

خرید کتاب های کنکور

با تخفیف ویژه

و

ارسال رایگان

Medabook.com

+



مدابوک



یک جله تماس تلفنی رایگان

با مشاوران رتبه برتر

برای انتخاب بهترین منابع

دبیرستان و کنکور

۰۲۱ ۲۸۴۲۵۲۱۰



میلانی که امروز بابت خرید این کتاب می پردازید! در مقابل هزینه‌های که در آینده بابت نخوندن آن پرداخت خواهید کرد، بسیار ناچیز است ...



Discrete Math
10 + 11 + 12

این نسل از کتاب‌های ریاضی میکرو که با وسواس خاصی تهیه شده، ترکیبی است از ۳ کتاب با ۳ استراتژی مختلف:

کتاب اول: نکته‌های واجب و ضروری

کتاب دوم: نکته‌های ویژه تسلط و تثبیت و مرور

کتاب سوم: نکته‌های IQ و چالشی ویژه دانش‌آموزان مدارس برتر



دوست عزیز جهت آگاهی از آخرین اخبار و اطلاعات کتاب‌های منتشرشده لطفاً به سایت www.gaj.ir مراجعه نمایید.

ناشر انتشارات بین‌المللی گاج

مدیر مسئول مهندس ابوالفضل جوکار

معاونت علمی مهندس محمد جوکار

مدیر تالیف مهندس علی منصف شکری

عنوان کتاب درسنامه گسسته و آمار و احتمال کنکور

مؤلفان علی منصف شکری، سجاد عظمتی

کارشناس علمی کیوان دارابی

مدیرفنی مرجان جلال

صفحه آرا مرجان جلال [همکاران: فاطمه فرخی، الهه گنجی]

طراح چلد منصور سماواتی - سعید شمس

کرافتست مرجان جلال

چاپ و صفای گاج

مدیر چاپ علی مزرعتی

همانگی چاپ گوهر اسدی‌پور

نوبت چاپ اول (۱۴۰۰)

شمارگان ۵۰۰ نسخه

قیمت ۱۲۷۰۰۰ تومان

صاف و وقت ۱۳۱۴۵ - ۳۷۷

شماره ۰۲۱ - ۶۶۲۰

فروشگاه مرکزی - تهران - میدان انقلاب - نبش بازارچه کتاب

میکرو طبقه بندی

ریاضیات گسسته
+
آمار و احتمال
+
مطالب هر ترم پایه دهم

جلد دوم

درسنامه

شناختنامه

سرشناسه: منصف شکری، علی، ۱۳۵۴
عنوان: درسنامه گسسته و آمار و احتمال کنکور
مؤلف: علی منصف شکری
شناخته‌افزوده: عظمتی، سجاد
مشخصات نشر: تهران، انتشارات بین‌المللی گاج، ۱۴۰۰
مشخصات ظاهری: ۲۴۰ ص، مصور
فروست: این کتاب از مجموعه کتاب‌های میکروطبقه بندی گاج می‌باشد.
بها: ۱۲۷۰۰۰ تومان
شابک: ۹۷۸-۶۰۲-۰۳-۰۳۰۳۰۳۰۳
شماره کتابشناسی ملی: ۸۵۲۶۳۰۳



کلیه حقوق این کتاب برای انتشارات گاج محفوظ است. هیچ شخص حقیقی یا حقوقی حق چاپ و نشر تمام یا بخشی از این اثر را به هر صورت اعم از فتوکپی، چاپ کتاب و جزوه ندارد و متخلفین به موجب ماده ۵ قانون حمایت از حقوق مؤلفان، مصنفان و هنرمندان مصوب ۱۳۴۸/۱۰/۱۱ تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.

خرید آنلاین در gajmarket.com

مقدمه فولفین

آنچه که انجام می‌دهیم، برگزیده نمی‌شود، بلکه فقط ستایش یا تهنیت می‌شود.

فردریش نیچ - حکمت شادان

S. Azemati



A. Monsef Shokri

به جای نوشتن مقدمه طول و دراز و تشکر از فک و فامیل و ایل و تبار خودمان و دست‌اندرکاران کتاب بهتر است توضیحاتی کوتاه و مهم درباره ساخت و بافت این کتاب و ویژگی‌های خاص این کتاب نست به سایر کتاب‌های موجود در بازار ارائه کنیم:

1 طراحی و معماری داخلی بسیار زیبا جذاب و مورد پسند دانش‌آموزان و معلمان و مشاوران

2 استفاده مناسب و حرفه‌ای از رنگ در ساختار درسی که فرآیند یادگیری را بسیار ساده‌تر، جذاب‌تر و سریع‌تر می‌کند.

3 تیپ‌بندی بسیاری از مباحث برای سهولت در یادگیری

4 تطابق کامل و کامل و نقطه به نقطه با کتاب بانک تست گسسته و آمار و احتمال جامع میکرو [نسل جدید]

5 بررسی کامل تمام تمرینات و متن کتاب درسی و همچنین اشکال، نمودارها و کلید واژه‌ها

6 بررسی تست‌ها کنکور چند دهه اخیر به خصوص نظام جدید آموزش و استخراج نکات کلیدی مطرح شده در آن‌ها.

7 بررسی کامل کتاب راهنمای معلم و استخراج نکات کلیدی آن.

8 آموزش راه‌ها و شیوه‌های میان‌بر در حل تست که بسیاری از کتاب‌های کمک‌آموزشی از بیان آن‌ها [به دلایل متعدد] پرهیز می‌کنند.

9 *user friendly* بودن کتاب برای دانش‌آموزان با هر سطحی از معلومات.

10 کتاب یک ویژگی دیگر هم دارد که ربطی به ۹ ویژگی اول ندارد و در گوشه‌ای از کتاب پنهان است و امکان کشف آن تا قبل از ۱۵ اسفند ۱۴۰۰ وجود

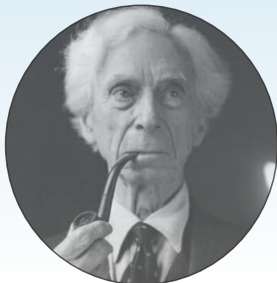
ندارد و حداکثر ۸ نفر ممکن است این راز را کشف کنند، اگر شما یکی از این ۸ نفر هستید در اینستاگرام این ویژگی را در دایرکت برای من بفرستید و ۸ جلد از

کتاب‌های **دور دنیا در نیم ساعت** ویژه کنکور ۱۴۰۱ را هدیه بگیرید.

علی منصف سگری - سجاد عظمتی

 alimonsef_shokri

نظرات خود را درباره ویژگی دهم با ما در اینستاگرام در میان بگذارید.



Number Theory

Chapter 1

Lesson 1

صفحه ۸ تا ۱۸ گسسته دوازدهم

استدلال ریاضی

درس اول



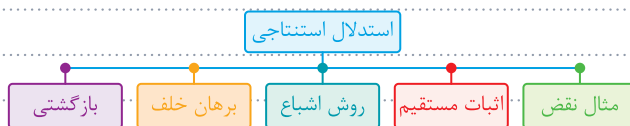
Bertrand Russell

Number Theory

اثبات مستقیم

تئوری اعداد

🍏 درک و فهم ریاضی بدون توجه به استدلال امکان ندارد و آموزش ریاضیات را محدود به حفظ کردن رویه‌ها و الگوریتم‌ها خواهد کرد. اگر برای اثبات درستی یا نادرستی یک گزاره، از حقایقی استفاده کنیم که درستی آن‌ها را قبلاً پذیرفته‌ایم، از نوعی استدلال به نام **استدلال استنتاجی** استفاده کرده‌ایم. استدلال استنتاجی دارای انواع و اقسامی است:



🍏 برای اثبات درستی یک گزاره به روش **اثبات مستقیم**، ابتدا باید گزاره داده شده را به زبان ریاضی برگردانیم. جدول زیر برای برگرداندن یک گزاره به **زبان ریاضیات** کمک مهمی به شما می‌کند:

نماد ریاضی	عبارت فارسی	نماد ریاضی	عبارت فارسی	نماد ریاضی	عبارت فارسی
$2k-1, 2k+1$	دو عدد فرد متوالی	k^2	عدد مربع کامل	$2k$	عدد زوج
$2k, 2k+2$	دو عدد زوج متوالی	$(2k+1)^2$	عدد فرد مربع کامل	$2k+1$	عدد فرد
$k-1, k, k+1$	سه عدد متوالی	$2k+1, 2k'+1$	دو عدد فرد	$3k$	عدد مضرب ۳
$k-2, k-1, k, k+1, k+2$	پنج عدد متوالی	$2k, 2k'$	دو عدد زوج	k^2	عدد مربع کامل

🍀 به کمک اثبات مستقیم نشان دهید جمع سه عدد طبیعی متوالی مضرب ۳ است.

🍁 سه عدد طبیعی متوالی را با n ، $n+1$ و $n+2$ نشان می‌دهیم، در این صورت داریم:

$$n+(n+1)+(n+2)=3n+3=3(n+1)$$

Test اگر به حاصل ضرب دو عدد زوج متوالی یک واحد اضافه کنیم، عدد حاصل برابر با است.

- (۱) مجذور عدد فرد بین آن‌ها
- (۲) مجذور عدد فرد بلافاصله قبل از آن‌ها
- (۳) مجذور عدد فرد بلافاصله بعد از آن‌ها
- (۴) میانگین مجذور آن‌ها

1 دو عدد زوج متوالی را با $2k$ ، $2k+2$ نشان می‌دهیم [عدد فرد بین آن‌ها نیز $2k+1$ است]. در این صورت داریم:

$$(2k)(2k+2)+1=4k^2+4k+1=(2k+1)^2$$

یعنی حاصل برابر با مجذور عدد فرد بین آن‌هاست، در ضمن میانگین مجذور این دو عدد به صورت زیر به دست می‌آید که با عدد به دست

آمده برابر نیست:

$$\frac{(2k)^2+(2k+2)^2}{2} = \frac{4k^2+4k^2+4k+4}{2} = 4k^2+2k+2$$

🍏 اگر حکمی در مورد تمام اعضای یک مجموعه بیان شود، به آن **حکم کلی** گفته می‌شود. احکام کلی ممکن است درست یا نادرست باشند. احکام کلی معمولاً با کلماتی نظیر **هر**، **همه**، **تمام** و ... یا **هیچ**، **هیچ یک**، **هیچکدام** و ... بیان می‌شوند.

... 🍀 «تمام اعداد اول، فرد هستند» یک حکم کلی نادرست است زیرا ۲ عددی اول است ولی فرد نیست.
... 🍀 «مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ است» یک حکم کلی درست است.

🍏 به مثالی که نشان دهد یک حکم کلی، نادرست است، **مثال نقض [پاد نمونه]** گفته می‌شود.
... 🍀 برای رد حکم کلی «به ازای همه n های طبیعی، عبارت $n^2 + n + 41$ عددی اول است» عدد $n = 40$ یک مثال نقض است زیرا:

... مرکب $n = 40 \Rightarrow 40^2 + 40 + 41 = 40(40 + 1) + 41 = (40 \times 41) + 41 = 41(40 + 1) = 41 \times 41$

🍏 با ارائه **مثال نقض** نمی‌توان درستی یک حکم را اثبات کرد، بلکه فقط برای نشان دادن نادرستی یک حکم از مثال نقض استفاده می‌کنیم.
... «عدد صحیحی وجود ندارد که دو برابر آن مربع کامل و سه برابر آن مکعب کامل باشد.» یک حکم کلی است که مثال نقض آن ۷۲ می‌باشد.

... $72 \times 2 = 144 = 12^2$ $72 \times 3 = 216 = 6^3$

Test درستی چه تعداد از گزاره‌های زیر را با مثال نقض می‌توان رد کرد؟

$\forall x, y \in \mathbb{R}; [x+y]=[x]+[y]$ $\forall x, y \in \mathbb{R}; |x+y|=|x|+|y|$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^+; \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq \sqrt{x+y}$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^+; \log(x+y) \geq \log x + \log y$

۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

3 تنها مورد چهارم مثال نقض ندارد یعنی **درستی سه مورد** را می‌توان با مثال نقض رد کرد:

• $x = -2, y = 1 \Rightarrow |x+y| \neq |x|+|y|$

• $x = -2/5, y = 0/5 \Rightarrow [x+y] \neq [x]+[y]$

• $\log(x+y) \geq \log x + \log y \Rightarrow \log(x+y) \geq \log xy \Rightarrow x+y \geq xy$ اگر $x=2, y=3$ فرض شود نامساوی نادرست است.

• $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq \sqrt{x+y} \xrightarrow{x, y \in \mathbb{R}^+} x+y+2\sqrt{xy} \geq x+y \Rightarrow 2\sqrt{xy} \geq 0$ با مثال نقض رد نمی‌شود بدیهی است

🍏 **برهان خلف** یک اثبات **غیرمستقیم**، برای اثبات درستی احکام کلی است. برای استفاده از برهان خلف، ابتدا فرض می‌کنیم که حکم داده شده نادرست است. سپس نشان می‌دهیم که این فرض باطل، حقایق دانسته شده را نقض می‌کند. این تناقض نشان می‌دهد که فرض خلف باطل است و حکم ثابت می‌شود.

... 🍀 با استفاده از برهان خلف نشان دهید اگر n^2 زوج باشد، n نیز زوج است.
... فرض کنیم n زوج نباشد، پس عددی فرد مانند $2k+1$ است، بنابراین:

$n = 2k+1 \Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$

... همان طور که می‌بینید n^2 نیز عددی فرد شد که این خلاف فرض زوج بودن n^2 است. پس فرض خلف باطل است و حکم برقرار است.

Test برای اثبات درستی کدام گزاره استفاده از برهان خلف متعارف و مناسب نیست؟

- (۱) بیشمار عدد اول وجود دارد.
- (۲) $\sqrt{3}$ عددی گنگ است.
- (۳) مربع هر عدد فرد، فرد است.
- (۴) اگر x گنگ باشد $\frac{1}{x}$ نیز گنگ است.

3 برای اثبات گنگ بودن اعداد و همچنین نامتناهی بودن مجموعه اعداد اول از برهان خُلف استفاده می شود، اما برای اثبات درستی گزینه ۳

بهبتر است از روش اثبات مستقیم استفاده شود:

$$a = 2k + 1 \Rightarrow a^2 = 4k^2 + 4k + 1 = \underbrace{4k(k+1)}_{2k'} + 1 = 2k' + 1$$

اقلیدس در سال ۵۰۰ قبل از میلاد برای اثبات نامتناهی بودن مجموعه اعداد اول از برهان خُلف استفاده کرد بدین صورت که فرض کرد مجموعه اعداد اول متناهی باشد و سپس به کمک قوانین بخش پذیری که در ادامه این فصل خواهیم خواند، نشان داد که فرض خُلف باطل است!

تئوری اعداد (اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها) [روش اشباع] **Number Theory**

گاهی برای اثبات درستی ارزش یک گزاره لازم است همه حالت‌های ممکن در مورد مسئله را در نظر بگیریم. این روش استدلال را **روش اشباع** یا **اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها** می نامند. در واقع برای اثبات گزاره‌ها به روش اشباع از هم‌ارزی زیر در منطق گزاره‌ها استفاده می شود:

$$(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$$

• ثابت کنید حاصل ضرب دو عدد متوالی زوج است.

حاصل ضرب دو عدد متوالی را به صورت $n(n+1)$ نشان می دهیم و حاله برای اثبات n دو حالت زیر را در نظر می گیریم:

• $n = 2k \Rightarrow n(n+1) = 2k(2k+1) = 2k'$ • $n = 2k+1 \Rightarrow n(n+1) = (2k+1)(2k+2) = 2(2k+1)(k+1) = 2k''$

• ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد متوالی مضرب ۶ است.

حاصل ضرب سه عدد متوالی را به صورت $n(n+1)(n+2)$ نشان می دهیم و حاله برای اثبات n حالت زیر را در نظر می گیریم:

• $n = 6k \Rightarrow n(n+1)(n+2) = 6k(6k+1)(6k+2) = 6k'$

• $n = 6k+1 \Rightarrow n(n+1)(n+2) = (6k+1)(6k+2)(6k+3) = 6k''$

• $n = 6k+5 \Rightarrow n(n+1)(n+2) = (6k+5)(6k+6)(6k+7) = 6k'''$

Test در اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها می توان نشان داد، هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ به صورت است. (مسئله ۲ صفحه - ۱۵)

$6k+5$ یا $6k+1$ (۱) $5k+2$ یا $5k+1$ (۲) $7k-1$ یا $7k+1$ (۳) $8k+5$ یا $8k+1$ (۴)

1 هر عدد طبیعی را می توان به یکی از صورت $6k$ یا $6k+1$ یا $6k+2$ یا $6k+3$ یا $6k+4$ یا $6k+5$ نشان داد که $6k$ مضرب ۶ و $6k+2$ زوج، $6k+3$ مضرب ۳ و همچنین $6k+4$ نیز زوج و مرکب است، بنابراین اگر عددی بخواهد اول باشد یا به شکل $6k+1$ است یا به صورت $6k+5$.

تئوری اعداد (اثبات بازگشتی) **Number Theory**

گاهی برای اثبات بعضی قضیه‌ها، مخصوصاً در مورد تساوی‌ها و نامساوی‌ها با فرض درستی حکم به یک رابطه بدیهی یا فرض قضیه می رسیم. در این طریقه اثبات که آن را **روش بازگشتی** می گویند، از گزاره‌های دوشرطی برای ساده کردن حکم داده شده و رسیدن به یک فرض بدیهی استفاده می شود. [می دانیم گزاره دو شرطی $Q \Leftrightarrow P$ در صورتی درست است که دو گزاره P و Q هم‌ارز باشند].

• به کمک اثبات بازگشتی درستی نامساوی مقابل را نشان دهید.

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \geq \frac{2}{\sqrt{a+b}}$$

چون نمی دانیم اثبات را باید از کجا شروع کنیم، حکم داده شده را ساده می کنیم تا به یک رابطه بدیهی و درست برسیم:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \geq \frac{2}{\sqrt{a+b}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{ab}} \geq \frac{2}{\sqrt{a+b}} \Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq 4\sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b + 2\sqrt{ab} \geq 4\sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0$$

بدیهی است $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$

Test اگر a عددی مثبت باشد، برای اثبات درستی $a + \frac{1}{a} \geq 2$ به وسیله اثبات بازگشتی به کدام نامساوی بدیهی می‌رسیم؟

$(a + \frac{1}{a})^2 \geq 0$ (۴) $(a - \frac{1}{a})^2 \geq 0$ (۳) $(a-1)^2 \geq 0$ (۲) $(a+1)^2 \geq 0$ (۱)

$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{a^2+1}{a} \geq 2 \xrightarrow{a>0} a^2+1 > 2a \Leftrightarrow a^2+1-2a \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$

Lesson.2 صفحه ۹ تا ۱۷ گسسته جوازدهم بخش یثیری در اعداد صحیح درس دوم Bertrand Russell

تئوری اعداد بخش یثیری Number Theory

عدد صحیح a را بر عدد صحیح $b \neq 0$ بخش پذیر می‌گوییم، هر گاه عدد صحیحی مانند q یافت شود به طوری که $a = bq$ در این صورت می‌نویسیم $b|a$ و می‌خوانیم **b می‌شمارد a** یا **a را b عاد** می‌کند a را. به عبارت دیگر: $b|a \Leftrightarrow a = bq$

برای رابطه $b|a$ دو تعبیر می‌توان به کار برد، که یکی از چپ به راست خوانده می‌شود و دیگری از راست به چپ:

① b شمارنده یا مقسوم‌علیه یا عامل a است.

② a مضرب b است یا a بر b بخش پذیر است.

چون $6 = 2 \times 3$ است بنابراین $2|6$ و $3|6$ یعنی اعداد 2 و 3 عدد 6 را می‌شمارند و همچنین 6 بر 2 و 3 بخش پذیر است.

اگر عدد صحیح a بر عدد صحیح b بخش پذیر نباشد، در این صورت می‌نویسیم $b \nmid a$.

چون هیچ عدد صحیحی مانند q یافت نمی‌شود که به ازای آن تساوی $5 \times q = 12$ برقرار باشد، بنابراین $5 \nmid 12$ یعنی 5 بخش پذیر نیست، یعنی $5 \nmid 12$.

از اینجا به بعد تمامی پارامترهایی مانند a, b, c, \dots که در تمام مسائل تئوری اعداد به کار می‌رود همواره اعداد صحیح هستند.

برخی قوانین ابتدایی بخش پذیری

$a a$	② هر عددی خودش را می‌شمارد.	$\pm 1 a$	① تمام اعداد را می‌شمارد.
$a 0$	④ هر عددی صفر را می‌شمارد.	$0 0$	③ صفر، صفر را می‌شمارد.
$0 a \Rightarrow a=0$	⑤ صفر هیچ عددی را نمی‌شمارد مگر خودش. یعنی اگر عددی بر صفر بخش پذیر شود قطعاً آن عدد صفر است.		
$a \pm 1 \Rightarrow a=\pm 1$	⑥ ± 1 بر هیچ عددی بخش پذیر نیستند مگر بر خودشان. یعنی اگر 1 یا -1 بر عددی بخش پذیر شوند آن عدد قطعاً ± 1 است.		
⑦ اگر یک عدد بر عددی دیگر بخش پذیر باشد، قرینه آن نیز بر دیگری بخش پذیر است و به طور کلی داریم:			
$a b \Leftrightarrow a -b \Leftrightarrow -a b \Leftrightarrow -a -b$			
$15 -15 = (-5)(3) \Rightarrow -5 -15$	$15 15 = (+5)(3) \Rightarrow 5 15$	$15 -15 = (-5)(3) \Rightarrow -5 -15$	$15 15 = (+5)(3) \Rightarrow 5 15$
⑨ اگر عدد صحیح و غیر صفر b بر عدد صحیح a بخش پذیر باشد، قطعاً عدد a از نظر قدرمطلق کوچک‌تر مساوی عدد b است، یعنی:			
$a b \xrightarrow{b \neq 0} a \leq b $			
اگر $a b$ و $ a > b $ است، آنگاه $b=0$ است. اگر $a b$ و $ a = b $ است، آنگاه $a = \pm b$ است.			

برای اثبات قوانین مربوط به عاد کردن بهتر است آن را به تساوی تبدیل کنیم. به عنوان مثال اثبات قانون نهم به صورت زیر است:

اگر $a|b \Rightarrow b = aq \Rightarrow q = \frac{b}{a}$

می‌دانیم $q \in \mathbb{Z}$ و $a \neq 0$ است پس $\{a\} = \mathbb{Z}$ در نتیجه $1 \leq |q|$ است؛ بنابراین:

$|\frac{b}{a}| \geq 1 \Rightarrow |b| \geq |a|$

صن ادوات هم | تئوری اعداد | بخش یثیری در اعداد صحیح

خرید آنلاین در Gajmarket.com

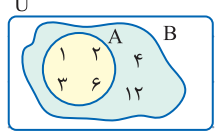
Test اگر a و b دو عدد صحیح باشند به طوری که $a^2 + b^2 = 0$ باشد و رابطه $a + b \mid m^2 - m - 2$ برقرار باشد، مقادیر قابل قبول برای m کدام است؟
 ۱) ۲ و ۱ (۲) -۱ و -۲ (۳) ۱ و -۲ (۴) ۲ و -۱

۴ می دانیم اگر مجموع چند عبارت نامنفی صفر باشد، باید تک تک آن ها صفر باشند، بنابراین:
 $a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow a+b=0$

حال $m^2 - m - 2 = 0$ بنابراین باید $m = -1, 2$ در نتیجه:
 $(m-2)(m+1) = 0 \Rightarrow m = -1, 2$

قانون لورن-هاردی [فشرده بیش از ۱۰ قانون در یک جمله]

می دانیم $۱۲ = ۲ \times ۶$ بنابراین می توان گفت ۱۲ از طرفی مجموعه مقسوم علیه های ۶ به صورت $A = \{1, 2, 3, 6\}$ و مجموعه مقسوم علیه های ۱۲ به صورت $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ است و بدیهی است که $A \subseteq B$ ، بنابراین به طور کلی خواهیم داشت:



$a \mid b \Rightarrow \{ \text{مقسوم علیه های } a \} \subseteq \{ \text{مقسوم علیه های } b \}$

عکس رابطه فوق نیز درست است یعنی اگر $\{ \text{مقسوم علیه های } b \} \subseteq \{ \text{مقسوم علیه های } a \}$ آنگاه $a \mid b$.

در رابطه بخش پذیری $a \mid b$ ، همواره به نوعی مجموعه مقسوم علیه های a کوچک تر یا مساوی مجموعه مقسوم علیه های b است. بنابراین از این به بعد به طور قراردادی در این کتاب سمت چپ رابطه عادی را **لاغر** و سمت راست را **چاق** می نامیم.

چاق لاغر

صفر چاق ترین عدد است، چون بر تمام اعداد بخش پذیر است.

± 1 لاغرترین اعداد هستند، چون همه اعداد را می شمارند.

هر عددی چاق تر یا لاغرتر از خودش محسوب می شود، چون به ازای هر a داریم $a \mid a$

همواره در یک بخش پذیری می توان **چاق** را **چاق تر** و همچنین **لاغر** را **لاغرتر** کرد. این قضیه را به طور قراردادی در این کتاب **قانون لورن-هاردی** می نامیم.

$a \mid b \Rightarrow a \mid b$

- $۴ \mid ۱۲ \Rightarrow ۴ \mid ۱۲ \times ۵$
- $۲ \mid ۸ \Rightarrow ۲ \mid ۸ \times (-۳)$
- $۵ \mid b \Rightarrow ۵ \mid ۲b$
- $۸ \mid ۲۴ \Rightarrow ۴ \mid ۲۴$
- $-۱۲ \mid ۳۶ \Rightarrow -۴ \mid ۳۶$
- $۱۰ \mid b \Rightarrow ۵ \mid b$

عوامل لاغری	عوامل چاقی
1 تقسیم شدن بر یک عدد صحیح <ul style="list-style-type: none"> • $۲b \mid a \Rightarrow b \mid a$ • $۷b \mid a \Rightarrow ۷ \mid a$ • $bc \mid a \Rightarrow b \mid a$ 	1 ضرب شدن در یک عدد صحیح <ul style="list-style-type: none"> • $a \mid b \Rightarrow a \mid ۴b$ • $۸ \mid b \Rightarrow ۸ \mid ab$ • $a \mid b \Rightarrow a \mid bc$
2 کاهش توان <ul style="list-style-type: none"> • $a^۲ \mid b \Rightarrow a \mid b$ • $۲^۳ \mid a \Rightarrow ۲^۲ \mid a$ • $a^۳ \mid ۳۶ \Rightarrow a^۲ \mid ۳۶$ 	2 افزایش توان <ul style="list-style-type: none"> • $۲ \mid ۶ \Rightarrow ۲ \mid ۶^۲$ • $a \mid b \Rightarrow a \mid b^۲$ • $a^۲ \mid b \Rightarrow a^۲ \mid b^۵$

بدیهی است که اگر لاغر، چاق شود یا چاق، لاغر شود نتایج به دست آمده الزاماً درست نیست.

بدیهی است که همزمان که چاق را چاق تر می کنیم می توانیم توأم با آن لاغر را نیز لاغرتر کنیم. در تمام موارد زیر لاغر، لاغرتر و در عین حال چاق، چاق تر شده است:

- $a^۲ \mid b \Rightarrow a \mid b^۳$
- $۲a \mid b \Rightarrow a \mid b^۲$
- $a^۳ \mid b^۲ \Rightarrow a^۲ \mid b^۳$
- $a^۲ \mid ۳b \Rightarrow a \mid ۶b$



Tweet



Bertrand Russell
@Bertrand 1872



در هندسه هیچ راه شانزده ای وجود ندارد.

There is no royal way in geometry

معرفی گراف : درس اول

مدل سازی با گراف : درس دوم

[Translate Tweet](#)

07:30 . 5/31/20

View Tweet activity

اقلیدس پدر هندسه و بنیانگذار هندسه است او نویسنده موفق ترین کتاب درسی اصول هندسه است که به مدت ۲۰۰۰ سال شالوده تمام آموزش هندسه در غرب بود.

5,337

7,412

7,120,910,208



Graph & Modeling

Chapter 2

گراف و مدل سازی

Add another Tweet



Euclid
Mid-4 century BC



Graph & Modeling Chapter 2

Lesson 1 صفحه ۸ تا ۸ گسترده جوازدهم معرفي گراف درس اول

Graph & Modeling انواع گراف و مدل سازي گراف و مدل سازي

اگر ساده شده یک نقشه را با استفاده از نقاط و خطوط رسم کنیم، از گراف برای مدل سازی مسئله استفاده کرده ایم.

نقشه مقابل مربوط به یک منطقه است که ناحیه های خشکی توسط پل هایی به هم وصل شده اند. این نقشه را می توان توسط یک گراف نمایش داد. اگر به جای هر خشکی یک نقطه و به جای هر پل، یک پاره خط (یا یک کمان) قرار دهیم به شکلی خواهیم رسید که از این به بعد آن را گراف می نامیم.

در واقع هر گراف مانند G تعدادی نقطه است که توسط پاره خط ها یا کمان هایی به هم وصل شده اند. نقاط را **رأس** و پاره خط ها را **یال** گراف می نامند. **مجموعه رأس های** یک گراف را با $V(G)$ و **مجموعه یال های** آن را با $E(G)$ نشان می دهند.

اگر برای یال های یک گراف جهت تعیین شده باشد، این یال ها را **یال جهت دار** و گراف رسم شده را **گراف جهت دار** می گوئیم. اگر یال های گراف جهت دار باشد، یال های گراف را باید به صورت زوج مرتب نشان دهیم.

$$\begin{cases} V(G) = \{a, b, c, d\} \\ E(G) = \{(a, b), (b, a), (b, c), (d, c)\} \end{cases}$$

در بعضی از گراف ها ممکن است یک یال، یک رأس را به خود همان رأس وصل کند، این یال ها را **طوقه** و گراف را **گراف طوقه دار** می نامند.

$$\begin{cases} V(G) = \{a, b, c, d\} \\ E(G) = \{(b, a), (b, b), (b, c), (c, d), (d, c)\} \end{cases}$$

در بعضی از گراف ها بین دو رأس بیش از یک یال وجود دارد، این یال ها را **یال های موازی** و این گراف را **گراف چند گانه** می نامند.

گرافی که **یال جهت دار** و **یال موازی** و **طوقه** نداشته باشد را **گراف ساده** می گویند.

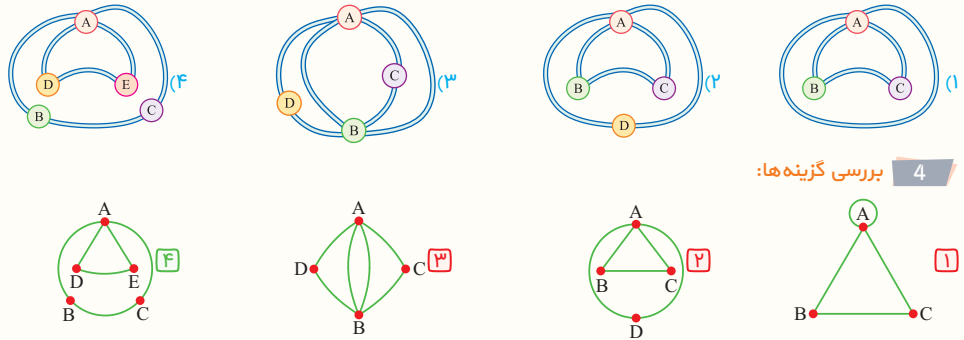
$$\begin{cases} V(G) = \{a, b, c, d\} \\ E(G) = \{ab, bc, cd\} \end{cases}$$

از این به بعد در تمام کتاب بحث درباره گراف های ساده است و هر جا گفته می شود «گراف»، منظور **گراف ساده** است.

نصف دوم از مدل سازی می آید

خرید کتاب در Gajmarket.com

Test گراف متناظر با نقشه کدام یک از مناطق زیر نمایشگر یک گراف ساده است؟



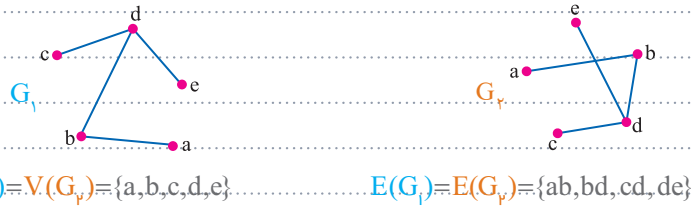
4 بررسی گزینه‌ها:

Graph & Modeling

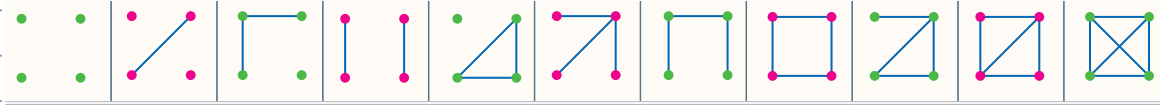
گراف و مدل سازی

🍏 دو گراف ساده G_1 و G_2 با هم برابرند (یکسان اند) هرگاه مجموعه رأس‌های آن‌ها برابر و مجموعه یال‌های آن‌ها نیز برابر باشد.....

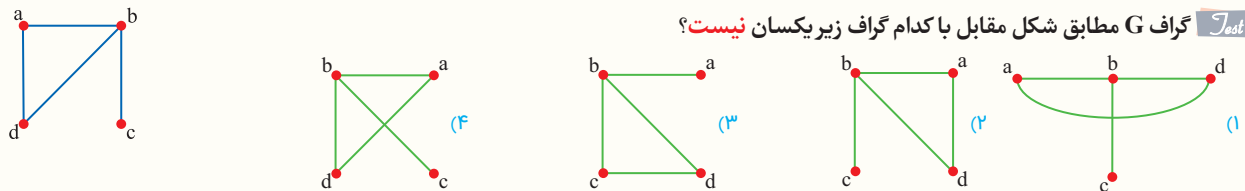
🍏 برای رسم نمودار یک گراف روشی یکتا مدنظر نیست فقط باید مشخص شود که گراف مورد نظر چند رأس و چند یال دارد و کدام یال به کدام رأس‌ها متصل است.....
 🍏 دو گراف G_1 و G_2 در شکل‌های زیر دارای ۵ رأس و ۴ یال هستند، این دو گراف، گراف‌هایی برابر هستند زیرا مجموعه رأس‌ها و مجموعه یال‌های آن‌ها یکسان است:



🍏 در شکل‌های زیر همه گراف‌های ساده با ۴ رأس [که در آن‌ها رأس‌ها بدون نام‌گذاری هستند] رسم شده‌اند:



Test گراف G مطابق شکل مقابل با کدام گراف زیر یکسان نیست؟

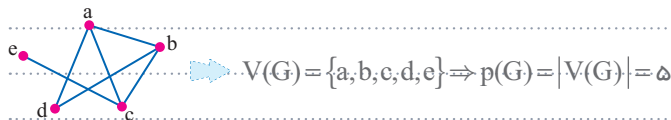


3 رأس a در گراف داده شده به دو رأس دیگر وصل است در حالی که در گزینه 3 تنها به یک رأس وصل شده است.

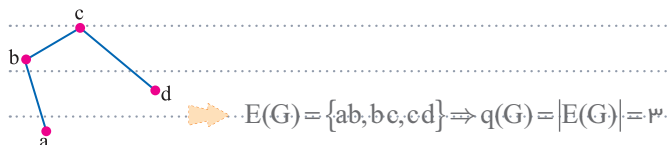
Graph & Modeling

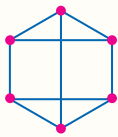
گراف و مدل سازی

🍏 اگر مجموعه رأس‌های گراف ساده G را با $V(G)$ نشان دهیم آنگاه **تعداد رأس‌های** گراف G یعنی $|V(G)|$ را **مرتبه گراف** G می‌گوییم و با $p(G)$ یا به طور خلاصه با p نمایش می‌دهیم.....



🍏 اگر مجموعه یال‌های گراف ساده G را با $E(G)$ نشان دهیم آنگاه **تعداد یال‌های** گراف G یعنی $|E(G)|$ را **اندازه گراف** G می‌گوییم و با $q(G)$ یا به طور خلاصه با q نمایش می‌دهیم.....





Test در گراف شکل مقابل اگر مرتبه را با $p(G)$ و اندازه را با $q(G)$ نشان دهیم، حاصل $q(G) - p(G)$ کدام است؟

- ۳ (۱)
- ۳ (۲)
- ۲ (۳)
- ۲ (۴)

1 در این گراف ۶ رأس و ۹ یال وجود دارد بنابراین $p(G) = 6$ ، $q(G) = 9$ در نتیجه:

$$q(G) - p(G) = 9 - 6 = 3$$

Graph & Modeling

رابطه مرتبه و اندازه گراف

گراف مدل سازی

اگر مرتبه یک گراف ساده p و اندازه آن q باشد آنگاه رابطه زیر بین p و q برقرار است:

$$q \leq \frac{p(p-1)}{2}$$

از نامساوی فوق می توان نتیجه گرفت در گرافی ساده با p رأس، تعداد یال ها حداکثر برابر با $\frac{p(p-1)}{2}$ است.



یک گراف ۳ رأسی حداکثر ۳ یال را می تواند در خود جای دهد؛ یعنی ظرفیت ۳ رأس، حداکثر ۳ یال است.



یک گراف ۴ رأسی حداکثر $\frac{4 \times 3}{2} = 6$ یال را می تواند در خود جای دهد؛ یعنی ظرفیت ۴ رأس، حداکثر ۶ یال است.

یک گراف ساده ای دارای ۸ یال است. این گراف حداقل چند رأس دارد؟

$$q \leq \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow p(p-1) \geq 2q \xrightarrow{\text{آزمون و خطا}} \text{Min}(p) = 5$$

یادگیری اعداد زیر برای حل مسئله های مربوط به تعداد رأس ها و یال های گراف، باعث افزایش سرعت عمل خواهد شد:

p	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	...
q(Max)	۰	۱	۳	۶	۱۰	۱۵	۲۱	۲۸	۳۶	۴۵	۵۵	۶۶	...

یک گرافی دارای ۳۰ یال باشد حداقل چند رأس دارد؟

با توجه به جدول فوق می گوئیم ۳۰ از ۲۸ بیشتر است؛ یعنی در ۸ رأس نمی توان این ۳۰ یال را جای داد پس این گراف حداقل ۹ رأس دارد.

Test یک گراف ساده از مرتبه p دارای ۲۵ یال است. حداقل مقدار p کدام است؟

- ۶ (۱)
- ۷ (۲)
- ۸ (۳)
- ۹ (۴)

$$q \leq \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow 25 \leq \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow p(p-1) \geq 50 \xrightarrow{\text{آزمون و خطا}} \text{Min}(p) = 8$$

Graph & Modeling

مجموع مرتبه و اندازه

گراف مدل سازی

اگر مجموع مرتبه و اندازه یک گراف برابر k باشد بهتر است یک جدول صلیبی به شکل زیر رسم کنید و اعداد ممکن را درون آن بنویسید و سپس حالت های قابل قبول را با توجه به شرایط گراف ساده مشخص کنید. [اولین شرط همواره $0 \leq q \leq \frac{p(p-1)}{2}$ است].

p	۱	۲	...
q	k-۱	k-۲	...

... مجموعه مرتبه و اندازه گراف ساده‌ای ۱۰ است. برای مرتبه گراف چند جواب قابل قبول وجود دارد؟
 ... از آن جا که $p+q=10$ است یک جدول صلیبی به شکل زیر رسم می‌کنیم و با در نظر گرفتن رابطه $q \leq \frac{p(p-1)}{2}$ درمی‌یابیم که برای مرتبه گراف ۷ جواب قابل قبول وجود دارد.

p	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
q	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰
	x	x	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Test در گراف G مجموع مرتبه و اندازه ۷ است. بیشترین مقدار اندازه گراف کدام است؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

ابتدا یک جدول صلیبی رسم می‌کنیم:

1 $\rightarrow \text{Max}(q)=3$

p	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
q	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰
	x	x	x	✓	✓	✓	✓

Graph & Modeling

حاصل ضرب مرتبه و اندازه

گراف و مدل سازی

اگر حاصل ضرب مرتبه و اندازه یک گراف ساده داده شود باید ابتدا عدد داده شده را به تمام حالت‌های ممکن به شکل حاصل ضرب دو عدد طبیعی بنویسیم، سپس یک جدول رسم کنیم و حالت‌های قابل قبول را با توجه به شرایط گراف ساده پیدا کنیم.

... حاصل ضرب مرتبه و اندازه گراف ساده‌ای ۲۴ است، بیشترین مقدار ممکن برای اندازه گراف کدام است؟

باید عدد ۲۴ را به تمام حالات ممکن بر حسب حاصل ضرب دو عدد طبیعی تجزیه کنیم و با توجه به ...
 شرط $q \leq \frac{p(p-1)}{2}$ که متوجه می‌شویم که هیچ گراف ساده‌ای با ۱ رأس و ۲۴ یال یا ۲ رأس و ۱۲ یال یا ۳ رأس و ۸ یال یا ۴ رأس و ۶ یال وجود ندارد پس برای تعداد رأس‌ها فقط اعداد ۲۴، ۱۲، ۸، ۶، ۴، ۳، ۲، ۱ قابل قبول هستند که در ...
 میان حالت‌های ممکن، گرافی با ۴ رأس و ۶ یال بیشترین اندازه را دارد.

p	۱	۲	۳	۴	۶	۸	۱۲	۲۴
q	۲۴	۱۲	۸	۶	۴	۳	۲	۱
	x	x	x	✓	✓	✓	✓	✓

Test در گراف G حاصل ضرب مرتبه و اندازه برابر ۴۵ است، حداکثر اندازه گراف کدام است؟

- ۵ (۱) ۹ (۲) ۱۵ (۳) ۲۰ (۴)

2 $\rightarrow \text{Max}(q)=9$

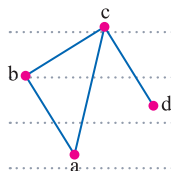
p	۱	۳	۵	۹	۱۵	۴۵
q	۴۵	۱۵	۹	۵	۳	۱
	x	x	✓	✓	✓	✓

Graph & Modeling

درجه رأس

گراف و مدل سازی

به تعداد یال‌هایی از گراف G که به رأس v متصل اند، درجه رأس v گفته می‌شود و با نماد $\text{deg}(v)$ یا $d(v)$ نشان می‌دهند.



$\text{deg}(a)=2$ $\text{deg}(b)=2$ $\text{deg}(c)=3$ $\text{deg}(d)=1$

اگر G یک گراف ساده از مرتبه p با مجموعه رأس‌های $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ باشد آنگاه:

$0 \leq \text{deg}(v_i) \leq p-1$

اگر درجه یک رأس از گراف عددی فرد باشد، آن رأس را رأس فرد و اگر درجه یک رأس از گراف عددی زوج باشد، آن رأس را رأس زوج می‌نامند.

در گراف مقابل، رأس‌های a, b, c ، رأس‌های زوج و رأس‌های e و f رأس‌های فرد هستند؛ زیرا:

$\deg(a) = 3, \deg(b) = 2, \deg(c) = 2, \deg(e) = 1, \deg(f) = 1$

اگر درجه یک رأس از گراف صفر باشد، یعنی هیچ یالی به آن وصل نباشد، آن رأس را رأس تنها یا ایزوله می‌نامند، [رأس‌های ایزوله جزء رأس‌های زوج هستند].

c, d, e ایزوله هستند.

اگر در گرافی با p رأس، یک رأس به همه رأس‌های دیگر متصل باشد، درجه آن رأس برابر $p-1$ است و به آن رأس، رأس فول (Full) گفته می‌شود.

رأس فول است a

$\begin{cases} \deg(a) = 4 \\ p(G) = 5 \end{cases}$

Test در یک گراف ساده با ۹ رأس و ۶ یال حداکثر چند رأس ایزوله وجود دارد؟

۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

۴ رأس می‌توان در ۶ یال جای داد، بنابراین حداکثر ۵ رأس ایزوله وجود دارد.

کراف مدل سازی ماکسیمم و مینیمم درجه رأس‌های گراف

بزرگ‌ترین عدد در بین درجات رأس‌های یک گراف را ماکسیمم درجه گراف می‌نامیم و با $\Delta(G)$ نشان می‌دهیم.

$\Delta(G) = 2$	$\Delta(G) = 4$	$\Delta(G) = 0$	$\Delta(G) = 1$

کوچک‌ترین عدد در بین درجات رأس‌های یک گراف را مینیمم درجه گراف می‌نامیم و با $\delta(G)$ نشان می‌دهیم.

$\delta(G) = 0$	$\delta(G) = 0$	$\delta(G) = 1$	$\delta(G) = 2$

اگر G یک گراف ساده از مرتبه p باشد آنگاه δ, Δ همواره در نامساوی مقابل صدق می‌کنند:

$$0 \leq \delta \leq \deg(v_i) \leq \Delta \leq p-1$$

Test در گراف ساده $G = (V, E)$ دو رأس از درجه $\delta = 1$ وجود دارد. اگر مرتبه گراف ۹ باشد، گراف حداکثر چند یال دارد؟

۲۴ (۴) ۲۳ (۳) ۲۲ (۲) ۲۱ (۱)

دو رأس را کنار می‌گذاریم و بقیه را پراز یال می‌کنیم، سپس دو رأس درجه ۱ را اضافه می‌کنیم:

$\text{Max}(q) = \binom{7}{2} + 1 + 1 = 23$

فصل ۲ دوازدهم • گراف و مدل سازی • می‌آزاد

خرید آنلاین در Gajmarket.com

Combinations تیم بندی ترکیبیات

🍏 اگر بخواهیم n شیء $[n]$ نفر را در k جایگاه متمایز توزیع کنیم به طوری که تعداد اشیاء قرار گرفته در هر جایگاه مشخص باشد، ابتدا تعداد اشیاء یکی از جایگاه‌ها را از میان کل اشیاء موجود انتخاب می‌کنیم، سپس تعداد اشیاء جایگاه بعدی را از میان باقی مانده اشیاء انتخاب می‌کنیم و ... برای درک بهتر به مثال زیر خوب دقت کنید:

🟢 به چند طریق می‌توان ۷ نفر را در ۲ اتاق، ۲ نفره و یک اتاق ۳ نفره واقع در یک هتل اسکان داد؟
 ابتدا ۲ نفر را از میان ۷ نفر انتخاب می‌کنیم بنابراین ۵ نفر می‌ماند که ۲ نفر بعدی را از میان ۵ نفر انتخاب می‌کنیم و ۳ نفر آخر را از میان ۳ نفر باقی مانده انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{7}{2} \binom{5}{2} \binom{3}{1} = \frac{7!}{2!5!} \times \frac{5!}{2!3!} \times \frac{3!}{1!2!} = \frac{7!}{2!2!1!} = 210$$

🍏 ترتیب انتخاب گروه‌ها هیچ اهمیتی ندارد و می‌توان هر گروه دلخواه را در ابتدا انتخاب کرد.
 مثلاً در همین مثال قبل می‌توان به صورت مقابل هم عمل کرد:

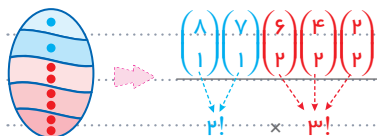
$$\binom{7}{3} \binom{4}{2} \binom{2}{1} = 35 \times 6 \times 1 = 210$$

🍏 اگر بخواهیم n نفر را در k اتاق جای دهیم به طوری که n_1 نفر در اتاق اول، n_2 نفر در اتاق دوم و ... n_k نفر در اتاق k ام جای بگیرند، تعداد راه‌های ممکن برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

🍏 می‌دانیم هریک از اتاق‌های یک هتل [یا اتاق‌های هر ساختمان دیگری در جهان] در یک مختصات جغرافیایی منحصر به فرد قرار گرفته و به یقین متفاوت از دیگری محسوب می‌شود. اما وقتی صحبت از تیم‌های بدون نام می‌شود، صرفاً مسئله تقسیم بندی اشیاء یا افراد مطرح است بدون آن که این اشیاء یا افراد را بخواهیم در جایگاه مشخصی [همانند اتاق‌های یک هتل] قرار دهیم. به عبارت دیگر در این مدل مسئله‌ها می‌خواهیم اشیاء متمایز را در مکان‌های یکسان توزیع کنیم. بنابراین اگر تعداد اعضای دو یا چند تیم شبیه هم باشند، باید پس از انتخاب، جواب را بر جایگشت تعداد تیم‌های با تعداد اعضای یکسان تقسیم کنیم.

🟢 به چند طریق می‌توان ۸ نفر را به ۲ تیم ۱ نفره و ۳ تیم ۲ نفره تقسیم بندی کرد؟
 ابتدا انتخاب‌ها را همانند جای دادن افراد در اتاق‌های هتل انجام می‌دهیم، سپس جواب به دست آمده را بر جایگشت شباهت‌ها تقسیم می‌کنیم:



🍏 اگر تیم‌ها اسم داشته باشند: مانند استقلال، رئال مادرید، پرسپولیس، تراکتور و ... همانند اتاق‌های هتل، متمایز محسوب می‌شوند و نیازی به تقسیم بر جایگشت گروه‌های مشابه نیست.

🟢 به چند طریق می‌توان ۶ نفر را در گروه‌های ۲ نفره به کشورهای سوئیس، آرژانتین و افغانستان فرستاد؟
 چون تیم‌ها اسم‌گذاری شده‌اند، پس از انتخاب اعضای تیم‌ها، نیاز به تقسیم بر جایگشت شباهت‌ها نیست، بنابراین ابتدا ۲ نفر را از میان ۶ نفر انتخاب می‌کنیم.

$$\binom{6}{2} \binom{4}{2} \binom{2}{2} = \frac{6!}{2!2!2!} = 90$$

Test شش نفر به نام‌های A, B, C, D, E, F مفروض اند به چند طریق می‌توان آن‌ها را به دو تیم ۲ نفره و دو تیم ۱ نفره تقسیم کرد؟

- ۴۵ (۱)
- ۶۰ (۲)
- ۷۵ (۳)
- ۵۵ (۴)



New generation **فصل ۲ دوازدهم** ترکیبیات **بسی در ترکیب** **خرید آنلاین در** Gajmarket.com

Combinations

محاسبه تعداد افرازاها

ترکیبات

پیدا کردن تعداد افرازاها. یک مجموعه، همانند پیدا کردن تیم‌های بدون نام‌گذاری است. [یعنی اگر تعداد اعضای دو یا چند تیم شبیه هم بود، پس از انتخاب، جواب را بر بایگشت شباهت‌ها تقسیم می‌کنیم].

تعداد افرازاها سه بخشی یک مجموعه ۶ عضوی کدام است؟

می‌دانیم ۶ را به ۳ صورت مختلف بر حسب مجموع ۳ عدد طبیعی می‌توان نوشت که عبارتند از:

۳+۲+۱=۶، ۲+۲+۲=۶، ۱+۱+۴=۶ بنابراین تعداد افرازاها ۳ عضوی یک مجموعه ۶ عضوی برابر است با:

$$\binom{6}{1} + \binom{5}{2} + \binom{4}{3} = 6 + 10 + 4 = 20$$

تعداد افرازاها مجموعه $A = \{a, b, c, d, e\}$ که شامل فقط یک مجموعه تک عضوی باشد، کدام است؟ (داخل - ۹۳)

۱۰ (۱) ۱۲ (۲) ۱۵ (۳) ۲۰ (۴)

۴ دو حالت کلی برای چنین افزاری وجود دارد:

$$N = \frac{\binom{5}{1} + \binom{4}{2}}{2!} = 20$$

Combinations

توزیع اشیاء مشابه در ظرف‌های متمایز

ترکیبات

فرض کنیم می‌خواهیم تعداد راه‌های توزیع n شیء کاملاً مشابه در k ظرف متمایز [یا تعداد راه‌های ساختن یک دسته گل شامل n شانه از k نوع گل متفاوت] را پیدا کنیم، برای این کار فرض می‌کنیم X_1 شیء در ظرف اول و X_2 شیء در ظرف دوم و ... X_k شیء در ظرف k ام [یا X_1 شانه گل از نوع اول و X_2 شانه گل از نوع دوم و ... X_k شانه گل از نوع k ام]. باشد، آنگاه باید تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $X_1 + X_2 + \dots + X_k = n$ را پیدا کنیم که برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

این معادله به آماره اینشتین شهرت دارد و منظور از اعداد صحیح و نامنفی، اعداد صحیح بزرگ‌تر مساوی صفر است.

به چند طریق می‌توان ۵ پرتقال را در ۳ سبد قرار داد؟

فرض کنیم X_1 پرتقال در سبد اول، X_2 پرتقال در سبد دوم و X_3 پرتقال در سبد سوم قرار گیرد. حال جمع این پرتقال‌ها باید ۵ شود؛ [یکی از حالت‌ها در شکل زیر نمایش داده شده است]. بنابراین داریم:

$X_1 + X_2 + X_3 = 5$ تعداد جواب‌ها $= \binom{5+2}{2} = \binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{1 \times 2} = 21$

به چند طریق می‌توان یک دسته گل شامل ۶ شاخه از ۳ نوع گل مختلف ساخت؟

فرض کنیم X_1 شاخه از نوع اول، X_2 شاخه از نوع دوم و X_3 شاخه از نوع سوم انتخاب شده باشد. در این صورت باید جمع این شاخه‌گل‌ها برابر ۶ باشد بنابراین:

$X_1 + X_2 + X_3 = 6$ تعداد جواب‌ها $= \binom{6+2}{2} = \binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{1 \times 2} = 28$

به چند طریق می‌توان ۸ کبوتر را در سه لانه متمایز قرار داد؟

فرض کنیم X_1 کبوتر در لانه اول و X_2 کبوتر در لانه دوم و X_3 کبوتر در لانه سوم قرار بگیرد، در این صورت خواهیم داشت:

تعداد راه‌ها $= \binom{8+2}{2} = \binom{10}{2} = 45$

میوه‌ها [سیب، پرتقال، گلابی، موز و ...] و همچنین حیوانات [کبوتر، کبک، گاو، گوسفند و ...] و مواردی نظیر آن‌ها را مشابه در نظر می‌گیریم، اما انسان‌ها را همواره متمایز فرض می‌کنیم.

Discrole Math

نصف ۳ دوازدهم | ترکیبات | سبکی در ترکیبات

Gajmarket.com خرید آنلاین در

Test

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = 2$ برابر است، کدام است؟

۵ (۱)

۶ (۲)

۷ (۳)

۸ (۴)

4 باید $\binom{7+2}{2} = \binom{9}{2}$ باشد، در نتیجه:

$$\binom{k+1}{k-1} = \binom{9}{2} \Rightarrow \binom{k+1}{2} = \binom{9}{2} \Rightarrow k+1=9 \Rightarrow k=8$$

Combinations

تعداد جواب‌های طبیعی

ترکیبات

می‌خواهیم تعداد جواب‌های صحیح و مثبت [جواب‌های طبیعی] معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ را به دست آوریم این مسئله معادل با این است که بخواهیم n پرتقال را بین k نفر توزیع کنیم به طوری که به هر کدام از افراد حداقل یک پرتقال برسد. برای ساده‌تر شدن حل معادله، ابتدا به هر یک از افراد یک پرتقال می‌دهیم و $n-k$ پرتقال باقی مانده را طبق روال قبل بین افراد توزیع می‌کنیم.

به چند طریق می‌توان ۱۰ پرتقال را بین ۴ نفر توزیع کرد به طوری که به هر یک از افراد حداقل یک پرتقال برسد؟

ابتدا به هر یک از افراد یک پرتقال می‌دهیم [که اگر بعداً هیچ پرتقالی به آن‌ها نرسد هیچ مشکلی پیش نیاید]، حال ۶ پرتقال باقی مانده را بین افراد توزیع می‌کنیم:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 - 1 - 1 - 1 - 1 = 6 \Rightarrow \binom{6+3}{3} = \binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3} = 84$$

به چند طریق می‌توان از میان ۳ نوع گل، یک دسته گل شامل ۷ شاخه ساخت، به طوری که از همه گل‌ها در دسته گل استفاده شود؟

ابتدا از هر نوع گل یک شاخه برمی‌داریم، حال باید به دسته گل شامل ۴ شاخه گل بسازیم:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 7 - 1 - 1 - 1 = 4 \Rightarrow \binom{4+2}{2} = 15$$

به طور کلی تعداد جواب‌های طبیعی [صحيح و مثبت] معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر است با:

$$\binom{n-1}{k-1}$$

Test به چند طریق می‌توان ۱۱ توپ یکسان را بین ۵ نفر توزیع کرد، به طوری که هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟ (داخل - ۹۸)

۱۶۰ (۱)

۱۸۰ (۲)

۲۱۰ (۳)

۲۲۰ (۴)

3 باید تعداد جواب‌های طبیعی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 11$ را پیدا کنیم که برابر است با:

$$\binom{11-1}{5-1} = \binom{10}{4} = 210$$

Combinations

تعداد جواب‌هایی که مقدار چند متغیر معلوم است

ترکیبات

اگر مقدار یک یا چند متغیر دقیقاً مشخص و معلوم باشد، به جای آن متغیرها عددهای داده شده را در معادله قرار می‌دهیم تا آن متغیرها از معادله حذف شوند. سپس تعداد جواب‌های معادله کوچک شده را پیدا می‌کنیم.

معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$ چند جواب صحیح و مثبت (طبیعی) دارد که $x_3 = 2$ باشد؟

می‌توانیم فرض کنیم که می‌خواهیم ۶ پرتقال را بین ۴ نفر تقسیم کنیم به طوری که به نفر سوم، دقیقاً ۲ پرتقال برسد. برای یافتن تعداد حالت‌های ممکن، ابتدا در معادله به جای متغیر x_3 عدد ۲ را قرار می‌دهیم:

حال چون جواب‌های صحیح و مثبت را می‌خواهیم، به هر یک از افراد باقی مانده ۱ پرتقال می‌دهیم و جواب‌های معادله جدید را حساب می‌کنیم:

$$x_1 + x_2 + x_4 = 6 - 2 = 4 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_4 = 4 - 1 - 1 - 1 = 1 \Rightarrow N = \binom{1+2}{2} = \binom{3}{2} = 3$$

Test تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 15$ به طوری که $\sqrt{x_1} = \frac{2}{x_2} = 2$ باشد، کدام است؟

۴۸ (۱)

۵۵ (۲)

۶۶ (۳)

۷۲ (۴)

3 ابتدا x_1, x_2 را به دست می‌آوریم سپس این اعداد را در معادله جایگذاری کرده و تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله حاصل را پیدا می‌کنیم:

$$\sqrt{x_1} = \frac{2}{x_2} = 2 \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = 1 \Rightarrow x_3 + x_4 + x_5 = 10 \Rightarrow \binom{10+2}{2} = 66$$

Rene Descartes
1596-1650



Logic & Set

Chapter 1

Lesson. 1

صفحه ۱ تا ۱۸ کتاب درسی

آشنایی با منطق ریاضی

درس اول



Logic & Set

منطق ریاضی و گزاره

منطق و مجموعه

منطق ریاضی که به آن **منطق نمادین** نیز گفته می شود، دستور زبان ریاضی یا مطالعه در ساختار جمله هایی است که در ریاضی به کار برده می شود. این شاخه از ریاضی به بررسی دقیق استدلال هایی پردازد و اعتبار یک استدلال را مشخص می کند.

هر جمله خبری که در حال حاضر یا آینده، دارای ارزش درست یا ارزش نادرست باشد را **گزاره** می نامند. مجموعه هر دو عدد فرد، همواره عددی زوج است. عدد $1-2^1$ عددی اول است.

جملات امری، پرسشی، عاطفی، احساسی، تعجبی و دعایی گزاره محسوب نمی شوند. کتاب ها را روی میز بگذارید. [امری] آیا 99.7 عددی اول است؟ [پرسشی] بیا و کشتی ما در شط شراب انداز. [احساسی] چه هوای دل انگیزی! [تعجبی] ای کاش نرفته بودی! [دعایی] تو را من چشم در راهم. [عاطفی]

حدس های ریاضی که هنوز درستی آن ها اثبات یا رد نشده است، گزاره محسوب می شوند. هر عدد زوج بزرگتر از 2 را می توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت. [حدس گلدباخ] بی نهایت عدد اول مانند p وجود دارد که $p+2$ هم اول باشد.

جمله های خبری که نتوانیم ارزش آن ها را تعیین کنیم، گزاره محسوب نمی شوند. درس ریاضی از فیزیک آسان تر است. عربی دشوارترین درس است.

فصل ۱ از درس منطق و مجموعه

Test یکی از جملات زیر را به تصادف انتخاب می کنیم، چقدر احتمال دارد جمله انتخاب شده یک گزاره باشد؟

- عدد $1-2^{523}$ عددی اول است.
- کتاب ها را روی میز بگذارید.
- آیا 203 عددی اول است؟
- کنکور امسال خیلی مفهومی بود.
- کنکور سال 99 در تیر ماه برگزار شد.
- چه صبح دل انگیزی!
- $\frac{1}{6}$ (۱)
- $\frac{1}{3}$ (۲)
- $\frac{1}{4}$ (۳)
- $\frac{2}{3}$ (۴)

2 ابتدا بررسی می کنیم چه تعداد از جملات داده شده گزاره است:

- عدد $1-2^{523}$ عددی اول است. [جمله خبری با ارزش قابل تعیین] ✓
 - کتاب ها را روی میز بگذارید. [جمله امری] ✗
 - آیا 203 عددی اول است؟ [جمله پرسشی] ✗
 - چه صبح دل انگیزی! [جمله تعجبی] ✗
 - کنکور امسال خیلی مفهومی بود. [جمله خبری با ارزش نامشخص] ✗
 - کنکور سال 99 در تیر ماه برگزار شد. [جمله خبری با ارزش نادرست] ✓
- بنابراین دو جمله از موارد داده شده گزاره محسوب می شود. در نتیجه احتمال آن که جمله انتخاب شده گزاره باشد برابر است با $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

فایده کتابت در Gajmarket.com

هر گزاره همواره دارای یکی از دو ارزش درست یا نادرست است. بنابراین اگر دو گزاره مانند p و q را در نظر بگیرید،

p	q
ر	ر
ر	ن
ن	ر
ن	ن

آنگاه برای ارزش آن‌ها می‌توان یک جدول به شکل مقابل تشکیل داد که دارای ۴ حالت است.

اگر ارزش یک گزاره همواره درست باشد آن را با T و اگر ارزش آن همواره نادرست باشد با F نشان می‌دهند.

[این دو حرف، معروف اول کلمات True و False هستند.]

به طور کلی اگر n گزاره داشته باشیم، جدول ارزش آن‌ها دارای 2^n سطر است.

Test اگر از میان تعدادی گزاره، یک گزاره را حذف کنیم از تعداد سطرهای جدول ارزش گزاره‌ها ۳۲ سطر کم می‌شود، تعداد گزاره‌های اولیه کدام است؟

۴ (۶)

۳ (۴)

۲ (۵)

۱ (۳)

4 فرض کنیم تعداد گزاره‌ها در ابتدا برابر n باشد، در این صورت جدول ارزش آن‌ها دارای 2^n سطر خواهد بود و در نتیجه:

$$2^n - 32 = 2^{n-1} \Rightarrow 2^n - 2^{n-1} = 32 \Rightarrow 2^{n-1} \times (2 - 1) = 32 \Rightarrow 2^{n-1} = 32 \Rightarrow n - 1 = 5 \Rightarrow n = 6$$

جمله‌ای خبری که معنایی متضاد و مخالف با خود گزاره دارد را **نقیض گزاره** می‌نامند.

نقیض گزاره «۵ عددی اول است» به صورت «۵ عددی اول نیست» خواهد بود.

ساده‌ترین روش برای ساختن نقیض یک گزاره، آوردن عبارت «این‌طور نیست که» قبل از گزاره اصلی یا «منفی کردن فعل جمله خبری» است.

نقیض گزاره p را با $\sim p$ نشان می‌دهند و به علامت «~» **ناقض** می‌گویند.

نقیض کلمات و نمادهای مهم و پرکاربرد را در جدول زیر ببینید:

نقیض نمادها		نقیض کلمات	
<	≥	فرد	زوج
>	≤	کتاب	گویا
=	≠	نیست	است

اگر دو گزاره p و q دارای ارزش یکسانی باشند، آن را به صورت $p \equiv q$ نمایش می‌دهیم.

اگر p یک گزاره باشد، نقیض نقیض گزاره p را به صورت $\sim(\sim p)$ نشان می‌دهند که همواره هم ارز منطقی با خود گزاره p است، یعنی:

$$\sim(\sim p) \equiv p$$

معمولاً برای ساده کردن گزاره‌هایی که فعل‌های منفی در آن‌ها به کار رفته، می‌توان از نقیض نقیض استفاده کرد.

گزاره «۲۴ عددی غیرزوج نیست» معادل است با:

«۲۴ عددی زوج است» \equiv «۲۴ عددی غیرزوج است» \equiv «(۲۴ عددی غیرزوج نیست)» \equiv «~»

Test نقیض گزاره «عدد a ، عددی نامثبت نیست» کدام است؟

- (۱) عدد a مثبت است. (۲) عدد a منفی است. (۳) عدد a نامنفی است. (۴) عدد a کوچکتر یا مساوی صفر است.

a کوچکتر یا مساوی صفر است \equiv مثبت نیست \equiv a نامثبت است \equiv (نامثبت نیست) \sim

4

Logic & Set

منطق و مجموعه گزاره مرکب

از ترکیب دو یا چند گزاره به وسیلهٔ رابط‌های گزاره‌ای (ادات ربط) گزاره‌های مرکب به دست می‌آید. [این ادات ربط ۴ تا هستند و عبارتند از «و»، «یا»، «اگر... آنگاه»، «اگر و تنها اگر و...»].
 ... عدد ۲ زوج است و عدد ۵ مضرب ۳ است ... عدد ۲ فرد است یا عدد ۵ اول است ...
 ... اگر ۲ عددی زوج باشد آنگاه ۳ عددی فرد است ... یک مستطیل مربع است اگر و تنها اگر اقطار آن عمود باشند ...

Test گزاره یک گزاره مرکب محسوب می‌شود.

- (۱) عدد $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ گنگ است (۲) اگر $\sqrt{2}$ گنگ باشد، آنگاه $2\sqrt{2}$ نیز گنگ است
 (۳) ۲ عددی اول زوج است (۴) از هر نقطه خارج یک صفحه بی‌شمار صفحه بر آن عمود می‌شود

2 «اگر $\sqrt{2}$ گنگ باشد، آنگاه $2\sqrt{2}$ نیز گنگ است» که از ادات ربط «اگر... آنگاه...» در آن استفاده شده است.

Logic & Set

منطق و مجموعه ترکیب فصلی و ترکیب عطفی

اگر p و q دو گزاره باشند، ترکیب فصلی آن‌ها را به صورت $p \vee q$ نشان می‌دهند و « p یا q » خوانده می‌شود.
 در این ترکیب به نماد « \vee » فاصل می‌گویند.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

ارزش گزاره حاصل از ترکیب فصلی دو گزاره فقط وقتی نادرست است که هر دو گزاره p و q نادرست باشند و در غیر این صورت ارزش این گزاره مرکب درست است.

... گزاره «۲ عددی فرد است یا ۵ عددی اول است» گزاره درستی است چون یکی از مؤلفه‌های آن ارزش درست دارد.

اگر چند گزاره با هم ترکیب فصلی شده باشند در صورتی ارزش این گزاره مرکب درست خواهد بود که **لااقل (دست کم) یکی از گزاره‌ها درست باشد**.

اگر p و q دو گزاره باشند، ترکیب عطفی آن‌ها را با نماد $p \wedge q$ نشان می‌دهند و « p و q » خوانده می‌شود. در این ترکیب به نماد « \wedge » عطف می‌گویند.

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

ارزش گزاره حاصل از ترکیب عطفی دو گزاره فقط وقتی درست است که هر دو گزاره p و q درست باشند و در غیر این صورت ارزش این گزاره مرکب نادرست است.

... گزاره «تهران پایتخت ایران است و عربستان یک کشور اروپایی است» گزاره‌ای نادرست است چون یکی از مؤلفه‌های آن ارزش نادرست دارد.

اگر چندین گزاره با هم ترکیب عطفی شده باشند ارزش این گزاره مرکب در صورتی درست است که **همهٔ گزاره‌ها درست باشند**.

Test کدام گزینه جملهٔ «اگر باشد، ارزش گزاره $p \wedge (q \vee r)$ درست است» را به درستی تکمیل می‌کنند؟

- (۱) p درست (۲) q درست (۳) q و r درست (۴) p و q درست

4 اگر q درست باشد، ارزش ترکیب فصلی $q \vee r$ درست خواهد شد حال اگر p نیز درست باشد، ارزش کل گزاره $p \wedge (q \vee r)$ درست خواهد بود.

بنابراین گزینهٔ ۴ درست است.



Edward Witten

Lesson 3

صفحه ۵۷ تا ۶۶ کتاب درسی

احتمال شرطی

درس سوم

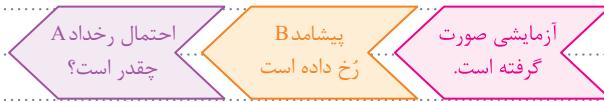
Probability

مفهوم احتمال شرطی

احتمال

New generation Probability & Statistics

در بعضی از مسائل احتمال، که به **احتمال شرطی** مشهور است، جمله ای گفته می شود که قسمتی از فضای نمونه را **افشا** می کند. در این موارد قسمت هایی از فضای نمونه را که پوچ شده است از فضای نمونه کنار می گذاریم و فضای نمونه را کوچک می کنیم و احتمال خواسته شده را روی این فضای نمونه کوچک تر به دست می آوریم. بنابراین ساختار کلی احتمال های شرطی به صورت زیر است:



بنابراین برای حل این مدل از مسائل احتمال، می توانیم به ترتیب زیر عمل کنیم:

1. فضای نمونه اصلی را در نظر می گیریم.
2. با توجه به شرط یا اطلاعی که از نتیجه آزمایش به ما داده شده، فضای نمونه جدیدی (پیشامد B) ایجاد می کنیم. به این فضای نمونه جدید، «**فضای نمونه محدود شده**» یا «**فضای نمونه کاهش یافته**» می گویند.
3. احتمال پیشامد مطلوب (پیشامد A) را در فضای نمونه جدید حساب می کنیم.

ساختار کلی جملاتی که در احتمال های شرطی به کار می روند

1. اگر احتمال آن که ؟	5. مشاهده شده احتمال آن که ؟
2. می دانیم احتمال آن که ؟	6. دیدیم احتمال آن که ؟
3. مشروط بر آن که احتمال آن که ؟	7. در صورتی که احتمال آن که ؟
4. ملاحظه شده است که احتمال آن که ؟	8. به شرط آن که احتمال آن که ؟

در برخی از مسائل در احتمال های شرطی ممکن است طراح از به کار بردن واژه هایی مانند «**اگر**»، «**می دانیم**»، «**در صورتی که**»، «**بدانیم**»، «**مشروط بر آن که**» و «**...**» خودداری کند و آن ها را در مفهوم مسأله پنهان کند؛ یعنی خیلی رلیکس و عادی خبری را اعلام می کند که به وسیله آن قسمتی از فضای نمونه افشا می شود. سپس بلافاصله بعد از آن سوالی مطرح می کند. این مسئله ها کمی فنی تر و دقیق تر از حالت قبل هستند و باید خوب به جمله بندی این گونه مسائل دقت کنید.

• ناسی را پرتاب کردیم مضرب ۳ نیامده است. احتمال آمدن عدد اول کدام است؟
 خبری که رلیکس و عادی اعلام شد، احتمال خواسته شده

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow S_{\text{new}} = \{1, 2, 4, 5\} \Rightarrow A = \{2, 5\} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Test از میان اعداد طبیعی نایبتر از ۲۵ عددی به تصادف انتخاب کرده ایم. اگر این عدد مضرب ۳ باشد احتمال دو رقمی بودن آن چقدر است؟

$$\frac{3}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{1}{3}$$

2 فضای نمونه در حالت اولیه به صورت $S = \{1, 2, \dots, 25\}$ است. حال چون می دانیم عدد انتخابی از این فضای نمونه مضرب ۳ است، پس فضای نمونه جدید برابر $S = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}$ خواهد بود. در این فضای نمونه پیشامد این که عدد انتخابی دو رقمی باشد، $\{12, 15, 18, 21, 24\}$ است:

$$P(A) = \frac{5}{8}$$

فصل ۲ درس ۳ • احتمال • احتمال شرطی

فردینا کتاب در ... Gajmarket.com

پیشامدهای شرطی در پرتاب دو تاس، انواع متفاوتی دارد و حل مسائل آن از یک الگوی مشخص پیروی نمی‌کند و از استراتژی‌های مختلف برای حل مسائل آن استفاده می‌شود، بعضی از این استراتژی‌ها به شرح زیر است:

1) اولین و متداول‌ترین نوع پیشامد شرطی در پرتاب دو تاس حالتی است که مجموع یا تفاضل اعداد رو شده را افشا می‌کند. در این حالت بهترین کار این است که حالاتی را که مسأله پوچ کرده کنار بگذاریم و باقی را به عنوان فضای نمونه جدید به طور کامل بنویسیم و پیشامد خواسته شده را از درون آن پیدا کنیم.

2) در پرتاب دو تاس اگر «مجموع اعداد رو شده ۷ باشد» احتمال آن که ...

$$S_{\text{new}} = \{(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)\}$$

2) اگر در احتمال شرطی مربوط به پرتاب دو تاس، فضای نمونه جدید را با اصطلاحاتی نظیر «هر دو تاس» یا «هیچ کدام از تاس‌ها» یا «تاس اول» یا «تاس دوم» معرفی کرد، در محاسبه تعداد عضوهای فضای نمونه جدید می‌توانیم از اصل ضرب استفاده کنیم.

3) در پرتاب دو تاس با هم فرد آمدن احتمال آن که ...

$$n(S_{\text{new}}) = 3 \times 3$$

3) در بعضی از مسائل احتمال شرطی مربوط به پرتاب دو تاس، پیشامدی که می‌دانیم رخ داده است، تعداد حالات بسیار زیادی دارد و شمارش تعداد حالات آن به طور مستقیم وقت گیر است، در این حالت بهتر است از اصل متمم [اصل تفریق] استفاده کنیم و به جای آن، تعداد حالاتی را پیدا کنیم که مسأله آن را نمی‌خواهد، سپس آن تعداد را از ۳۶ حالت ممکن برای دو تاس کنار بگذاریم تا تعداد عضوهای فضای نمونه جدید به دست آید.

4) در پرتاب دو تاس با هم اگر مجموع اعداد ظاهر شده ۵ نباشد، احتمال آن که ...

$$n(S_{\text{new}}) = 36 - 4 = 32 \Rightarrow n(S_{\text{new}}) = \{(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)\}$$

4) در بعضی تست‌های احتمال شرطی مربوط به پرتاب دو تاس ممکن است همزمان هم از اصل ضرب و هم از اصل تفریق استفاده کرد، حتی ممکن است فضای نمونه جدید را با یک اصل و پیشامد خواسته شده را توسط اصلی دیگر پیدا کنیم.

5) اگر مجموع اعداد رو شده در پرتاب دو تاس ۶ نباشد، احتمال آن که هر دو عدد رو شده اول باشند، چقدر است؟

6) در این مسئله برای یافتن تعداد عضوهای فضای نمونه جدید بهتر است از اصل تفریق به صورت زیر استفاده کنیم:

$$n(S_{\text{new}}) = 36 - 5 = 31 \Rightarrow S_{\text{new}} = \{(1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3)\}$$

حالا باید تعداد عضوهای پیشامد مطلوب در فضای نمونه جدید را پیدا کنیم. اعداد اول روی یک تاس ۲، ۳، ۵ هستند پس تعداد زوج مرتب‌هایی که مختص اول و دوم آن‌ها اعدادی اول باشد برابر با $3 \times 3 = 9$ است اما باید دقت کنید که زوج مرتب (۳، ۳) در فضای نمونه‌ی جدید وجود ندارد. در نتیجه احتمال مطلوب برابر است با:

$$P = \frac{A}{S} = \frac{3}{31}$$

احتمال شرطی در پرتاب سه تاس نیز چیزی شبیه دو تاس است و ممکن است از همه ترفندها و تکنیک‌های گفته شده برای دو تاس در محاسبه تعداد اعضای فضای نمونه یا پیشامد استفاده شود.

Test در پرتاب دو تاس با هم اگر حداقل یکی از تاس‌های رو شده ۲ باشد، احتمال آن که مجموع دو تاس زوج باشد، کدام است؟

$$\frac{6}{11} \text{ (۴)}$$

$$\frac{3}{11} \text{ (۳)}$$

$$\frac{5}{11} \text{ (۲)}$$

$$\frac{4}{11} \text{ (۱)}$$

2

$$S = \{(2, 1, 3, 4, 5, 6), (2, 2), (1, 3, 4, 5, 6), (2, 2)\}$$

$$A = \{(2, 4), (2, 6), (2, 2), (6, 2), (4, 2)\}$$

$$P(A) = \frac{5}{11}$$

David Hilbert
1862-1943



Descriptive Statistics

Chapter 3

Lesson.1 صفحه ۱۳ تا ۱۷ کتاب یازدهم صفحه ۱۵ تا ۱۷ کتاب دهم توصیف و نمایش داده‌ها درس اول



Descriptive Statistics اصطلاحات اولیه آمار توصیفی

مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات، **آمار** نامیده می‌شود. **علم آمار** مجموعه روش‌هایی است که شامل جمع‌آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی است. به عبارت دیگر، مراحل علم آمار به صورت زیر است:



اصطلاحات مهم علم آمار:

1. واقعیت‌هایی درباره یک شیء یا فرد که در محاسبه، برنامه‌ریزی و پیش‌بینی به کار می‌روند، **داده** نام دارد.
 2. هر ویژگی از اشیاء یا افراد که در اعضای جامعه یکسان نیستند و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کنند، **متغیر** نامیده می‌شود.
 3. عددی که به آن ویژگی یک عضو از جامعه، نسبت داده می‌شود **مقدار متغیر** یا به اصطلاح **مشاهده** می‌گویند.
 4. به مجموعه تمام افراد یا اشیایی که می‌خواهیم در مورد آن‌ها داده‌ها را گردآوری کنیم، **جامعه آماری** گفته می‌شود و به تعداد اعضای یک جامعه آماری، **اندازه جامعه** می‌گویند.
 5. به هر زیرمجموعه از جامعه آماری که به روشی مشخص انتخاب شده باشد، **نمونه** می‌گویند و به تعداد عضوهای یک نمونه، **اندازه نمونه** گفته می‌شود.
- می‌خواهیم وزن افراد یک کلاس ۲۰ نفره را بررسی کنیم. برای این منظور ۵ نفر از آن‌ها را به عنوان نمونه انتخاب می‌کنیم و وزن آن‌ها را اندازه می‌گیریم. در این حالت «وزن دانش‌آموزان» یک **متغیر تصادفی** است زیرا از یک عضو به عضو دیگر می‌تواند تغییر کند. عدد وزن هر دانش‌آموز مقدار متغیر نام دارد. همچنین ۲۰ دانش‌آموز **جامعه آماری** و اندازه جامعه ۲۰ و ۵ دانش‌آموز **یک نمونه** است و **اندازه نمونه** ۵ است.

Test می‌خواهیم وزن ماهی‌های یک استخر ماهی شامل ۲۰۰ ماهی را به منظور فروش تخمین بزنیم، نخست از قسمت کم عمق و در مرحله بعد از قسمت عمیق ۵ ماهی صید می‌کنیم و وزن آن‌ها را اندازه می‌گیریم. چه تعداد از عبارات زیر درست است؟

(الف) وزن ماهی‌های استخر یک متغیر تصادفی است.	(ب) جامعه آماری عبارت است از ۱۰ ماهی انتخاب شده
(ج) اندازه جامعه برابر ۲۰۰ است.	(د) اندازه نمونه برابر ۵ است.

۱ (۱) ۲ (۲)
۳ (۳) ۴ (۴)

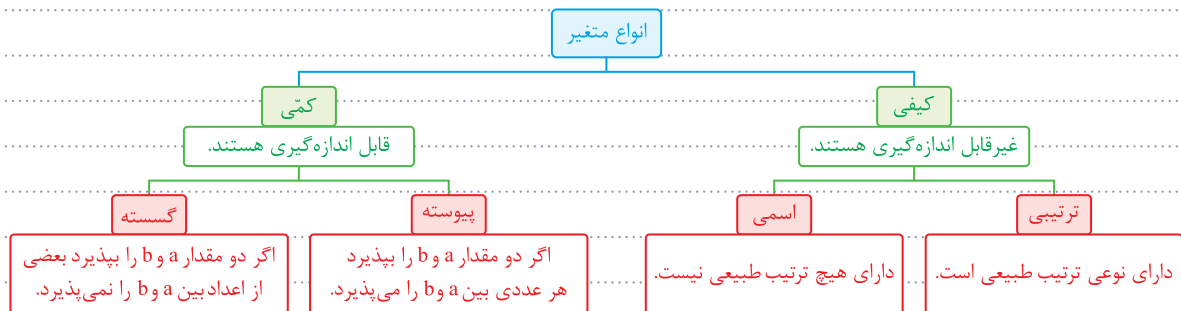
۲ موارد (الف) و (ج) درست است و اما علت نادرستی سایر عبارات:

(ب) جامعه آماری عبارت است از کل ماهی‌های استخر
(د) اندازه نمونه برابر ۱۰ است چون ۵ ماهی از قسمت کم عمق و ماهی‌های دیگر نیز از قسمت عمیق (و در مجموع ۱۰ ماهی) انتخاب شده است.

فصل ۳، درس ۱، آمار توصیفی، توصیف و نمایش داده‌ها

فایده‌آیند.com

متغیرها را به دو دسته **کمی** و **کیفی** و هر کدام از آن‌ها را نیز به دو زیرگروه به صورت نمودار زیر می‌توان تقسیم کرد. [برای حل تست‌های مربوط به انواع متغیر، اول به این فکر می‌کنیم که آیا قابل اندازه‌گیری است یا نه؟ تا نوع کیفی یا کمی معلوم شود. سپس به سراغ زیرگروه‌های آن دسته می‌رویم.]



- وزن، قد، قطر تنه، درختان، حجم آب، دما، میزان آلودگی هوا، فشار هوا، زمان، سن و... نمونه‌هایی از متغیر کمی پیوسته هستند.
- تعداد طبقات ساختمان، درصد یک درس در کنکور، تعداد مسافران و... نمونه‌هایی از متغیر کمی گسسته هستند.
- گروه خونی، رنگ چشم، ملیت، جنسیت، نوع آلودگی هوا، نژاد و... نمونه‌هایی از متغیر کیفی اسمی هستند.
- مقام‌های یک ورزشکار، میزان لذت از آشپزی، مراحل رشد، مراحل تحصیل، درجه افسران و... نمونه‌هایی از متغیر کیفی ترتیبی هستند.

در صورتی که اعداد نسبت داده شده به متغیر قابل معدل‌گیری باشند، می‌توان گفت آن متغیر کمی است. اما اگر نتوان از اعداد معدل‌گرفت آن متغیر کیفی است. مانند مقام‌های ورزشکاران، رتبه دانش‌آموزان و... در ضمن متغیرهایی که فقط نوع آن‌ها معلوم است کیفی هستند. مانند انواع گل‌های باغ، انواع حساب‌های بانکی، انواع مدارس و...

اگر کلمه «میزان» در کنار کلماتی نظیر **رضایت**، **سختی**، **لذت**، **علاقه‌مندی** و... بیاید، یک مفهوم کیفی دارد که می‌تواند کم، متوسط، زیاد یا خیلی زیاد و... باشد، یعنی کیفی ترتیبی است.

اگر کلمه «میزان» در کنار کلماتی نظیر **بارش**، **مالیات**، **درآمد فروش** و... بیاید دقیقاً مفهوم عددی دارد و یک متغیر کمی پیوسته است.

اگر کلمه «میزان» در کنار آلودگی هوا بیاید، در دنیای امروز مفهوم کمی دارد. چون امروزه ما می‌توانیم میزان آلودگی را اندازه بگیریم. اما شاید در گذشته که وسایل اندازه‌گیری وجود نداشت، می‌گفتیم میزان آلودگی بالاست یا پایین است، اما امروزه برحسب عدد بیان می‌شود.

میزان چه چیزهایی کمی و میزان چه چیزهایی کیفی است؟	
کمی پیوسته	کیفی ترتیبی
میزان بارش، مالیات، درآمد فروش، آلودگی هوا و ...	میزان رضایت، سختی، لذت، علاقه‌مندی و ...

نوع کدام یک از متغیرهای زیر با بقیه فرق دارد؟

- زمان مکالمات تلفنی
- خسارت مالی تصادف
- رنگ شلوار کارمندان اداره
- مقاومت ترانزیستور

3 گزینه‌های 1، 2، 4 متغیرهای کمی پیوسته هستند، ولی گزینه 3 متغیر کیفی اسمی است.

اگر برای بررسی یک متغیر خاص از یک جامعه آماری، داده‌هایی گردآوری شده باشد، آنگاه تعداد کل داده‌ها را با n نمایش می‌دهیم. در این صورت سه نوع فراوانی برای داده‌ها تعریف می‌شود:

1) به تعداد دفعاتی که هر داده تکرار (مشاهده) می‌شود، فراوانی آن داده می‌گوییم و آن را با f نشان می‌دهیم. ...
 ... در یک کلاس ۲۰ نفره، رنگ چشم ۱۰ نفر مشکی، ۵ نفر قهوه‌ای، ۳ نفر سبز و ۲ نفر آبی باشد، در این صورت فراوانی رنگ چشم مشکی $f_1 = 10$ است.

2) با تقسیم فراوانی هر داده یعنی f ، به تعداد کل داده‌ها یعنی n ، فراوانی نسبی به دست می‌آید. فراوانی نسبی را معمولاً با F نشان می‌دهند که همواره عددی در بازه $[0, 1]$ است.

$$F = \frac{f}{n}$$

... در یک کلاس با ۲۰ دانش‌آموز اگر رنگ چشم ۱۰ نفر مشکی باشد، فراوانی نسبی کسانی که چشم مشکی دارند برابر $F = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ است.

3) اگر فراوانی نسبی داده‌ها را در ۱۰۰ ضرب کنیم، درصد داده‌ها به دست می‌آید. درصد داده‌ها را معمولاً با P نشان می‌دهند و همواره داریم:

$$P = F \times 100 = \frac{f}{n} \times 100$$

رابطه انواع فراوانی

رابطه درصد داده‌ها با هم	رابطه فراوانی‌ها کسری نسبی با هم	رابطه فراوانی‌ها با هم
$\sum P_i = P_1 + P_2 + \dots + P_k = 100$	$\sum F_i = F_1 + F_2 + \dots + F_k = 1$	$\sum f_i = f_1 + f_2 + \dots + f_k = n$
$f \xrightarrow{\div n} F \xrightarrow{\times 100} P$	$P \xrightarrow{\div 100} F \xrightarrow{\times n} f$	

فصل ۲، درس ۳ • آمار توصیفی • زینب وینس رازدها

Test اگر فراوانی داده‌های ۳۶ و درصد فراوانی این داده ۳۰ باشد، تعداد کل داده‌ها کدام است؟

- ۱) ۸۰
- ۲) ۱۰۰
- ۳) ۱۲۰
- ۴) ۲۴۰

3) می‌دانیم درصد فراوانی از رابطه $P_i = \frac{f_i}{n} \times 100$ به دست می‌آید، بنابراین:

$$30 = \frac{36}{n} \times 100 \Rightarrow n = \frac{36 \times 100}{30} = 120$$

برای همه انواع متغیرها [کمی و کیفی] می‌توان جدول فراوانی به شکل‌های زیر رسم کرد:

جدول درصد داده‌ها	جدول فراوانی نسبی	جدول فراوانی																																				
<table border="1"> <tr><td>x_k</td><td>...</td><td>x_3</td><td>x_2</td><td>x_1</td><td>x_i</td></tr> <tr><td>P_k</td><td>...</td><td>P_3</td><td>P_2</td><td>P_1</td><td>P_i</td></tr> </table>	x_k	...	x_3	x_2	x_1	x_i	P_k	...	P_3	P_2	P_1	P_i	<table border="1"> <tr><td>x_k</td><td>...</td><td>x_3</td><td>x_2</td><td>x_1</td><td>x_i</td></tr> <tr><td>F_k</td><td>...</td><td>F_3</td><td>F_2</td><td>F_1</td><td>F_i</td></tr> </table>	x_k	...	x_3	x_2	x_1	x_i	F_k	...	F_3	F_2	F_1	F_i	<table border="1"> <tr><td>x_k</td><td>...</td><td>x_3</td><td>x_2</td><td>x_1</td><td>x_i</td></tr> <tr><td>f_k</td><td>...</td><td>f_3</td><td>f_2</td><td>f_1</td><td>f_i</td></tr> </table>	x_k	...	x_3	x_2	x_1	x_i	f_k	...	f_3	f_2	f_1	f_i
x_k	...	x_3	x_2	x_1	x_i																																	
P_k	...	P_3	P_2	P_1	P_i																																	
x_k	...	x_3	x_2	x_1	x_i																																	
F_k	...	F_3	F_2	F_1	F_i																																	
x_k	...	x_3	x_2	x_1	x_i																																	
f_k	...	f_3	f_2	f_1	f_i																																	
$\sum P_i = 100$	$\sum F_i = 1$	$\sum f_i = n$																																				

فردینا تالیب‌نژاد • www.Gajmarket.com

نمونه‌گیری احتمالی، نوعی نمونه‌گیری است که در آن همه واحدهای آماری شانس معلوم و برابر برای انتخاب شدن در نمونه دارند و از روش تصادفی برای انتخاب واحدهای نمونه استفاده می‌شود.

Test نمونه‌گیری ، یک نوع نمونه‌گیری غیر احتمالی است و نمونه‌گیری ، یک نوع نمونه‌گیری احتمالی است.

۱) خوشه‌ای - طبقه‌ای

۲) سهمیه‌ای - سیستماتیک

۳) طبقه‌ای - در دسترس

۴) گلوله برفی - قضاوتی

۲ نمونه‌گیری سهمیه‌ای یک نوع نمونه‌گیری غیر احتمالی است و نمونه‌گیری سیستماتیک یک نوع نمونه‌گیری احتمالی است.

Inferential Statistics

نمونه‌گیری تصادفی ساده

آمار استنباطی

نمونه‌گیری تصادفی ساده نوعی روش نمونه‌گیری است که در آن همه واحدهای آماری شانس برابر برای انتخاب شدن در نمونه دارند و روش کار به این صورت است که همه افراد جامعه را فهرست می‌کنیم و سپس طی یک فرایند تصادفی چند نفر از اعضای فهرست را انتخاب می‌کنیم.

۲ اگر یک جامعه آماری از طبقات متمایز تشکیل شده باشد، امکان دارد در روش نمونه‌گیری تصادفی ساده از بعضی طبقات، واحد آماری وجود نداشته باشد. لذا در این حالت نمونه‌گیری تصادفی ساده روش خیلی مناسبی نیست.

۱ در نمونه‌گیری تصادفی ساده باید همه واحدهای آماری فهرست شده باشند در ضمن روش نمونه‌گیری تصادفی ساده در مواردی که اندازه جامعه بزرگ باشد و دسترسی به فهرست اعضای جامعه دشوار و هزینه‌بر باشد، روش مناسبی نیست.

احتمال انتخاب هر کدام از واحدهای آماری در روش نمونه‌گیری تصادفی ساده برابر است با:

$$P = \frac{n}{N} = \frac{\text{تعداد اعضای نمونه}}{\text{تعداد اعضای جامعه}}$$

Test در مواردی که اندازه جامعه بزرگ باشد [تعداد واحدهای آماری زیاد باشد]، روش نمونه‌گیری تصادفی ساده، و اگر دسترسی به فهرست اعضای جامعه دشوار و هزینه‌بر باشد، روش نمونه‌گیری تصادفی ساده،

۱) روش مناسبی نیست - روش مناسبی است.

۲) روش مناسبی است - روش مناسبی نیست

۳) روش مناسبی است - روش مناسبی است.

۴) روش مناسبی نیست - روش مناسبی نیست.

۴ در مواردی که اندازه جامعه بزرگ باشد [تعداد واحدهای آماری زیاد باشد]، روش نمونه‌گیری تصادفی ساده، روش مناسبی نیست و همچنین اگر دسترسی به فهرست اعضای جامعه دشوار و هزینه‌بر باشد، روش نمونه‌گیری تصادفی ساده، روش مناسبی نیست.

Inferential Statistics

نمونه‌گیری خوشه‌ای

آمار استنباطی

اگر جامعه آماری قابل فهرست کردن نباشد، جامعه را به دسته‌ها یا زیرمجموعه‌هایی تقسیم بندی می‌کنیم [تعداد اعضای زیرمجموعه‌ها (زوم‌ها) برابر نیست] و هر زیرمجموعه را یک خوشه می‌نامیم. حال چند خوشه را به روش نمونه‌گیری تصادفی ساده انتخاب می‌کنیم و در هر یک سرشماری انجام می‌دهیم [یعنی همه واحدهای آماری خوشه‌های انتخاب شده را به عنوان نمونه در نظر می‌گیریم]. این روش نمونه‌گیری را **نمونه‌گیری خوشه‌ای** می‌نامند.

برای محاسبه میانگین نمرات حسابان دانش آموزان شهر تهران، می‌توان چند مدرسه را انتخاب کرد و دانش آموزان هر مدرسه را سرشماری کرد [یعنی نمره حسابان همه دانش آموزان درون مدرسه را بررسی کرد]. در این حالت هر مدرسه یک خوشه محسوب می‌شود.

3 هر چقدر ویژگی‌های مورد بررسی درون خوشه‌ها تفاوت بیشتری داشته باشند، می‌توان گفت خوشه‌ها از تنوعی شبیه تنوع کل جامعه برخوردارند و دقت در نمونه‌گیری خوشه‌ای بهتر خواهد شد.

1 در نمونه‌گیری خوشه‌ای، واحدهای آماری درون هر خوشه از نظر مسافت نزدیک به هم هستند.

• دانش‌آموزان درون مدرسه از نظر مسافت نزدیک به هم هستند که باعث کاهش هزینه در نمونه‌گیری خواهد شد.

2 دقت در نمونه‌گیری خوشه‌ای از دقت در نمونه‌گیری تصادفی ساده، کمتر است.

در نمونه‌گیری خوشه‌ای احتمال انتخاب خوشه‌ها با هم برابر است و چون در همه خوشه‌های انتخاب شده سرشماری انجام می‌شود احتمال انتخاب هر یک از واحدهای آماری نیز با هم برابر بوده و برابر است با:

$$P = \frac{n}{N} = \frac{\text{تعداد خوشه‌های انتخاب شده}}{\text{تعداد کل خوشه‌ها}}$$

Test در یک منطقه شهری ۲۰ مدرسه وجود دارد که هر کدام بین ۱۰۰ تا ۳۵۰ دانش‌آموز دارند، اگر ۳ مدرسه را طبق نمونه‌گیری خوشه‌ای انتخاب کنیم، احتمال انتخاب هر کدام از دانش‌آموزان حاضر در این نمونه کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$

۲) $\frac{1}{20}$

۳) $\frac{3}{20}$

۴) $\frac{20}{350}$

3 چون نوع نمونه‌گیری خوشه‌ای است احتمال انتخاب هر واحد آماری برابر است با:

$$P = \frac{n}{N} = \frac{3}{20}$$

Inferential Statistics
آمار استنباطی

در روش نمونه‌گیری طبقه‌ای، جامعه آماری را به تعدادی گروه طبقه‌بندی می‌کنند. واحدهای آماری در هر طبقه نسبت به موضوع مورد بررسی باید پراکندگی کمی داشته باشند، ولی اختلاف بین طبقات باید زیاد باشد [مثلاً اگر موضوع مورد بررسی سن ازدواج است، بهتر است مردان را یک طبقه و زنان را یک طبقه دیگر نظر گرفت]. سپس از هر طبقه متناسب با جمعیت آن، نمونه‌گیری تصادفی ساده انجام می‌دهیم. در این صورت نمونه‌ای خواهیم داشت که مطمئن هستیم زیرگروه‌ها با همان نسبتی که در جامعه وجود دارند به عنوان نماینده جامعه آماری در نمونه حضور دارند. این روش با افزایش هزینه همراه است ولی دقت بیشتری دارد.

2 در نمونه‌گیری طبقه‌ای، واحدهای آماری درون طبقات باید شبیه هم و همگن باشند. در ضمن هر طبقه با طبقه دیگر می‌بایست از نظر مشخصه‌ای که مورد بررسی قرار می‌گیرد، متفاوت باشد.

1 از روش نمونه‌گیری طبقه‌ای زمانی استفاده می‌کنیم که جامعه آماری دارای ساخت نامتجانس و غیرهمگن باشد. یعنی جامعه از زیرگروه‌هایی تشکیل شده که از نظر مشخصه و درصد تشکیل دهنده جامعه، متفاوت اند.

• سن ازدواج در مردان و زنان یا قد افراد جامعه در مردان و زنان متفاوت است که باعث نامتجانس شدن ساخت جامعه می‌شود و باید هر کدام از این زیرگروه‌ها را یک طبقه فرض کرد.

• اگر بحث درباره درصد اشتغال در افراد جامعه است بهتر است مردان و زنان هر کدام در یک طبقه جداگانه قرارگیرند، چون میزان درصد اشتغال زنان شبیه هم و مردان هم شبیه هم است ولی زنان با مردان متفاوت است.

در نمونه‌گیری طبقه‌ای، اگر بخواهیم یک نمونه n تایی از یک جامعه N نفری انتخاب کنیم، و تعداد افراد در طبقه‌ها f_1, f_2, \dots, f_k باشد و ما n_1 تا از طبقه اول، n_2 تا از طبقه دوم، و... و n_k تا از طبقه k ام انتخاب کنیم، آنگاه داریم: $(n = \sum n_i, N = \sum f_i)$

$$\frac{n_1}{f_1} = \frac{n_2}{f_2} = \dots = \frac{n_k}{f_k} = \frac{n}{N} \quad \text{سه‌م طبقه } i \text{ ام} = n_i = \frac{f_i}{\sum f_i} \times n$$

از آنجا که در نمونه‌گیری طبقه‌ای، از هر طبقه متناسب با جمعیت آن، واحد آماری انتخاب می‌شود، به راحتی می‌توان ثابت کرد. احتمال انتخاب همه واحدهای آماری، با هم برابر است و همانند نمونه‌گیری تصادفی ساده این احتمال برابر است با:

$$P = \frac{n}{N} = \frac{\text{اندازه نمونه}}{\text{اندازه جامعه}}$$

Test در یک شرکت ۵۰ نفر کارگر، ۴۰ نفر کارمند و ۱۰ نفر مدیر وجود دارد. می‌خواهیم یک نمونه ۲۰ نفره بر اساس نمونه‌گیری طبقه‌ای برای محاسبه میانگین حقوق دریافتی انتخاب کنیم. احتمال انتخاب هر کدام از مدیران در نمونه چقدر است؟

- ۱) $\frac{1}{100}$ ۲) $\frac{1}{10}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) نامشخص

$$n_i = \frac{n}{N} \times f_i = \frac{20}{100} \times 10 = 2$$

بر اساس نمونه‌گیری طبقه‌ای سهم مدیران در نمونه انتخابی برابر است با:

$$P = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

یعنی از ۱۰ نفر مدیر شرکت ۲ نفر باید انتخاب شوند، بنابراین احتمال انتخاب هر کدام از مدیران برابر است با:

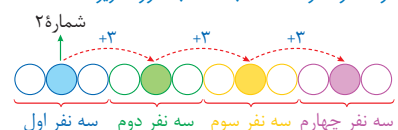
Inferential Statistics

نمونه‌گیری سامان مند

آمار استنباطی

نوعی نمونه‌گیری طبقه‌ای که در آن اندازه طبقه‌ها با هم برابر است را **نمونه‌گیری سیستماتیک (سامان مند)** می‌نامند. از نمونه‌گیری سیستماتیک وقتی استفاده می‌کنیم که تمام اعضای جامعه آماری به طور تصادفی فهرست شده باشند. مانند افرادی که به یک برنامه تلویزیونی پیامک فرستادند یا افرادی که به طور تصادفی در سالن سینما نشسته‌اند یک نوع فهرست شدن شماره‌دار به طور تصادفی برای آن‌ها انجام شده است یا افراد منتظر در باجه بانک و... در این روش نمونه‌گیری، فقط از طبقه اول یک واحد آماری به تصادف انتخاب می‌کنیم، سپس با همان رویه این کار را در طبقات دیگر انجام می‌دهیم.

مراحل انجام روش نمونه‌گیری سیستماتیک [سامان مند] به صورت زیر است:

<p>• می‌خواهیم از بین ۱۲ نفر یک نمونه‌گیری سیستماتیک انجام دهیم و یک نمونه ۴ نفره انتخاب کنیم، روش کار به صورت زیر است:</p>	<p>مراحل روش نمونه‌گیری سیستماتیک</p>
<p>فاصله نمونه‌گیری $d = \left\lfloor \frac{12}{4} \right\rfloor = 3$</p>	<p>1) ابتدا فاصله نمونه‌گیری را به دست می‌آوریم که تعداد افراد هر طبقه را مشخص می‌کند. $d = \left\lfloor \frac{N}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\text{اندازه جامعه}}{\text{اندازه نمونه}} \right\rfloor$</p>
<p>یک نفر به طور تصادفی از ۳ نفر اول انتخاب می‌کنیم، مثلاً نفر شماره ۲</p>	<p>2) عددی صحیح مانند a به تصادف در بازه $[1, d]$ انتخاب می‌کنیم (اولین عضو نمونه‌گیری)</p>
<p>نمودار شماتیک و شماره نفرات انتخاب شده به صورت زیر است:  سه نفر اول سه نفر دوم سه نفر سوم سه نفر چهارم</p>	<p>3) شماره نفر i ام طبق جمله عمومی دنباله حسابی به صورت زیر به دست می‌آید: $a_i = a_1 + (i-1)d$ یعنی شماره نفرات انتخاب شده در نمونه‌گیری سیستماتیک به صورت زیر است: $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \dots$</p>

در نمونه‌گیری سیستماتیک هم همانند نمونه‌گیری تصادفی ساده احتمال انتخاب واحدهای آماری با هم برابر است و برابر است با:

$$P = \frac{n}{N} = \frac{\text{اندازه نمونه}}{\text{اندازه جامعه}}$$

Test کدام یک از متغیرهای زیر کیفی محسوب نمی شود؟

- ۱) نوع آلاینده های هوا
۲) مقام های یک ورزشکار
۳) سن افراد حاضر در ورزشگاه
۴) نژاد سگ های پلیس

3 سن افراد حاضر در ورزشگاه یک متغیر کمی است، چون مقادیر عددی می گیرد که قابل تعدیل گیری هم هست.

Inferential Statistics

یا رامترو؟ شماره

آمار استنباطی

مشخصه ای عددی که توصیف کننده جنبه خاصی از جامعه باشد، پارامتر جامعه نامیده می شود. پارامتر جامعه تنها در صورتی قابل محاسبه است که داده های کل جامعه را در اختیار داشته باشیم. اما معمولاً این طور نیست و ما داده های کل جامعه را در اختیار نداریم. بنابراین علیرغم این که پارامتر جامعه دارای مقادیری ثابت است ولی این مقدار ثابت، برای ما مجهول است و ما قصد برآورد و تخمین آن را داریم.

مشخصه ای عددی که توصیف کننده جنبه خاصی از نمونه است و از داده های نمونه به دست می آید آماره نمونه یا آماره نامیده می شود. آماره نمونه از یک نمونه به نمونه دیگر تغییر می کند در حالی که پارامترهای جامعه همیشه ثابت هستند. بنابراین از آماره نمونه برای تخمین پارامتر جامعه استفاده می شود.

اداره کشاورزی استان خوزستان در حال ارزیابی هندوانه های در حال برداشت است:

- در این بررسی، هندوانه ها واحدهای آماری هستند.
- اگر پژوهشگران وزن هندوانه ها را بررسی کنند، وزن یک متغیر است.
- اگر وزن تک تک هندوانه ها را بررسی کنیم، سرشماری انجام داده ایم.
- متوسط وزن همه هندوانه ها پارامتر جامعه است.
- اگر ۵۰ هندوانه را انتخاب کنیم و میانگین وزن آن ها را به دست آوریم، عدد به دست آمده را آماره نمونه می نامند.
- اگر پژوهشگران بخواهند مزرعه هندوانه ها را به «متوسط = خوب = عالی» دسته بندی کنند، متغیر مورد بررسی مزرعه است که یک متغیر کیفی است.
- اگر یک نمونه ۵۰ تایی از هندوانه ها انتخاب کنیم، نسبت تعداد هندوانه های دارای مزرعه عالی به کل هندوانه های یک مشخصه عددی است که به آن آماره نمونه گفته می شود.

به مطالعه نحوه گردآوری، سازماندهی و تحلیل و تفسیر داده ها جهت اطلاعات و تصمیم گیری، آمار گفته می شود.

فرایند نتیجه گیری درباره پارامترهای جامعه براساس نمونه، آمار استنباطی نامیده می شود.

Test شرکت گاج مارکت در حال ارزیابی وزن کتاب های ارسالی است، در این بررسی هر کدام از کتاب ها یک 1 هستند. در این حالت وزن

یک 2 است. اگر وزن تک تک کتاب ها را بررسی کند 3 انجام داده است. متوسط وزن همه کتاب ها 4 است. اگر ۱۰۰ کتاب را انتخاب کند و میانگین وزن آن ها را به دست آورد، عدد به دست آمده را 5 می نامند.

- | | | | |
|----------------|------------------|-------------------|------------|
| 1) آماره | 2) نمونه | 3) واحد آماری | 4) متغیر |
| 2) داده | 2) آماره | 3) متغیر | 4) پارامتر |
| 3) نمونه گیری | 2) تخمین | 3) برآورد | 4) سرشماری |
| 4) آماره نمونه | 2) پارامتر جامعه | 3) داده های جامعه | 4) برآورد |
| 5) آماره نمونه | 2) پارامتر جامعه | 3) برآورد | 4) تخمین |

با توجه به متن داده شده پاسخ های درست به صورت زیر است:

- 1) گزینه ۳ 2) گزینه ۲ 3) گزینه ۴ 4) گزینه ۲ 5) گزینه ۱



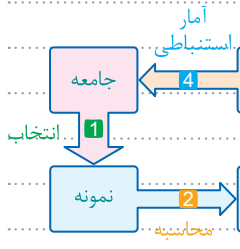
Grigori Perelman

آمار استنباطی

جزء ۴ آمار استنباطی

Inferential Statistics

در یک جامعه آماری، پارامتر جامعه در صورتی قابل محاسبه است که ما داده‌های کل جامعه را در اختیار داشته باشیم ولی به دلیل محدودیت‌هایی مانند زمان، هزینه و ... دستیابی به کل داده‌های جامعه امکان‌پذیر نیست. از این رو با یکی از روش‌های نمونه‌گیری، یک نمونه از جامعه را انتخاب می‌کنیم. [مرحله ۱] و مشخصه مورد نظر را روی نمونه محاسبه می‌کنیم که به آن آماره می‌گوییم. [مرحله ۲] سپس از روی مقدار آماره یک برآورد برای مقدار آن پارامتر در جامعه انجام می‌دهیم. [مرحله ۳] و با آمار استنباطی مقدار عددی آماره را به جامعه تعمیم می‌دهیم. [مرحله ۴] این فرایند به خوبی در نمودار روبه‌رو نمایان است:



Test فرض کنید می‌خواهیم میانگین وزن ماهی‌های درون یک استخر بزرگ را برآورد کنیم، به دلیل محدودیت‌هایی مانند 1 دستیابی به داده‌های کل جامعه امکان‌پذیر نیست. با یکی از روش‌های نمونه‌گیری، ۲۰ ماهی انتخاب کرده و میانگین وزن آن‌ها را اندازه می‌گیریم. عدد به دست آمده ۱۲۵۰ گرم است. این عدد را 2 می‌نامیم. از روی مقدار آن، یک برآورد برای میانگین وزن ماهی‌های استخر که آن را 3 می‌نامیم، انجام می‌دهیم. با استفاده از 4 مقدار عددی 5 را به جامعه تعمیم می‌دهیم.

1	دادگان نامشخص	۲	آرایی جامعه	۳	زمان و هزینه	۴	سختی نمونه‌گیری
2	مقدار آماره	۲	پارامتر جامعه	۳	برآورد	۴	مقدار تخمین
3	مقدار آماره	۲	پارامتر جامعه	۳	برآورد	۴	مقدار تخمین
4	آمار توصیفی	۲	آمار استنباطی	۳	آمار استدلالی	۴	آمار و احتمال
5	پارامتر	۲	آماره	۳	متغیر	۴	داده

با توجه به متن داده شده پاسخ‌های درست به صورت زیر است:

- 1 گزینه ۳ 2 گزینه ۲ 3 گزینه ۲ 4 گزینه ۲ 5 گزینه ۲

آمار استنباطی

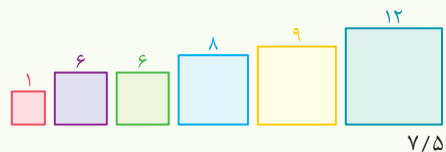
برآورد نقطه‌ای

Inferential Statistics

همان‌طور که گفتیم پارامترهای جامعه [مثلاً میانگین درآمد افراد یک جامعه] ثابت ولی مجهول هستند. یعنی در جوامع بزرگ محاسبه دقیق آن‌ها به راحتی امکان‌پذیر نیست. بنابراین نمونه‌گیری انجام می‌دهیم و این پارامترها را به جای جامعه روی نمونه به دست می‌آوریم. عددی که به این طریق حاصل می‌شود آماره یا مقدار آماره نامیده می‌شود. حال چون به وسیله این عدد می‌توان پارامتر جامعه را تخمین زد، از این به بعد مقدار عددی آماره را برآورد یا برآورد نقطه‌ای می‌نامند.

اگر به جای محاسبه میانگین در یک جامعه، میانگین را روی نمونه به دست آوریم، عدد حاصل شده را برآورد نقطه‌ای میانگین جامعه می‌نامند [به جای میانگین می‌توان از شاخص‌های دیگر آمار نظیر میانگین، واریانس و ... نیز استفاده کرد و آن‌ها را برآورد کرد].

Test در یک کتاب هندسه تعداد زیادی مربع رسم شده است. اگر طول ضلع یک نمونه ۶ تایی از آن‌ها مطابق شکل باشد، آنگاه برآورد نقطه‌ای میانگین طول اضلاع مربع‌های رسم شده کدام است؟



3 منظور از برآورد نقطه‌ای میانگین طول ضلع مربع‌های رسم شده پیدا کردن میانگین طول ضلع همین ۶ مربع است، بنابراین برآورد نقطه‌ای میانگین طول اضلاع برابر است:

$$\bar{a} = \frac{1+6+6+8+9+12}{6} = 7$$