریس مربعی باشد و عدد طبیعی مانند n موجود باشد که $A^n = \bar{O}$ ثابت کنید $I - A$ وارون پذیر است و سپس وارون $I - A$ را به دست آورید.	۵
۱/۵	به ازای کدام مقدار a دستگاه $\begin{bmatrix} -2 & -a \\ a-5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2 \\ 2 \end{bmatrix}$ جواب ندارد؟	۶
۱/۵	دستگاه $\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.	۷
۱/۵	دو خط d و d' در یک صفحه‌اند و بر هم عمودند، مکان هندسی نقاطی از این صفحه را به دست آورید که فاصله آنها از خط d، ۴ برابر فاصله آنها از خط d' باشد.	۸
۱/۵	معادله دایره‌ای را بنویسید که خطوط $x+y=1$ و $x-y=3$ شامل قترهایی از آن بوده و خط $4x+3y=6$ بر آن مماس باشد.	۹
۲	وضعیت دو دایره زیر را نسبت به هم مشخص کنید. $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$ $x^2 + y^2 - 10x - 14y + 73 = 0$	۱۰
۱/۵	معادله دایره‌ای به مرکز $O(2, -1)$ و شعاع ۲ را بنویسید و مختصات برخورد آن را با محورهای x و y به دست آورید.	۱۱
۱/۲۵	حدود m را طوری به دست آورید که معادله $x^2 + y^2 - 3x + 5y + m = 0$ معادله یک دایره باشد.	۱۲
۰/۲۵	اگر I ماتریس همانی و $3 \times 3$ و $k \in \mathbb{R}$ نشان دهید $ kI  = k^3$ .	۱۳



آزمون (۴) نوبت اول

- ۱/۵ ۱ اگر  $A$  ماتریس مربعی از مرتبه ۳ بوده و  $|A| = -۳$  و  $(A - I)^2 = -۳A$  باشد، حاصل  $|A^2 + I|$  را پیدا کنید.
- ۰/۷۵ ۲ اگر  $A$  ماتریس  $۳ \times ۳$  و اسکالر باشد و  $a_{۱۱} = ۴$ ، در این صورت  $|A|$  را بیابید.
- ۱/۵ ۳ با یک مثال نقض نشان دهید که در حالت کلی از تساوی  $AB = AC$  نمی‌توان نتیجه گرفت  $B = C$ . به عبارت دیگر قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشد.
- ۱/۵ ۴ اگر  $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۲ & ۷ \end{bmatrix}$  و از رابطه  $A + mA^{-1} = \lambda I$  تبعیت کند، عدد حقیقی  $m$  را به دست آورید.
- ۱/۵ ۵ اگر دترمینان ماتریس  $A = \begin{bmatrix} -۱ & m & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$  با دترمینان ماتریس وارون  $A$  برابر باشد،  $m$  را به دست آورید.
- ۱/۵ ۶ دستگاه  $\begin{cases} \frac{x}{۲} - \frac{y}{۳} = \frac{۱}{۶} \\ ۲x + y = ۳ \end{cases}$  را به روش ماتریس معکوس حل کنید.
- ۱/۵ ۷ به ازای کدام مقدار  $a$  معادله ماتریسی  $\begin{bmatrix} a & ۲ \\ ۳ & a+۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+۲ \\ ۲ \end{bmatrix}$  جواب ندارد؟
- ۲ ۸ دو خط متقاطع  $d$  و  $d'$  را در نظر بگیرید. چند نقطه در صفحه این دو خط وجود دارد که از  $d$  به فاصله ۴ سانتی‌متر و از  $d'$  به فاصله ۸ سانتی‌متر باشند؟
- ۱/۵ ۹ وضعیت نقطه  $A(-۱, -۱)$  را نسبت به دایره  $x^2 + y^2 - ۲x + ۴y - ۵ = ۰$  تعیین کنید.
- ۲ ۱۰ دو دایره  $x^2 + y^2 - ۶x + ۵ = ۰$  و  $x^2 + y^2 = a^2$  مماس داخل هستند.  $a$  را به دست آورید.
- ۱ ۱۱ معادله دایره‌ای را بنویسید که نقطه  $O(۱, -۱)$  مرکز آن بوده و بر خط به معادله  $۳x - ۴y + ۳ = ۰$  مماس باشد.
- ۱/۵ ۱۲ در صورت دایره بودن رابطه ضمنی  $۲x^2 + ۲y^2 - ۳x + ۴y - ۲ = ۰$  شعاع و مرکز دایره را به دست آورید.
- ۲/۲۵ ۱۳ شعاع دایره‌ای که از سه نقطه  $(۰, ۰)$ ،  $(۱, ۱)$ ،  $(۲, -۲)$  می‌گذرد را به دست آورید.



آزمون (۶) نوبت اول (هماهنگ کشوری دی ماه سال ۱۳۹۷)

۰/۵  
۲  
۱/۲۵  
۰/۷۵  
۱/۵  
۱  
۱/۵  
۱  
۱/۲۵  
۱/۵  
۱/۲۵  
۱  
۱/۵  
۱  
۱/۵  
۱

۱  
۲  
۳  
۴  
۵  
۶  
۷  
۸  
۹  
۱۰  
۱۱  
۱۲  
۱۳  
۱۴  
۱۵  
۱۶

جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف) ماتریس قطری که درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند، ماتریس ..... می‌نامیم.  
ب) حاصل ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابجایی .....

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مکان هندسی نقاطی که از دو خط متقاطع  $d'$ ،  $d$  به یک فاصله‌اند، نیمساز زاویه بین آن دو خط می‌باشد.  درست  نادرست  
ب) صفحه‌ای با مولد مخروط دوار، موازی است و از رأس عبور نمی‌کند. فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی، یک بیضی است.  درست  نادرست

پ) اگر ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$  باشد، مجموع درایه‌های سطر دوم  $A^2$  برابر ۵ می‌باشد.  درست  نادرست  
ت) اگر  $A^2 = A$  باشد در این صورت داریم:  $(A+I)^2 = I+3A$   درست  نادرست

اگر  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  به صورت  $a_{ij} = \begin{cases} i, j & i > j \\ i^2 & i = j \\ 2i - j & i < j \end{cases}$  تعریف شده باشد، ماتریس  $3I - 2A$  را به دست آورید.

اگر ماتریسی  $3 \times 3$  باشد و  $|A| = -2$  حاصل  $|A \cdot A|$  را بیابید.

اگر ضرب ماتریس‌های  $A = \begin{bmatrix} x & y \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  تعویض پذیر باشد، حاصل  $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 2 & -y \end{bmatrix}$  را بیابید.

دستگاه  $\begin{cases} (m-3)x + 3y = m \\ 4x + (m+1)y = 2 \end{cases}$  به ازای چه مقدار  $m$  دارای جواب منحصر به فرد می‌باشد؟

معادله دایره‌ای را بنویسید که نقاط  $A(4, -1)$ ،  $B(-2, 1)$  دو سر قطری از آن باشند.

حدود  $a$  را طوری به دست آورید که  $x^2 + y^2 - 3x + 5y + a = 0$  بتواند معادله یک دایره باشد.

دایره‌های  $x^2 + y^2 - 2x = 4$  و  $x^2 + y^2 = 4$  نسبت به هم چه وضعی دارند؟

اگر در بیضی طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک باشد. اندازه زاویه  $\widehat{BF'F}$  چند درجه است؟



معادله سهمی را بنویسید که  $F(1, -2)$  کانون و  $S(1, 2)$  رأس آن باشد، سپس معادله خط هادی آن را بنویسید.

اگر  $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$  و  $\vec{b} = (3, 1, -1)$  و  $r = 2$  باشد، بردار  $r\vec{b} - \vec{a}$  را به دست آورید.

اگر  $\vec{c} = (-1, 1, 4)$ ،  $\vec{b} = (3, -4, 2)$  و  $\vec{a} = (-1, -3, 0)$  باشند، آنگاه تصویر قائم  $\vec{a}$  بر امتداد  $\vec{b} + \vec{c}$  را به دست آورید.

برای دو بردار غیر صفر  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  ثابت کنید  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  بر هم عمودند اگر و فقط اگر  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .

بردارهای  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  مفروض‌اند به طوری که  $|\vec{a}| = 3$ ،  $|\vec{b}| = 26$  و  $|\vec{a} \times \vec{b}| = 72$  مقدار  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  را محاسبه کنید.

مساحت متوازی‌الاضلاعی که توسط بردارهای  $\vec{a} = (1, 0, 1)$  و  $\vec{b} = (0, 1, 1)$  تولید می‌شود را به دست آورید.



آزمون (۹) نوبت دوم

- ۱ اگر  $A = \begin{bmatrix} 4|A| & 3 \\ 1 & |A| \end{bmatrix}$  در این صورت دترمینان  $A$  را بیابید. ۱
- 
- ۱/۲۵ اگر برای دو ماتریس  $B$  و  $A$  بدانیم  $2A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  و  $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  آن گاه مجموع درایه‌های  $A^2$  را بیابید. ۲
- 
- ۱/۲۵ به ازای کدام مقدار  $a$  دستگاه  $\begin{cases} a(x-1) = 3(x-y) \\ 4x + (a+1)y = 2 \end{cases}$  دارای جواب نیست؟ ۳
- 
- ۲ معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن روی خط  $x = y + 2$  بوده و در نقطه‌ای به طول ۵ بر محور طول‌ها مماس باشد. ۴
- 
- ۰/۷۵ مکان هندسی مرکز دایره‌ای که در خارج یک دایره داده شده، واقع است و روی محیط آن می‌گلتد را پیدا کنید. ۵
- 
- ۲ نوع مقطع مخروطی  $y^2 + 12x + 4y - 32 = 0$  را تعیین کرده و نمودار آن را رسم کنید. ۶
- 
- ۱/۷۵ طول قطر کوچک یک بیضی  $4\sqrt{2}$  و فاصله کانون تا نزدیک‌ترین رأس ۲ واحد است. مقدار  $\frac{c}{a}$  را به دست آورید. ۷
- 
- ۱/۷۵ نقاط  $A(6,1)$ ،  $A'(-2,1)$  دو سر قطر بزرگ یک بیضی با نسبت  $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  است. طول قطر کوچک بیضی را پیدا کنید. ۸
- 
- ۲ اگر  $A(m-2, n+1, m+n)$  روی محور  $z$  باشد، آنگاه نقطه  $B(m, 2n+m, n+1)$  روی کدام یک از محورهای صفحه‌های مختصات قرار دارد؟ ۹
- 
- ۲/۲۵ دو بردار  $a$  و  $b$  به طول‌های ۵ و ۸ واحد مفروض هستند. مساحت مثلث تولید شده توسط این دو بردار ۱۲ واحد مربع است، اگر زاویه بین این دو بردار کم‌تراز قائمه باشد، اندازه تقاضل این دو بردار را پیدا کنید. ۱۰
- 
- ۱/۲۵ بردارهای عمود بر دو بردار  $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$  و  $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$  را تعیین کنید. ۱۱
- 
- ۱/۷۵ بردارهای  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$  و  $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$  را در نظر بگیرید.  
الف) تصویر قائم بردار  $\vec{a}$  بر امتداد بردار  $\vec{b}$  پیدا کنید.  
ب) مساحت متوازی الاضلاعی را به دست آورید که بردارهای  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  دو ضلع مجاور آن باشند. ۱۲
- 
- ۱ اندازه بردار حاصل ضرب خارجی دو بردار با حاصل ضرب داخلی آن دو بردار برابر است. زاویه بین این دو بردار را به دست آورید. ۱۳



آزمون (۱۱) نوبت دوم

۱ اگر  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$  باشد، مقدار  $y$  را به دست آورید.

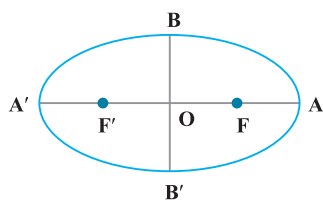
۲ برای دو ماتریس  $A$  و  $B$  داریم  $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$  و  $B^2 = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$  و  $A+B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ، حاصل  $AB+BA$  را به دست آورید.

۳ در دستگاه معادلات  $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=2 \end{cases}$  معکوس ماتریس ضرایب مجهولات به صورت  $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  است، اگر  $x=2$  باشد، مقدار  $y$  را به دست آورید.

۴ معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطه  $(3, -1)$  باشد و از نقطه  $(0, 3)$  بگذرد.

۵ سکه‌ای به شعاع ۲ سانتی‌متر را بر روی صفحه مربع شکلی به ضلع ۱۰ سانتی‌متر پرتاب می‌کنیم، مکان هندسی نقاطی درون مربع را تعیین کنید که اگر مرکز سکه در آنجا قرار بگیرد، سکه کاملاً داخل مربع واقع شود.

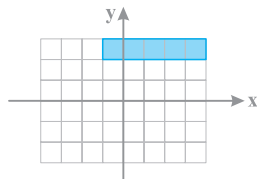
۶ سهمی  $y^2 = 4x - 4$  مفروض است. به مرکز کانون سهمی و شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم، مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را به دست آورید.



۷ در بیضی شکل مقابل مساحت مثلث  $OAB$  سه برابر مساحت مثلث  $FBF'$  است. خروج از مرکز را پیدا کنید.

۸ طول قطر کوچک یک بیضی  $4\sqrt{2}$  و فاصله کانون تا دورترین نقطه آن ۴ است. قطر بزرگ بیضی را به دست آورید.

۹ فاصله رأس تا خط هادی سهمی  $y^2 - y + x = 2$  را پیدا کنید.



۱۰ با توجه به شکل مقابل رابطه مربوط به آن را بنویسید.

۱۱ اگر  $i, j, k$  بردارهای واحد باشند، حاصل  $(i \times (i \times j)) \times k$  را پیدا کنید.

۱۲ اگر زاویه بین دو بردار  $a$  و  $b$  برابر  $\frac{\pi}{3}$  و  $\frac{1}{3}$  باشد حاصل  $|\vec{a} \cdot \vec{b}|$  را به دست آورید.

۱۳ اگر  $\vec{a} = 2i - j + 2k$  و  $\vec{b} = i - j$  باشند:

الف) زاویه بین دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  را تعیین کنید.

ب) تصویر قائم بردار  $\vec{a}$  را روی امتداد بردار  $\vec{b}$  تعیین کنید.

۱۴ اگر  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 6$  و  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 18$  باشد، حاصل  $|\vec{a} - \vec{b}|$  را پیدا کنید.

آزمون (۱۸) نوبت دوم (هماهنگ کشوری خردادماه سال ۱۳۹۸)

۱  
۰/۷۵  
۱  
۱/۲۵  
۱/۲۵  
۱/۵  
۱  
۱/۵  
۱/۲۵  
۲

۱  
۲  
۳  
۴  
۵  
۶  
۷  
۸  
۹  
۱۰

جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف) شرط لازم و کافی برای اینکه ماتریس مربعی  $A$  وارون پذیر باشد آن است که دترمینان ماتریس  $A$  ..... باشد.  
 ب) مکان هندسی، مجموعه نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه آنها یک ..... داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.  
 پ) در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر صفر باشد بیضی تبدیل به یک ..... می شود.  
 ت) حاصل ضرب داخلی دو بردار غیر صفر  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  که بر هم عمود هستند، برابر ..... است.

درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) اگر برای ماتریس‌های متمایز  $A, B, C$  داشته باشیم  $AB = AC$ ، آنگاه لزوماً  $B = C$  است.  درست  نادرست  
 ب) در حالتی که صفحه  $P$  بر محور سطح مخروطی ( $l$ ) عمود نباشد و با مولد آن ( $d$ ) نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، فصل مشترک حاصل یک بیضی خواهد بود.  درست  نادرست  
 پ) نقطه  $A(2, -3, 0)$  روی صفحه  $xOy$  قرار دارد.  درست  نادرست

اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$  باشد، حاصل  $|A^3|$  را محاسبه کنید.

در معادله ماتریسی  $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$  مقدار  $x$  را بیابید.

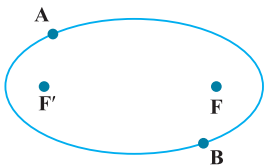
مقدار  $m$  را چنان بیابید که دستگاه  $\begin{cases} mx + 3y = -3 \\ 4x + (m+4)y = 2 \end{cases}$  جواب نداشته باشد.

معادله دایره‌ای را بنویسید که خطوط  $x + y = 1$  و  $x - y = 3$  شامل قطرهایی از آن بوده و خط  $4x + 3y = -5$  بر آن مماس باشد.

در نقطه  $A(2, 3)$  روی دایره  $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$  مماسی رسم کرده‌ایم، معادله این خط مماس را به دست آورید.

اگر خروج از مرکز بیضی برابر  $\frac{3}{5}$  و طول قطر کوچک بیضی ۱۶ باشد، طول قطر بزرگ بیضی و فاصله کانونی آن را به دست آورید.

دو نقطه  $A$  و  $B$  مطابق شکل روی بیضی و نقاط  $F$  و  $F'$  کانون‌های بیضی‌اند.  
 اگر  $AF' = BF$  باشد ثابت کنید دو پاره خط  $AF$  و  $BF'$  موازی‌اند.



سهمی  $y^2 - 2y + 8x + 9 = 0$  مفروض است:

الف) مختصات رأس، کانون و خط هادی سهمی را به دست آورید.  
 ب) نمودار آن را رسم کنید.



آزمون (۱۸) نوبت دوم (هماهنگ کشوری خردادماه سال ۱۳۹۸)

به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) معادله صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه  $A = (2, 3, 4)$  بگذرد و با صفحه  $xOy$  موازی باشد.

ب) معادلات  $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$  مربوط به کدام محور است؟

پ) در فضای  $\mathbb{R}^3$ ، نقطه  $A$  به طول ۲ روی محور طول‌ها و نقطه  $B = (-4, 6, -3)$  مفروض‌اند. مختصات وسط  $AB$  را بیابید.

اگر  $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{k}$  و  $\vec{b} = (1, 2, 1)$  باشد، طول بردار  $\vec{a} - 2\vec{b}$  را به دست آورید.

بردارهای  $\vec{a} = (1, -3, 2)$  و  $\vec{b} = (-2, 1, -5)$  را در نظر بگیرید.

الف) تصویر قائم بردار  $\vec{a}$  را بر امتداد بردار  $\vec{b}$  به دست آورید.

ب) برداری عمود بر دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  بنویسید.

ثابت کنید دو بردار غیر صفر  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  با هم موازی هستند اگر و فقط اگر  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ .

مقدار  $m$  را طوری تعیین کنید که سه بردار  $\vec{a} = (1, m, -1)$ ،  $\vec{b} = (2, 3, -1)$  و  $\vec{c} = (1, -1, 3)$  در یک صفحه باشند.

اگر طول بردارهای  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  به ترتیب ۴ و ۶ و  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$  باشد، مساحت مثلث بنا شده توسط دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  را به دست آورید.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

۱۱

۱۲

۱۳

۱۴

۱۵

۱۶



پاسخ آزمون نوبت اول (۱)

هندسه (۳)

با توجه به فرض  $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  (ماتریس ضرایب) و  $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  (ماتریس

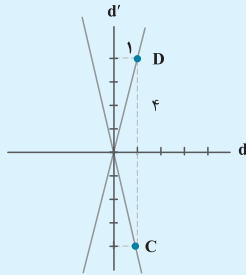
مقادیر معلوم) و  $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  (ماتریس مجهولات) داریم:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{6 - (-1)(-4)} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (0/5)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 3, y = 2 \quad (0/5)$$

دو خط عمود را رسم می‌کنیم. در فاصله ۱ واحد از مبدا روی خط  $d$  نقطه‌ای قرار می‌دهیم (۰/۵) و از آن نقطه به اندازه ۴ واحد موازی  $d'$  بالا و پایین می‌آییم تا به نقاط  $C$  و  $D$  برسیم. (۰/۵)

خطوط گذرنده از مبدا و از نقاط  $C$  و  $D$  مکان مورد نظر ما هستند. (۰/۲۵)



محل تلاقی دو قطر مرکز دایره است.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = -1 \Rightarrow O(2, -1) \quad (0/5)$$

حال فاصله مرکز دایره تا مماس شعاع دایره است.

$$r = \frac{|4(2) + 3(-1) - 6|}{\sqrt{16 + 9}} \Rightarrow r = \frac{1}{5} \quad (0/5)$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{25}$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = \frac{1}{25}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 2y + \frac{124}{25} = 0 \quad (0/5)$$

$$x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 - 6y + 9 - 9 = 3$$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16 \Rightarrow O(2, 3), r = 4 \quad (0/5)$$

$$x^2 - 10x + 25 - 25 + y^2 - 14y + 49 - 49 + 73 = 0$$

$$(x-5)^2 + (y-7)^2 = 1 \Rightarrow O'(5, 7), r' = 1 \quad (0/5)$$

$$OO' = \sqrt{(5-2)^2 + (7-3)^2} = 5 \quad (0/25)$$

چون  $OO' = r + r'$  است. پس دو دایره مماس خارج‌اند. (۰/۲۵)

الف) دایره (۰/۵) ب) هذلولی (۰/۵)

$$(A+B)^T = (A+B)(A+B) = A^T + AB + BA + B^T \quad \underline{A \times B = B \times A}$$

$$A^T + AB + AB + B^T = A^T + 2AB + B^T \quad (0/25)$$

$$(A-B) \times (A+B) = A^T - BA + AB - B^T \quad \underline{AB = BA}$$

$$A^T - AB + AB - B^T = A^T - B^T$$

$$A = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x - y & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2x + y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

حال از برابری ماتریس‌ها داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 3 \quad (0/25) \\ 2x + y = 5 \quad (0/25) \\ z = -2 \quad (0/25) \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 1 \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow x + y + z = 2 + 1 - 2 = 1 \quad (0/25)$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow (A^{-1}A)B = \frac{1}{7-4} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (0/5)$$

$$\Rightarrow IB = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad (0/25)$$

چون  $IA = AI$  پس اتحاد (۰/۲۵)  $I^n - A^n = (I-A)(I+A+A^2+\dots+A^{n-1})$  برقرار است و چون

$A^n = \bar{O}$  داریم:

$$I^n = I^n - A^n$$

$$\Rightarrow I = (I-A)(I+A+A^2+\dots+A^{n-1}) \quad (0/5)$$

بنابراین  $(I-A)$  وارون‌پذیر است و وارون آن برابر است با: (۰/۲۵)

$$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots + A^{n-1} \quad (0/25)$$

باید دو خط موازی هم باشند: (۰/۲۵)

$$\frac{-2}{a-5} = \frac{-a}{3} \neq \frac{a+2}{2} \Rightarrow -a^2 + 5a = -6 \Rightarrow a^2 - 5a - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (a-6)(a+1) = 0 \Rightarrow a = 6, a = -1 \quad (0/25)$$

۱۰

$$x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow O(0,0), r = 3 \quad (0/5)$$

$$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 + 2y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1 \quad (0/2.5)$$

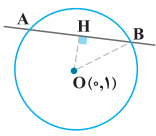
$$\Rightarrow O'(1,-1), r' = 1 \quad (0/5)$$

$$OO' = \sqrt{(1-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{2} \quad (0/2.5)$$

$OO' < |r-r'| \quad (0/2.5) \Rightarrow$  دو دایره متداخل می‌شوند. (0/2.5)

۱۱

اگر از مرکز دایره خط عمودی بر آن وتر رسم کنیم آن وتر را نصف می‌کند.  $(AH = BH = \sqrt{2}) \quad (0/2.5)$



$$OH = \frac{|0+1-2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (0/2.5)$$

$$OB^2 = OH^2 + BH^2 \quad (0/2.5)$$

$$\Rightarrow OB^2 = \frac{1}{2} + 2 \Rightarrow OB^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow OB = r = \sqrt{\frac{5}{2}} \quad (0/2.5)$$

$$x^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y - \frac{3}{2} = 0 \quad (0/2.5)$$

۱۲

$$x^2 + ax + y^2 + by + c = 0 \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} a^2 + b^2 = 2^2 + 3^2 = 13 \quad (0/5) \\ fc = 4(4) = 16 \quad (0/2.5) \end{aligned} \right\} \Rightarrow a^2 + b^2 < 4c \quad (0/5)$$

مکان هیچ نقطه‌ای نیست. پس معادله دایره نیست. (0/2.5)

۱۳

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad (0/2.5)$$

$$\begin{cases} (1,0) \Rightarrow 1+a+c=0 & (0/2.5) \\ (0,-1) \Rightarrow 1-b+c=0 & (0/2.5) \\ (0,3) \Rightarrow 9+3b+c=0 \Rightarrow c+3b=-9 & (0/2.5) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -b+c=-1 & (0/2.5) \\ c+3b=-9 & \end{cases} \Rightarrow b=-2, c=-3 \Rightarrow a=2 \quad (0/2.5)$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0 \Rightarrow R = \frac{\sqrt{4+4+12}}{2} = \sqrt{5} \quad (0/2.5)$$

پانزده آزمون نوبت اول (2)

هندسه (3)

۱

$$(A-I)^T = -3A \Rightarrow A^T + I^T - 2AI = -3A \quad (0/2.5)$$

$$\Rightarrow A^T + I - 2A = -3A \quad (0/2.5)$$

$$\Rightarrow A^T + I = -A \quad (0/2.5)$$

$$\Rightarrow |A^T + I| = |-A| = (-1)^3 |A| = -1 \times -3 = 3 \quad (0/2.5)$$

۴

می‌دانیم که  $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$  پس داریم: (0/2.5)

$$(2AB)^{-1} = \frac{1}{2} B^{-1} A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} \quad (0/2.5)$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 3.5 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad (0/2.5)$$

۵

$$2A^2 - A + I = 0 \Rightarrow A - 2A^2 = I \Rightarrow AI - 2AA = I \quad (0/5)$$

$$\Rightarrow A(I - 2A) = I \Rightarrow |A(I - 2A)| = |I| \quad (0/5)$$

$$\Rightarrow |A| |I - 2A| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \quad (0/5)$$

A وارون پذیر است.

$$A(I - 2A) = I \quad (0/2.5)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = I - 2A \quad (0/2.5)$$

۶

$$|A| \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -a \\ (a+1) & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (0/2.5)$$

$$\Rightarrow -2 + a^2 + a \neq 0 \Rightarrow (a+2)(a-1) \neq 0 \Rightarrow a \neq -2, a \neq 1 \quad (0/2.5)$$

۷

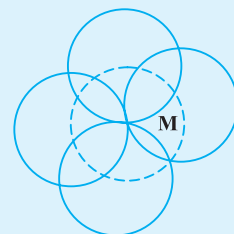
$$\begin{bmatrix} x & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x^2 + 9x + (2+m) \end{bmatrix} = 0 \quad (0/5)$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 9x + (2+m) = 0 \xrightarrow{x=0} \Rightarrow 2+m=0 \Rightarrow m=-2 \quad (0/2.5)$$

$$2x^2 + 9x = 0 \Rightarrow x(2x+9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{9}{2} \end{cases} \quad (0/2.5)$$

۸

مکان هندسی مرکز این دایره‌ها دایره‌ای است به مرکز M و شعاع ۴ سانتی‌متر (0/2.5)



۹

$$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 + 4y + 4 - 4 - 5 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 1 \Rightarrow O(1,-2), r = \sqrt{1} \quad (0/2.5)$$

$$OC = \sqrt{(2-1)^2 + (3-(-2))^2} = \sqrt{26} \quad (0/2.5)$$

چون  $CO > r$  است پس نقطه C داخل دایره قرار ندارد. (0/5)

۷

$$x^2 - 4x + 4 = \lambda y + \lambda \Rightarrow (x-2)^2 = \lambda(y+1) \Rightarrow S(2, -1), a = 2$$

$$\Rightarrow F(2, 1) \Rightarrow OF = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

۸

BC وسط M =  $(\frac{3+1}{2}, \frac{1+5}{2}, \frac{4+2}{2}) = (2, 3, 2)$

AM =  $(1, 1, 2)$

$$|AM| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

۹

$a, b, c \Leftrightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$  هم صفحه هستند

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 6i - 5j + k$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (1)(6) - (m)(5) + m^2(1) = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 5m + 6 = 0$$

$$\Rightarrow (m-2)(m-3) = 0 \Rightarrow m = 2, 3$$

۱۰

مساحت متوازی الاضلاع برابر است با:

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12i - 24j + 12k$$

$$S = \sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 12^2} = 24$$

۱۱

$b+c$  را به دست می آوریم:

$$\vec{b} + \vec{c} = (2, -3, 6), \vec{a} = (1, -3, 4)$$

$$b+c \text{ بر امتداد } a \text{ تصویر قائم} = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})}{|\vec{b} + \vec{c}|} (\vec{b} + \vec{c})$$

$$= \frac{2+9+24}{4+9+36} (2, -3, 6) = \frac{35}{49} (2, -3, 6)$$

$$= \frac{5}{7} (2, -3, 6)$$

۱۲

می دانیم:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{1}{1} \Rightarrow \theta = 0$$

$$OD^2 = OH^2 + DH^2$$

$$\Rightarrow 17 = \frac{r^2}{4} + DH^2 \Rightarrow DH^2 = \frac{r^2}{4} \Rightarrow DH = \frac{r}{2} \Rightarrow \sqrt{15}$$

$$CD = 2DH \Rightarrow CD = r\sqrt{15}$$

۴

$$x = y^2 + my + n$$

$$y^2 + my + \frac{m^2}{4} = x - n + \frac{m^2}{4}$$

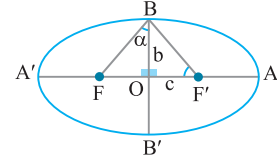
$$\Rightarrow (y + \frac{m}{2})^2 = (x - n + \frac{m^2}{4})$$

راس سهمی =  $(n - \frac{m^2}{4}, -\frac{m}{2}) = (-1, 2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{m}{2} = 2 \Rightarrow m = -4 \\ n - \frac{m^2}{4} = -1 \Rightarrow n - 4 = -1 \Rightarrow n = 3 \end{cases}$$

۵

اگر  $AA' = 2a$  باشد، پس  $BB' = a$  خواهد بود، پس  $b = \frac{a}{2}$  و  $FF' = 2c$  است؛ چون  $BF = BF'$  بنابراین مثلث  $FBF'$  متساوی الساقین است، و از آنجایی که مجموع فواصل هر نقطه بیضی از کانونها برابر  $2a$  است، پس  $BF = a$  خواهیم داشت:



$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = \frac{a^2}{4} + c^2$$

$$\Rightarrow c^2 = \frac{3}{4} a^2 \Rightarrow c = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$\tan \alpha = \frac{OF}{OB} = \frac{c}{b}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} a}{\frac{1}{2} a} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ \Rightarrow \widehat{F'BF} = 2\alpha = 120^\circ$$

۶

$$FA = OA - OF \Rightarrow r = a - c$$

$$BF^2 = OF^2 + OB^2 = c^2 + b^2$$

$$\xrightarrow{c^2 + b^2 = a^2} BF^2 = a^2 \Rightarrow BF = a$$

$$\Rightarrow a = 5 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$$

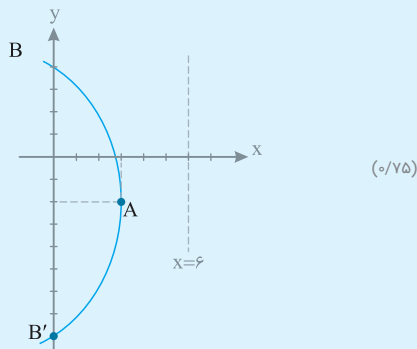
۵

مکان هندسی مورد نظر دایره‌ای است (۰/۲۵) به مرکز دایره اصلی (۰/۲۵) و به شعاع مجموع شعاع‌های دو دایره (۰/۲۵).

۶

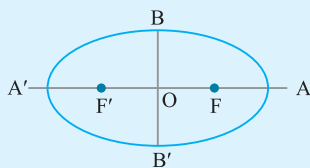
$y^2 + 4y + 4 = -12x + 32 + 4$  (۰/۲۵)  
 $\Rightarrow (y+2)^2 = -12(x-3)$  (۰/۵) معادله سهمی است  
 $\Rightarrow$  رأس سهمی =  $A(3, -2)$ ,  $a = 3$ ,  $F(3, -2)$ ,  $B(3, 4)$ ,  $B'(3, -4)$  (۰/۵)  
 خط هادی  $x = 3 + 3 = 6$

توجه داشته باشید که نقاط  $B$ ،  $B'$  و  $F$  هم طولند و فاصله  $B$ ،  $B'$  از  $F$  است.



۷

می‌دانیم  $FA = a - c$  و  $FB = a$  است، پس  $FA$  نزدیک‌ترین فاصله کانون  $F$  تا یک رأس است:



$a - c = 2$  (۰/۲۵) و  $2b = 4\sqrt{2} \Rightarrow b = 2\sqrt{2}$  (۰/۲۵)  
 $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow (c+2)^2 = 8 + c^2 \Rightarrow c^2 + 4c + 4 = 8 + c^2$  (۰/۲۵)  
 $\Rightarrow 4c = 4 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{3}$  (۰/۲۵)

۸

$AA' = 2a = 6 - (-2) = 8 \Rightarrow a = 4$  (۰/۲۵)  
 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{c}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow c = 2\sqrt{3}$  (۰/۲۵)  
 $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 16 = b^2 + 12$  (۰/۲۵)  
 $\Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow 2b = 4$  (۰/۲۵)

۹

$\begin{cases} m-2=0 \Rightarrow m=2 \\ n+1=0 \Rightarrow n=-1 \end{cases} \Rightarrow B(2, 0, 0)$  (۰/۲۵)

B روی محور xها قرار دارد. (۰/۲۵)

۱۴

$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = -1 - 4 - 5 = -10$  (۰/۵)  
 $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (0, 3, -4) \Rightarrow |\vec{V}_1 + \vec{V}_2| = \sqrt{0+9+16} = 5$  (۰/۲۵)  
 $\Rightarrow |\vec{V}_1 + \vec{V}_2| + \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = -10 + 5 = -5$  (۰/۵)

هندسه (۳) پاسخ آزمون نوبت دوم (۹)

۱

$A = \begin{bmatrix} 4|A| & 3 \\ 1 & |A| \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 4|A| \times |A| - 1 \times 3$  (۰/۲۵)  
 $\Rightarrow |A| = 4|A|^2 - 3 \Rightarrow 4|A|^2 - |A| - 3 = 0$   
 $\Rightarrow |A| = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{8} = \frac{1 \pm 7}{8} = 1, -\frac{6}{8}$  (۰/۵)

۲

$(2A + B) - (A + B) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = A$   
 $\Rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  (۰/۵)  
 $\Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$  (۰/۵)  
 $\Rightarrow 1 + 0 + 4 + 9 = 14$  (۰/۲۵)

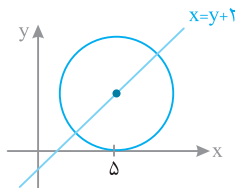
۳

$\begin{cases} ax - a = 3x - 3y \\ 4x + (a+1)y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-3)x + 3y = a \\ 4x + (a+1)y = 2 \end{cases}$  (۰/۲۵)  
 باید این دو خط موازی باشند تا دستگاه جواب نداشته باشد.  
 $\frac{a-3}{4} = \frac{3}{a+1} \neq \frac{a}{2} \Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 12$  (۰/۲۵)  
 $\Rightarrow a^2 - 2a - 15 = 0 \Rightarrow (a-5)(a+3) = 0$  (۰/۲۵)  
 $\Rightarrow a = 5, a = -3$  (۰/۵)

۴

فرض کنیم مرکز دایره  $\alpha - 2$  باشد. (۰/۲۵)

پس شعاع دایره  $\alpha - 2$  است که  $\alpha = 5$  است. (۰/۵)

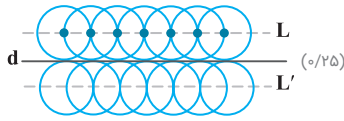


پس مرکز دایره و شعاع ۳ است. (۰/۲۵)

$(x-5)^2 + (y-3)^2 = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$  (۰/۵)

۴

در مرکز این دایره‌ها بر روی دو خط موازی L و L' که موازی d می‌باشند و در دو طرف خط d به فاصله r از d قرار دارند. (۵/۵)



۵

باید فاصله بین دو نقطه از شعاع کوچک‌تر باشد.

$$\sqrt{(m+1)^2 + (m+1)^2} < 5 \Rightarrow \sqrt{2(m+1)^2} < 5 \quad (۵/۵)$$

$$\Rightarrow 2(m+1)^2 < 25 \Rightarrow (m+1)^2 < \frac{25}{2} \quad (۵/۲۵)$$

$$\Rightarrow -\frac{5}{\sqrt{2}} < m+1 < \frac{5}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{-5}{\sqrt{2}} - 1 < m < \frac{5}{\sqrt{2}} - 1 \quad (۵/۲۵)$$

۶

$$x^2 - 4x + 4 = \lambda y + 4 + 4 \Rightarrow (x-2)^2 = \lambda(y+1) \quad (۵/۲۵)$$

مماس سهمی  $A(2, -1)$ ,  $a = 2$  (۵/۲۵)

$$y = -1 - 2 = -3, F(2, -1+2) = F(2, 1) \quad (۵/۵)$$

۷

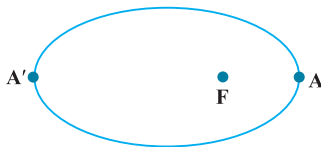
نقطه M بر روی خط d بر روی بیضی قرار دارد و سایر نقطه‌ها روی d خارج بیضی قرار دارند و می‌دانیم مجموع فاصله‌های هر نقطه خارج بیضی از کانون‌ها بیش از 2a است؛ در حالی که  $MF + MF' = 2a$  است، پس نقطه M مجموع فاصله‌هایش از دو کانون F و F' کم‌ترین مقدار را دارد (۵/۲۵)

۸

همان‌طور که در شکل مشخص است نزدیک‌ترین نقطه بیضی تا F نقطه A و دورترین نقطه تا F همان نقطه A' است (۵/۵) پس داریم:

$$FA' = 3FA \Rightarrow OF + OA' = 3(OA - OF) \quad (۵/۵)$$

$$\Rightarrow c + a = 3(a - c) \Rightarrow 4c = 2a \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \quad (۵/۵)$$



۹

چون عرض دو نقطه برابر است پس بیضی افقی است. (۵/۲۵)

$$a = SF = 3 - (-1) \Rightarrow a = 4 \Rightarrow (y-2)^2 = 16(x+1) \quad (۵/۵)$$

۱۰

$$\begin{aligned} & A(2, 0, 3) \\ & B(0, 0, 3) \\ & C(0, 1, 3) \\ & D(2, 1, 3) \end{aligned} \Rightarrow ABCD \text{ معادله وجه } \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 & (۵/۵) \\ 0 \leq y \leq 1 & (۵/۵) \\ z = 3 & (۵/۵) \end{cases}$$

۱۲

$$\vec{AB} = (-1, 2, -2) \quad (۵/۲۵) \quad \vec{AC} = (2, 1, 2) \quad (۵/۲۵) \quad (\text{الف})$$

$$\cos A = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} = \frac{-2+2-4}{\sqrt{1+4+4} \sqrt{4+1+4}} = \frac{-4}{9} \quad (۵/۲۵)$$

(ب):

$$\vec{AC} \text{ بر } \vec{AB} \text{ تصویر قائم} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AC}|^2} \vec{AC} = \frac{-2+2-4}{4+1+4} (2, 1, 2) \quad (۵/۲۵)$$

$$= \left( -\frac{4}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{4}{9} \right) \quad (۵/۲۵)$$

(ج)

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6i - 2j - 5k \quad (۵/۲۵)$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{36+4+25} = \frac{\sqrt{65}}{2} \quad (۵/۲۵)$$

۱۳

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad (۵/۲۵) \Rightarrow (m-1)(1) + 2(m) + 2(2) = 0 \quad (۵/۵)$$

$$\Rightarrow m + 2m + 3 = 0 \Rightarrow 3m = -3 \Rightarrow m = -1 \quad (۵/۲۵)$$

پاسخ آزمون نوبت دوم (۱۳)

هندسه (۳)

۱

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2a & a \\ 2c & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow a = 0, c = 4 \quad (۵/۵)$$

پس d و b هر مقداری می‌تواند باشد؛ بنابراین بی‌شمار ماتریس وجود دارد.

۲

$$\frac{|A^2 + I|}{|A + I|} = \frac{|A^2 + A^3|}{|A + I|} = \frac{|A^2(I + A)|}{|A + I|} = \frac{|A^2| |I + A|}{|A + I|} = |A^2| \quad (۵/۲۵)$$

$$A^2 = I \Rightarrow |A^2| = |I| \Rightarrow |A|^2 = 1 \Rightarrow |A| = 1 \quad (۵/۵)$$

$$\Rightarrow |A^2| = |A|^2 = 1 \quad (۵/۲۵)$$

۳

فرض کنیم ماتریس‌های B و C هر دو وارون A باشند، باید ثابت کنیم B = C است.

$$\begin{cases} AB = BA = I \\ AC = CA = I \end{cases} \quad (۵/۵)$$

طبق فرض داریم:

$$B = IB = (CA)B = C(AB) = C(I) = C \quad (۵/۵)$$



۱۳  $|AB| = \sqrt{(3-3)^2 + (-2-1)^2 + (2-2)^2} = 3$  (الف) (o/5)

ب  $\begin{cases} x = 3 \\ -2 \leq y \leq 1 \\ z = 2 \end{cases}$  (o/75)

۱۴  $\vec{a} = r\vec{b}$  (o/75)

$$\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{(\vec{r}\vec{b}) \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{r|\vec{b}|^2}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = r\vec{b} = \vec{a}$$

(o/75) (o/75) (o/75) (o/75)

۱۵  $\vec{i} \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) = \vec{i} \cdot (\vec{i}) = |\vec{i}|^2 = 1$  (o/75)

۱۶ الف) برداری عمود بر دو بردار  $\vec{a} + \vec{b}$  و  $\vec{c}$  برابر است با:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (1, 4, 1) \times (2, 1, -2) = (-9, 4, -7)$$

(o/75) (o/75) (o/75)

ب) حجم متوازی السطوح تولید شده توسط سه بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  برابر است با:

$$|(\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}))| = (2, 3, 1) \cdot (-2, -2, -3) = -13$$

(o/75) (o/75) (o/75)

۷ مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله باشند عمود منصف پاره خط AB است این خط را رسم می کنیم و خط d می نامیم. مکان هندسی نقاطی که از نقطه C به فاصله ۳ سانتی متر باشند یک دایره به مرکز C و شعاع ۳ سانتی متر است. این دایره را رسم می کنیم محل برخورد دایره و خط d جواب مسأله است. (o/75)

بحث: اگر خط d دایره را قطع کند مسئله ۲ جواب دارد. (o/75)

اگر خط d بر دایره مماس باشد مسئله ۱ جواب دارد. (o/75)

اگر خط d دایره را قطع نکند مسئله جواب ندارد. (o/75)

۸  $r = OM = \sqrt{(1+2)^2 + (-1-3)^2} = 5$  (o/5)

$\Rightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$  (o/5)

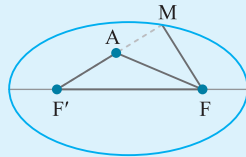
۹  $x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow O(0,0), r = \sqrt{2}$

$\frac{x+y-2=0}{\sqrt{1+1}} \rightarrow d = \frac{|1(0)+1(0)-2|}{\sqrt{1+1}}$  (o/75)

$= \sqrt{2} = r$  (o/75)

خط بر دایره مماس است. (o/75)

۱۰ پاره خط F'A را ادامه می دهیم تا بیضی را در نقطه M قطع کند M را به F وصل می کنیم (o/75) نقطه M روی بیضی قرار دارد.



در مثلث MAF بنا به قضیه نامساوی مثلثی داریم:  $AF < MA + MF$  (o/75)

به طرفین نامساوی مقدار  $AF'$  را اضافه می کنیم

$$AF + AF' < (MA + AF') + MF = \overbrace{MF' + MF}^{2a} = 2a$$

(o/75) (o/75)

۱۱  $\begin{cases} 2a = 1 \Rightarrow a = 0.5 \\ 2b = 6 \Rightarrow b = 3 \end{cases}$  و  $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = 4$  (o/75)  $\Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{4}{0.5}$  (o/75)

۱۲ الف) با توجه به جایگاه رأس و خط هادی، دهانه سهمی رو به پایین است و  $a = 4$

پس معادله سهمی به صورت  $(x-2)^2 = -16(y-3)$  است. (o/5)

ب) مختصات کانون سهمی برابر  $F = (2, -1)$  است. (o/5)



فصل اول ماتریس و کاربردها

ماتریس

به هر آرایش مستطیلی از عددها، که شامل چند سطر و چند ستون باشد، ماتریس می‌گوییم. هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را درایه آن ماتریس می‌نامیم. به‌طور معمول ماتریس‌ها را با حروف بزرگ مانند A, B, C و ... نام‌گذاری می‌کنیم. به منظور مشخص کردن جایگاه هر درایه، دو اندیس در نظر می‌گیریم که اندیس سمت چپ جای سطر و اندیس سمت راست جای ستون آن درایه را مشخص می‌کند.

ajj: یعنی درایه روی سطر i ام و ستون j ام.

اگر تعداد سطرهای ماتریس m و تعداد ستون‌های آن n باشد، به m × n مرتبه ماتریس گفته می‌شود.

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow a_{21} = 3, a_{23} = 2, a_{13} = -1$$

مثال در ماتریس  $[i+j]_{2 \times 2}$  مجموع درایه‌ها را به دست آورید.

پاسخ:

$$[i+j]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1+1^2 & 1+2^2 \\ 2+1^2 & 2+2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = 2+5+3+6 = 16$$

معرفی چند ماتریس خاص

ماتریس مربعی

در ماتریس A اگر تعداد سطرها و تعداد ستون‌ها برابر و مساوی n باشد، A را یک ماتریس مربعی از مرتبه n (n × n) می‌نامیم.

درایه‌هایی را که شماره سطر و ستون آن با هم یکسان باشند را درایه‌های قطر اصلی می‌نامیم. (i = j)

درایه‌های قطر اصلی ماتریس مربعی  $A_{3 \times 3}$  مشخص شده‌اند:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad \text{درایه‌های قطر اصلی } a_{11} = 1, a_{22} = 4, a_{33} = 3$$

ماتریس سطری

اگر ماتریس A فقط از یک سطر تشکیل شده باشد، آن را ماتریس سطری می‌نامیم.

$$A = [1 \ 2 \ -1]_{1 \times 3}$$

ماتریس ستونی

اگر ماتریس A فقط دارای یک ستون باشد، آن را ماتریس ستونی می‌نامیم.

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

ماتریس قطری

ماتریس مربعی که تمام درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی، صفر باشد.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(درایه‌های روی قطر اصلی می‌توانند صفر باشند و یا نباشند.)

ماتریس اسکالر

ماتریس قطری که تمامی درایه‌های روی قطر اصلی آن برابر باشند را ماتریس اسکالر می‌نامند.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ماتریس همانی

ماتریس اسکالری که تمامی درایه‌های روی قطر اصلی آن برابر 1 باشد. ماتریس همانی از مرتبه n را با  $I_n$  نمایش می‌دهند.

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

ماتریس صفر

ماتریسی که تمامی درایه‌های آن صفر باشد، ماتریس صفر می‌نامند و آن را با  $\bar{O}$  نمایش می‌دهند.

$$\bar{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**دترمینان**

به هر ماتریس مربعی می‌توان یک عدد حقیقی نسبت داد که دترمینان آن ماتریس نامیده می‌شود. اگر  $A$  ماتریس مربعی از مرتبه  $n$  باشد ( $1 \leq n \leq 3$ ) در این صورت دترمینان ماتریس  $A$  را با نماد  $\det(A) = |A|$  نشان می‌دهیم.

◆ اگر  $A$  ماتریسی از مرتبه ۱ باشد، آن‌گاه  $|A|$ ، برابر تنها درایهٔ ماتریس  $A$  خواهد بود.

$$A = [2] \Rightarrow |A| = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad - bc$$

◆ برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس مرتبه ۲ از رابطهٔ روبه‌رو استفاده می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 2(-2) - (1)(3) = -4 - 3 = -7$$

مثال

◆ برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس مرتبه ۳ می‌توانیم بر حسب هر سطر یا هر ستون دلخواه آن را بسط دهیم، که حاصل همواره عددی حقیقی و منحصر به فرد است.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11} \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

مثال دترمینان ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$  را بر حسب ستون اول و سطر سوم به دست آورید.

$$|A| = 1(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(-2-4) - 2(4-2) + 1(4+1) = -6 - 6 + 5 = -7$$

$$|A| = 1(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1(4+1) - 2(2-3) + 2(-1-6) = 5 + 2 - 14 = -7$$

مثال اگر  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  باشد حاصل  $|AB| + 2|A+B|$  را پیدا کنید.

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 15 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow |AB| = 35 - 45 = -10$$

$$A+B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow |A+B| = 10 - 15 = -5$$

$$|AB| + 2|A+B| = -10 - 10 = -20$$

**دستور ساروس برای محاسبهٔ دترمینان‌های ۳×۳**

در این روش باید دو ستون اول و دوم ماتریس را در کنارش بنویسیم و مجموع حاصل ضرب‌های درایه‌های روی قطر اصلی و دو قطر موازی آن را از مجموع حاصل ضرب درایه‌های روی قطر فرعی و دو قطر موازی آن کم کنیم:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (aei + bfg + cdh) - (bdi + afh + ceg)$$

مثال دترمینان ماتریس  $A_{3 \times 3}$  مثال قبل را با استفاده از روش ساروس به دست آورید.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = ((1)(-1)(2) + (2)(2)(1) + (1)(3)(2)) - ((2)(3)(2) + (1)(2)(2) + (1)(-1)(1)) = (-2 + 4 + 6) - (12 + 4 - 1) = 8 - 15 = -7$$

**مثال** اگر ماتریس  $A = \begin{bmatrix} m+1 & 1 \\ 2 & m+2 \end{bmatrix}$  وارون پذیر نباشد، مقدار  $m$  را پیدا کنید.

$$|A| = 0 \Rightarrow (m+1)(m+2) - (1)(2) = 0 \Rightarrow m^2 + 3m + 2 - 2 = 0 \Rightarrow m(m+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -3 \end{cases}$$

### حل دستگاه معادلات به کمک ماتریس وارون

دستگاه  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$  را می‌توانیم به فرم  $\underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}}_B$  در آوریم که در آن به ماتریس  $A$ ، ماتریس ضرایب، به ماتریس  $B$ ، مقادیر

معلوم و به ماتریس  $X$ ، ماتریس مجهولات گفته می‌شود و در صورتی که ماتریس  $A$  وارون پذیر باشد ( $|A| \neq 0$ )، می‌توانیم ماتریس مجهول‌ها را از رابطه  $X = A^{-1}B$  به دست آوریم.

**مثال** دستگاه  $\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$  را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

با فرض  $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  و  $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  داریم:

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{6-4} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 3, y = 2$$

**نکته** برای دو ماتریس وارون پذیر  $2 \times 2$  و دلخواه  $A$  و  $B$  داریم:

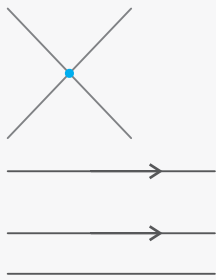
۱)  $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$

۲)  $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$

۳)  $(A^{-1})^{-1} = A$

### تعبیر هندسی دستگاه ۲ معادله ۲ مجهول

می‌دانیم محل برخورد دو خط  $ax + by = c$  و  $a'x + b'y = c'$  در دستگاه مختصات همان جواب دستگاه ۲ معادله ۲ مجهول، است. پس داریم:



الف) اگر  $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$  باشد، ۲ خط متقاطع هستند و دستگاه جواب منحصر به فرد دارد. ( $|A| \neq 0$ )

ب) اگر  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$  دو خط با هم موازی هستند، پس دستگاه فاقد جواب است.

ج) اگر  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$  باشد آن‌گاه دو خط بر هم منطبق هستند و دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

**توجه** اگر  $|A| = 0$  باشد، یکی از حالت‌های (ب) و (ج) رخ می‌دهد.

شکل	فاصله مراکز دو دایره از هم	وضعیت نسبی دو دایره	
	$ r-r'  < OO' < r+r'$	متقاطع	۴
	$OO' <  r-r' $	متداخل	۵
	$OO' = 0$	هم مرکز	۶

**وضعیت خط و دایره نسبت به هم**

یک خط نسبت به یک دایره سه وضعیت دارد: الف) متقاطع، ب) مماس، پ) متخارج  
 برای بررسی هر یک از این سه وضعیت می توان از دو روش استفاده کرد:  
 روش اول: در معادله خط موجود،  $y$  را برحسب  $x$  مرتب می کنیم و به جای  $y$  در معادله دایره جای گذاری می کنیم تا یک معادله درجه دوم برحسب  $x$  به دست آید. سپس فرمول  $\Delta = b^2 - 4ac$  را محاسبه می کنیم:

۱) اگر  $\Delta > 0$  ← معادله دو ریشه حقیقی دارد ← خط در ۲ نقطه دایره را قطع می کند. (متقاطع)

۲) اگر  $\Delta = 0$  ← معادله یک ریشه حقیقی دارد ← خط در یک نقطه دایره را قطع می کند. (مماس)

۳) اگر  $\Delta < 0$  ← معادله ریشه حقیقی ندارد ← خط و دایره یک دیگر را قطع نمی کنند. (متخارج)

روش دوم: ابتدا باید از روی معادله دایره، شعاع ( $R$ ) و مرکز آن  $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right|$  را به دست آوریم. سپس فاصله مرکز دایره از معادله خط موجود را از فرمول زیر محاسبه کنیم:

$$OH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

فاصله شعاع از خط :  $OH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  : معادله خط :  $ax + by + c = 0 \Rightarrow$

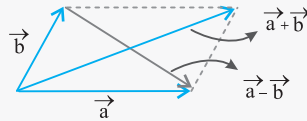
در این صورت:

شکل	وضعیت نسبی خط و دایره نسبت به هم	فاصله مرکز دایره از خط	
	متقاطع	$OH < R$	الف
	مماس	$OH = R$	ب
	متخارج	$OH > R$	پ





### تعبیر هندسی اعمال روی بردارها:



هر بردار مانند  $(a, b)$  را می‌توانیم به صورت  $a\vec{i} + b\vec{j}$  نمایش دهیم.

اگر بخواهیم بردارها را توسط بردار یکه بنویسیم به صورت  $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$  نمایش می‌دهیم که  $\vec{i} = (1, 0, 0)$  و  $\vec{j} = (0, 1, 0)$  و  $\vec{k} = (0, 0, 1)$  است.

### ضرب داخلی بین دو بردار:

اگر  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  و  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  دو بردار در فضای  $\mathbb{R}^3$  باشند، در این صورت ضرب داخلی  $\vec{a}$  در  $\vec{b}$  را با نماد  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

### تعریف دیگری از ضرب داخلی:

اگر  $0 \leq \theta \leq \pi$  زاویه بین دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  در فضای  $\mathbb{R}^3$  باشد؛ داریم:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

### زاویه بین دو بردار:

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

با توجه به تعریف ضرب داخلی زاویه بین دو بردار از رابطه روبه‌رو به‌دست برآید:

### خواص ضرب داخلی:

- (۱)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$  خاصیت جابه‌جایی
- (۲)  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$  خاصیت شرکت‌پذیری
- (۳) اگر  $\vec{a} \neq \vec{0}$ ،  $\vec{b} \neq \vec{0}$ ،  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \implies$  آن‌گاه  $a, b$  بر هم عمودند.
- (۴)  $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$
- (۵)  $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$
- (۶)  $\vec{a} \cdot \vec{0} = 0$
- (۷) اگر  $\vec{a} = \vec{0}$  یا  $\vec{b} = \vec{0} \implies$  آن‌گاه  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

مثال اگر  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  بردارهایی باشند که  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$  و طول آن‌ها به ترتیب ۱، ۲ و ۳ باشد، مقدار  $a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c$  را به‌دست آورید.

طرفین رابطه را در  $(a + b + c)$  ضرب داخلی می‌کنیم.

$$\begin{aligned} a + b + c = \vec{0} &\implies (a + b + c) \cdot (a + b + c) = \vec{0} \cdot \vec{0} \implies |a|^2 + a \cdot b + a \cdot c + b \cdot a + |b|^2 + b \cdot c + c \cdot a + |c|^2 = 0 \\ &\implies |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + 2a \cdot b + 2a \cdot c + 2b \cdot c = 0 \implies 1^2 + 2^2 + 3^2 + 2(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) = 0 \implies a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c = -7 \end{aligned}$$

### تصویر قائم بردار $\vec{a}$ در امتداد بردار $\vec{b}$ :

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \vec{b}$$

برای به دست آوردن تصویر قائم بردار  $\vec{a}$  در امتداد بردار  $\vec{b}$  از رابطه مقابل استفاده می‌کنیم:

### ضرب خارجی:

اگر  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  و  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  دو بردار باشد، ضرب خارجی  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  را با نماد  $\vec{a} \times \vec{b}$  نمایش می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

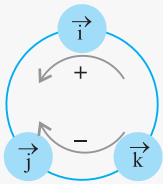
ضرب خارجی دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$ ، برداری است که هم بر  $\vec{a}$  و هم بر  $\vec{b}$  عمود است.

مثال برداری عمود بر دو بردار  $\vec{a} = (1, -3, 2)$  و  $\vec{b} = (-2, 1, -5)$  را به دست آورید.

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & -5 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -13\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$$

### ضرب خارجی بردارهای یکه:

برای به دست آوردن ضرب خارجی بردارهای یکه، سه بردار  $i, j, k$  را به ترتیب پشت سر هم می نویسیم. ضرب هر جفت از آن‌ها سومی می شود و علامت آن‌ها به این ترتیب مشخص می شود که اگر دو بردار در خلاف جهت عقربه‌های ساعت پشت سر هم قرار گیرند، علامت مثبت، در غیر این صورت منفی است.



$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k}, & \vec{k} \times \vec{j} &= -\vec{i}, & \vec{j} \times \vec{i} &= -\vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{k} &= \vec{i}, & \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j}, & \vec{i} \times \vec{k} &= -\vec{j} \end{aligned}$$

### اندازه ضرب خارجی دو بردار:

اندازه ضرب خارجی دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  که زاویه بین آن‌ها  $\theta$  است، از رابطه زیر به دست می آید که برابر است با مساحت متوازی الاضلاعی که توسط این بردارها ساخته می شوند و نصف این مقدار برابر مساحت مثلثی است که توسط این بردارها به دست می آید.

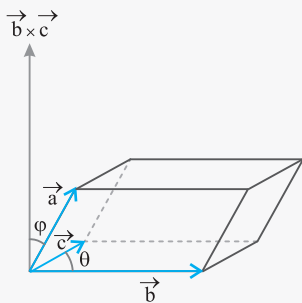
$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

### خصوصیات ضرب خارجی:

- (۱)  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- (۲)  $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
- (۳)  $r\vec{a} \times \vec{b} = r(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times r\vec{b}$
- (۴)  $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- (۵)  $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})$
- (۶)  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}$  و  $\vec{b}$  باهم موازیند

### حجم متوازی السطوح:

حجم متوازی السطوحی که توسط بردارهای  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  ساخته می شود، از رابطه  $V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$  به دست می آید.



$$\text{ارتفاع} = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}{|\vec{b} \times \vec{c}|}$$

$$\text{مساحت} = S = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

اگر حجم متوازی السطوحی که توسط بردارهای  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  ساخته می شود، برابر صفر باشد، یعنی این سه بردار در یک صفحه قرار دارند و بالعکس.