

خرید کتاب های کنکور

با تخفیف ویژه

و
ارسال رایگان

Medabook.com



مدابوک



یک جله تماس تلفنی رایگان

با مشاوران رتبه برتر

برای انتخاب بهترین منابع

دبیرستان و کنکور

۰۲۱ ۲۸۴۲۵۲۱۰



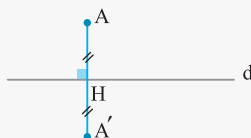
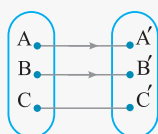
فهرست مطالب

هندسه (۲)

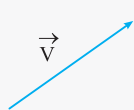
شماره صفحه	فهرست مطالب
۵	آزمون نوبت اول (۱)
۷	آزمون نوبت اول (۲)
۸	آزمون نوبت اول (۳)
۹	آزمون نوبت اول (۴)
۱۱	آزمون نوبت دوم (۱)
۱۳	آزمون نوبت دوم (۲)
۱۶	آزمون نوبت دوم (۳)
۱۸	آزمون نوبت دوم (۴)
۱۹	آزمون نوبت دوم (۵)
۲۱	آزمون نوبت دوم (۶)
۲۲	آزمون نوبت دوم (۷)
۲۴	آزمون نوبت دوم (۸)
۲۶	آزمون نوبت دوم (۹)
۲۸	آزمون نوبت دوم (۱۰)
۳۰	پاسخنامه تشریحی
۵۲	خلاصه درس‌ها

فصل دوم تبدیل‌های هندسی و کاربردها

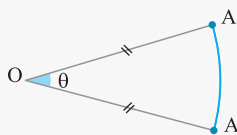
درس اول: تبدیل‌های هندسی



- تبدیل: نگاشتی است یک به یک از صفحه بر روی خودش، یعنی هر نقطه فقط یک تصویر منحصر به فرد دارد. مانند تبدیل‌ها می‌توانند موقعیت اشکال و همچنین اندازه آن‌ها را تغییر دهند.
- تبدیل ایزومتري (طولیا): تبدیلی است که طول پاره‌خط را حفظ می‌کند.
- در هر تبدیل طولیا تبدیل یافته هر زاویه، زاویه‌ای هم‌اندازه آن است.
- بازتاب محوری: نقطه دلخواهی مانند A و خط دلخواهی مانند d را در نظر بگیرید اگر از A عمود AH را بر خط d فرود آوریم، H تصویر A روی خط d است و اگر AH را به اندازه خودش امتداد دهیم تا به A' برسیم، A' قرینه A نسبت به خط d نام دارد و خط d عمودمنصف AA' است، که به آن محور تقارن یا خط بازتاب می‌گویند.
- بازتاب تبدیلی طولیاست و مساحت را حفظ می‌کند.
- بازتاب شیب خط را الزاماً حفظ نمی‌کند مگر در صورتی که خط و محور تقارن موازی یا برهم عمود باشند.
- بازتاب محوری جهت شکل را حفظ نمی‌کند.
- در هر تبدیل، نقطه‌ای را که تبدیل یافته آن بر خود آن نقطه منطبق می‌شود را نقطه ثابت تبدیل می‌نامند.
- بازتاب نسبت به خط، بی‌شمار نقطه ثابت تبدیل دارد.



- قرینه قرینه هر نقطه نسبت به یک خط خود آن نقطه می‌باشد. $S(S(A)) = A$
- انتقال: نقطه A و بردار $\vec{V}$ را در نظر بگیرید، اگر از A تحت برداری همسنگ $\vec{V}$ (هم‌اندازه، هم‌جهت و موازی) حرکت کنیم به نقطه‌ای مانند A' می‌رسیم که به A'، انتقال یافته A تحت بردار $\vec{V}$ می‌گوئیم.
- انتقال تبدیلی طولیاست و مساحت شکل را ثابت نگه می‌دارد.
- انتقال تبدیلی است که شیب خط را حفظ می‌کند، یعنی هر خط با انتقال یافته‌اش موازی است.
- انتقال جهت شکل را حفظ می‌کند.

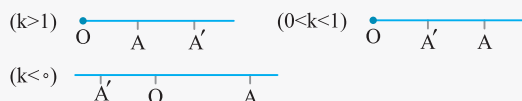


- دوران: نقطه دلخواه A و نقطه ثابت O را در نظر بگیرید. اگر به مرکز O و شعاع OA یک کمان در جهت دلخواه (ساعتگرد و یا پادساعتگرد) به اندازه θ رسم کنید. به A' دوران یافته A حول O به اندازه θ می‌گوییم.
- دوران تبدیلی است طولیا و مساحت شکل را حفظ می‌کند.
- دوران شیب خط را الزاماً حفظ نمی‌کند مگر در حالتی که زاویه 0° یا 180° باشد.
- دوران جهت شکل را ثابت نگه می‌دارد.

- تجانس: اگر O نقطه‌ای ثابت در صفحه و $k \neq 0$ یک عدد حقیقی باشد، نقطه A' را مجانس نقطه A در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k گوئیم هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد.

الف) سه نقطه A، O و A' روی یک خط راست باشند. $OA' = |k| OA$ (ب)

ج) اگر k مثبت باشد (تجانس مستقیم)، A' روی نیم‌خط OA و نقاط A و A' در یک طرف نقطه O قرار دارند.



اگر k منفی باشد (تجانس معکوس)، نقطه O بین نقاط A و A' قرار می‌گیرد.

اگر $|k| > 1$ باشد تجانس انبساطی است.

اگر $|k| < 1$ باشد تجانس انقباضی است.

اگر A' مجانس A به مرکز O و نسبت k باشد، A مجانس A' به مرکز O و نسبت $\frac{1}{k}$ است.

تجانس تبدیلی غیرطولیاست، مجانس هر شکل با آن متشابه است و نسبت تشابه $|k|$ و نسبت مساحت‌های آن‌ها k^2 است.

هر دو n ضلعی متشابه، مجانس یکدیگر نیستند ولی هر دو شکل متجانس، مشابه یکدیگرند.

تجانس شیب خط را حفظ می‌کند، یعنی مجانس هر خط با خود آن خط موازی است.

تجانس جهت شکل را حفظ می‌کند.

تبدیلی همانی است که هر نقطه صفحه را به خود آن نقطه نظیر کند.

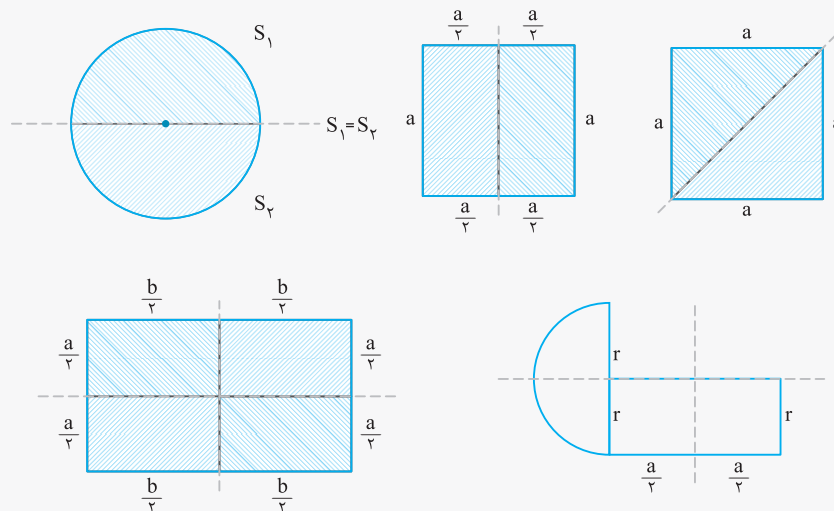
انتقال تحت بردار $\vec{O}$ (صفر)، دوران با زوایای 0° و 360° و تجانس با $k = 1$ تبدیلات همانی هستند.

ترکیب دو بازتاب با محورهای موازی یک انتقال است.

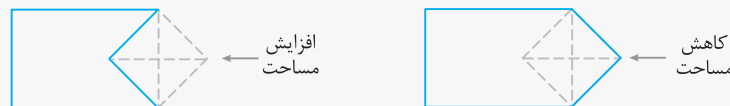
ترکیب دو بازتاب با محورهای متقاطع یک دوران است.

درس دوم: کاربرد تبدیل‌ها

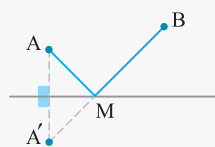
❖ شکل‌های زیر به کمک محورهای تقارنشان به شکل‌های هم‌مساحت تفکیک می‌شوند.



❖ به کمک بازتاب می‌توان با ثابت نگاه داشتن محیط مساحت را افزایش یا کاهش داد، به مسائلی که با این روش حل می‌شوند هم پیرامونی یا هم محیطی می‌گوئیم.

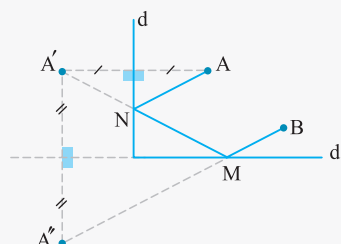


❖ پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر ممکن نوع اول: دو نقطه A و B مطابق شکل و خط d، مفروضند، برای پیدا کردن نقطه‌ای مانند M روی خط d به طوری که MA + MB مینیمم باشد کافی است A را نسبت به خط d قرینه کنیم و قرینه آن را به B وصل کنیم تا خط d را در M قطع کند. M نقطه مورد نظر است.

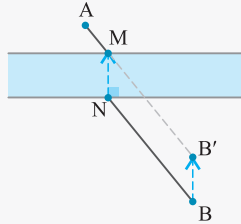


❖ این روش به یکی از قضایای هرون معروف است.

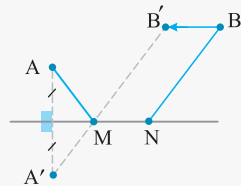
❖ پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر ممکن نوع دوم: دو نقطه A و B و دو خط متقاطع d و d' مفروضند. برای پیدا کردن مسیر مینیمم ANMB که از A شروع می‌شود و پس از برخورد به d و d' از B می‌گذرد، ابتدا قرینه A را نسبت به خط d می‌یابیم (A')، سپس قرینه A' را نسبت به خط d' می‌یابیم (A''). از A'' به B وصل می‌کنیم تا d' را در M قطع کند، از M به A' وصل می‌کنیم تا d را در N قطع کند، N را به A وصل می‌کنیم، ANMB کوتاه‌ترین مسیر ممکن است.



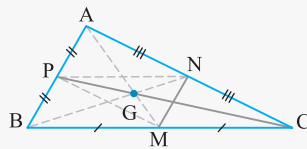
◆ پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر ممکن نوع سوم: فرض کنید بخواهیم روی رودخانه‌ای به عرض MN مطابق شکل پلی به گونه‌ای احداث کنیم که مسیر بین دو نقطه A و B با گذر از این پل کوتاه‌ترین مقدار ممکن شود، برای این کار ابتدا از B تحت یک انتقال با بردار $\vec{BB'} = \vec{NM}$ ، B' را می‌یابیم، سپس از B' به A وصل می‌کنیم تا لبهٔ دورتر رودخانه را در M قطع کند، از M عمود MN را بر رودخانه رسم می‌کنیم (پل موردنظر) و از N به B وصل می‌کنیم، $AMNB$ کوتاه‌ترین مسیر ممکن است.



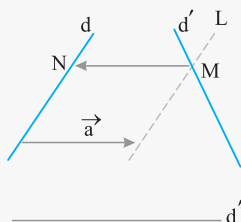
◆ پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر ممکن نوع چهارم: فرض کنید بخواهیم از نقطه A به نقطه B که هر دو در یک طرف خط d قرار دارند به گونه‌ای برویم که مقدار MN از مسیر روی خط d باشد برای این کار ابتدا از B تحت یک انتقال هم‌راستا با d و به اندازه $\vec{BB'} = \vec{NM}$ انتقال می‌دهیم تا B' حاصل شود. سپس A را نسبت به خط d قرینه می‌کنیم تا A' حاصل شود، A' را به B' وصل می‌کنیم تا خط d را در M قطع کند. M را تحت یک انتقال با بردار $\vec{MN}$ انتقال می‌دهیم تا N حاصل شود، از N به B وصل می‌کنیم مسیر $AMNB$ کوتاه‌ترین مسیر ممکن است.



◆ پیدا کردن پای میانه‌ها به کمک تجانس: مرکز ثقل هر مثلث محل هم‌رسی سه میانه مثلث است. اگر مرکز تجانس را G_1 در نظر بگیریم با نسبت $k = -\frac{1}{2}$ ، تجانس مثلث ABC ، مثلث MNP است، که مساحت آن $\frac{1}{4}$ مساحت کل است و همچنین تجانس MNP نسبت به G و $k = -\frac{1}{2}$ مثلث ABC است که مساحت آن چهار برابر مثلث MNP است. M ، N و P همان پای میانه‌های m_a ، m_b و m_c هستند.



◆ پیدا کردن پاره‌خط موازی: فرض کنید سه خط d ، d' و d'' مطابق شکل زیر مفروض‌اند. برای رسم پاره خطی مانند $AB = a$ که دو سر آن بر روی دو خط d و d' بوده و با d'' موازی باشد، ابتدا d را تحت بردار $\vec{a}$ موازی با d انتقال می‌دهیم تا خط d' را در M قطع کند، سپس M را تحت یک انتقال با بردار $-\vec{a}$ منتقل می‌کنیم تا d را در N قطع کند، MN پاره‌خط موردنظر است.





آزمون نوبت اول (۳)

الف) درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید.

- | | |
|-------------------------------|---------------------------------|
| ☐ درست | ☐ نادرست |
| ☐ درست | ☐ نادرست |
| ☐ درست | ☐ نادرست |
| ☐ درست | ☐ نادرست |

تبدیلی که تبدیل یافته هر زاویه، زاویه‌ای هم اندازه آن باشد طولپاست.
یک چند ضلعی، محیطی است اگر و فقط اگر عمودمنصف‌های همه ضلع‌های آن در یک نقطه هم‌رس باشند.
اگر یک چهار ضلعی هم محاطی و هم محیطی باشد آن گاه مربع است.
دو دایره متخارج در مجموع چهار مماس مشترک دارند.

ب) جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

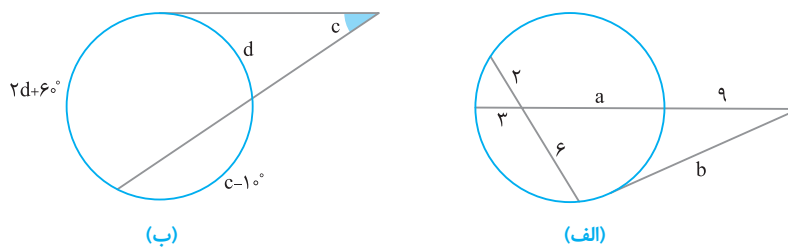
دایره‌ای که از هر سه رأس مثلث می‌گذرد نام دارد و مرکز آن می‌باشد.
تبدیل نگاشتی است از صفحه بر روی خودش.
طول کمان روبه‌رو به زاویه مرکزی α در دایره $C(O, R)$ است.
قطری که از وسط وتر یک دایره بگذرد به شرط آن که بر آن وتر است.

ج) عبارت درست را از داخل پرانتز انتخاب کنید.

تبدیلی طولپاست ولی شیب خط را الزاماً حفظ نمی‌کند. (دوران - انتقال)
وضعیت دو دایره که فقط یک مماس مشترک دارند. (مماس خارج - متقاطع - مماس داخل)

د) به سؤالات زیر پاسخ دهید.

ثابت کنید وترهای موازی در یک دایره کمان‌های مساوی تشکیل می‌دهند.
با توجه به شکل‌های زیر مقادیر a, b, c و d را بیابید.



طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس خارج، ۱۲ واحد است. اگر شعاع یکی از دایره‌ها ۹ واحد از شعاع دایره دیگر بزرگ‌تر باشد، شعاع هر یک از دو دایره را بیابید.

در دایره $C(O, R)$ ، وتر AB به اندازه $\sqrt{2}R$ ، دایره را به دو قسمت تقسیم می‌کند، مساحت قسمت کوچکتر چه کسری از مساحت قسمت بزرگتر است؟

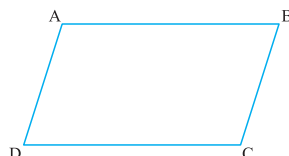
در یک شش ضلعی منتظم دایره‌ای به شعاع $\sqrt{3}$ محاط شده است، طول ضلع شش ضلعی چقدر است؟

در هر دایره ثابت کنید وتر بزرگتر به مرکز دایره نزدیکتر است.

نشان دهید اگر مرکز دوران بر پاره‌خط AB واقع نباشد و زاویه دوران کمتر از زاویه $\widehat{AOB}$ باشد، دوران طولپاست (ثابت کنید در این حالت $AB = A'B'$).

در حالتی که پاره‌خط موازی محور بازتاب قرار دارد، ثابت کنید بازتاب طولپاست.

انتقال یافته متوازی‌الاضلاع زیر را با در نظر گرفتن قطر $\overrightarrow{AC}$ به‌عنوان بردار انتقال رسم کنید، سپس مشخص کنید آیا این تبدیل نقطه ثابت تبدیل دارد یا خیر؟





آزمون نوبت اول (۳)

الف) درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید.

- | | |
|-------------------------------|---------------------------------|
| ☐ درست | ☐ نادرست |
| ☐ درست | ☐ نادرست |
| ☐ درست | ☐ نادرست |
| ☐ درست | ☐ نادرست |

تبدیلی که تبدیل یافته هر زاویه، زاویه‌ای هم اندازه آن باشد طولپاست.
یک چند ضلعی، محیطی است اگر و فقط اگر عمودمنصف‌های همه ضلع‌های آن در یک نقطه هم‌رس باشند.
اگر یک چهار ضلعی هم محاطی و هم محیطی باشد آن گاه مربع است.
دو دایره متخارج در مجموع چهار مماس مشترک دارند.

ب) جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

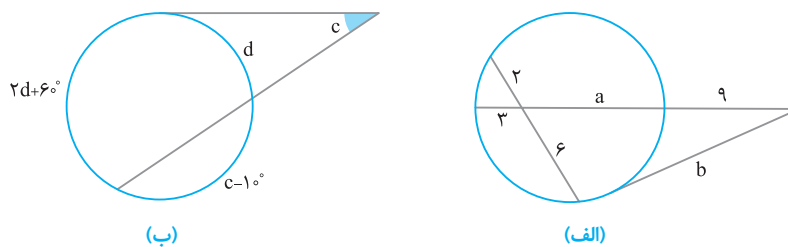
دایره‌ای که از هر سه رأس مثلث می‌گذرد نام دارد و مرکز آن می‌باشد.
تبدیل نگاشتی است از صفحه بر روی خودش.
طول کمان روبه‌رو به زاویه مرکزی α در دایره $C(O, R)$ است.
قطری که از وسط وتر یک دایره بگذرد به شرط آن که بر آن وتر است.

ج) عبارت درست را از داخل پرانتز انتخاب کنید.

تبدیلی طولپاست ولی شیب خط را الزاماً حفظ نمی‌کند. (دوران - انتقال)
وضعیت دو دایره که فقط یک مماس مشترک دارند. (مماس خارج - متقاطع - مماس داخل)

د) به سؤالات زیر پاسخ دهید.

ثابت کنید وترهای موازی در یک دایره کمان‌های مساوی تشکیل می‌دهند.
با توجه به شکل‌های زیر مقادیر a, b, c و d را بیابید.



طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس خارج، ۱۲ واحد است. اگر شعاع یکی از دایره‌ها ۹ واحد از شعاع دایره دیگر بزرگ‌تر باشد، شعاع هر یک از دو دایره را بیابید.

در دایره $C(O, R)$ ، وتر AB به اندازه $\sqrt{2}R$ ، دایره را به دو قسمت تقسیم می‌کند، مساحت قسمت کوچکتر چه کسری از مساحت قسمت بزرگتر است؟

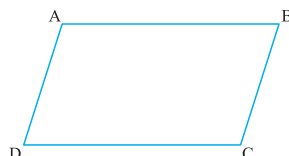
در یک شش ضلعی منتظم دایره‌ای به شعاع $\sqrt{3}$ محاط شده است، طول ضلع شش ضلعی چقدر است؟

در هر دایره ثابت کنید وتر بزرگتر به مرکز دایره نزدیکتر است.

نشان دهید اگر مرکز دوران بر پاره‌خط AB واقع نباشد و زاویه دوران کمتر از زاویه $\widehat{AOB}$ باشد، دوران طولپاست (ثابت کنید در این حالت $AB = A'B'$).

در حالتی که پاره‌خط موازی محور بازتاب قرار دارد، ثابت کنید بازتاب طولپاست.

انتقال یافته متوازی‌الاضلاع زیر را با در نظر گرفتن قطر $\overrightarrow{AC}$ به‌عنوان بردار انتقال رسم کنید، سپس مشخص کنید آیا این تبدیل نقطه ثابت تبدیل دارد یا خیر؟





آزمون نوبت دوم (۷)

الف) درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید.

☐ درست	☐ نادرست
☐ درست	☐ نادرست

۱ هر دو قطر در دایره همواره منصف یکدیگرند.

۲ در تجانس شیب خط حفظ می‌شود.

ب) جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

۳ شعاع دایره محیطی مثلث قائم‌الزاویه برابر است.

۴ تجانس به مرکز O و $k = 2$ از نوع و می‌باشد.

ج) عبارت درست را از داخل پرانتز انتخاب کنید.

۵ تبدیلی ایزومتری که جهت شکل را حفظ می‌کند. (انتقال - تجانس - بازتاب)

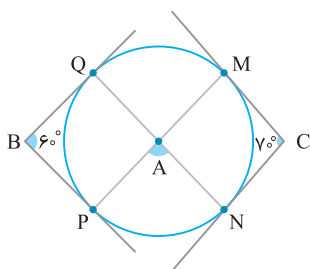
۶ تعداد مماس مشترک‌های دو دایره مماس خارج (صفر - یک - دو - سه) است.

د) به سؤالات زیر پاسخ دهید.

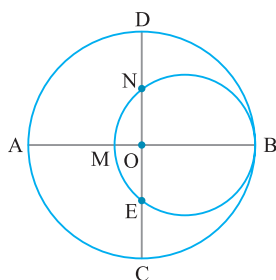
۷ ثابت کنید قطر عمود بر وتر، وتر و کمان مقابلش را نصف می‌کند.

۸ در شکل زیر $\hat{A}$ چند درجه است؟

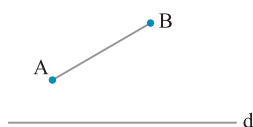
$$(\hat{QBP} = 6^\circ, \hat{MCN} = 7^\circ)$$



۹ در شکل زیر دو دایره بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگتر بر هم عمودند. اگر $AM = 16$ و $ND = 10$ شعاع‌های دو دایره را پیدا کنید. (O مرکز دایره بزرگتر است).



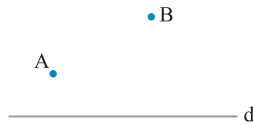
۱۰ پاره خط AB مطابق شکل زیر با خط d نه موازی است نه متقاطع، ثابت کنید بازتاب یافته AB نسبت به d با خود AB هم‌اندازه است. (طولپایی)



آزمون نوبت دوم (۷)

مجانس دایر $C(O, R)$ را به مرکز O و $k = 3$ رسم کنید و نسبت مساحت‌های آن دو را بیابید.

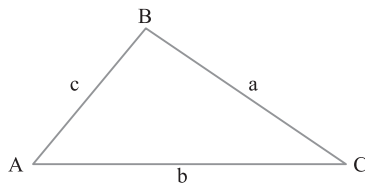
دو نقطه A و B مطابق شکل مفروض‌اند. نقطه M را روی خط d طوری بیابید که $MA + MB$ کمترین مقدار ممکن باشد. روش یافتن M را توضیح دهید.



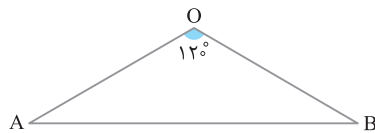
یک متوازی‌الاضلاع و متجانسش را با در نظر گرفتن محل تقاطع قطرهایش به عنوان مرکز تجانس و $k = -1$ رسم کنید. آیا این تبدیل همانی است؟

برای هر مثلث ثابت کنید، اگر شعاع دایره محیطی باشد خواهیم داشت: (قضیه سینوس‌ها)

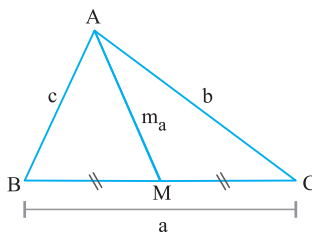
$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$



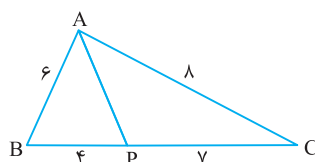
دو قایق از یک نقطه (O) در دریاچه‌ای با سرعت‌های 3 km/h و 5 km/h و با زاویه 12° از هم دور می‌شوند. یک ساعت بعد دو قایق در چه فاصله‌ای از یکدیگر هستند؟



در مثلث ABC میانه AM رسم شده است. ثابت کنید $2b^2 + 2c^2 = 4m_a^2 + a^2$ (قضیه میانه‌ها)



مثلث ABC به اضلاع $AB = 3$ ، $AC = 5$ و $BC = 7$ مفروض است، نیمساز داخلی زاویه A ضلع BC را در D قطع کرده است. اندازه قطعات BD ، DC و طول AD را بیابید؟



در مثلث ABC شکل زیر طول پاره‌خط AP را بیابید سپس مساحت مثلث APB را محاسبه کنید.