



مشاهده قیمت روز و خرید از مدابوک

برای بازکردن صفحه محصول، این کادر را لمس کنید



ریاضیات تجربی

واقعاً جامع کنکور

جلد ۲: بانک تست + پاسخنامه تشریحی

دکتر محمدرضا میرجلیلی، دکتر مهدی امیریان

دوازدهم ۱۲
یازدهم ۱۱
دهم ۱۰



نبره‌ها طبع‌ترین کتاب ریاضیات کنکور

جیب ۲۲۰
با بیش از یک میلیون نسخه فروش

حدود ۴۰۰۰ تست به روز در ۸۸ ایستگاه
چیدمان هدفمند تست‌ها از ساده به دشوار
تست‌های پرومکس برای چالش بیشتر و درصد بالاتر
۵۳ آزمون جامع فصلی، مبحثی و شبیه‌ساز کنکور
پاسخ‌نامه‌ی واقعا تشریحی برای همه‌ی تست‌ها

۲

فهرست

۵۵	فصل ۷: توابع نمایی و لگاریتمی	
۵۶	ایستگاه ۱: تابع نمایی و ویژگی‌های آن	
۵۸	ایستگاه ۲: معادله‌ها و نامعادله‌های نمایی	
۵۹	ایستگاه ۳: تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن	
۶۱	ایستگاه ۴: قوانین و ویژگی‌های لگاریتم	
۶۴	ایستگاه ۵: معادله‌ها و نامعادله‌های لگاریتمی	
۶۷	آزمون (۱) فصل	
۶۸	آزمون (۲) فصل	
۳۸۸	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	ریاضی ۲

۷۱	فصل ۸: تابع دهم و یازدهم	
۷۲	ایستگاه ۱: مفهوم تابع و بازتابی‌های آن	
۷۴	ایستگاه ۲: آشنایی با برخی از انواع توابع	
۷۶	ایستگاه ۳: دامنه و برد توابع - تساوی دو تابع	
۷۸	ایستگاه ۴: تابع یک‌به‌یک	
۷۹	ایستگاه ۵: اعمال جبری روی توابع	
۸۲	آزمون (۱) فصل	
۸۳	آزمون (۲) فصل	
۴۱۱	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	ریاضی ۱ ریاضی ۲

۸۵	فصل ۹: تابع دوازدهم	
۸۶	ایستگاه ۱: انتقال نمودارها	
۹۰	ایستگاه ۲: توابع چندجمله‌ای	
۹۱	ایستگاه ۳: توابع صعودی و نزولی	
۹۴	ایستگاه ۴: ترکیب توابع	
۹۸	ایستگاه ۵: تابع وارون	
۱۰۴	آزمون (۱) فصل	
۱۰۶	آزمون (۲) فصل	
۱۰۷	آزمون (۳) فصل	
۴۳۵	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	ریاضی ۲ ریاضی ۳

۱۰۹	فصل ۱۰: مثلثات دهم و یازدهم	
۱۱۰	ایستگاه ۱: مثلثات در لباس هندسه	
۱۱۳	ایستگاه ۲: دایره‌ی مثلثاتی	
۱۱۴	ایستگاه ۳: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی	
۱۱۶	ایستگاه ۴: واحدهای اندازه‌گیری زاویه	
۱۱۷	ایستگاه ۵: روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی	
۱۲۰	آزمون (۱) فصل	
۱۲۱	آزمون (۲) فصل	
۴۷۶	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	ریاضی ۱ ریاضی ۲

۱۲۳	فصل ۱۱: مثلثات دوازدهم	
۱۲۴	ایستگاه ۱: نسبت‌های مثلثاتی 2α	
۱۲۷	ایستگاه ۲: تابع‌های متناوب	
۱۲۹	ایستگاه ۳: توابع مثلثاتی	
۱۳۴	ایستگاه ۴: معادله‌های مثلثاتی	
۱۳۹	آزمون (۱) فصل	
۱۴۰	آزمون (۲) فصل	
۱۴۰	آزمون (۳) فصل	
۴۹۴	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	ریاضی ۲ ریاضی ۳

۷	فصل ۱: تعیین علامت و نامعادله	
۸	ایستگاه ۱: تعیین علامت عبارت‌های جبری	
۹	ایستگاه ۲: روش‌های حل نامعادله‌ها	
۱۱	آزمون (۱) فصل	
۱۲	آزمون (۲) فصل	
۳۱۲	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	ریاضی ۱

۱۳	فصل ۲: معادله‌ی درجه‌ی دوم	
۱۴	ایستگاه ۱: روش‌های حل معادله‌ی درجه‌ی دوم	
۱۴	ایستگاه ۲: روابط بین ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم	
۱۶	ایستگاه ۳: تعداد و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم	
۱۶	ایستگاه ۴: تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم	
۱۷	ایستگاه ۵: مسائلی که به معادله‌ی درجه‌ی دوم می‌رسند	
۱۹	آزمون (۱) فصل	
۲۰	آزمون (۲) فصل	
۳۲۳	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	ریاضی ۱ ریاضی ۲

۲۱	فصل ۳: تابع درجه‌ی دوم (سه‌می)	
۲۲	ایستگاه ۱: سه‌می و ویژگی‌های آن	
۲۳	ایستگاه ۲: نوشتن معادله‌ی سه‌می و نمودار آن	
۲۵	ایستگاه ۳: کاربرد سه‌می در مسائل ماکزیمم و مینیمم	
۲۷	آزمون (۱) فصل	
۲۸	آزمون (۲) فصل	
۳۳۸	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	ریاضی ۱ ریاضی ۲

۲۹	فصل ۴: معادله‌های گویا و رادیکالی	
۳۰	ایستگاه ۱: معادله‌های گویا	
۳۲	ایستگاه ۲: معادله‌های رادیکالی	
۳۴	آزمون (۱) فصل	
۳۵	آزمون (۲) فصل	
۳۵۱	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	ریاضی ۲

۳۷	فصل ۵: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری	
۳۸	ایستگاه ۱: ریشه، توان و توان‌های گویا	
۴۰	ایستگاه ۲: عبارت‌های جبری	
۴۴	آزمون (۱) فصل	
۴۵	آزمون (۲) فصل	
۳۶۱	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	ریاضی ۱

۴۷	فصل ۶: قدرمطلق و جزء صحیح	
۴۸	ایستگاه ۱: قدرمطلق و ویژگی‌های آن	
۴۹	ایستگاه ۲: جزء صحیح و ویژگی‌های آن	
۵۲	آزمون (۱) فصل	
۵۳	آزمون (۲) فصل	
۳۷۴	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	ریاضی ۱ ریاضی ۲

فصل ۱۷: هندسه دوازدهم ۲۳۸ ایستگاه ۱: تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی ۲۳۹ ایستگاه ۲: بیضی و ویژگی‌های آن ۲۴۲ ایستگاه ۳: دایره و ویژگی‌های آن ۲۴۷ آزمون (۱) فصل ۲۴۸ آزمون (۲) فصل ۶۶۴ پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	فصل ۱۲: حد و پیوستگی ۱۴۴ ایستگاه ۱: بخش پذیری ۱۴۵ ایستگاه ۲: فرایندهای حدی ۱۴۶ ایستگاه ۳: محاسبه‌ی حد توابع ۱۴۸ ایستگاه ۴: رفع ابهام صفرصفرم ۱۵۱ ایستگاه ۵: پیوستگی ۱۵۵ ایستگاه ۶: حد بی‌نهایت ۱۵۷ ایستگاه ۷: حد در بی‌نهایت ۱۶۲ آزمون (۱) فصل ۱۶۴ آزمون (۲) فصل ۱۶۵ آزمون (۳) فصل ۵۲۲ پاسخ‌نامه‌ی تشریحی
فصل ۱۸: مجموعه ۲۵۰ ایستگاه ۱: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی ۲۵۱ ایستگاه ۲: متمم یک مجموعه ۲۵۲ ایستگاه ۳: تعداد اعضای یک مجموعه ۲۵۴ آزمون فصل ۶۸۶ پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	فصل ۱۳: مشتق ۱۶۸ ایستگاه ۱: آشنایی با مفهوم مشتق ۱۷۰ ایستگاه ۲: تابع مشتق و فرمول‌های مشتق‌گیری ۱۷۳ ایستگاه ۳: مشتق تابع مرکب ۱۷۵ ایستگاه ۴: قاعده‌ی هویتال ۱۷۶ ایستگاه ۵: معادله‌ی مماس ۱۷۸ ایستگاه ۶: مشتق‌پذیری و ارتباط آن با پیوستگی ۱۸۰ ایستگاه ۷: مشتق توابع بدرفتار! ۵! شگفت‌انگیز... ۱۸۳ ایستگاه ۸: مشتق‌پذیری روی بازه و $\mathbb{R}$ ۱۸۴ ایستگاه ۹: رابطه‌ی بین نمودارهای f و f' ۱۸۶ ایستگاه ۱۰: آهنگ تغییر ۱۹۱ آزمون (۱) فصل ۱۹۲ آزمون (۲) فصل ۱۹۳ آزمون (۳) فصل ۵۶۰ پاسخ‌نامه‌ی تشریحی
فصل ۱۹: الگو و دنباله ۲۵۶ ایستگاه ۱: الگو و مفهوم دنباله ۲۵۸ ایستگاه ۲: دنباله‌ی حسابی و ویژگی‌های آن ۲۵۹ ایستگاه ۳: دنباله‌ی هندسی و ویژگی‌های آن ۲۶۳ آزمون (۱) فصل ۲۶۳ آزمون (۲) فصل ۶۹۵ پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	فصل ۱۴: کاربردهای مشتق ۱۹۶ ایستگاه ۱: توابع یکنوا و اکیداً یکنوا ۱۹۷ ایستگاه ۲: نقطه‌ی بحرانی ۱۹۹ ایستگاه ۳: اکسترمم‌های نسبی ۲۰۲ ایستگاه ۴: اکسترمم‌های مطلق ۲۰۴ ایستگاه ۵: بهینه‌سازی ۲۰۸ آزمون (۱) فصل ۲۰۸ آزمون (۲) فصل ۲۰۹ آزمون (۳) فصل ۶۰۱ پاسخ‌نامه‌ی تشریحی
فصل ۲۰: شمارش، بدون شمردن ۲۶۶ ایستگاه ۱: اصل ضرب و اصل جمع ۲۶۷ ایستگاه ۲: جابجشت ۲۶۹ ایستگاه ۳: ترکیب ۲۷۳ آزمون (۱) فصل ۲۷۳ آزمون (۲) فصل ۷۱۰ پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	فصل ۱۵: هندسه یازدهم ۲۱۲ ایستگاه ۱: ترسیم‌های هندسی و استدلال ۲۱۵ ایستگاه ۲: نسبت، تناسب و قضیه‌ی تالس ۲۱۸ ایستگاه ۳: تشابه ۲۲۳ آزمون (۱) فصل ۲۲۴ آزمون (۲) فصل ۲۲۵ آزمون (۳) فصل ۶۲۹ پاسخ‌نامه‌ی تشریحی
فصل ۲۱: احتمال ۲۷۶ ایستگاه ۱: مفاهیم اولیه‌ی احتمال ۲۷۷ ایستگاه ۲: احتمال با اندازه‌گیری شانس ۲۷۹ ایستگاه ۳: قوانین احتمال ۲۸۱ ایستگاه ۴: احتمال شرطی ۲۸۳ ایستگاه ۵: پیشامدهای مستقل ۲۸۵ ایستگاه ۶: قانون احتمال کل ۲۹۰ آزمون (۱) فصل ۲۹۱ آزمون (۲) فصل ۲۹۲ آزمون (۳) فصل ۷۲۲ پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	فصل ۱۶: هندسه تحلیلی ۲۲۸ ایستگاه ۱: دستگاه مختصات و ویژگی‌های آن ۲۲۹ ایستگاه ۲: معادله‌ی خط و وضعیت دو خط با هم ۲۳۲ ایستگاه ۳: فاصله‌ی نقطه از خط ۲۳۵ آزمون (۱) فصل ۲۳۵ آزمون (۲) فصل ۶۴۸ پاسخ‌نامه‌ی تشریحی
فصل ۲۲: آمار ۲۹۴ ایستگاه ۱: مقدمه‌ای بر علم آمار ۲۹۵ ایستگاه ۲: آمار توصیفی ۳۰۰ آزمون (۱) فصل ۳۰۱ آزمون (۲) فصل ۷۴۴ پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	فصل ۲۳: آزمون‌های جامع ۳۰۴ آزمون جامع ۱ ۳۰۶ آزمون جامع ۲ ۳۰۸ آزمون جامع ۳ ۷۵۶ پاسخ‌نامه‌ی تشریحی

فصل ۳

تابع درجه‌ی دوم (سه‌می)

یک فصل آروم و کاربردی، کوتاهه و بهتون خوش می‌گذره 😊
حالا از ما می‌شنوید تست‌های این فصل را خوب کار کنید.



پیش‌نیازهای اصلی	علاقه‌ی طراح	سهم در کنکور	ایستگاه‌های مهم
- پیش‌نیاز خیلی زیادی نمی‌خواد؛ - ریاضی مقدماتی - اتحاده‌ها و تعیین علامت - کار با عددها	- وضعیت سه‌می با محورها - معادله‌ی سه‌می نویسی - رسم سه‌می تا دلت بخواد...	۱ تست	- سه‌می و ویژگی‌های آن - نوشتن معادله‌ی سه‌می و نمودار آن

مراقب باشید توی اشتباهات خودتان نمانید؛ چیزی که باعث غرق‌شدن می‌شود افتادنمان توی آب نیست، زیر آب ماندن و بالا نیامدن است...

ایستگاه ۱ سهمی و ویژگی‌های آن

۱۹۱. نقطه‌ی $S(-1, -4)$ رأس سهمی به معادله‌ی $y = 3x^2 + ax + b$ است. این سهمی محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟
(۱) -۳ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

(کنکور دی ۱۴۰۱)

۱۹۲. رأس سهمی $y = kx^2 - 4x - 6$ روی خط $y = -4x - 4$ قرار دارد. عرض رأس سهمی کدام است؟
(۱) ۲ (۲) ۶ (۳) -۴ (۴) -۸

۱۹۳. اگر رأس نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x - c$ نقطه‌ی $(-1, 3)$ باشد، مختصات رأس نمودار تابع $y = f(2x - 1)$ کدام است؟
(۱) $(4, -5)$ (۲) $(4, 5)$ (۳) $(0, 5)$ (۴) $(0, 3)$

۱۹۴. اگر خط به معادله‌ی $x = \frac{2}{3}$ سهمی به معادله‌ی $y = (m - 2)x^2 - 3x + m^2 + 1$ را به دو قسمت مساوی تقسیم کند، سهمی محور عرض‌ها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟
(۱) $\frac{21}{4}$ (۲) $\frac{33}{16}$ (۳) $\frac{289}{16}$ (۴) $\frac{305}{16}$

(کتاب درسی)

۱۹۵. خط به معادله‌ی $y = \frac{3}{5}$ محور تقارن تابع $f(x) = x^2 - 4x + c$ را روی نمودار تابع قطع می‌کند. مقدار c کدام است؟
(۱) $4/4$ (۲) $9/2$ (۳) $4/6$ (۴) $4/5$

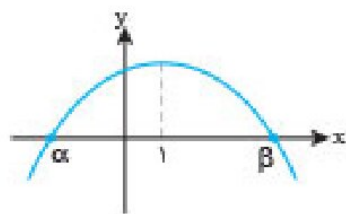
۱۹۶. محور تقارن سهمی‌های $y = x^2 + ax - 2$ و $y = -x^2 - 2x + b$ مشترک هستند. اگر از دو نقطه با عرض یکسان روی دو سهمی خط $y = 1$ رسم شود، مقدار ab چقدر است؟
(۱) -۸ (۲) -۴ (۳) ۸ (۴) ۴

(کنکور دی ۱۴۰۱)

(کنکور اردیبهشت ۱۴۰۳)

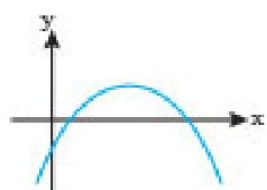
۱۹۷. نقاط $(3, -4)$ و $(-1/5, -4)$ روی یک تابع درجه‌ی دوم واقع هستند. مجموع صفرهای این تابع کدام است؟
(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{5}{4}$

۱۹۸. شکل مقابل، نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx - 8a$ است. مقدار $\alpha^2 + \beta^2$ کدام است؟
(۱) -۱۲ (۲) ۱۹ (۳) ۲۰ (۴) ۱۲



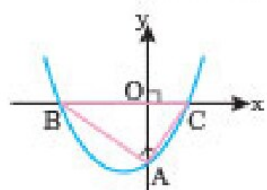
۱۹۹. اگر α و β صفرهای سهمی $y = 25\alpha x^2 + 4x + \beta$ و $\beta > \alpha$ باشد، رأس این سهمی در کدام ناحیه از صفحه‌ی مختصات قرار دارد؟
(۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۲۰۰. نقاط $A(3, y)$ و $B(-5, y)$ روی یک سهمی واقع شده‌اند و عرض رأس سهمی برابر ۱ است. اگر این سهمی، محور x ها را در نقاطی با طول‌های α و β قطع کند و $\alpha^2 + \beta^2 = 5$ باشد، این سهمی محور y ها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟
(۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

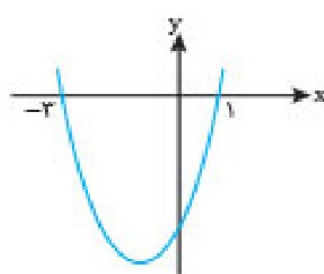


۲۰۱. شکل مقابل، نمودار کدام تابع است؟
(۱) $y = x^2 - 4x - 3$ (۲) $y = -x^2 + 4x - 3$ (۳) $y = -x^2 - 4x - 3$ (۴) $y = -x^2 + 4x - 4$

۲۰۲. در شکل زیر، نمودار تابع $f(x) = 2x^2 - kx + k - 2$ رسم شده است. اگر مثلث ABC در رأس A قائمه باشد، اندازه‌ی مساحت آن کدام است؟
(۱) $\frac{3}{16}$ (۲) $\frac{5}{16}$ (۳) $\frac{3}{8}$ (۴) $\frac{5}{8}$



۲۰۳. نمودار تابع $f(x) = (a - 1)x^2 + ax + b + 3$ به صورت مقابل است. کمترین مقدار این تابع کدام است؟
(۱) -۴ (۲) -۵ (۳) -۶ (۴) -۸



فصل ۳ ◀ تابع درجه‌ی دوم (سهمی) • ۲۳

(مشابه نهایی خرداد ۱۴۰۲)

۲۰۴. اگر مینیمم مقدار سهمی $f(x) = ax^2 + 6x + 5$ برابر ۲ باشد، ماکزیمم مقدار تابع $g(x) = (1-a)x^2 + x - a$ کدام است؟
(۱) $\frac{11}{4}$ (۲) -۳ (۳) $-\frac{23}{8}$ (۴) $\frac{25}{8}$

(کنکور تیر ۱۴۰۳)

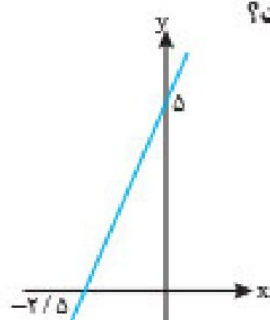
۲۰۵. در یک دامنه‌ی محدود، برای چند مقدار مختلف a ، بیشترین مقدار سهمی $y = ax^2 + x + 2a$ برابر $-\frac{1}{4}$ است؟
(۱) ۳ (۲) هیچ مقدار a (۳) ۲ (۴) ۱

(کنکور اردیبهشت ۱۴۰۴)

۲۰۶. به ازای چند مقدار صحیح m ، نقطه‌ی مینیمم تابع $y = x^2 - mx + 2 - m$ در ناحیه‌ی اول محورهای مختصات قرار دارد؟
(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۲۰۷. به ازای کدام مقدار a ، برد تابع $f(x) = ax^2 - 2x + a + 8$ برابر $(-\infty, \frac{16}{3}]$ است؟
(۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) -۳ (۳) ۳ (۴) $\frac{1}{3}$

۲۰۸. اگر سهمی به معادله‌ی $y = ax^2 + bx + c$ در نقطه‌ی رأس خود دارای بیشترین مقدار باشد، نمودار خط $y = ax + a - 2$ از کدام ناحیه‌ی محورهای مختصات نمی‌گذرد؟
(۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم



۲۰۹. نقطه‌ی ماکزیمم تابع $f(x) = -2x^2 + (m+2)x + 1 - m$ روی خط مقابل قرار دارد. حاصل ضرب مقادیر ممکن برای m کدام است؟

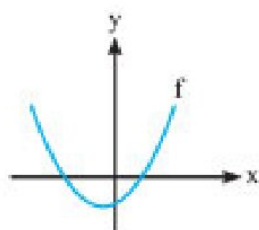
- (۱) -۳۶
(۲) ۳۶
(۳) ۱۲
(۴) -۱۲

۲۱۰. صفرهای تابع $y = 2x^2 - (m+2)x + m$ و نقطه‌ی تقاطع آن با محور عرض‌ها، رئوس یک مثلث هستند. اگر مساحت این مثلث برابر $\frac{3}{4}$ باشد، کدام می‌تواند طول رأس سهمی $y = x^2 - mx + 1$ باشد؟
(کنکور ۱۴۰۲)

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{3}{4}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

❑ دهم فصل ۴
❑ یازدهم فصل ۱

ایستگاه ۲ نوشتن معادله‌ی سهمی و نمودار آن



۲۱۱. اگر α و β ریشه‌های حقیقی تابع درجه‌ی دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ با نمودار مقابل باشند، کدام گزینه درست است؟

- (۱) $abc > 0$
(۲) $\alpha^2 + \beta^2 < 0$
(۳) $b^2 + b < 4ac$
(۴) $f(\frac{\alpha+\beta}{2}) = \frac{\Delta}{4a}$

۲۱۲. در تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ دو شرط $\frac{b^2}{4} < ac$ و $b + \frac{c}{3} < -2a$ برقرار است. کدام گزینه قطعاً درست است؟

- (۱) $a > 0$ (۲) $c > 0$ (۳) $ac > 0$ (۴) $ab < 0$

۲۱۳. فرض کنید نقاط $(-2, 5)$ ، $(0, 5)$ و $(1, 1)$ بر سهمی $y = ax^2 + bx + c$ واقع باشند. این سهمی از کدام یک از نقاط زیر می‌گذرد؟

- (۱) $(-1, 3)$ (۲) $(-1, 4)$ (۳) $(2, 9)$ (۴) $(2, 15)$

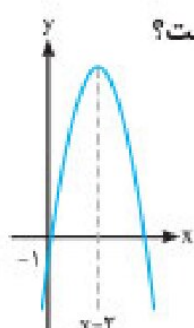
۲۱۴. نقاط $A(2a+3, a-2)$ و $B(7-2a, a-2)$ دو نقطه‌ی متمایز با مؤلفه‌های طبیعی از یک سهمی هستند. اگر نقطه‌ی $S(b, b-2)$ رأس این سهمی باشد، فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد سهمی با محور عرض‌ها تا مبدأ مختصات کدام است؟
(کنکور تیر ۱۴۰۴)

- (۱) $\frac{13}{4}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{13}{8}$

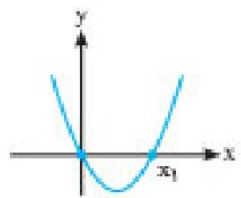
۲۱۵. فرض کنید $A(-1, 9)$ رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ گذرا بر نقطه‌ی $(3, 1)$ باشد. این سهمی از کدام یک از نقاط زیر می‌گذرد؟

- (۱) $(5, -7)$ (۲) $(5, -9)$ (۳) $(2, 5)$ (۴) $(1, 5)$

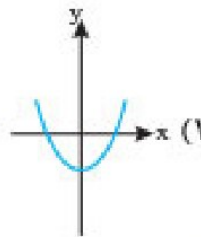
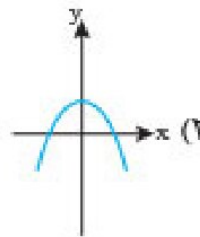
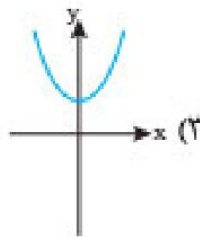
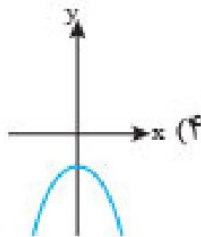
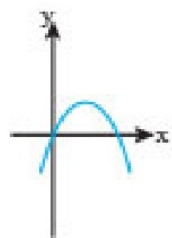
۲۱۶. سهمی به معادله‌ی $y = -2(x+3m-5)^2 + m+2n$ مطابق شکل مقابل است. رأس سهمی به معادله‌ی $y = mx^2 + nx + 1$ کدام نقطه است؟



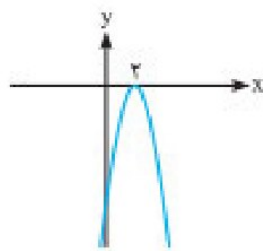
- (۱) $(\frac{3}{2}, \frac{5}{4})$
(۲) $(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4})$
(۳) $(-\frac{3}{2}, \frac{5}{4})$
(۴) $(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4})$



۲۱۷. نمودار تابع درجه‌ی دوم $f(x) = ax^2 + (2a - 5)x + a^2 - 2$ مطابق شکل مقابل است. حاصل ax_1 کدام است؟
- (۱) $\frac{5 - 2\sqrt{2}}{2}$ (۲) $5 - 2\sqrt{2}$ (۳) $5 - \sqrt{2}$ (۴) $\frac{5\sqrt{2}}{2} - 2$

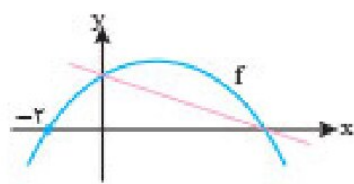


۲۱۸. نمودار تابع درجه‌ی دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $g(x) = bx^2 - cx + a$ چگونه است؟



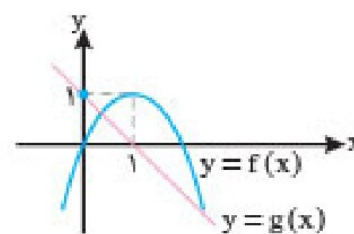
۲۱۹. اگر نمودار تابع $f(x) = ax^2 + 8x + c$ به صورت روبه‌رو باشد، مقدار c کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۸ (۳) -۴ (۴) -۶



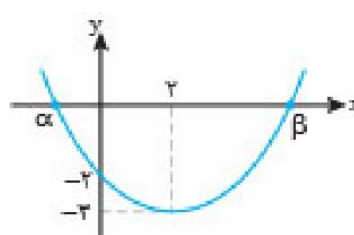
۲۲۰. خط $2y + x = 6$ و سهمی f در شکل روبه‌رو رسم شده‌اند. بیشترین مقدار این سهمی کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{8}{3}$ (۳) ۲ (۴) ۴



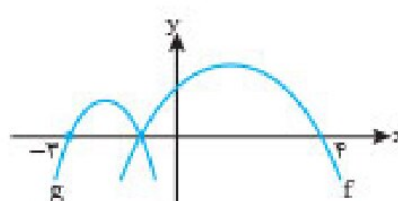
۲۲۱. نمودار تابع با ضابطه‌های سهمی $y = f(x)$ و خط راست $y = g(x)$ در صفحه‌ی مختصات، مطابق شکل مقابل داده شده است. مجموع جواب‌های معادله‌ی $f(x) = g^2(x)$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۲



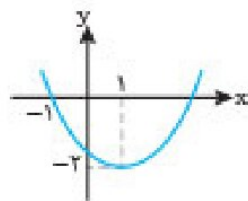
۲۲۲. شکل مقابل نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ را نشان می‌دهد. ریشه‌های کدام معادله $\frac{\alpha}{\beta - 1}$ و $\frac{\beta}{\alpha - 1}$ است؟

- (۱) $11x^2 - 28x + 8 = 0$ (۲) $11x^2 + 28x + 8 = 0$ (۳) $11x^2 - 28x - 8 = 0$ (۴) $11x^2 + 28x - 8 = 0$



۲۲۳. نمودار دو تابع $f(x) = -2x^2 + ax + 12$ و $g(x) = -x^2 + bx + c$ به صورت مقابل است. مقدار $(f \cdot g)(1)$ کدام است؟

- (۱) -۷۵ (۲) -۱۵۰ (۳) -۵۰ (۴) -۶۰



۲۲۴. شکل مقابل، نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ را نشان می‌دهد. خط $y = x - 2$ این نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند. مختصات وسط این دو نقطه کدام است؟

- (۱) $(1, -2)$ (۲) $(2, -1)$ (۳) $(-1, -1)$ (۴) $(0, 2)$

۲۲۵. به ازای کدام مقادیر a ، نمودار تابع $f(x) = (1 - a)x^2 + 2\sqrt{6}x - a$ ، همواره بالای محور x هاست؟

- (۱) $a < 1$ (۲) $a < -2$ (۳) $a > 3$ (۴) $-2 < a < 1$

۲۲۶. نمودار سهمی $y = (2m + 3)x^2 + 6x + m$ همواره بالای محور x هاست. حدود m کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{2} < m < 0$ (۲) $m > \frac{3}{2}$ (۳) $0 < m < \frac{3}{2}$ (۴) $m > -\frac{3}{2}$

۲۲۷. سهمی به معادله‌ی $y = x^2 - (2m^2 + 1)x + m^4 + m^2 + \frac{1}{4}$ به ازای هر مقدار دلخواه m همواره:

- (۱) محور طول‌ها را در دو نقطه قطع می‌کند. (۲) بالاتر از محور طول‌ها قرار می‌گیرد. (۳) در نقطه‌ای به طول مثبت بر محور طول‌ها مماس می‌شود. (۴) در نقطه‌ای به طول منفی بر محور طول‌ها مماس می‌شود.

فصل ۳ ◀ تابع درجه‌ی دوم (سه‌می) • ۲۵

۲۲۸. به ازای چه مقادیری از a ، سه‌می به معادله‌ی $f(x) = (a-2)x^2 + 2x + 1 - a$ فقط از ناحیه‌ی دوم محورهای مختصات عبور نمی‌کند؟
 (۱) $a > 2$ (۲) $a > 1$ (۳) $a < 2$ (۴) $1 \leq a < 2$

(کنکور تیر ۱۴۰۱)

۲۲۹. به ازای چند مقدار a ، سه‌می $y = ax^2 + (3+2a)x$ از ناحیه‌ی سوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

(۱) هیچ مقدار a (۲) تمام مقادیر a (۳) ۱ (۴) ۲

۲۳۰. اگر نمودار تابع $y = mx^2 + (m+4)x + (2-m)$ دقیقاً از سه ناحیه‌ی مختصات عبور کند، در این صورت چند مقدار صحیح برای m وجود دارد؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) هیچ مقدار

۲۳۱. به ازای کدام مقادیر a ، نمودار تابع $f(x) = (a-3)x^2 + ax - 1$ از ناحیه‌ی اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟
 (۱) $a \leq 2$ (۲) $0 < a \leq 2$ (۳) $2 < a < 3$ (۴) $0 < a < 2$

(کنکور اردیبهشت ۱۴۰۳)

۲۳۲. سه‌می $y = -mx^2 + mx + 1$ و خط $y = -m - x$ یکدیگر را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کنند. حدود m شامل چند مقدار صحیح است؟

(۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

۲۳۳. نمودار سه‌می $f(x) = ax^2 + 5x + 7 + a$ همواره زیر خط $y = -3x + 1$ قرار دارد. حدود a کدام است؟
 (۱) $a < -2$ (۲) $a < -8$ (۳) $-8 < a < 0$ (۴) $-2 < a < 0$

(کنکور تیر ۱۴۰۳)

۲۳۴. سه‌می $y = 2ax^2 - 5x + 18a$ در نقطه‌ی A بر نیمساز ناحیه‌ی سوم محورهای مختصات مماس است. مقدار a ، کدام است؟

(۱) $-\frac{5}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{5}{2}$

۲۳۵. سه‌می $y = -x^2 + 2x + 1$ خط راست گذرا از نقطه‌ی $(1, 0)$ و با عرض از مبدأ -1 را در نقاط A و B قطع می‌کند. اگر M وسط پاره خط AB باشد، فاصله‌ی رأس سه‌می از نقطه‌ی M ، کدام مضرب $\sqrt{26}$ است؟
 (۱) ۲ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

(خارج ۱۴۰۰)

ایستگاه ۳ کاربرد سه‌می در مسائل ماکزیمم و مینیمم

بازدهم فصل ۱

۲۳۶. یک ماهی گیر می‌خواهد مطابق شکل در کنار رودخانه، محوطه‌ای مستطیل‌شکل را فنس کشی کند. اگر او فقط هزینه‌ی ۱۰۰ متر فنس کشی را داشته باشد، بیشترین سطحی که با این ۱۰۰ متر می‌تواند ایجاد کند، چند مترمربع است؟
 (۱) ۵۲۵ (۲) ۱۲۵۰ (۳) ۱۸۷۵ (۴) ۳۷۵۰

(کتاب درسی)



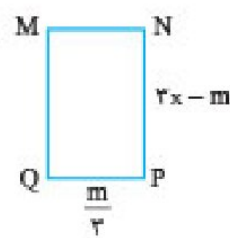
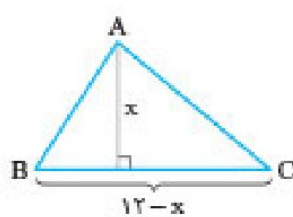
۲۳۷. در متوازی‌الاضلاع داده‌شده در شکل مقابل، مجموع طول دو ضلع مجاور برابر با ۱۱ واحد طول است. حداکثر مقدار مساحت ممکن برای این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

(۱) $\frac{3}{8} \times 121$ (۲) $\frac{7}{8} \times 121$ (۳) $\frac{1}{8} \times 121$ (۴) $\frac{3}{4} \times 121$



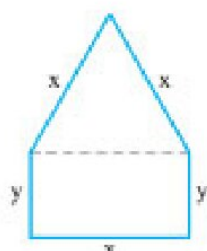
۲۳۸. اگر مساحت مثلث ABC و مستطیل $MNPQ$ هر دو ماکزیمم شود، مقدار m کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴) ۱۲

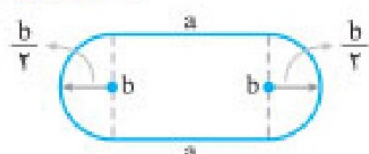


۲۳۹. یک پنجره به شکل مستطیلی است که در بالای آن یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار گرفته است. حداکثر مساحت ممکن (جهت نوردی بیشتر) در بین پنجره‌هایی که محیطی برابر $4m$ دارند، کدام است؟
 (کتاب درسی)

(۱) $\frac{4}{33}(6 - \sqrt{3})$ (۲) $\frac{4}{11}(6 + \sqrt{3})$ (۳) $\frac{4}{33}(6 + \sqrt{3})$ (۴) $\frac{4}{11}(6 - \sqrt{3})$



۲۴۰. زمین تنیسی به شکل مستطیل با دو نیم‌دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط زمین ۶۰۰ متر باشد، ابعاد مستطیل را چه مقدار بگیریم تا مساحت قسمت مستطیلی شکل زمین حداکثر مقدار ممکن شود؟ ($\pi \approx 3$)



(۱) $\frac{400}{3} m \times 100 m$ (۲) $\frac{800}{3} m \times 60 m$ (۳) $150 m \times 100 m$ (۴) $150 m \times 60 m$

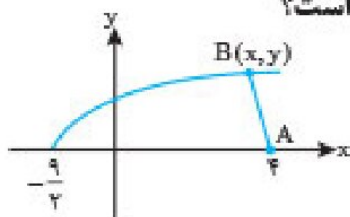
۲۴۱. حداکثر مساحت جانبی استوانه‌ای با مجموع ارتفاع و قطر قاعده‌ی ۱۵، کدام است؟

- (۱) $\frac{225}{2}\pi$ (۲) $\frac{225}{4}\pi$ (۳) $\frac{675}{4}\pi$ (۴) $\frac{675}{2}\pi$

۲۴۲. فاصله‌ی بین نقطه‌ای با طول a روی سهمی به معادله‌ی $y = x^2 - 3x + 3$ از نقطه‌ای با همین طول روی خط به معادله‌ی $2y + x + 1 = 0$ را d می‌نامیم. کمینه‌ی مقدار d چقدر است؟

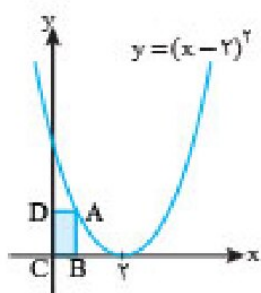
- (۱) $\frac{77}{16}$ (۲) $\frac{31}{16}$ (۳) $\frac{81}{16}$ (۴) $\frac{131}{16}$

۲۴۳. نقطه‌ی A به طول ۴ روی محور x ها قرار دارد. کوتاه‌ترین فاصله‌ی نقطه‌ی A از نقاط منحنی تابع $y = \sqrt{2x+9}$ چقدر است؟



- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۴/۵

۲۴۴. با توجه به شکل، کمترین مقدار محیط مستطیل ABCD کدام است؟



- (۱) ۳ (۲) ۳/۵ (۳) ۴ (۴) ۴/۵

۲۴۵. بیشترین محیط مستطیل محاط در سهمی $f(x) = 2x^2 - 6$ و زیر محور x ها کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۲۶ (۴) ۲۴

تست‌های پرومکس

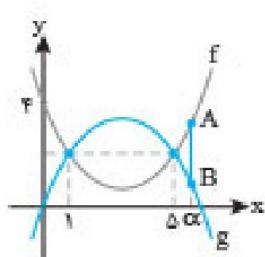
۲۴۶. تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{5}{\sqrt{mx^2 - 8x + 39}}$ روی $\mathbb{R}$ تعریف شده است. اگر برای یک مقدار m ، بیشترین مقدار تابع f برابر ۱ باشد، مقدار $|m|$ کدام است؟

(کنکور اردیبهشت ۱۴۰۴)

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

۲۴۷. اگر کمینه‌ی سهمی به معادله‌ی $f(x) = ax^2 + bx + c$ بر ماکزیمم سهمی به معادله‌ی $g(x) = -x^2 + 6x - 18$ منطبق بوده و فاصله‌ی بین نقاط تقاطع منحنی f با محور x ها، ۸ واحد باشد، در این صورت نمودار تابع f ، محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

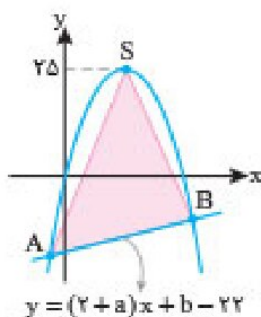
- (۱) $-\frac{63}{16}$ (۲) $-\frac{45}{4}$ (۳) $-\frac{63}{8}$ (۴) $-\frac{45}{8}$



۲۴۸. شکل مقابل نمودار دو سهمی f و g را نشان می‌دهد. به ازای کدام مقدار α ، طول پاره خط AB برابر $1/8$ است؟

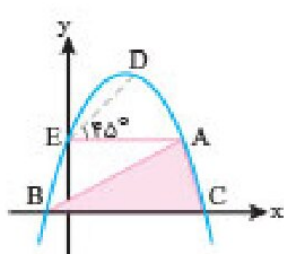
- (۱) ۵/۴ (۲) ۵/۵ (۳) ۵/۸ (۴) ۶

۲۴۹. اگر نمودار سهمی با معادله‌ی $f(x) = ax^2 - 10ax + b$ به صورت مقابل باشد، مساحت ناحیه‌ی رنگی چقدر است؟



- (۱) ۲۷۰ (۲) ۲۶۹ (۳) ۲۶۰ (۴) ۲۷۳

۲۵۰. در سهمی $f(x) = -x^2 + bx + 4$ ، مساحت مثلث ABC کدام است؟ (D رأس سهمی و پاره خط EA موازی محور x هاست).



- (۱) $2\sqrt{5}$ (۲) $4\sqrt{5}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $4\sqrt{3}$

فصل ۳ ◀ تابع درجه‌ی دوم (سهمی) • ۲۷

۲۵۱. اگر رأس سهمی‌های $f(x) = 3x^2 - mx + 3$ و $g(x) = 4x^2 - mx + 4$ در یک ناحیه از محورهای مختصات باشند، مجموعه مقادیر m شامل چند عدد صحیح نیست؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۲۵۲. اگر α و β صفرهای سهمی $f(x) = x^2 - (\alpha + \beta)x + 3\beta$ و $f(3 - \sqrt{5}) = f(3 + \sqrt{5})$ باشد، آن‌گاه کمترین مقدار تابع $g(x) = (\alpha - 1)x^2 - 8x + \beta$ کدام است؟ ($\beta \neq 0$)

- (۱) -۵ (۲) -۱۰ (۳) ۵ (۴) ۱۰

۲۵۳. دو خط به موازات محور x ها و به فاصله‌ی ۶ واحد از هم، مفروض‌اند. از تقاطع این دو خط با منحنی $f(x) = ax^2 - 4x + 7$ پاره‌خط‌هایی به طول ۴ و ۱۰ روی آن پدید آمده است. مقدار مثبت a کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{21}$ (۲) $\frac{1}{7}$ (۳) $\frac{2}{7}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۲۵۴. سهمی گذرا از نقاط $(1, a)$ و $(-2, a)$ بر خط $y + 3 = 0$ مماس بوده و از هر چهار ناحیه‌ی دستگاه مختصات می‌گذرد. اگر فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد سهمی با محور عرض‌ها تا مبدأ مختصات ۲ واحد باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۲۰ (۲) -۲۰ (۳) -۶ (۴) ۶

۲۵۵. سهمی‌های f و g با ضرایب صحیح در رابطه‌ی $(f \cdot g)(x) = x^4 - 14x^2 + 25$ صدق می‌کنند. رئوس این دو سهمی و نقاط برخورد آن‌ها با محور عرض‌ها تشکیل یک چندضلعی می‌دهند. مساحت این چندضلعی کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{2}{5}$

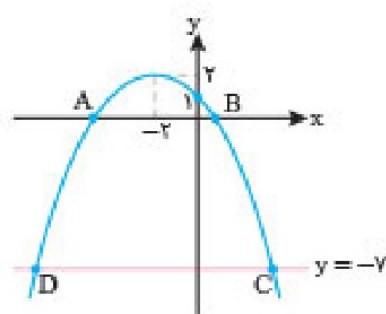
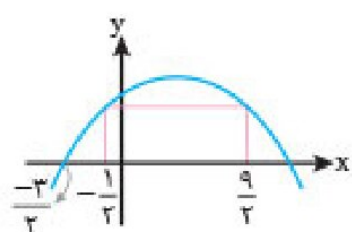
۲۵۶. نمودار سهمی $f(x) = (a - \frac{3}{4})x^2 - 2(a - 3)x + 2$ فقط از ناحیه‌ی چهارم عبور نمی‌کند. به ازای مقادیر مختلف a ، معادله‌ی محورهای تقارن تابع f در کدام بازه قرار می‌گیرند؟

- (۱) $(-\infty, 2)$ (۲) $(-\infty, -2)$ (۳) $(2, +\infty)$ (۴) $(-2, +\infty)$

۲۵۷. شکل مقابل، نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ و مستطیلی با مساحت $\frac{2}{5}$ واحد مربع را نشان می‌دهد.

سهمی به معادله‌ی $y = x^2 + 2x - 1$ نمودار تابع f را در چند نقطه قطع می‌کند؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار



۲۵۸. در شکل مقابل، نمودار سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ رسم شده است. مساحت دوزنقه‌ی ABCD چقدر است؟

- (۱) $2(3 + \sqrt{2})$ (۲) $14(3 + \sqrt{2})$ (۳) $7(3 - \sqrt{2})$ (۴) $14(3 - \sqrt{2})$

۲۵۹. بیشترین مساحت مستطیلی که به خطوط $y = 7 - 2x$ و $y = x + 10$ و محور x ها محدود شده باشد، چند واحد مربع است؟

- (۱) $\frac{243}{8}$ (۲) $\frac{241}{8}$ (۳) $\frac{239}{8}$ (۴) $\frac{237}{8}$

۲۶۰. خط $y = b - 6x$ بر نمودار تابع $f(x) = \frac{2x+a}{x-a}$ در نقطه‌ای به طول ۲ مماس است. مقدار $f(b)$ کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $-\frac{80}{37}$ (۲) $\frac{40}{37}$ (۳) $\frac{25}{4}$ (۴) $\frac{25}{8}$

آزمون ۱ فصل



نوع سوال: تست ۱۰
زمان پیشنهادی: ۲۰ دقیقه

۲۶۱. رأس سهمی با صفرهای $1 - \sqrt{2}$ و $1 + \sqrt{2}$ در ناحیه‌ی اول و روی منحنی $x + 2y^2 = 5$ قرار دارد. این سهمی محور y ها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $-\sqrt{2}$

۲۶۲. اگر کمترین مقدار تابع $f(x) = x^2 - (x-1)^2 + (x+2)^2 + m$ برابر با ۷ باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۲ (۳) ۱۱ (۴) ۱۰

۲۶۳. صفرهای سهمی $f(x) = x^2 - 4ax + 4a - 3$ ، اعداد $\frac{m}{m+1}$ و $\frac{m}{m-1}$ هستند. مقدار $f(m^2)$ کدام است؟

- (۱) $3/25$ (۲) $-3/25$ (۳) $-3/75$ (۴) $3/75$

۲۶۴. نقاط $A(k-3, 5)$ و $B(2k+1, 5)$ ، دو نقطه از سهمی با خط تقارن $x = k$ هستند. طول پاره‌خط AB کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۸

۲۶۵. با توجه به ضابطه سهمی $y = 2x^2 - mx + m - 2$ ، به ازای کدام مقدار مثبت m ، مساحت مثلثی که دو رأس آن صفرهای این سهمی و رأس سوم آن منطبق بر رأس سهمی است، برابر ۲ است؟

- (۱) ۲ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۸

۲۶۶. فاصله بین دو ریشه یک سهمی برابر ۴ واحد است. اگر رأس سهمی نقطه $(1, 1)$ باشد، معادله سهمی کدام است؟

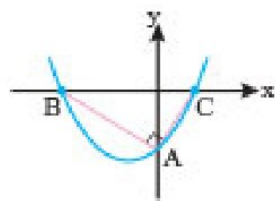
- (۱) $y = -x^2 + 2x + 3$ (۲) $y = (x-1)(x+3) + 1$ (۳) $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ (۴) $y = -\frac{1}{4}(x-1)(x+3)$

۲۶۷. رابطه $(\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2 = 56$ بین صفرهای تابع $f(x) = x^2 - bx - 2b^2$ برقرار است. نمودار تابع نسبت به کدام خط نمی تواند قرینه باشد؟

- (۱) $x = \frac{1}{2}$ (۲) $x = 1$ (۳) $x = -1$ (۴) $x = 1$ و $x = -1$

۲۶۸. نمودار سهمی $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + (3a-1)x - 3a$ به صورت مقابل است. اگر مثلث ABC در رأس A قائمه باشد، مجموع معکوس صفرهای این تابع کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) -۱



۲۶۹. بیشترین مقدار تابع $f(x) = \frac{28}{(x-1)^2 + 4x + 7}$ برای کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۷ (۳) ۱۴ (۴) ۱۲

۲۷۰. نمودار سهمی $f(x) = (ax+9)(-2x+6)$ بر محور x ها مماس است. مقدار عددی a کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۶ (۴) -۶

تعداد سوالات: ۱۰ تست
زمان پیشنهادی: ۲۰ دقیقه

آزمون فصل ۲



۲۷۱. خط $x = -1$ محور تقارن سهمی $y = ax^2 + 3x + c$ است. اگر رأس سهمی روی خط $y = 1$ قرار داشته باشد، مقدار ac کدام است؟

- (۱) $5/75$ (۲) $3/75$ (۳) $-3/25$ (۴) $-5/25$

۲۷۲. به ازای چند مقدار m ، تابع $y = (1-18m)x^2 - (m^2+1)x + 11$ در نقطه‌ای به طول $\frac{1}{4}$ دارای ماکزیمم است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) هیچ مقدار m (۴) تمام مقادیر m

۲۷۳. صفرهای تابع $y = mx^2 - 4x - (m+4)$ و نقطه‌ی تقاطع آن با محور y ها، رئوس یک مثلث هستند. اگر مساحت این مثلث برابر ۳ باشد، اختلاف طول رأس سهمی‌های رسم شده توسط مقادیر مختلف m کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{2}$ (۲) $\frac{9}{4}$ (۳) $\frac{7}{4}$ (۴) $\frac{9}{2}$

۲۷۴. اگر $A(2b+1, 2b-b^2)$ و $B(2b-1, 2b-b^2)$ دو نقطه‌ی متمایز با مؤلفه‌های صحیح مثبت از سهمی $y = m(x-\alpha+1)^2 + \alpha+1$ باشند، مقدار m کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) -۴

۲۷۵. در یک دامنه‌ی محدود، برای چند مقدار مختلف a ، کمترین مقدار سهمی $y = ax^2 + 3x + a$ برابر $\frac{7}{8}$ است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) هیچ مقدار a

۲۷۶. رأس سهمی $y = -ax^2 + ax + 2$ روی سهمی $y = 2bx^2 - bx - 1$ قرار دارد و برعکس. مقدار $b-a$ چقدر است؟

- (۱) -۶ (۲) ۶ (۳) -۱۸ (۴) ۱۸

۲۷۷. نقاط $(1, \beta)$ و $(-5, \beta)$ روی یک سهمی واقع شده‌اند و عرض رأس سهمی برابر $-\frac{1}{4}$ است. اگر سهمی، محور y ها را در نقطه‌ای به عرض $\frac{3}{4}$ قطع کند، مقدار β کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) -۲ (۴) -۱

۲۷۸. نمودار تابع $y = 3x^2 + (2m-1)x + m + \frac{4}{3}$ در ناحیه‌ی دوم بر تیمساز آن ناحیه مماس است. طول رأس سهمی، کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{18}$ (۲) $-\frac{5}{18}$ (۳) $-\frac{7}{6}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۲۷۹. اگر نمودار سهمی $f(x) = (3-m)x^2 + 4x + 2m-1$ دقیقاً از ۳ ناحیه‌ی محورهای مختصات عبور کند، مجموعه‌ی مقادیر m شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) بی‌شمار

۲۸۰. کوتاه‌ترین فاصله‌ی سهمی $y = 4x^2$ از نقطه‌ی $M(3, 0)$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) ۳



همچنین اگر دو طرف رابطه‌ی (۲) را به توان ۲ برسانیم، داریم:

$$\beta^2 = (\alpha + \alpha)^2 \Rightarrow \beta^2 = 4\alpha^2 + 4\alpha + 1$$

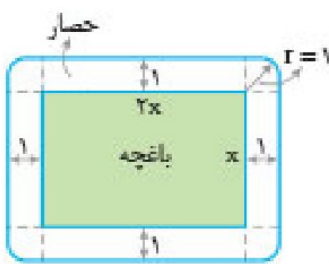
$$\Rightarrow \beta^2 = 4(\alpha + \alpha) + 4\alpha + 1$$

$$\Rightarrow \beta^2 = 4\alpha + 4\alpha \Rightarrow \beta^2 - 4\alpha = 4\alpha \xrightarrow{+15} \frac{\beta^2 - 4\alpha}{15} = \alpha \quad (۴)$$

حالا اگر معادله‌ی خواسته‌شده را به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ در نظر بگیریم، داریم:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{\alpha^2 - 9}{4} + \frac{\beta^2 - 36}{15} \xrightarrow{(۴) \text{ و } (۲)} S = 2\alpha + 2\beta \\ \Rightarrow S = 2(\alpha + \beta) = 2(2) = 4 \\ P = x_1 x_2 = (\alpha^2 - 9)(\beta^2 - 36) = 9\alpha\beta = 9 \times (-3) = -27 \end{cases}$$

بنابراین معادله‌ی خواسته‌شده به صورت $x^2 - 4x - 27 = 0$ خواهد بود.



۱۹۰. (گزینه ۲) شکل یاغچه، مستطیلی به ابعاد x و $2x$ است. اما چون بازدید کنندگان نباید به فاصله‌ی ۱ متری یاغچه برسند، پس در چهار گوشه‌ی یاغچه ربع دایره‌هایی به شعاع ۱ در نظر می‌گیریم؛ بنابراین داریم: مساحت یاغچه $S_1 = 2x \times x = 2x^2$

مساحت مستطیل‌های کناری + مساحت مستطیل‌های بالایی و پایینی = مساحت زمین محصور شده با یه S

مساحت ۴ تا ربع دایره +

$$\Rightarrow S_1 = (2x \times 1) \times 2 + (x \times 1) \times 2 + \pi(1)^2 = \pi + 6x$$

$$\xrightarrow{\text{طبق فرض}} S_1 = (1 + \frac{\pi}{18})S_1 \Rightarrow \pi + 6x = (1 + \frac{\pi}{18}) \times 2x^2$$

$$\Rightarrow (2 + \frac{\pi}{9})x^2 - 6x - \pi = 0$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times (2 + \frac{\pi}{9}) \times (-\pi) = 36 + 8\pi + \frac{4\pi^2}{9} = (\frac{2\pi}{3} + 6)^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \frac{2\pi}{3} + 6$$

$$\xrightarrow{x > 0} x = \frac{6 + \frac{2\pi}{3} + 6}{2(2 + \frac{\pi}{9})} = \frac{12 + \frac{2\pi}{3}}{2(2 + \frac{\pi}{9})} = \frac{6(2 + \frac{\pi}{9})}{2(2 + \frac{\pi}{9})} = 3 \Rightarrow \text{طول یاغچه} = 2x = 6$$

فصل ۳ تابع درجه‌ی دوم (سه‌می)

۱۹۱. (گزینه ۳) محل تلاقی سه‌می با محور y ‌ها همان b است:

$$\begin{cases} x_s = \frac{-b}{2a} = -1 \Rightarrow \frac{-a}{2(3)} = -1 \Rightarrow a = 6 \\ y_s = \frac{-\Delta}{4a} = -4 \Rightarrow \frac{\Delta}{4(3)} = 4 \Rightarrow \Delta = 48 \\ \Rightarrow (6)^2 - 12b = 48 \Rightarrow 36 - 12b = 48 \\ \Rightarrow -12b = 12 \Rightarrow b = -1 \quad (\text{عرض از مبدأ}) \end{cases}$$

رنگی:

$$x_s = \frac{-b}{2a} = -1 \Rightarrow \frac{-a}{2(3)} = -1 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow y = 3x^2 + 6x + b$$

رأس سه‌می یکی از نقاط خود سه‌می بوده و مختصاتش در معادله‌ی آن صدق می‌کند:

$$-4 = 3(-1)^2 + 6(-1) + b \Rightarrow -4 = -3 + b \Rightarrow b = -1$$

۱۹۲. (گزینه ۴)

$$y = kx^2 - 4x - 6$$

$$\xrightarrow{\text{طول رأس سه‌می}} x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2k} = \frac{2}{k}$$

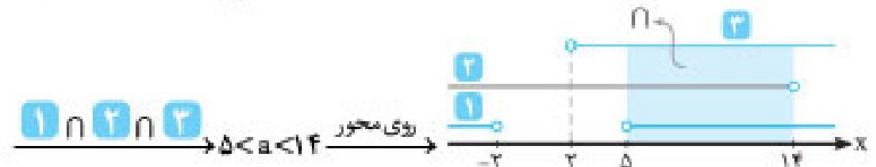
$$\xrightarrow{\text{عرض رأس سه‌می}} y_s = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-4)^2 - 4k(-6)}{4k} = -\frac{16 + 24k}{4k} = -\frac{4 + 6k}{k}$$

$$= -\frac{16 + 24k}{4k} = -\frac{4 + 6k}{k} \quad *$$

$$\xrightarrow{\text{مختصات رأس}} S(\frac{2}{k}, -\frac{4 + 6k}{k})$$

$$(۲) P = \frac{c}{a} = \frac{14 - a}{1} > 0 \Rightarrow 14 - a > 0 \Rightarrow a < 14$$

$$(۳) S > 0 \Rightarrow S = \frac{-b}{a} = 2(a - 2) > 0 \Rightarrow a - 2 > 0 \Rightarrow a > 2$$



رنگی:

حذف گزینه‌های «۲» و «۳» $\Delta = (4 - 24)^2 < 0$ ریشه ندارد

حذف گزینه‌ی «۱» $\Delta = (16 - 56)^2 < 0$ ریشه ندارد

۱۸۷. (گزینه ۴)

$$x^2 + x - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -1 \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -5 \end{cases} \quad (۱)$$

اگر S' و P' به ترتیب جمع و ضرب ریشه‌های معادله‌ی جدید باشند، آن‌گاه:

$$\begin{aligned} S' &= (\frac{\alpha}{\beta} - 1) + (\frac{\beta}{\alpha} - 1) \\ &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} - 2 = \frac{S^2 - 2P}{P} - 2 \xrightarrow{(۱)} \frac{(-1)^2 - 2(-5)}{-5} - 2 = -\frac{11}{5} - 2 = -\frac{21}{5} \end{aligned}$$

$$P' = (\frac{\alpha}{\beta} - 1)(\frac{\beta}{\alpha} - 1) = 1 - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} + 1 = 2 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} \xrightarrow{(۲)} 2 - \frac{21}{5} = -\frac{11}{5}$$

در نهایت معادله‌ی جدید را می‌نویسیم:

$$x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 - (-\frac{21}{5})x + (-\frac{11}{5}) = 0 \Rightarrow 5x^2 + 21x - 11 = 0$$

۱۸۸. (گزینه ۴)

$$2x^2 - 7x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{7}{2} \\ P = \alpha\beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{\alpha} \end{cases}$$

اگر معادله‌ی خواسته‌شده را به صورت $X^2 - SX + P = 0$ در نظر بگیریم و ریشه‌هایش را X' و X'' نمایش دهیم، طبق اطلاعات دانسته‌شده در تست داریم:

$$\begin{aligned} X' &= \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2} = \alpha^2 + (\frac{1}{\alpha})^2 = \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = \frac{49}{4} - 2 \\ &\Rightarrow X' = \frac{31}{4} \end{aligned}$$

$$X'' = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} = \alpha + \frac{1}{\alpha} = \alpha + \beta = \frac{7}{2}$$

و همچنین:

$$\begin{aligned} S &= X' + X'' = \frac{31}{4} + \frac{7}{2} = \frac{31 + 14}{4} = \frac{45}{4} \\ P &= X' \cdot X'' = \frac{31}{4} \times \frac{7}{2} = \frac{217}{8} \end{aligned}$$

یا جای‌گذاری در معادله داریم:

$$X^2 - \frac{45}{4}X + \frac{217}{8} = 0 \xrightarrow{\times 8} 8X^2 - 90X + 217 = 0$$

$$\Rightarrow 8X^2 - 90X + 217 = 0$$

۱۸۹. (گزینه ۳) α و β ریشه‌های معادله هستند، پس در معادله صدق می‌کنند:

$$x^2 - 3x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3x + 3 \xrightarrow{\frac{x=\alpha}{x=\beta}} \begin{cases} \alpha^2 = 3\alpha + 3 \quad (۱) \\ \beta^2 = 3\beta + 3 \quad (۲) \end{cases}$$

یا ضرب رابطه‌ی (۱) در α داریم:

$$\alpha^2 = 3\alpha + 3 \xrightarrow{(۱)} \alpha^2 = 3(3\alpha + 3) + 3 = 9\alpha + 9 \Rightarrow \alpha^2 - 9 = 9\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2 - 9}{4} = 9\alpha \quad (۲)$$

۳۳۹ پاسخنامه‌ی تشریحی

📌 زنگی: یکی از سهمی‌ها رو به بالا و دیگری رو به پایین است:

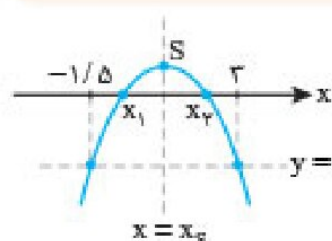


$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-a}{2} = \frac{-(-2)}{2(-1)} \Rightarrow a = 2$$

$y = 1$ در هر دو سهمی صدق می‌کند:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 2 = 1 \\ y = -x^2 - 2x + b = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع کن}} b - 2 = 2 \Rightarrow b = 4$$

$$\Rightarrow a \times b = 8$$



۱۹۷. گزینه ۱ شکل فرضی مقابل را در نظر می‌گیریم:

همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود و با توجه به

یکسان بودن عرض دو نقطه‌ی داده‌شده، معادله‌ی

محور تقارن سهمی به صورت زیر و از میانگین طول

دو نقطه به دست می‌آید:

$$x_S = \frac{-1/5 + 2}{2} = \frac{1/5}{2} = \frac{1}{4}$$

همچنین داریم:

$$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow x_1 + x_2 = 2 \times x_S = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

۱۹۸. گزینه ۳ یا توجه به شکل، α و β صفرهای سهمی و طول رأس سهمی برابر یک

است پس:

$$\begin{cases} x_S = \frac{\alpha + \beta}{2} = 1 \Rightarrow \alpha + \beta = 2 \Rightarrow S = 2 \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-8a}{a} = -8 \end{cases}$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-8a}{a} = -8$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = 2^2 - 2(-8) = 4 + 16 = 20$$

۱۹۹. گزینه ۱

$$y = 2\delta\alpha x^2 + 4x + \beta \Rightarrow \begin{cases} S = -\frac{b}{a} = \frac{-4}{2\delta\alpha} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{-4}{2\delta\alpha} \\ P = \frac{c}{a} = \frac{\beta}{2\delta\alpha} \Rightarrow \alpha\beta = \frac{\beta}{2\delta\alpha} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{2} \alpha = \frac{1}{2\delta\alpha} \xrightarrow{\times \alpha} \alpha^2 = \frac{1}{2\delta} \Rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2\delta}}$$

با جای گذاری در رابطه‌ی ۱ داریم:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\delta}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\delta}} + \beta = \frac{-4}{2\delta \times \frac{1}{\sqrt{2\delta}}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\delta}} + \beta = \frac{-4}{\sqrt{2\delta}} \Rightarrow \beta = -\frac{5}{\sqrt{2\delta}}$$

چون طبق فرض $\beta > \alpha$ است، این حالت قابل قبول نیست. برای $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2\delta}}$ داریم:

$$\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2\delta}} \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2\delta}} + \beta = \frac{-4}{2\delta(-\frac{1}{\sqrt{2\delta}})} \Rightarrow \beta = 1$$

با جای گذاری در سهمی، داریم: $y = 2\delta(-\frac{1}{\sqrt{2\delta}})x^2 + 4x + 1 \Rightarrow y = -\sqrt{2\delta}x^2 + 4x + 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-\sqrt{2\delta})} = \frac{2}{\sqrt{2\delta}} > 0 \\ y_S = f(\frac{2}{\sqrt{2\delta}}) = -\sqrt{2\delta} \times \frac{4}{2\delta} + 4 \times \frac{2}{\sqrt{2\delta}} + 1 = \frac{9}{\sqrt{2\delta}} > 0 \end{cases}$$

پس رأس سهمی در ناحیه‌ی اول دستگاه مختصات قرار دارد.

۲۰۰. گزینه ۳ اگر دو نقطه‌ی $A(x_1, k)$ و $B(x_2, k)$ روی سهمی قرار داشته باشند،

مقدار طول نقطه‌ی رأس سهمی از رابطه‌ی $x_S = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ، به دست می‌آید.

بر این اساس، طول رأس سهمی، $x_S = \frac{-5 + 3}{2} = -1$ است. با توجه به توضیح متن تست،

مختصات نقطه‌ی رأس سهمی $(-1, 1)$ و ضابطه‌ی آن $y = a(x - (-1))^2 + 1$ ($a \neq 0$) است.

$$y = a(x + 1)^2 + 1 = a(x^2 + 2x + 1) + 1 = ax^2 + 2ax + (a + 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-2a}{a} = -2 \\ P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = \frac{a + 1}{a} \end{cases}$$

طبق فرض تست نقطه‌ی S روی خط $y = -4x - 4$ قرار دارد، بنابراین:

$$-\frac{4 + 6k}{k} = -4 \times \frac{2}{k} - 4 \xrightarrow{\times (-k)} 4 + 6k = 8 + 4k \Rightarrow 2k = 4 \Rightarrow k = 2$$

$$\xrightarrow{*} y_S = -\frac{4 + 6 \times 2}{2} = -8$$

۱۹۳. گزینه ۴

$$f(x) = x^2 + 2x - c \xrightarrow{f(-1)=2} 2 = (-1)^2 + 2(-1) - c$$

$$\Rightarrow 2 = -1 - c \Rightarrow c = -3$$

حالا باید با توجه به ضابطه‌ی تابع $f(x) = x^2 + 2x + 4$ ، ضابطه‌ی تابع $y = f(2x - 1)$ را (یا جایگزین کردن $(2x - 1)$ به جای x ها) به دست آورده و بعد مختصات رأس نمودار آن را به دست آوریم:

$$y = f(2x - 1) = (2x - 1)^2 + 2(2x - 1) + 4$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} 4x^2 - 4x + 1 + 4x - 2 + 4 \Rightarrow y = 4x^2 + 3$$

$$\Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2(4)} = 0, y_S = y(0) = 4(0)^2 + 3 = 3 \Rightarrow S(0, 3)$$

📌 زنگی:

$$S(-1, 3) \xrightarrow{x \rightarrow x(x-1)} S_1(0, 3) \xrightarrow{x \rightarrow 2x} S_2(0, 3)$$

پس مختصات رأس سهمی تابع $f(2x - 1)$ به صورت $(0, 3)$ خواهد بود.

۱۹۴. گزینه ۴ وقتی خطی یک سهمی را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند، یعنی محور

تقارن آن است:

$$y = (m - 2)x^2 - 3x + m^2 + 1$$

$$\xrightarrow{\text{معادله‌ی محور تقارن}} x = x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{2(m - 2)} = \frac{3}{2}$$

$$2(m - 2) = 3 \xrightarrow{+4} m - 2 = \frac{3}{2} \xrightarrow{+2} m = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$$

در معادله‌ی $y = (m - 2)x^2 - 3x + m^2 + 1$ محل تلاقی سهمی با محور y ها، $c = m^2 + 1$ است:

$$c = m^2 + 1 = (\frac{7}{2})^2 + 1 = \frac{49}{4} + 1 = \frac{53}{4}$$

۱۹۵. گزینه ۳ اگر نمودار تابع را که یک سهمی است با محور تقارنش در ذهن‌تان تجسم

کنید، متوجه می‌شوید خط افقی که با محور تقارن سهمی روی نمودار تابع تلاقی می‌کند،

همان خط $y = y_S = \frac{-\Delta}{4a}$ است.

نگاه کن:

$$y = ax^2 + bx + c$$



$$y = x^2 - 4x + c$$

$$\Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4c = 16 - 4c$$

$$\frac{-\Delta}{4a} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{4c - 16}{4} = \frac{2}{5}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 20c - 80 = 12$$

$$\Rightarrow 20c = 92 \Rightarrow c = \frac{92}{20} = \frac{23}{5}$$

۱۹۶. گزینه ۳

$$\begin{cases} y = x^2 + ax - 2 \xrightarrow{\text{محور تقارن}} x = -\frac{b}{2a} = \frac{-a}{2 \times 1} = -\frac{a}{2} \\ y = -x^2 - 2x + b \xrightarrow{\text{محور تقارن}} x = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(-1)} = -1 \end{cases}$$

طبق فرض تست، معادله‌ی این دو خط یکسان است، بنابراین داریم:

$$-\frac{a}{2} = -1 \Rightarrow a = 2$$

از طرفی از فرض دوم سؤال متوجه می‌شویم که این دو سهمی در دو نقطه، مشترک هستند

که عرض این دو نقطه برابر و برابر ۱ است، پس برای سهمی اول داریم:

$$\xrightarrow{*} y = x^2 + 2x - 2 \xrightarrow{\text{تلاقی با } y=1} x^2 + 2x - 2 = 1 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)(x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases} \xrightarrow{\text{نقاط تلاقی}} \begin{cases} A(1, 1) \\ B(-3, 1) \end{cases}$$

این دو نقطه باید در معادله‌ی سهمی دوم هم صدق کنند، بنابراین داریم:

$$y = -x^2 - 2x + b \xrightarrow{A(1, 1)} 1 = -1 - 2 + b \Rightarrow b = 4$$

$$\Rightarrow a \times b = (2)(4) = 8$$



۲۰۶. (گزینه ۲) نقطه‌ی مینیمم سهمی $y = x^2 - mx + 2 - m$ در رأس سهمی رخ می‌دهد پس:

$$\begin{cases} x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{m}{2} \\ y_S = \left(\frac{m}{2}\right)^2 - m\left(\frac{m}{2}\right) + 2 - m = -\frac{1}{4}m^2 - m + 2 \end{cases}$$

مختصات رأس $S\left(\frac{m}{2}, -\frac{m^2}{4} - m + 2\right)$

در ناحیه‌ی اول طول و عرض نقاط مثبت است، پس:

$$\begin{cases} \frac{m}{2} > 0 \Rightarrow m > 0 \quad (1) \\ -\frac{1}{4}m^2 - m + 2 > 0 \xrightarrow{\Delta = 1 - 4(-\frac{1}{4})(2) = 2} \end{cases}$$

$$m = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2(-\frac{1}{4})} = -2(1 \pm \sqrt{2}) \xrightarrow{\text{جواب نامعده}}$$

$$-2(\sqrt{2} + 1) < m < 2(\sqrt{2} - 1) \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow 0 < m < 2(\sqrt{2} - 1) \approx 1/4 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = 1$$

۲۰۷. (گزینه ۲)

$$R_f = (-\infty, \frac{16}{3}] \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \quad (1) \\ y_S = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{16}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{f - fa(a+1)}{4a} = \frac{16}{3} \Rightarrow \frac{-f(a^2 + 4a - 1)}{4a} = \frac{16}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + 4a - 1}{a} = \frac{16}{3} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 3a^2 + 12a - 3 = 16a$$

$$\Rightarrow 3a^2 + 4a - 3 = 0 \xrightarrow{\Delta = 16 + 36 = 52} a = \frac{-4 \pm \sqrt{52}}{6} \Rightarrow a = \frac{1}{3} \text{ یا } -3 \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow a = -3$$

۲۰۸. (گزینه ۱) چون سهمی دارای ماکزیمم است، پس $a < 0$ است، لذا داریم:

$$y = ax + a - 3 \Rightarrow \begin{cases} \text{شیب خط} = a < 0 \\ \text{عرض از مبدأ خط} = a - 3 < 0 \end{cases}$$

رسم خط

تلاقی با محور x ها $y = 0 \Rightarrow ax + a - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(a-3)}{a} < 0$

پس خط داده‌شده، از ناحیه‌ی اول عبور نمی‌کند.

رنگی: تابعی با اعداد فرضی در نظر بگیر:

$$y = -x^2 + x + 1 \xrightarrow{a = -1} y = -x - 2 \xrightarrow{\text{رسم کن}}$$

رسم خط

۲۰۹. (گزینه ۱) نقطه‌ی ماکزیمم تابع f همان رأس سهمی است؛ پس:

$$\begin{cases} x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-(m+2)}{2(-2)} = \frac{m+2}{4} \\ y_S = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-((m+2)^2 + 4(1-m))}{4(-2)} = \frac{m^2 - 4m + 12}{8} \end{cases}$$

نقطه‌ی S روی خط داده شده است، پس معادله‌ی خط را می‌نویسیم:

$$m = \frac{\Delta - 0}{0 - (-2/\Delta)} = 2 \xrightarrow{\text{معادله‌ی خط}} y - \Delta = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x + \Delta$$

$$\xrightarrow{S \in \text{خط}} \frac{m^2 - 4m + 12}{8} = 2\left(\frac{m+2}{4}\right) + \Delta \Rightarrow \frac{m^2 - 4m + 12}{4} = \frac{m+12}{2}$$

طرفین وسطین $m^2 - 4m + 12 = 2m + 24 \Rightarrow m^2 - 6m - 12 = 0$

$$P = m_1 m_2 = \frac{c}{a} = -36$$

و اما خواسته‌ی سؤال:

یا توجه به این که مجموع مقدار مربعات ریشه‌ها Δ است، می‌توانیم بنویسیم:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \Delta \Rightarrow S^2 - 2P = \Delta \Rightarrow (-2)^2 - 2\left(\frac{a+1}{a}\right) = \Delta$$

$$\Rightarrow \frac{a+1}{a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2a + 2 = -a \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$$

در ضابطه‌ی سهمی $y = -\frac{2}{3}(x+1)^2 + 1$

عرض از مبدأ سهمی $x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3}$

۲۰۱. (گزینه ۲) حذف گزینه‌ی «۱» $a < 0 \Rightarrow$ دهانه‌ی سهمی رو به پایین است.

هر دو صفر متمایز سهمی مثبت است، یعنی $S > 0$ ، $P > 0$ و $\Delta > 0$ ، همه‌ی این موارد فقط در گزینه‌ی «۲» دیده می‌شود:

$$P = \frac{c}{a} = \frac{-2}{-1} = 2 > 0$$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-4}{-1} = 4 > 0$$

$$\Delta = 16 - 4(3) = 4 > 0$$

اما Δ گزینه‌ی «۴» برابر صفر و $\frac{-b}{a}$ در گزینه‌ی «۳» منفی است!

۲۰۲. (گزینه ۲) ابتدا محل تلاقی تابع یا محور y ها (نقطه‌ی A) را می‌یابیم:

$$x = 0 \xrightarrow{\text{در فایر}} f(0) = 0 - 0 + k - 2 \Rightarrow A(0, k - 2)$$

از طرفی مجموع ضرایب تابع f برابر صفر است، پس ریشه‌های آن عبارت‌اند از:

$$a + b + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} = \frac{k-2}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{یا توجه به شکل}} \begin{cases} B(\frac{k-2}{2}, 0) \\ C(1, 0) \end{cases}$$

یا توجه به قائم بودن مثلث در رأس A ، اضلاع AB و AC بر هم عمودند:

$$\begin{cases} m_{AC} = \frac{0 - (k-2)}{1 - 0} = -(k-2) \\ m_{AB} = \frac{0 - (k-2)}{\frac{k-2}{2} - 0} = -2 \end{cases} \xrightarrow{\text{شرط عمود بودن}} m_{AC} \times m_{AB} = -1$$

$$\Rightarrow -(k-2) \times (-2) = -1 \Rightarrow k - 2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B(-\frac{1}{2}, 0) \\ A(0, -\frac{1}{2}) \end{cases} \xrightarrow{C(0,0)} BC = 1 - (-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow OA = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} |OA| \times |BC| = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{8}$$

رنگی: فاصله‌ی BC همان قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها یعنی $BC = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است!

۲۰۳. (گزینه ۱) یا توجه به شکل داده‌شده، داریم:

$$x_S = \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-b}{2a} = -\frac{1}{2} \xrightarrow{b \rightarrow a} \frac{a}{2(a-1)} = 1$$

طرفین وسطین $2a - 2 = a \Rightarrow a = 2$

یا توجه به شکل $f(1) = 0$ است؛ پس:

$$f(x) = x^2 + 2x + b + 2 \Rightarrow f(1) = 1 + 2 + b + 2 = 0 \Rightarrow b = -6$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 + 2x - 3$$

$$\min(f) = y_S = f(x_S) = f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) - 3 = -4$$

۲۰۴. (گزینه ۳)

$$\min(f) = y_S = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(36 - 4 \times a \times \Delta)}{4a} = \frac{20a - 36}{4a} = 2$$

طرفین وسطین $20a - 36 = 8a \Rightarrow 12a = 36 \Rightarrow a = 3$

فرض $g(x) = -2x^2 + x - 2$

$$\Rightarrow \max(g) = y_S = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(1 - 4(-2)(-3))}{4(-2)} = -\frac{23}{8}$$

۲۰۵. (گزینه ۴) عرض نقطه‌ی رأس سهمی را برابر $-\frac{1}{2}$ قرار می‌دهیم:

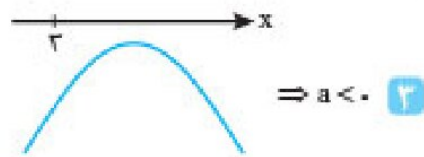
$$y_S = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1 - 4a^2}{4a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 1 - 4a^2 = 2a \Rightarrow 4a^2 + 2a - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (4a - 1)(2a + 1) = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \text{ یا } \frac{1}{4}$$

تابع دارای ماکزیمم است در نتیجه $a < 0$ بوده؛ پس فقط $a = -\frac{1}{2}$ قابل قبول است.

۳۴۱ پاسخنامه‌ی تشریحی

یا توجه به ۱ و ۲ نتیجه می‌گیریم که نمودار تابع f باید زیر محور x ها باشد؛ به این صورت:



بنابراین: $f(0) < 0 \Rightarrow c < 0$
 $\Rightarrow ac > 0$
 $\Rightarrow a < 0$

زنگی:

$$b = 0 \xrightarrow{\text{در شرط ها}} 0 < ac, \frac{c}{a} < -3a$$

در این دو فرض $c = -3$ و $a = -1$ صدق می‌کند، ببین:

$$ac = (-1)(-3) > 0, \frac{c}{a} < -3a \Rightarrow \frac{-3}{-1} < -3(-1) \Rightarrow -1 < 3 \quad \checkmark$$

یا توجه به این اعداد فقط گزینه‌ی «۲» با اعدادهای $a = -1$ و $c = -3$ هماهنگه!

گزینه ۱

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} A(-2, 5) \in f \Rightarrow a(-2)^2 + b(-2) + c = 5 \\ B(0, 5) \in f \Rightarrow a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 5 \Rightarrow c = 5 \\ C(1, 1) \in f \Rightarrow a + b + c = 11 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a - 2b + 5 = 5 \\ a + b + 5 = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a - 2b = 0 \\ a + b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{بررسی گزینه ها}} f(x) = 2x^2 + 4x + 5 \Rightarrow f(-1) = 2 - 4 + 5 = 3$$

پس این سهمی از نقطه‌ی $(-1, 3)$ می‌گذرد.

۲۱۴. گزینه ۳ طول رأس سهمی که مختصات دو نقطه‌ی هم‌عرض آن $A(2a+3, a-2)$ و $B(7-2a, a-2)$ باشد، برابر یا میانگین طول‌های این دو نقطه است:

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{(2a+3) + (7-2a)}{2} = 5 \Rightarrow b = 5$$

پس مختصات رأس سهمی (نقطه‌ی S)، $(5, 3)$ است.

یا توجه به طبیعی بودن مؤلفه‌های نقاط A و B می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 7 - 2a > 0 \Rightarrow a < \frac{7}{2} \\ 2a + 3 > 0 \Rightarrow a > -\frac{3}{2} \\ a - 2 > 0 \Rightarrow a > 2 \end{cases}$$

استراک مجموعه‌های بالا، بازه‌ی $2 < a < \frac{7}{2}$ است. تنها عضو طبیعی در این مجموعه که باعث طبیعی شدن مؤلفه‌های این دو نقطه می‌شود $a = 3$ است. حالا مختصات یکی از دو نقطه‌ی A یا B را بر حسب مقدار $a = 3$ می‌یابیم:

$$B(7-2a, a-2) = B(1, 1)$$

معادله‌ی سهمی را بر اساس مختصات نقطه‌ی رأس آن می‌یابیم:

$$y = k(x-5)^2 + 3$$

یا جای‌گذاری مختصات نقطه‌ی $B(1, 1)$ در معادله‌ی سهمی، مقدار k را می‌یابیم:

$$1 = k(1-5)^2 + 3 \Rightarrow 1 = 16k + 3 \Rightarrow k = \frac{-2}{16} = \frac{-1}{8}$$

معادله‌ی سهمی $y = \frac{-1}{8}(x-5)^2 + 3$ و عرض‌ازمبدأ آن برابر است با:

$$y = -\frac{1}{8}(0-5)^2 + 3 = \frac{-25}{8} + 3 = \frac{-1}{8}$$

فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد نمودار سهمی با محور عرض‌ها تا مبدأ برابر قدرمطلق عرض‌ازمبدأ یعنی $\frac{1}{8}$ است.

گزینه ۲

$$S(h, k) \xrightarrow{\text{معادله‌ی سهمی}} y = a(x-h)^2 + k$$

$$\xrightarrow{\text{رأس}} A(-1, 9) \Rightarrow y = a(x+1)^2 + 9$$

چون سهمی از نقطه‌ی $(3, 1)$ عبور می‌کند، پس این نقطه در ضابطه‌ی آن صدق می‌کند:

$$1 = a(3+1)^2 + 9 \Rightarrow -8 = 16a \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

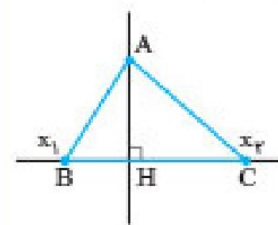
ضابطه‌ی سهمی $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 9$ و نقطه‌ی $(5, -9)$ در آن صدق می‌کند.

۲۱۰. گزینه ۴ مجموع ضرایب معادله‌ی $2x^2 - (m+2)x + m = 0$ برابر صفر است. پس ریشه‌های این معادله عبارت‌اند از:

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m}{2}$$

اندازه‌ی تفاضل این دو ریشه همان اندازه‌ی مثلث موردنظر است.

$$\text{اندازه‌ی تفاضل} = |x_2 - x_1| = \left|1 - \frac{m}{2}\right| = \frac{|m-2|}{2}$$



از طرفی محل تقاطع نمودار تابع داده‌شده با محور y ها، برابر است با:

$$x = 0 \Rightarrow y = 2(0)^2 - (m+2)(0) + m \Rightarrow y = m$$

اندازه‌ی y همان ارتفاع مثلث موردنظر است:

$$|m| = \text{ارتفاع مثلث}$$

طبق فرض داریم:

$$S = \frac{r}{f} \Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{|m-2|}{2} \times |m| = \frac{r}{f} \Rightarrow |m(m-2)| = \frac{r}{f}$$

$$\begin{cases} m^2 - 2m = \frac{r}{f} \Rightarrow m^2 - 2m - \frac{r}{f} = 0 \Rightarrow (m+1)(m-3) = 0 \\ \Rightarrow (m+1)(m-3) = 0 \Rightarrow m = -1, m = 3 \end{cases}$$

ریشه‌ی حقیقی ندارد.

از طرف دیگر طول رأس سهمی $y = x^2 - mx + 1$ برابر است با:

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-m}{2} = \frac{m}{2} \xrightarrow{\text{یا توجه به}} \begin{cases} m = -1 \Rightarrow x_S = \frac{m}{2} = -\frac{1}{2} \\ m = 3 \Rightarrow x_S = \frac{m}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

۲۱۱. الف: سهمی رویه بالا است، پس $a > 0$ است.

ب: سهمی محور y ها را زیر محور x ها قطع کرده است، پس $c < 0$ است.

پ: طول رأس سهمی منفی است، پس: $\frac{-b}{2a} < 0 \xrightarrow{a > 0} b > 0$

در نتیجه داریم:

$$a > 0, b > 0, c < 0 \Rightarrow abc < 0 \Rightarrow \text{حذف می‌شود.}$$

از روی نمودار تابع، کاملاً مشخص است که تابع f دارای دو صفر مختلف‌العلامت است که قدرمطلق ریشه‌ی منفی از ریشه‌ی مثبت بزرگ‌تر است؛ پس:

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta < 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2PS < 0 \\ P = \alpha\beta < 0 \end{cases}$$

گزینه ۲ درست است.

$$\Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow b^2 > 4ac$$

$$\xrightarrow{4ac > 4ac} b^2 > 4ac \xrightarrow{b > 0} b^2 + b > 4ac$$

گزینه ۳ حذف می‌شود.

می‌دانیم که رأس سهمی، در وسط صفرهای تابع قرار دارد؛ بنابراین:

$$\begin{cases} x_S = \frac{\alpha + \beta}{2} \Rightarrow f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow \text{حذف می‌شود.} \\ y_S = \frac{-\Delta}{4a} \end{cases}$$

زنگی: شکلی یا اعداد فرضی در نظر بگیر:

$\alpha = 1, \beta = -2 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 1 - 4 = -3 < 0 \quad \checkmark$

معادله‌ی سهمی $y = a(x-1)(x+2)$

$\xrightarrow{\text{صدق}} (1, -1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}(x-1)(x+2) \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, c = -1$

این هم برای بررسی بقیه‌ی گزینه‌ها!!

گزینه ۳

$$\frac{b^2}{f} < ac \Rightarrow b^2 < fac \Rightarrow b^2 - fac < 0 \Rightarrow \Delta < 0 \quad 1$$

$$b + \frac{c}{f} < -3a \Rightarrow 2b + c < -9a \Rightarrow \frac{9a + 2b + c}{f(2)} < 0 \Rightarrow f(2) < 0 \quad 2$$



۲۱۶. گزینه ۴



راهنمایی: در سهمی‌هایی به معادله‌ی $y = a(x-h)^2 + k$ ، ریشه‌ی پرانتز (یعنی $x = h$) همان محور تقارن سهمی است.

در این سؤال یا توجه به سهمی، خط $x = 2$ محور تقارن آن بوده و $y(0) = -1$ است؛ بنابراین:

$$y = -2(x + 2m - 5)^2 + m + 2n$$

$$y = -2(x + 2m - 5)^2 + m + 2n \Rightarrow x + 2m - 5 = 0 \Rightarrow x = -2m + 5 = 2 \Rightarrow m = 1$$

$$\text{جای‌گذاری} \Rightarrow y = -2(x - 2)^2 + 1 + 2n \Rightarrow y(0) = -2(-2)^2 + 1 + 2n = -1$$

$$\Rightarrow -8 + 1 + 2n = -1 \Rightarrow 2n = 6 \Rightarrow n = 3$$

حالا یا توجه به مقادیر m و n داریم:

$$y = mx^2 + nx + 1 = x^2 + 2x + 1$$

$$\begin{cases} x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2(1)} = -1 \\ y_s = y\left(\frac{-2}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 1 = \frac{-9}{4} + 1 = \frac{-5}{4} \end{cases} \Rightarrow S\left(\frac{-2}{2}, \frac{-5}{4}\right)$$

۲۱۷. گزینه ۲

شکل سؤال به ما می‌گوید که نمودار سهمی از مبدأ عبور می‌کند. پس باید مختصات $O(0,0)$ در ضابطه‌ی تابع صدق کند:

$$0 = 0 + 0 + a^2 - 2 \Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow a = \pm\sqrt{2}$$

$$\text{ضریب } x^2 \text{ نیز } a \text{ بوده و دهانه‌ی سهمی رو به بالا است.} \Rightarrow a = \sqrt{2}$$

$$0 = 0 + 0 + a^2 - 2 \Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow a = \pm\sqrt{2}$$

۲۱۸. گزینه ۱

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow \begin{cases} \text{دهانه رو به پایین است.} & a < 0 \\ \text{نمودار از مبدأ گذشته} & f(0) = 0 \Rightarrow c = 0 \\ x_s > 0 & \frac{-b}{2a} > 0 \Rightarrow \frac{-b}{2a} > 0 \Rightarrow b > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x) = bx^2 + a = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{-a}{b} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-a}{b}}$$

یعنی تابع g دارای دو صفر قرینه است و دهانه‌ی آن به سمت بالا است ($b > 0$)، پس پاسخ درست **گزینه‌ی ۱** است.



رنگی: عددی فرضی در نظر بگیر:

$$\begin{aligned} \text{معادله‌ی سهمی } S(0,1) & \Rightarrow y = a(x-1)^2 + 1 \\ \text{یا } (0,0) & \Rightarrow a = -1 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 2x \\ \text{در } g & \Rightarrow g(x) = 2x^2 - 1 \end{aligned}$$

۲۱۹. گزینه ۲

از شکل سؤال پیداست که سهمی به معادله‌ی $y = ax^2 + \lambda x + c$ در نقطه‌ای به طول ۲ بر محور x ها مماس است؛ بنابراین:

$$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-\lambda}{2a} = 2 \Rightarrow \lambda a = -4 \Rightarrow a = -2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (\lambda)^2 - 4(-2)(c) = 0 \Rightarrow 4\lambda + 8c = 0$$

$$\Rightarrow 4c = -\lambda \Rightarrow c = -\lambda$$

رنگی:

$$\begin{aligned} f(x) = ax^2 + \lambda x + c & = a(x-2)^2 = ax^2 - 4ax + 4a \\ \text{مقایسه} & \Rightarrow \lambda = -4a \Rightarrow a = -2, c = 4a \Rightarrow c = -8 \end{aligned}$$

۲۲۰. گزینه ۴

نقاط تلاقی خط داده‌شده با محورهای مختصات را می‌یابیم:

$$2y + x = 6 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 3 \\ y = 0 \Rightarrow x = 6 \end{cases}$$

بنابراین نمودار f به صورت مقابل خواهد بود:

$$\Rightarrow f(x) = a(x+2)(x-6)$$

$$\frac{f(0)}{f(0)} = 3 = a(0+2)(0-6) \Rightarrow 3 = -12a$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{4} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{4}(x+2)(x-6)$$

$$x_s = \frac{-2+6}{2} = 2 \Rightarrow \max(f) = y_s = f(2) = -\frac{1}{4}(2+2)(2-6) = 4$$

۲۲۱. گزینه ۴

$$g(x) = mx + h \xrightarrow{h=1, m=-1} g(x) = -x + 1$$

برای سهمی f داریم:

$$S(1,1) \Rightarrow f(x) = a(x-1)^2 + 1 \xrightarrow{O(0,0) \in f} 0 = a(0-1)^2 + 1 \Rightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = -(x-1)^2 + 1 = -x^2 + 2x$$

حالا برای حل معادله داریم:

$$f(x) = g^2(x) \Rightarrow -x^2 + 2x = (-x+1)^2 \Rightarrow -x^2 + 2x = x^2 - 2x + 1$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع جوابها}} 2x^2 - 4x + 1 = 0 \xrightarrow{\text{عرب‌کن}} S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-4)}{2} = 2$$

۲۲۲. گزینه ۲ ابتدا ضابطه‌ی تابع f را می‌نویسیم:

$$S(2,-2) \Rightarrow f(x) = a(x-2)^2 - 2 \xrightarrow{f(0)=-2} -2 = a(0-2)^2 - 2$$

$$\Rightarrow 4a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}(x-2)^2 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}(x^2 - 4x + 4) - 2 = \frac{1}{4}x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 4 \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -8 \end{cases}$$

حالا معادله‌ی خواسته‌شده را با ریشه‌های $x_1 = \frac{\alpha}{\beta-1}$ و $x_2 = \frac{\beta}{\alpha-1}$ به صورت $x^2 - S'x + P' = 0$ در نظر می‌گیریم، بنابراین:

$$S' = x_1 + x_2 = \frac{\alpha}{\beta-1} + \frac{\beta}{\alpha-1} = \frac{\alpha(\alpha-1) + \beta(\beta-1)}{(\alpha-1)(\beta-1)} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - (\alpha + \beta)}{\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1}$$

$$= \frac{(S^2 - 2P) - S}{P - S + 1} = \frac{16 + 16 - 4}{-8 - 4 + 1} = \frac{28}{-11}$$

$$P' = x_1x_2 = \left(\frac{\alpha}{\beta-1}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha-1}\right) = \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1} = \frac{P}{P - S + 1} = \frac{-8}{-11} = \frac{8}{11}$$

$$\Rightarrow x^2 - \left(-\frac{28}{11}\right)x + \frac{8}{11} = 0 \xrightarrow{\times 11} 11x^2 + 28x + 8 = 0$$

۲۲۳. گزینه ۲ با توجه به شکل داده‌شده، داریم:

$$f(4) = 0 \Rightarrow -2 \times 16 + 4a + 12 = 0 \Rightarrow 4a = 20 \Rightarrow a = 5$$

$$\Rightarrow f(x) = -2x^2 + 5x + 12 = (x-4)(-2x-3) \Rightarrow x = 4, x = -\frac{3}{2}$$

پس $x = -\frac{3}{2}$ صفر تابع g هم است، یعنی $x_1 = -\frac{3}{2}$ و $x_2 = -3$ صفرهای تابع g هستند؛ بنابراین:

$$g(x) = -x^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = x_1 + x_2 = b \Rightarrow -3 + \left(-\frac{3}{2}\right) = b \Rightarrow b = -\frac{9}{2} \\ P = x_1x_2 = -c \Rightarrow \left(-3\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = -c \Rightarrow c = -\frac{9}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x) = -x^2 - \frac{9}{2}x - \frac{9}{2} \xrightarrow{x=1} g(1) = -1 - \frac{9}{2} - \frac{9}{2} = -10$$

$$f(1) = -2 + 5 + 12 = 15$$

$$\Rightarrow (f \cdot g)(1) = f(1)g(1) = (15)(-10) = -150$$

۲۲۴. گزینه ۲ با توجه به معلوم بودن مختصات رأس سهمی، معادله‌ی تابع $f(x)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = a(x-h)^2 + k \xrightarrow{h=1, k=-2} f(x) = a(x-1)^2 - 2$$

$$\xrightarrow{(-1,0) \in f} 0 = a(-1-1)^2 - 2 \Rightarrow 0 = 4a - 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2$$

حالا سهمی f را با خط $y = x - 3$ تلاقی می‌دهیم.

$$\frac{1}{2}(x-1)^2 - 2 = x - 3 \xrightarrow{\times 2} (x^2 - 2x + 1) - 4 = 2x - 6$$

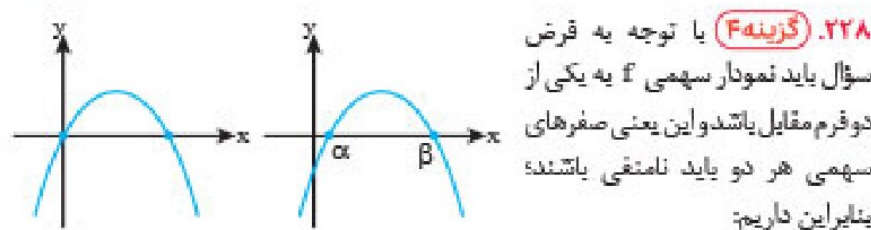
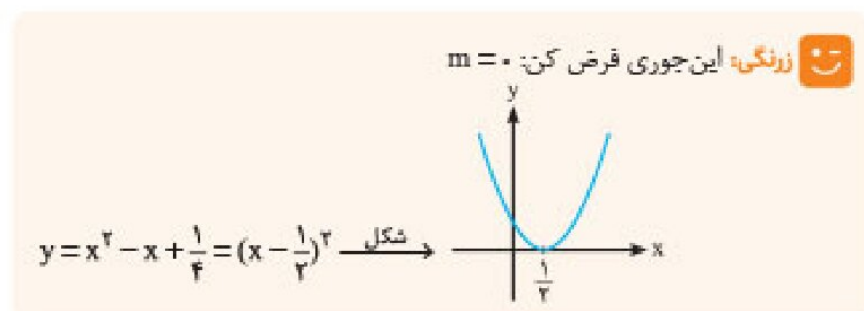
$$\Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{در تابع } f \text{ جای‌گذاری}} \begin{cases} y = 1 - 3 = -2 \Rightarrow A(1, -2) \\ y = 3 - 3 = 0 \Rightarrow B(3, 0) \end{cases}$$

پس خط $y = x - 3$ سهمی f را در دو نقطه‌ی A و B قطع می‌کند که مختصات وسط

$$\text{این دو نقطه برابر است یا: } M = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{-2+0}{2}\right) = (2, -1)$$

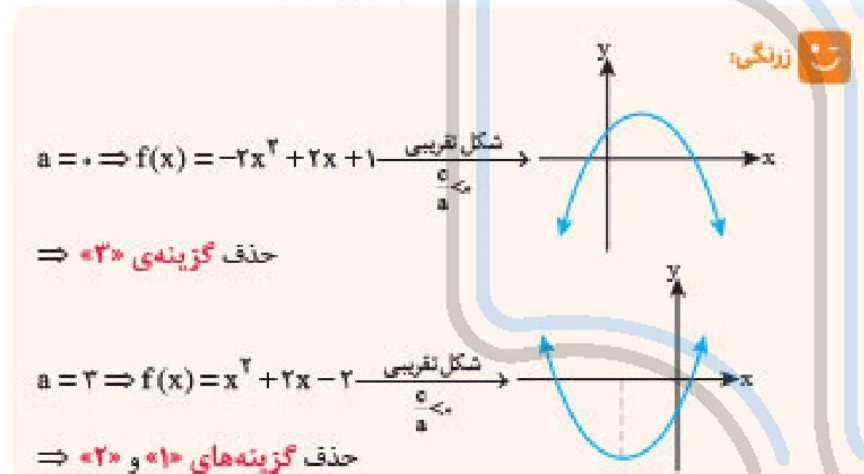
۳۴۳ پاسخنامه‌ی تشریحی



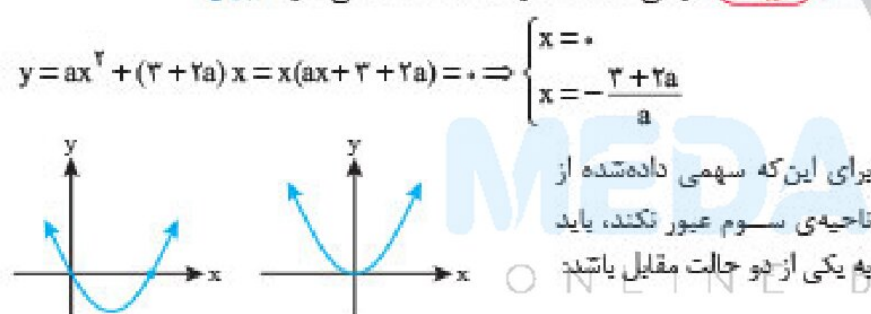
- ۱ $a-2 < 0 \Rightarrow a < 2$
- ۲ $P = \alpha\beta \geq 0 \Rightarrow \frac{1-a}{a-2} \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 1 \leq a < 2$
- ۳ $S = \alpha + \beta > 0 \Rightarrow \frac{-2}{a-2} > 0 \Rightarrow a-2 < 0 \Rightarrow a < 2$
- ۴ $\Delta > 0 \Rightarrow 4 - 4(a-2)(1-a) > 0 \xrightarrow{+4} a^2 - 2a + 2 > 0 \xrightarrow{\Delta < 0} a \in \mathbb{R}$

پس سه جمله‌ای $a^2 - 2a + 2$ همواره مثبت است.

$1 \cap 2 \cap 3 \cap 4 \Rightarrow 1 \leq a < 2$



📌 **۲۲۹. (گزینه ۱)** سهمی داده شده، از مبدأ مختصات می‌گذرد، ببین:



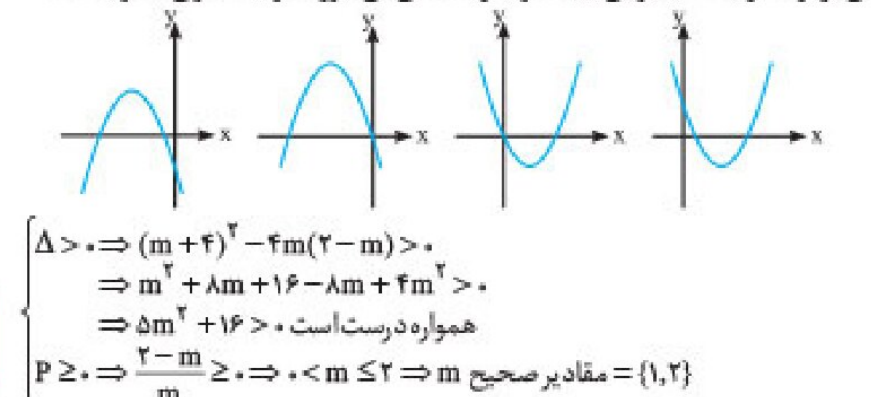
یا توجه به شکل‌های رسم شده، ضریب x^2 باید مثبت و ریشه‌ی دوم معادله‌ی $y=0$ باید نامنفی باشد؛ بنابراین داریم:

- ۱ $a > 0$
- ۲ $-\frac{3+2a}{a} > 0 \Rightarrow 3+2a < 0 \Rightarrow a < -\frac{3}{2}$

$1 \cap 2 = \emptyset$

پس به ازای هیچ مقداری از a ، نمودار سهمی داده شده نمی‌تواند از ناحیه‌ی سوم عبور نکند.

📌 **۲۳۰. (گزینه ۲)** مطابق شکل‌های زیر برای این که نمودار تابع درجه‌ی دوم، دقیقاً از سه ناحیه‌ی مختصاتی عبور کند، باید دو ریشه‌ی هم علامت داشته باشد یا یکی از ریشه‌های آن برابر صفر باشد؛ بنابراین باید ضرب ریشه‌های آن، بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد.



📌 **زنگی:** طول یکی از ریشه‌ها $x_1 = -1$ و محور تقارن $x_g = 1$ است. پس ریشه‌ی دیگر $x_2 = 1+2=3$ است که ریشه‌ی $y = x-3$ نیز هست. از طرفی نقطه‌ی رأس سهمی $S(x_g, y_g)$ یا $S(1, -2)$ نیز در معادله‌ی $y = x-3$ صدق می‌کند پس: $A(1, -2), B(3, 0)$

📌 **۲۲۵. (گزینه ۲)** همواره یالای محور x هایبوند نمودار تابع درجه‌ی دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ به معنای همواره مثبت بودن عبارت درجه‌ی دوم بوده و شرطش این است که $a > 0$ و $\Delta < 0$ باشد پس:

- ۱ $1-a > 0 \xrightarrow{+a} a < 1$
- ۲ $\Delta < 0 \Rightarrow (2\sqrt{6})^2 - 4(1-a)(-a) < 0$
 $\xrightarrow{\text{ساده کن}} 24 + 4a - 4a^2 < 0 \xrightarrow{+4} 6 + a - a^2 < 0$
 $\Rightarrow a^2 - a - 6 > 0 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (a-3)(a+2) > 0$

تعیین علامت: $\frac{a}{a^2 - a - 6}$

ما می‌خواهیم که $a^2 - a - 6 > 0$

$a < -2$ یا $a > 3$ یا $a < 1$ یا $a < -2$



📌 **زنگی:** باید $1-a > 0$ باشد؛ پس $a < 1$ و بنابراین گزینه‌ی «۳» حذف می‌شود. از طرفی به ازای $a=0$ ضابطه‌ی تابع برابر است با: $y = x^2 + 2\sqrt{6}x$ که نمودار تابع در دو نقطه محور x را قطع می‌کند؛ بنابراین گزینه‌های «۱» و «۴» حذف می‌شوند.

📌 **۲۲۶. (گزینه ۲)** شکل سهمی باید به صورت مقابل باشد:

شرط انبساط: $\begin{cases} a > 0 \Rightarrow 2m+3 > 0 \Rightarrow m > -\frac{3}{2} \\ \Delta < 0 \Rightarrow \Delta = 36 - 4(2m+3)(m) < 0 \end{cases}$

$\xrightarrow{+(-4)} 2m^2 + 2m - 9 > 0 \Rightarrow (2m-3)(m+3) > 0$

تعیین علامت: $m < -3$ یا $m > \frac{3}{2}$

$1 \cap 2 \Rightarrow m > \frac{3}{2}$

📌 **زنگی:** نباید ریشه داشته باشد!

$m=1 \Rightarrow y = \Delta x^2 + 6x + 1$

حذف گزینه‌های «۳» و «۴» $\Delta = 36 - 4 > 0$ ۲ ریشه دارد

$m=-1 \Rightarrow y = x^2 + 6x - 1$

حذف گزینه‌ی «۱» $\Delta = 36 + 4 > 0$ ۲ ریشه دارد

📌 **۲۲۷. (گزینه ۳)** می‌دانیم که سهمی به معادله‌ی $y = ax^2 + bx + c$ یا شرط $\Delta = 0$ و $x_g = \frac{-b}{2a} > 0$ در نقطه‌ای به طول مثبت و یا شرط $\Delta = 0$ و $x_g = \frac{-b}{2a} < 0$ در نقطه‌ای به طول منفی بر محور طول‌ها مماس می‌شود. همچنین این سهمی یا شرط $\Delta < 0$ و $a < 0$ همواره پایین‌تر از محور طول‌ها و یا شرط $\Delta < 0$ و $a > 0$ همواره بالاتر از محور طول‌ها قرار می‌گیرد. (تساید دیگه نیازی به گفتن نیاتسه که با شرط $\Delta > 0$ سهمی محور طول‌ها را در دو نقطه قطع کرده و از اون عبور می‌کنه) حال باید ببینیم سهمی داده شده کدام شرط را دارد:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-(2m^2+1))^2 - 4(1)(m^2+m^2+\frac{1}{4})$
 $= 4m^4 + 4m^2 + 1 - 4m^2 - 4m^2 - 1 = 0$

$x_g = \frac{-b}{2a} = \frac{2m^2+1}{2} > 0$

می‌بینیم که شرط $\Delta = 0$ و $x_g > 0$ برقرار بوده و گزینه‌ی «۳» درست است.



۲. $a > 2$ یا $a < -8$ $\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} (a+8)(a-2) > 0 \Rightarrow a < -8$

دو ریشه دارد $\xrightarrow{a < 0} -x^2 + 8x + 5 < 0 \xrightarrow{\text{در نامعادله}} a = -1$
حذف گزینه‌ی «۴» $\Rightarrow$ همواره منفی نیست!
دو ریشه دارد $\xrightarrow{a < 0} -3x^2 + 8x + 3 < 0 \xrightarrow{\text{در نامعادله}} a = -3$
حذف گزینه‌های «۱» و «۳» $\Rightarrow$ همواره منفی نیست!

۲.۳۴. (گزینه ۲) شرط مماس بودن یعنی ضابطه‌ی سهمی و $y = x$ را مساوی هم می‌گذاریم و معادله‌ی حاصل باید ریشه‌ی مضاعف منفی داشته باشد.
چون نمودار تابع و خط $y = x$ در ناحیه‌ی سوم بر هم مماس‌اند، معادله‌ی $2ax^2 - 5x + 18a = x$ دارای ریشه‌ی مضاعف منفی است.
 $2ax^2 - 5x + 18a = x \Rightarrow 2ax^2 - 6x + 18a = 0$
 $\Delta = 36 - 4(2a)(18a) = 0 \xrightarrow{+36} 1 - 4a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{2}$
ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی $2ax^2 - 6x + 18a = 0$ برابر $x_s = -\frac{-6}{2(2a)} = \frac{3}{2a}$ است. یا توجه به منفی بودن ریشه‌ی مضاعف این معادله، a نیز باید منفی باشد؛ در نتیجه $a = -\frac{1}{2}$ جواب تست است.

۲.۳۵. (گزینه ۴) خط موردنظر را به صورت $y = mx + h$ در نظر می‌گیریم:
 $h = -1 \Rightarrow y = mx - 1 \xrightarrow{(1,0) \in \text{خط}} 0 = m(1) - 1 \Rightarrow m = 1$
 $\Rightarrow y = x - 1 \xrightarrow{\text{تلاقی با سهمی}} x - 1 = -x^2 + 2x + 1$
 $\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1$ و $2 \xrightarrow{\text{در خط}} \begin{cases} A(-1, -2) \\ B(2, 1) \end{cases}$
 $\xrightarrow{M \text{ وسط پاره خط } AB} M = \frac{A+B}{2} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
 $y = -x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x_s = \frac{-2}{2(-1)} = 1 \Rightarrow y_s = -1 + 2 + 1 = 2 \Rightarrow S(1, 2)$
 $\Rightarrow MS = \sqrt{(1 - \frac{1}{2})^2 + (2 + \frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{26}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{26}$

۲.۳۶. (گزینه ۲) مطابق شکل، اگر طول مستطیل را x و عرض آن را y در نظر بگیریم، طول فنی به کاررفته برابر است با:
 $x + 2y = 100$
از طرفی برای مساحت این مستطیل داریم:

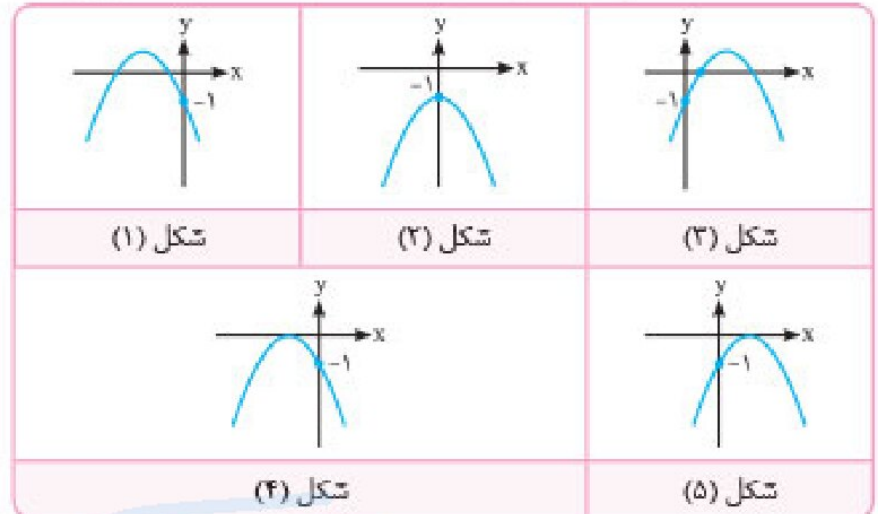
$S = xy \xrightarrow{\begin{matrix} x+2y=100 \\ x=100-2y \end{matrix}} S = (100-2y)y = -2y^2 + 100y$
حال می‌خواهیم تابع مساحت (که معادله‌ی یک سهمی است) بیشترین مقدار خود را اختیار کند. یادمان هست که بیشترین مقدار یک سهمی در رأس آن اتفاق می‌افتد:
 $S = -2y^2 + 100y \Rightarrow x_{\text{راس}} = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2(-2)} = 25$
 $\Rightarrow S_{\text{max}} = S(25) = -2(25)^2 + 100(25) = -1250 + 2500 = 1250 \text{ m}^2$
یعنی اگر ابعاد زمین مستطیل‌شکلی را به صورت $x \times y = 50 \times 25$ انتخاب کنیم، بیشترین مقدار ممکن برای مساحت ایجاد می‌شود.
 $(x = 100 - 2y = 100 - 50 = 50)$

۲.۳۷. (گزینه ۳) یا توجه به شکل رسم‌شده، $m + n = 11$ و مساحت متوازی‌الاضلاع برابر $S = nh$ است. از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC داریم:

$\sin 30^\circ = \frac{h}{m} \xrightarrow{\sin 30^\circ = \frac{1}{2}} h = \frac{1}{2}m$

۲.۳۱. (گزینه ۱) ابتدا توجه کنید که به ازای $a = 2$ ضابطه‌ی تابع می‌شود $f(x) = 2x - 1$ و نمودار تابع f از ناحیه‌ی اول می‌گذرد. فرض کنید $a \neq 2$.

می‌دانیم اگر ضریب x^2 بزرگ‌تر از صفر باشد، نمودار تابع درجه‌ی دوم حتماً از ناحیه‌ی اول می‌گذرد؛ پس حتماً باید:
۱. $a - 2 < 0 \Rightarrow a < 2$
یا شرط $a < 2$ ، یکی از شکل‌های زیر را می‌توانیم در نظر بگیریم. البته توجه داشته باشید که $f(0) = -1$ است، یعنی نمودار تابع محور y را در نقطه‌ای به عرض -1 قطع می‌کند.



از این ۵ شکل، فقط شکل (۳) مدنظر ما نیست، پس شرایط شکل (۳) را محاسبه کرده و آن را از شرط $a < 2$ کم می‌کنیم (اصل متمم). اما مشاهده می‌کنیم که در شکل (۳) نمودار تابع در دو نقطه یا طول‌های مثبت محور x را قطع کرده است، یعنی شرایط شکل (۳) به صورت مقابل است:
و اما حل این سه نامعادله:

$\Delta > 0 \Rightarrow a^2 - 4(a-2)(-1) > 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 12 > 0 \Rightarrow (a+6)(a-2) > 0$
 $\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} a < -6$ یا $a > 2$ ۲
 $P > 0 \Rightarrow \frac{-1}{a-2} > 0 \Rightarrow a-2 < 0 \Rightarrow a < 2$ ۳
 $S > 0 \Rightarrow \frac{-a}{a-2} > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 < a < 2$ ۴
 $\xrightarrow{2 \cap 3 \cap 4} 2 < a < 2$ ۵

حالا برای پیدا کردن جواب نهایی مسئله باید ۵ را از ۱ کم کنیم، پس جواب نهایی مسئله برابر است با:



رنگی: این جووری فرض کن: $a = 0 \xrightarrow{\text{در تابع}} f(x) = -x^2 - 1$



می‌بینید که سهمی از ناحیه‌ی اول نمی‌گذرد؛ پس هر گزینه‌ای که $a = 0$ را قبول ندارد، حذف می‌شود؛ یعنی گزینه‌های «۲»، «۳» و «۴»!

۲.۳۲. (گزینه ۴) معادله‌ی تلاقی دو تابع ریشه ندارد؛ بنابراین داریم:

$y_1 = y_2 \Rightarrow -mx^2 + mx + 1 = -m - x$
 $\xrightarrow{\text{مرتب‌کن}} mx^2 - (m+1)x - (m+1) = 0$
 $\xrightarrow{\text{معادله ریشه ندارد}} \Delta < 0 \Rightarrow (m+1)^2 + 4m(m+1) < 0$
 $\xrightarrow{\text{فاکتوراز ۱}} (m+1)(m+1+4m) < 0 \Rightarrow (m+1)(5m+1) < 0$
در این بازه عدد صحیح وجود ندارد. $\Rightarrow -1 < m < -\frac{1}{5}$ $\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$

۲.۳۳. (گزینه ۲) کافی است نامعادله‌ی $f(x) < -3x + 1$ را حل کنیم:

$ax^2 + 5x + 7 + a < -3x + 1 \Rightarrow ax^2 + 8x + 6 + a < 0$
می‌خواهیم سه جمله‌ای درجه‌ی دوم همواره منفی باشد؛ پس:
۱. $a < 0$
 $\Delta < 0 \Rightarrow 64 - 4a(6+a) < 0 \xrightarrow{+(-4)} a^2 + 6a - 16 > 0$

۳۴۵ پاسخ‌نامه‌ی تشریحی

رنگی: چون جمع دو عبارت مثبت مقداری ثابت است $(2a + 3b = 600)$ ، ضرب آن‌ها (یعنی $2a \times 3b = 6ab$) زمانی ماکزیمم می‌شود که آن عبارت‌ها مساوی باشند؛ پس:

$$2a = 300 \Rightarrow a = 150 \text{ m}, 3b = 300 \Rightarrow b = 100 \text{ m}$$

$$\Rightarrow S_{\max} = 150 \text{ m} \times 100 \text{ m} = 15000 \text{ m}^2$$



۲۴۱. گزینه ۲: استوانه‌ای با شعاع قاعده‌ی r (قطر $2r$) و ارتفاع h در نظر می‌گیریم:

$$2r + h = 15 \Rightarrow h = 15 - 2r$$

مساحت جانبی استوانه:

$$S = 2\pi rh$$

$$\rightarrow S = 2\pi r(15 - 2r) = 30\pi r - 4\pi r^2$$

نمودار تابع S بر حسب r یک سهمی بوده که دارای بالاترین نقطه است $(a = -4\pi < 0)$ و زمانی حداکثر مقدار خود را اختیار می‌کند که $r = \frac{-b}{2a} = \frac{-30\pi}{2(-4\pi)} = \frac{15}{4}$ انتخاب شود:

$$S_{\max} = S\left(\frac{15}{4}\right) = -4\pi\left(\frac{15}{4}\right)^2 + 30\pi\left(\frac{15}{4}\right) = -\frac{225}{4}\pi + \frac{450}{4}\pi = \frac{225}{4}\pi$$

۲۴۲. گزینه ۲: یا انتخاب نقطه‌ی $A(a, a^2 - 3a + 3)$ به طول a روی سهمی به معادله‌ی $y = x^2 - 3x + 3$ و نقطه‌ی $B(a, \frac{-1-a}{2})$ به طول a روی خط به معادله‌ی $2y + x + 1 = 0$ (که معادل $y = \frac{-1-x}{2}$ است) طول AB را محاسبه می‌کنیم:

$$AB = \sqrt{(a-a)^2 + (a^2 - 3a + 3 - \frac{-1-a}{2})^2}$$

$$= \sqrt{(a^2 - \frac{5}{2}a + \frac{7}{2})^2} = |a^2 - \frac{5}{2}a + \frac{7}{2}| = a^2 - \frac{5}{2}a + \frac{7}{2}$$

توجه کنید که در عبارت درجه‌ی دوم $a^2 - \frac{5}{2}a + \frac{7}{2}$ داریم:

$$\Delta = (-\frac{5}{2})^2 - 4(1)(\frac{7}{2}) = \frac{25}{4} - 14 < 0$$

چون ضریب a^2 مثبت است، پس این عبارت همواره مثبت است. در نتیجه:

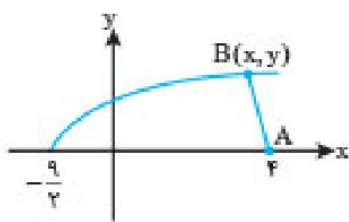
$$|a^2 - \frac{5}{2}a + \frac{7}{2}| = a^2 - \frac{5}{2}a + \frac{7}{2}$$

نمودار تابع قاصه‌ی AB یک سهمی است و به دلیل مثبت بودن ضریب a^2 ، مینیمم دارد

و مقدار این مینیمم به ازای $a = \frac{-(-\frac{5}{2})}{2(1)} = \frac{5}{4}$ به دست می‌آید؛ پس:

$$AB_{\min} = (\frac{5}{4})^2 - \frac{5}{2}(\frac{5}{4}) + \frac{7}{2} = \frac{25}{16} - \frac{25}{8} + \frac{7}{2} = \frac{-25}{16} + \frac{7}{2} = \frac{31}{16}$$

۲۴۳. گزینه ۳: شکل مقابل را در نظر می‌گیریم:



قاصه‌ی نقطه‌ی A تا B از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$AB = \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} \xrightarrow{y=\sqrt{2x+9}} AB = \sqrt{x^2 - 8x + 16 + 2x + 9}$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{x^2 - 6x + 25}$$

عبارت زیر رادیکال، یک سه‌جمله‌ای درجه‌ی دوم است که کمترین مقدار آن از رابطه‌ی

$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{36 - 4 \times 25}{4 \times 1} = 16 \Rightarrow \min(AB) = \sqrt{16} = 4$$

به دست می‌آید:

۲۴۴. گزینه ۲: اگر مختصات نقطه‌ی A را به صورت (x, y) در نظر بگیریم، یا توجه به شکل داریم:

$$\begin{cases} AB = y = (x-2)^2 \\ BC = x \end{cases}$$

اگر محیط مستطیل را یا P نمایش دهیم، داریم:

$$P = 2(AB + BC) = 2((x-2)^2 + x) = 2x^2 - 6x + 8$$

$$\min(P) = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-6)^2 - 4 \times 2 \times 8}{4 \times 2} = -\frac{28}{8} = \frac{7}{2} = 3.5$$

$$S = nh = n(\frac{1}{2}m) \Rightarrow S = \frac{1}{2}mn \xrightarrow[n=1-m]{m+n=1} S = \frac{1}{2}m(1-m)$$

$$S = \frac{1}{2}m(1-m) = \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}m^2 \xrightarrow{\text{مرتبه کن}} S = -\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m$$

نمودار تابع مساحت متوازی‌الاضلاع، معادله‌ی یک سهمی است و زمانی بیشترین مقدار

خود را اختیار می‌کند که $m = \frac{-b}{2a} = \frac{-\frac{1}{2}}{2(-\frac{1}{2})} = \frac{1}{4}$ باشد؛ پس:

$$S_{\max} = S(\frac{1}{4}) = -\frac{1}{2}(\frac{1}{4})^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{4}) = -\frac{1}{32} + \frac{1}{8} = \frac{3}{32}$$

$$S = mn \sin \theta \xrightarrow{\theta=90^\circ} S = mn \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}mn$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفی}} a + b = 11 \xrightarrow{\max(ab)} a = b = \frac{11}{2}$$

$$\xrightarrow{*} \max(S) = \frac{1}{2} \times \frac{11}{2} \times \frac{11}{2} = \frac{121}{8}$$

رنگی:

۲۳۸. گزینه ۳:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}x(12-x) = 6x - \frac{1}{2}x^2 = \max \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} = \frac{-6}{2(-\frac{1}{2})} = 6$$

$$S_{MNPQ} = \frac{m}{2}(3x-m) \xrightarrow{x=6} \frac{m}{2}(18-m) = 9m - \frac{1}{2}m^2 = \max$$

$$\Rightarrow m = -\frac{b}{2a} = \frac{-9}{2(-\frac{1}{2})} = 9$$

۲۳۹. گزینه ۳: محیط یا پیرامون پنجره برابر است با:

از طرفی مساحت پنجره که از مجموع مساحت‌های مستطیل و مثلث متساوی‌الاضلاع حاصل می‌شود، برابر است با:

$$S = xy + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

حالا از رابطه‌ی $2x + 2y = 4$ را بر حسب x یافته و در رابطه‌ی S جایگزین می‌کنیم:

$$2x + 2y = 4 \Rightarrow 2y = 4 - 2x \xrightarrow{y} y = 2 - x$$

$$\Rightarrow S = x(2 - x) + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

$$\xrightarrow{\text{مرتبه کن}} S = 2x - x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = (\frac{\sqrt{3}}{4} - 1)x^2 + 2x$$

$$\Rightarrow S = (\frac{\sqrt{3}-4}{4})x^2 + 2x \xrightarrow{\text{برای ماکزیمم شدن}} x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2(\frac{\sqrt{3}-4}{4})} = \frac{-4}{\sqrt{3}-4}$$

بنابراین:

$$S_{\max} = (\frac{\sqrt{3}-4}{4})\left(\frac{16}{(\sqrt{3}-4)^2}\right) + \frac{-8}{\sqrt{3}-4}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}-4} - \frac{8}{\sqrt{3}-4} = \frac{-4}{\sqrt{3}-4} = \frac{4}{4-\sqrt{3}}$$

$$\xrightarrow{\text{گویا کن}} \frac{4}{4-\sqrt{3}} \times \frac{4+\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}} = \frac{4(4+\sqrt{3})}{16-3} = \frac{4(4+\sqrt{3})}{13}$$

$$\Rightarrow S_{\max} = \frac{4}{13}(4+\sqrt{3})$$

۲۴۰. گزینه ۳: محیط یا پیرامون زمین از دو تا طول مستطیل $(2a)$ و دو تا محیط نیم‌دایره‌ای

به شعاع $\frac{b}{2}$ تشکیل شده است:

$$2a + \pi b = 600 \xrightarrow{\pi \approx 3} 2a + 3b = 600$$

از طرفی مساحت قسمت مستطیل شکل زمین تنیس برابر است با:

حال برای این که تابع مساحت مستطیل را فقط بر حسب یک پارامتر (مثلاً b) بنویسیم،

کافی است از رابطه‌ی $2a + 3b = 600$ مقدار a را بر حسب b یافته و در تساوی $S = ab$

جای گذاری کنیم:

$$2a + 3b = 600 \Rightarrow 2a = 600 - 3b \xrightarrow{a} a = 300 - \frac{3}{2}b$$

$$\Rightarrow S = ab = (300 - \frac{3}{2}b)b \Rightarrow S = -\frac{3}{2}b^2 + 300b$$

$$\xrightarrow{\text{برای حداکثر شدن } S} b = \frac{-300}{2(-\frac{3}{2})} = \frac{300}{3} = 100 \text{ m} \Rightarrow a = 300 - \frac{3}{2}(100)$$

$$\Rightarrow a = 150 \text{ m} \Rightarrow S_{\max} = 150 \text{ m} \times 100 \text{ m} = 15000 \text{ m}^2$$



$$\begin{aligned} \frac{x^5}{f} \rightarrow \frac{9}{f} &= \alpha^2 - 6\alpha + 5 \Rightarrow \alpha^2 - 6\alpha + \frac{11}{f} = 0 \\ \Delta = 36 - 11 = 25 \Rightarrow \alpha &= \frac{6 \pm 5}{2 \times 1} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \text{ یا } \frac{11}{2} = 5/5 \end{aligned}$$

که با توجه به شکل $\alpha = 5/5$ قابل قبول است.

۲۴۹. (گزینه ۴) نمودار سهمی از مبدأ مختصات گذشته است. پس نقطه‌ی $(0, 0)$ در معادله‌ی آن صدق می‌کند؛ یعنی:

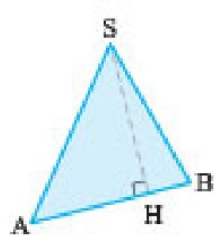
$$f(0) = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow f(x) = ax^2 - 1 \cdot ax$$

$$\Rightarrow x_S = \frac{-(-1 \cdot a)}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow S(5, 25) \Rightarrow f(5) = 25$$

$$\Rightarrow a(5)^2 - 1 \cdot a \times 5 = 25 \Rightarrow -25a = 25 \Rightarrow a = -1$$

پس ضابطه‌ی تابع f و معادله‌ی خط به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} y = f(x) = -x^2 + 10x \\ y = x - 22 \end{cases}$$



$$S = \frac{1}{2} SH \times AB$$

نقاط A و B از تلاقی سهمی و خط به دست می‌آیند؛ پس:

$$-x^2 + 10x = x - 22 \Rightarrow x^2 - 9x - 22 = 0 \Rightarrow (x - 11)(x + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_B = 11 \xrightarrow{\text{در معادله‌ی خط}} y_B = -11 \\ x_A = -2 \xrightarrow{\text{در معادله‌ی خط}} y_A = -24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} B(11, -11) \\ A(-2, -24) \end{Bmatrix} \Rightarrow AB = \sqrt{(11+2)^2 + (-11+24)^2}$$

$$= \sqrt{13^2 + 13^2} = 13\sqrt{2}$$

ارتفاع مثلث (SH) همان فاصله‌ی رأس سهمی از خط $x - y - 22 = 0$ است.

$$SH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \xrightarrow{S(5, 25)} SH = \frac{|5 - 25 - 22|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{42}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} SH \times AB = \frac{1}{2} \times \frac{42}{\sqrt{2}} \times 13\sqrt{2} = 21 \times 13 = 273$$

۲۵۰. (گزینه ۳) با توجه به شکل سؤال داریم:

$$DE \text{ شیب پاره‌خط } m = \tan 45^\circ = 1 \Rightarrow \frac{y_D - y_E}{x_D - x_E} = 1$$

D رأس سهمی است؛ پس:

$$x_D = \frac{-b}{2a} = \frac{b}{2} \Rightarrow y_D = f\left(\frac{b}{2}\right) = -\frac{b^2}{4} + b\left(\frac{b}{2}\right) + f = \frac{b^2}{4} + f$$

$$x_E = 0 \Rightarrow y_E = f(0) = f$$

همچنین:

با جای‌گذاری در * داریم:

$$\frac{\frac{b^2}{4} + f - f}{\frac{b}{2} - 0} = 1 \Rightarrow \frac{b}{2} = 1 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 2x + f$$

فاصله‌ی نقطه‌ی A تا محور x ‌ها برابر ارتفاع مثلث ABC است:

$$\text{ارتفاع مثلث} = y_A = y_E = f \Rightarrow h = f$$

قاعده‌ی مثلث (BC) است که B و C صفرهای سهمی هستند؛ پس:

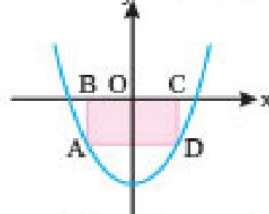
$$BC = x_C - x_B = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{f + 16}}{|-1|} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$S = \frac{1}{2} h \times BC = \frac{1}{2} \times f \times 2\sqrt{5} = f\sqrt{5}$$

۲۵۱. (گزینه ۴) ابتدا مختصات رأس سهمی هر دو تابع را می‌یابیم:

$$\begin{cases} f(x) = 2x^2 - mx + 3 \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{m}{4}, y_S = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{36 - m^2}{4 \times 2} \\ g(x) = 4x^2 - mx + f \Rightarrow x_S = \frac{m}{8}, y_S = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{64 - m^2}{4 \times 4} \end{cases}$$

۲۴۵. (گزینه ۳) با توجه به داده‌های مسئله، شکل مقابل را در نظر می‌گیریم:



اگر $OC = x$ و $DC = h$ فرض شود، محیط مستطیل

برابر است با:

$$P = 2(BC + DC) = 2(2x + h)$$

h مقداری مثبت است (عرض مستطیل)، مختصات نقطه‌ی D به صورت $(x, -h)$ است. از آنجایی که نقطه‌ی D روی سهمی است، مختصات نقطه‌ی D در معادله‌ی سهمی صدق می‌کند:

$$\begin{aligned} -h &= 2x^2 - 6 \Rightarrow h = 6 - 2x^2 \\ \Rightarrow P &= 2(2x + 6 - 2x^2) = -4x^2 + 4x + 12 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \max(P) = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4^2 - 4(-4)(12)}{4(-4)} = \frac{16(1+12)}{16} = 13$$

۲۴۶. (گزینه ۳) چون صورت کسر عدد ثابت ۵ است، موقعی بیشترین مقدار را دارد که مخرجش کمترین مقدار را داشته باشد؛ چون طبق فرض سؤال بیشترین مقدار تابع برابر ۱ است پس باید کمترین مقدار مخرج ۵ باشد و به عبارتی باید کمترین مقدار عبارت زیر رادیکال ۲۵ باشد. عبارت زیر رادیکال، درجه‌ی دوم است و می‌دانیم که کمترین مقدار عبارت‌های درجه دو

از دستور $-\frac{\Delta}{4a}$ به دست می‌آید؛ پس:

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta}{4a} &= 25 \Rightarrow \Delta + 10 \cdot a = 0 \Rightarrow (-8)^2 - 4 \times m \times 29 + 10 \cdot m = 0 \\ \Rightarrow 16 - 76m + 25m &= 0 \Rightarrow 16 = 51m \Rightarrow m = \frac{16}{51} = \frac{8}{25.5} \\ \Rightarrow [m] &= 1 \end{aligned}$$

۲۴۷. (گزینه ۱) ابتدا مختصات رأس سهمی g را می‌یابیم:

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-6}{2(-1)} = 3 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در } y} y = -3^2 + 6 \times 3 - 18 = -9 \Rightarrow S(3, -9)$$

حال شکل فرضی زیر را مطابق با داده‌های تست در نظر می‌گیریم:

می‌دانیم خطی که از رأس سهمی می‌گذرد، محور تقارن سهمی است؛ پس:

$$\begin{aligned} 3 &= \frac{\alpha + \beta}{2} \Rightarrow \alpha + \beta = 6 \quad (1) \\ \beta - \alpha &= 8 \quad (2) \\ \begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 7 \end{cases} \end{aligned}$$

با داشتن α و β ، معادله‌ی سهمی f به صورت زیر قابل بیان است:

$$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta) = a(x + 1)(x - 7)$$

مختصات نقطه‌ی $S(3, -9)$ در تابع f صدق می‌کند؛ پس:

$$\begin{aligned} f(3) &= -9 \Rightarrow a(4)(-4) = -9 \Rightarrow a = \frac{9}{16} \Rightarrow f(x) = \frac{9}{16}(x + 1)(x - 7) \\ \xrightarrow{\text{تلاقی با محور } y} f(0) &= \frac{9}{16}(1)(-7) = \frac{-63}{16} \end{aligned}$$

۲۴۸. (گزینه ۳) با توجه به شکل $f(1) = g(1) = f(5) = g(5)$ است. اگر $f(1) = \beta$ فرض

شود، آن‌گاه تابع f و g هر دو از دو نقطه‌ی $(1, \beta)$ و $(5, \beta)$ گذشته‌اند پس می‌توان ضابطه‌ی این دو تابع را به صورت مقابل نوشت:

$$\begin{cases} f(x) = a(x - 1)(x - 5) + \beta & (1) \\ g(x) = a'(x - 1)(x - 5) + \beta & (2) \end{cases}$$

با توجه به نمودارهای داده‌شده داریم:

$$\begin{cases} f(0) = 4 \Rightarrow a(0 - 1)(0 - 5) + \beta = 4 \Rightarrow 5a + \beta = 4 \\ g(0) = 0 \Rightarrow a'(-1)(-5) + \beta = 0 \Rightarrow 5a' + \beta = 0 \end{cases}$$

با کم کردن نظیر به نظیر طرفین رابطه‌ی بالا، داریم:

$$5a - 5a' = 4 \Rightarrow 5(a - a') = 4 \Rightarrow a - a' = \frac{4}{5} \quad (3)$$

با توجه به شکل داریم:

$$|AB| = y_A - y_B \xrightarrow{y_A = f(\alpha), y_B = g(\alpha)} 1/8 = f(\alpha) - g(\alpha)$$

با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} f(\alpha) = a(\alpha - 1)(\alpha - 5) + \beta \\ g(\alpha) = a'(\alpha - 1)(\alpha - 5) + \beta \end{cases} \Rightarrow f(\alpha) - g(\alpha) = (a - a')(\alpha - 1)(\alpha - 5)$$

$$\xrightarrow{(3)} f(\alpha) - g(\alpha) = \frac{4}{5}(\alpha - 1)(\alpha - 5)$$

$$\xrightarrow{1/8 = 1/5} \alpha = 1$$

۳۴۷ پاسخنامه‌ی تشریحی

نقطه‌ی تلاقی هر دو سهمی یا محور عرض‌ها، (-5) است؛ زیرا: $f(0) = g(0) = -5$
مختصات رأس سهمی دو تابع f و g هم برابر است یا:

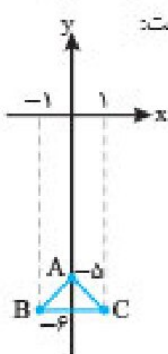
$$f(x) = x^2 - 2x - 5 \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\Rightarrow y_S = f(1) = -6 \Rightarrow B(1, -6)$$

$$g(x) = x^2 + 2x - 5 \Rightarrow x_S = \frac{-2}{2} = -1$$

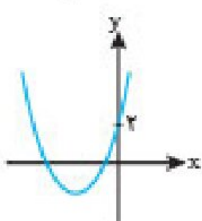
$$\Rightarrow y_S = g(-1) = -6 \Rightarrow C(-1, -6)$$

پس چندضلعی حاصل یک مثلث است که شکل آن به‌صورت مقابل است:



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$$

۲۵۶. (گزینه ۲) باید نمودار سهمی f به‌صورت مقابل باشد:



$$a - \frac{2}{a} > 0 \Rightarrow a > \frac{2}{a} \quad (1)$$

۲) سهمی دارای دو صفر یا طول‌های منفی است، یعنی: $\Delta > 0, S < 0, P > 0$

$$\Delta = 4(a-2)^2 - 4 \times 2(a - \frac{2}{a}) > 0 \xrightarrow{+4} a^2 - 6a + 4 - 2a + 2 > 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 8a + 6 > 0 \Rightarrow (a-2)(a-6) > 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} a < 2 \text{ یا } a > 6 \quad (2)$$

$$S = \frac{-b}{2a} \Rightarrow S = \frac{2(a-2)}{2(a - \frac{2}{a})} < 0 \xrightarrow{(1)} a - 2 < 0 \Rightarrow a < 2 \quad (3)$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{2}{a - \frac{2}{a}} > 0 \xrightarrow{(1)} \text{برقرار است}$$

$$(1) \cap (2) \cap (3) \Rightarrow \frac{2}{a} < a < 2 \quad (4)$$

معادله‌ی محور تقارن این سهمی به‌صورت زیر است:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{2(a-2)}{2(a - \frac{2}{a})} = \frac{(a-2) - \frac{2}{a}}{a - \frac{2}{a}} = 1 - \frac{\frac{2}{a}}{a - \frac{2}{a}} = 1 - \frac{2}{a^2 - 2}$$

حالا با توجه به (۴)، حدود تغییرات محور تقارن سهمی را می‌دانیم:

$$\frac{2}{a} < a < 2 \xrightarrow{\times 2} 2 < 2a < 4 \Rightarrow 2a - 2 < 2 \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{2a-2} > 1$$

$$\xrightarrow{\times (-2)} \frac{-2}{2a-2} < -2 \xrightarrow{+1} 1 - \frac{2}{2a-2} < -2 \Rightarrow x_S \in (-\infty, -2)$$

🌟 **زنگی:** اگر $a = \frac{2}{a}$ شود، نمودار f اصلاً درجه ۲ نخواهد بود و سهمی نیست

و محور تقارن و... نخواهد داشت! پس گزینه‌های شامل $\frac{2}{a}$ غلط هستند. حذف گزینه‌های «۱» و «۴».



$$a = 2 \xrightarrow{\text{در معادله}} f(x) = \frac{2}{2}x^2 + 2 \xrightarrow{\text{شکل تقریبی}}$$

این سهمی از ناحیه‌های سوم و چهارم عبور نمی‌کند! پس **گزینه ۳** هم غلط!

برای این که رأس هر دو سهمی در یک ناحیه باشند باید طول و عرض آن‌ها دویهدو هم‌علامت باشند یا شرط $\frac{m}{a} \neq 0$ و $\frac{m}{a}$ هم‌علامت هستند پس کافی است عرض رأس هر دو سهمی هم‌علامت باشند؛ بنابراین:

$$(\frac{26-m^2}{12})(\frac{64-m^2}{16}) > 0 \Rightarrow (26-m^2)(64-m^2) > 0$$



$$\xrightarrow{\text{جواب نامعادله}} m \in (-\infty, -8) \cup (-6, 6) \cup (8, +\infty)$$

پس مجموعه مقادیر m شامل بازه‌های $[-8, -6]$ و $[6, 8]$ نمی‌باشد که در این دو بازه ۶ عدد صحیح وجود دارد. دقت کنید اگر $m = 0$ باشد، رأس سهمی روی محور عرض‌ها قرار می‌گیرد که مطلوب سؤال نیست.

۲۵۲. (گزینه ۱) در سهمی اگر دو نقطه با عرض یکسان وجود داشته باشد، طول رأس سهمی (خط تقارن سهمی) وسط آن دو نقطه خواهد بود؛ پس:

$$x_S = \frac{-b}{2a} \Rightarrow \frac{(2-\sqrt{5}) + (2+\sqrt{5})}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2} \Rightarrow \alpha+\beta=6 \quad *$$

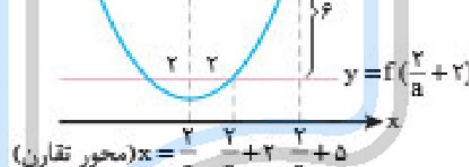
$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow \alpha\beta = \frac{2\beta}{1} \xrightarrow{\beta \neq 0} \alpha = 2 \xrightarrow{*} \beta = 2$$

$$\Rightarrow g(x) = 2x^2 - 8x + 2 \Rightarrow \min(g) = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$= -\frac{64 - 4 \times 2 \times 2}{4 \times 2} = -\frac{48}{8} = -6$$

۲۵۳. (گزینه ۳) یا توجه به داده‌های

مسئله، شکل فرضی مقابل را در نظر می‌گیریم:



ضابطه‌ی سهمی را به‌صورت مربع کامل می‌نویسیم:

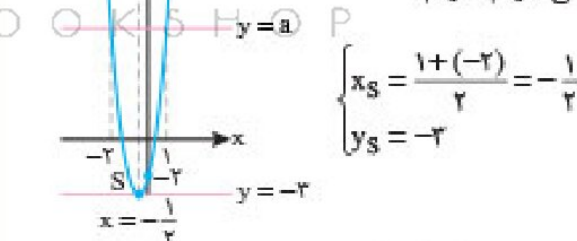
$$f(x) = a(x - \frac{2}{a})^2 + 2 - \frac{4}{a}$$

$$\begin{cases} f(\frac{2}{a} + 5) = a(\frac{2}{a} + 5 - \frac{2}{a})^2 + 2 - \frac{4}{a} = 25a + 2 - \frac{4}{a} \\ f(\frac{2}{a} + 2) = a(\frac{2}{a} + 2 - \frac{2}{a})^2 + 2 - \frac{4}{a} = 4a + 2 - \frac{4}{a} \end{cases}$$

$$f(\frac{2}{a} + 5) - f(\frac{2}{a} + 2) = 6 \Rightarrow 21a = 6 \Rightarrow a = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

۲۵۴. (گزینه ۴) یا توجه به اطلاعات داده‌شده در تست،

شکل فرضی مقابل را در نظر می‌گیریم؛ داریم:



حالا با داشتن مختصات رأس سهمی، معادله‌ی آن را می‌نویسیم:

$$f(x) = k(x + \frac{1}{2})^2 - 3 \xrightarrow{\text{از نمودار}} f(0) = -2$$

$$\Rightarrow k(0 + \frac{1}{2})^2 - 3 = -2$$

$$\Rightarrow \frac{k}{4} = 1 \Rightarrow k = 4 \Rightarrow f(x) = 4(x + \frac{1}{2})^2 - 3$$

$$\xrightarrow{\text{از نمودار}} f(1) = a \Rightarrow 4(1 + \frac{1}{2})^2 - 3 = a \Rightarrow a = 6$$

۲۵۵. (گزینه ۱) ابتدا عبارت $x^4 - 14x^2 + 25$ را به دو عبارت درجه‌ی دوم، تجزیه می‌کنیم:

$$(f \cdot g)(x) = x^4 - 14x^2 + 25 = (x^2 - 10x + 25) - 4x^2$$

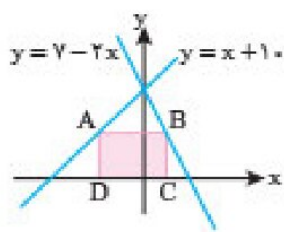
$$= (x^2 - 5) - (2x)^2 = (x^2 - 5 - 2x)(x^2 - 5 + 2x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = x^2 - 2x - 5 \\ g(x) = x^2 + 2x - 5 \end{cases}$$



$$\Rightarrow x+2=\pm 6 \Rightarrow \begin{cases} x_C=4 \\ x_D=-8 \end{cases} \Rightarrow DC=x_C-x_D=12$$

$$S_{ABCD}=\frac{AB+DC}{2} \times h=\frac{4\sqrt{2}+12}{2} \times 7=7(2\sqrt{2}+6)=14(\sqrt{2}+3)$$



۲۵۹. گزینه ۱) طبق فرض شکل رسم می‌کنیم و طول نقطه‌ی A را برابر α و طول نقطه‌ی B را برابر β می‌گیریم:

$$\begin{cases} A(\alpha, \alpha+1) \\ B(\beta, 7-2\beta) \end{cases}$$

عرض نقاط A و B یا هم برابر است، بنابراین داریم:

$$\alpha+1=7-2\beta \Rightarrow \alpha=-2\beta-2$$

مساحت مستطیل ABCD برابر است با:

$$S=|AB| \times |BC|$$

$$|AB|=x_B-x_A=\beta-\alpha \stackrel{*}{=} \beta-(-2\beta-2)=3\beta+2$$

$$|BC|=y_B=7-2\beta$$

$$\Rightarrow S=(3\beta+2)(7-2\beta)=-6\beta^2+15\beta+14$$

$$\max(S)=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{(15)^2-4 \times (-6) \times 14}{4 \times (-6)}$$

$$=-\frac{15 \times 15 + 24 \times 14}{-24} = \frac{2(5 \times 15 + 8 \times 21)}{24} = \frac{75 + 168}{8} = \frac{243}{8}$$

۲۶۰. گزینه ۴) باید معادله‌ی تلاقی دو تابع دارای ریشه‌ی مضاعف ۲ باشد پس ابتدا دو تابع را تلاقی می‌دهیم:

$$\frac{2x+a}{x-a} = b-9x \xrightarrow{\text{طرفین بسطین}} 2x+a = bx-ab-9x^2+9ax$$

$$\xrightarrow{\text{معادله‌ی تلاقی}} 9x^2+(2-b-9a)x+a+ab=0$$

$$\xrightarrow{\text{حالتین معادله}} x_1=x_2=2$$

از رابطه‌ی بین ریشه‌ها داریم:

$$S=x_1+x_2 \Rightarrow \frac{-(2-b-9a)}{9} = 2+2 \Rightarrow -2+b+9a=36$$

$$\Rightarrow b=38-9a$$

$$P=x_1x_2 \Rightarrow \frac{a+ab}{9} = 2 \times 2 \Rightarrow a+ab=36$$

$$\xrightarrow{1, 2} a+a(38-9a)=36 \Rightarrow 39a-9a^2=36$$

$$\Rightarrow 9a^2-39a+36=0 \Rightarrow (3a)^2-13(3a)+36=0$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (3a-9)(3a-4)=0 \Rightarrow a=3, \frac{4}{3}$$

$$\begin{cases} a=3 \xrightarrow{1} b=38-27=11 \\ f(x)=\frac{2x+3}{x-3} \Rightarrow f(b)=f(11)=\frac{22+3}{11-3}=\frac{25}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=\frac{4}{3} \xrightarrow{1} b=38-9 \times \frac{4}{3}=26 \\ f(x)=\frac{2x+\frac{4}{3}}{x-\frac{4}{3}} \Rightarrow f(26)=\frac{52+\frac{4}{3}}{26-\frac{4}{3}}=\frac{160}{74}=\frac{80}{37} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=\frac{4}{3} \xrightarrow{2} b=38-9 \times \frac{4}{3}=26 \\ f(x)=\frac{2x+\frac{4}{3}}{x-\frac{4}{3}} \Rightarrow f(26)=\frac{52+\frac{4}{3}}{26-\frac{4}{3}}=\frac{160}{74}=\frac{80}{37} \end{cases}$$

۲۶۱. گزینه ۱) اگر صفرهای سهمی x_1 و x_2 باشد، معادله‌ی سهمی به صورت $y=a(x-(1+\sqrt{2}))(x-(1-\sqrt{2}))$ است:

$$y=a(x^2-2x-1)=ax^2-2ax-a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_S=-\frac{b}{2a}=\frac{-(-2a)}{2a}=1 \Rightarrow S(1, -2a) \\ y_S=f(1)=a-2a-a=-2a \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{در ناحیه‌ی اول است}} -2a > 0 \Rightarrow a < 0$$

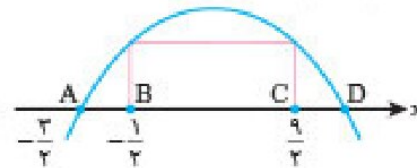
$$S(1, -2a) \xrightarrow{\text{صدق بد}} 1+2(-2a)^2=5 \Rightarrow 8a^2=4 \Rightarrow a=\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\xrightarrow{a < 0} a=-\frac{1}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{تلاقی یا محورهای در سهمی}} y=-a=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲۵۷. گزینه ۳) اگر ابعاد این مستطیل را با x و y نمایش دهیم، داریم:

$$x=\frac{9}{2}-(-\frac{1}{2})=5 \Rightarrow S=xy \Rightarrow 2/5=5y \Rightarrow y=\frac{2/5}{5}=\frac{1}{5}$$

پس عرض این مستطیل برابر $\frac{1}{5}$ بوده و در نتیجه $f(-\frac{1}{5})=\frac{1}{5}$ است.



به علت متقارن بودن سهمی و مستطیل، در شکل مقابل، اندازه‌ی AB و CD یا هم برابر بوده پس می‌توانیم طول نقطه‌ی D را بیابیم:

$$\Rightarrow |AB|=-\frac{1}{2}-(-\frac{9}{2})=4 \Rightarrow |CD|=4$$

$$\Rightarrow x_D=-\frac{1}{2}+4=\frac{7}{2}$$

حالاً با معلوم بودن صفرهای تابع f یعنی $x=-\frac{3}{2}$ و $x=\frac{11}{2}$ ، معادله‌ی سهمی f را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$f(x)=a(x+\frac{3}{2})(x-\frac{11}{2}) \xrightarrow{f(-\frac{1}{2})=\frac{1}{5}} \frac{1}{5}=a(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2})(-\frac{1}{2}-\frac{11}{2})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}=a(1)(-6) \Rightarrow a=-\frac{1}{30}$$

$$\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{30}(x+\frac{3}{2})(x-\frac{11}{2})$$

و اما خواسته‌ی تست، برای پیدا کردن نقاط تلاقی دو سهمی، کافی است یا هم برابر

$$-\frac{1}{30}(x+\frac{3}{2})(x-\frac{11}{2})=x^2+2x-1$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{30}(x^2-4x-\frac{33}{2})=x^2+2x-1$$

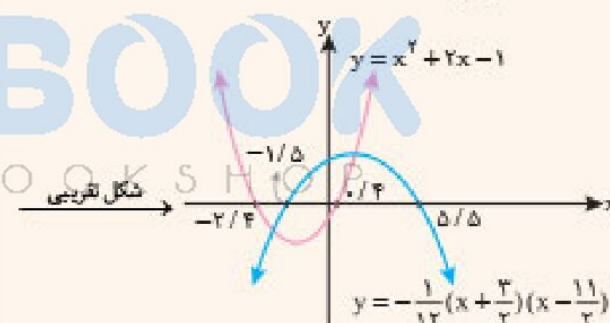
$$\Rightarrow -\frac{1}{30}x^2+\frac{1}{15}x+\frac{11}{60}=x^2+2x-1$$

$$\xrightarrow{\text{مربوط کن}} \frac{13}{30}x^2+\frac{29}{15}x-\frac{27}{10}=0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0$$

پس معادله‌ی تلاقی دارای دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت بوده و در نتیجه دو سهمی در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

$$y=x^2+2x-1 \Rightarrow \Delta=(2)^2-4(1)(-1)=8$$

$$\Rightarrow x_1, x_2=\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2(1)} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1+\sqrt{2} \approx +.41 \\ x_2=-1-\sqrt{2} \approx -2.41 \end{cases}$$



۲ تا جواب → نقاط تلاقی

۲۵۸. گزینه ۳) ابتدا معادله‌ی سهمی را می‌نویسیم:

$$S(-2, 2) \Rightarrow f(x)=a(x+2)^2+2 \xrightarrow{f(0)=1} a(0+2)^2+2=1 \Rightarrow 4a=-1$$

$$\Rightarrow a=-\frac{1}{4} \Rightarrow f(x)=-\frac{1}{4}(x+2)^2+2$$

برای محاسبه‌ی طول نقاط A و B باید معادله‌ی $f(x)=0$ و برای پیدا کردن طول نقاط C و D باید معادله‌ی $f(x)=-7$ را حل کنیم:

$$f(x)=0 \Rightarrow -\frac{1}{4}(x+2)^2+2=0 \Rightarrow (x+2)^2=8 \Rightarrow x+2=\pm 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x=-2 \pm 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_B=-2+2\sqrt{2} \\ x_A=-2-2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow AB=x_B-x_A=4\sqrt{2}$$

$$f(x)=-7 \Rightarrow -\frac{1}{4}(x+2)^2+2=-7 \Rightarrow \frac{1}{4}(x+2)^2=-9 \Rightarrow (x+2)^2=36$$

۳۴۹ پاسخنامه‌ی تشریحی

زنگی: در $f(1)$ گزینه‌های «۱» و «۴» به ترتیب می‌شود «۴» و صفر پس این گزینه‌ها حذف می‌شوند.

گزینه ۲: $y = x^2 + 2x + 1$ رأس $x = -1$

۲۶۷. (گزینه ۱) نمودار تابع داده شده یک سهمی است و می‌دانیم که هر سهمی نسبت به محور تقارن خود (یعنی خط $x_S = \frac{-b}{2a}$) قرینه است. بنابراین ابتدا رابطه‌ی داده شده بین صفرهای تابع را به یک رابطه‌ی ساده‌تر تبدیل می‌کنیم؛ سپس محورهای تقارن نمودار تابع را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2 &= 56 \\ \xrightarrow{\text{انتقاد و بازکن}} (\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta) + (\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta) \\ &= 2\alpha^2 + 2\beta^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2) = 56 \xrightarrow{+2} \alpha^2 + \beta^2 = 28 \\ \Rightarrow S^2 - 2P = 28 \xrightarrow{S=b, P=-3b^2} b^2 + 6b^2 = 28 \Rightarrow 7b^2 = 28 \\ \xrightarrow{+2} b^2 = 4 \xrightarrow{\text{جذر}} b = \pm\sqrt{4} \Rightarrow b = 2 \text{ یا } b = -2 \\ b = 2: f(x) = x^2 - 2x - 12 \xrightarrow{\text{محور تقارن}} x_S = \frac{-(-2)}{2(1)} = 1 \\ \text{یا} \\ b = -2: f(x) = x^2 + 2x - 12 \xrightarrow{\text{محور تقارن}} x_S = \frac{-2}{2(1)} = -1 \end{aligned}$$

زنگی:

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2 &= S^2 + (\sqrt{S^2 - 4P})^2 = 1S^2 - 4P = 56 \\ \xrightarrow{\text{طبق } f} 2b^2 + 12b^2 &= 56 \Rightarrow b = \pm 2 \end{aligned}$$

۲۶۸. (گزینه ۱) اگر صفرهای تابع f را α و β در نظر بگیریم و $\alpha > \beta$ باشد، آن گاه داریم:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y_A = f(0) = 0 + 0 - 2a \Rightarrow A(0, -2a) \\ B(\beta, 0), C(\alpha, 0) \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} m_{AB} = \frac{0 + 2a}{\beta - 0} \\ m_{AC} = \frac{0 + 2a}{\alpha - 0} \end{cases} \xrightarrow{\text{شرط عمود بودن}} m_{AB} \times m_{AC} = -1 \Rightarrow \left(\frac{2a}{\beta}\right) \left(\frac{2a}{\alpha}\right) = -1 \\ \Rightarrow \frac{4a^2}{\alpha\beta} = -1 \xrightarrow{\alpha\beta = \frac{c}{a}} \frac{4a^2}{-2a} = -1 \Rightarrow \frac{4a^2}{-2a} = -1 \Rightarrow \frac{2a}{-1} = -1 \\ \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 2 \end{aligned}$$

و اما خواسته‌ی سؤال:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{S}{P} = \frac{-b}{\frac{c}{a}} = \frac{-b}{c} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

۲۶۹. (گزینه ۱) صورت کسر عددی ثابت است، پس برای پیدا کردن بیشترین مقدار تابع f کافی است، کمترین مقدار مخرج را بیابیم. مخرج تابع f یک سهمی است؛ بنابراین:

$$\begin{aligned} y &= (x-1)^2 + 4x + 7 = x^2 - 2x + 1 + 4x + 7 = x^2 + 2x + 8 \\ \Rightarrow \min(y) &= \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(4 - 4(8))}{4 \times 1} = \frac{28}{4} = 7 \\ \Rightarrow \max(f) &= \frac{28}{4} = 7 \end{aligned}$$

۲۷۰. (گزینه ۲) برای این که نمودار سهمی $y = f(x)$ بر محور x ها مماس باشد، باید معادله‌ی $f(x) = 0$ دارای ریشه‌ی مضاعف باشد، یعنی باید معادله‌ی $f(x) = 0$ دو ریشه‌ی یکسان داشته باشد:

$$(ax + 9)(-2x + 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} ax + 9 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{9}{a} \\ -2x + 6 = 0 \Rightarrow x_2 = 3 \end{cases} \xrightarrow{x_1 = x_2} -\frac{9}{a} = 3 \Rightarrow a = -3$$

۲۷۱. (گزینه ۲)

$$y = ax^2 + 2x + c \xrightarrow{\text{معادله‌ی محور تقارن}} x = \frac{-2}{2a} = -1 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

۲۶۲. (گزینه ۱) ابتدا ضابطه‌ی تابع داده شده را با باز کردن اتحادها ساده می‌کنیم تا به فرمی شناخته شده برسیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - (x-1)^2 + (x+2)^2 + m \\ &= x^2 - (x^2 - 2x + 1) + (x^2 + 4x + 4) + m \\ &= x^2 - x^2 + 2x - 1 + x^2 + 4x + 4 + m \Rightarrow f(x) = x^2 + 6x + 3 + m \\ x_S &= \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2} = -3 \\ \xrightarrow{a=1} y_{\min} &= y(-3) = (-3)^2 + 6(-3) + 3 + m = 9 - 18 + 3 + m \\ &= -6 + m = 7 \Rightarrow m = 13 \end{aligned}$$

۲۶۳. (گزینه ۳) $\frac{m}{m+1}$ و $\frac{m}{m-1}$ صفرهای سهمی f همان ریشه‌های معادله‌ی $f(x) = 0$ هستند پس:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - fax + fa - 3 = 0 \\ \Rightarrow S = x_1 + x_2 &= \frac{-b}{a} \Rightarrow \frac{m}{m-1} + \frac{m}{m+1} = fa \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{2m^2}{m^2-1} = fa \\ \xrightarrow{+2} \frac{m^2}{m^2-1} &= fa \quad (1) \end{aligned}$$

همچنین:

$$\begin{aligned} P = x_1 x_2 &= \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{m}{m-1} \times \frac{m}{m+1} = fa - 3 \Rightarrow \frac{m^2}{m^2-1} = fa - 3 \quad (2) \\ \xrightarrow{(1)} 2a &= fa - 3 \Rightarrow a = \frac{f}{2} \xrightarrow{(2)} \frac{m^2}{m^2-1} = f \times \frac{f}{2} - 3 \Rightarrow \frac{m^2}{m^2-1} = f \\ \Rightarrow m^2 &= 2m^2 - 3 \Rightarrow 2m^2 = 3 \Rightarrow m^2 = \frac{3}{2} \quad (3) \\ a = \frac{f}{2} \Rightarrow f(x) &= x^2 - 6x + 3 \Rightarrow f(m^2) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{3}{2}\right) + 3 \\ &= \frac{9}{4} - 9 + 3 = \frac{-15}{4} = -3 \frac{3}{4} \end{aligned}$$

۲۶۴. (گزینه ۳) چون عرض نقاط A و B یا هم برابر است، پس خط تقارن سهمی از وسط پاره خط AB می‌گذرد؛ بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow k = \frac{(2k+1) + (k-3)}{2} \\ \Rightarrow 2k &= 2k - 2 \Rightarrow k = 2 \\ \Rightarrow A(-1, 5) &\Rightarrow AB = 5 - (-1) = 6 \\ B(5, 5) \end{aligned}$$

۲۶۵. (گزینه ۴) برای محاسبه‌ی مساحت مثلث مورد نظر، ابتدا باید قاعده و سپس ارتفاع آن را به دست آوریم. قاعده همان فاصله‌ی بین دو ریشه و ارتفاع هم قدرمطلق عرض رأس سهمی است. مجموع ضرایب معادله‌ی $2x^2 - mx + m - 2 = 0$ برابر صفر است، پس ریشه‌های آن عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m-2}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{قاعده‌ی مثلث} &= |x_2 - x_1| = \left| \frac{m-2}{2} - 1 \right| \\ \text{عرض رأس سهمی} &= -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-m)^2 - 4 \times 2(m-2)}{4 \times 2} \\ &= -\frac{m^2 - 8m + 16}{8} = \frac{(m-4)^2}{-8} \\ \text{ارتفاع} &= \left| \frac{(m-4)^2}{-8} \right| = \frac{(m-4)^2}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{مساحت مثلث} &= \frac{1}{2} \times \frac{(m-4)^2}{8} \times \frac{|m-4|}{2} = \frac{|m-4|^3}{32} = 2 \Rightarrow |m-4|^3 = 64 \\ \Rightarrow |m-4| &= 4 \Rightarrow m-4 = \pm 4 \Rightarrow m = 0 \text{ یا } m = 8 \end{aligned}$$

۲۶۶. (گزینه ۳) اگر α و β را ریشه‌ها یا همان محل تلاقی سهمی با محور x ها فرض کنیم $(\alpha < \beta)$ ، بر اساس فرض تست $\beta - \alpha = 4$ است.

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{\alpha + \beta}{2} \xrightarrow{S(1,1)} \frac{\alpha + \beta}{2} = 1 \Rightarrow \alpha + \beta = 2 \xrightarrow{\beta - \alpha = 4} 2\beta = 6 \Rightarrow \beta = 3 \\ \xrightarrow{\alpha + \beta = 2} \alpha &= -1 \end{aligned}$$

بنابراین یا توجه به ریشه‌های $\alpha = -1$ و $\beta = 3$ ، معادله‌ی سهمی به صورت $y = a(x+1)(x-3)$ قابل بیان است. برای تعیین پارامتر a کافی است مختصات رأس $S(1,1)$ را در آن صبق دهیم:

$$\begin{aligned} 1 &= a(1+1)(1-3) \Rightarrow a = \frac{-1}{2} \Rightarrow y = \frac{-1}{2}(x+1)(x-3) \\ \Rightarrow y &= \frac{-1}{2}(x^2 - 2x - 3) = \frac{-1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \end{aligned}$$



طول رأس سهمی $y = m(x - \alpha + 1)^2 + \alpha + 1$ برابر میانگین $x = 1$ و $x = 3$ است یعنی $x_s = \frac{3+1}{2} = 2$. از طرفی طول رأس سهمی $x_s = \alpha - 1$ است؛ پس $\alpha = 3$.

$y = m(x - 2 + 1)^2 + 2 + 1 \Rightarrow y = m(x - 1)^2 + 3$
مختصات یکی از دو نقطه‌ی $(1, 1)$ یا $(3, 1)$ را در معادله‌ی سهمی جای گذاری می‌کنیم تا مقدار m بدست آید. $1 = m(1 - 1)^2 + 3 \Rightarrow m = -3$

۲۷۵. گزینه ۱ عرض نقطه‌ی رأس سهمی $y = ax^2 + 3x + a$ را محاسبه می‌کنیم و برابر $\frac{9}{4}$ می‌گذاریم:
 $y_{min} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{9 - 4a^2}{4a} = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{4a^2 - 9}{4a} = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{4a^2 - 9}{4a} = \frac{9}{4}$

$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 4a^2 - 9 = 9a \Rightarrow 4a^2 - 9a - 9 = 0$
 $\Rightarrow \frac{1}{4}(4a - 16)(a + 9) = 0 \Rightarrow a = 4$ یا $a = -\frac{9}{4}$

یا توجه به این که سهمی دارای کمترین مقدار است؛ پس ضریب x^2 مقداری مثبت و برابر ۴ است.

۲۷۶. گزینه ۲ در سهمی اول داریم:
 $y_1 = -ax^2 + ax + 2 \xrightarrow{\text{طول رأس سهمی اول}} x = \frac{-a}{2(-a)} = \frac{1}{2}$

$y_1 = -a(\frac{1}{2})^2 + a(\frac{1}{2}) + 2 = \frac{1}{4}a + 2 \Rightarrow S_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}a + 2)$
و برای سهمی دوم:

$y_2 = 2bx^2 - bx - 1 \xrightarrow{\text{طول رأس سهمی دوم}} x = \frac{-(-b)}{2(2b)} = \frac{1}{4}$
 $y_2 = 2b(\frac{1}{4})^2 - b(\frac{1}{4}) - 1 = -\frac{1}{8}b - 1 \Rightarrow S_2(\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}b - 1)$

طبق فرض تسته مختصات رأس سهمی هر تابع، در تابع دیگر صدق می‌کند؛ پس:

$S_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}a + 2) \xrightarrow{\text{در سهمی دوم}} \frac{1}{4}a + 2 = 2b(\frac{1}{4})^2 - b(\frac{1}{4}) - 1$
 $\Rightarrow \frac{1}{4}a + 2 = \frac{1}{8}b - \frac{1}{4}b - 1 \Rightarrow \frac{1}{4}a = -\frac{3}{4}b - 3 \Rightarrow a = -3b - 12$

$S_2(\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}b - 1) \xrightarrow{\text{در سهمی اول}} -\frac{1}{8}b - 1 = -a(\frac{1}{4})^2 + a(\frac{1}{4}) + 2$
 $\Rightarrow -\frac{1}{8}b - 1 = \frac{a}{4} - \frac{a}{4} + 2 \Rightarrow -\frac{1}{8}b - 1 = 2 \Rightarrow -\frac{1}{8}b = 3 \Rightarrow b = -24$
 $\Rightarrow b - a = -24 - (-12) = -12$

۲۷۷. گزینه ۱ طول نقطه‌ی رأس سهمی، میانگین طول‌های دو نقطه‌ی هم‌عرض روی سهمی، یعنی $(1, \beta)$ و $(-5, \beta)$ است:
 $x_s = \frac{-5+1}{2} = -2$

یا توجه به عرض نقطه‌ی رأس سهمی که $-\frac{1}{4}$ است، مختصات نقطه‌ی رأس $S(-2, -\frac{1}{4})$ و ضابطه‌ی آن $y = a(x + 2)^2 - \frac{1}{4}$ است. می‌دانیم که نمودار سهمی از نقطه‌ی $(0, \frac{3}{4})$ عبور می‌کند؛ پس:

$\frac{3}{4} = a(0 + 2)^2 - \frac{1}{4} \Rightarrow 2 = 4a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$
یا مشخص شدن مقدار پارامتر a ضابطه‌ی نهایی سهمی $y = \frac{1}{2}(x + 2)^2 - \frac{1}{4}$ است و با جای گذاری $x = 1$ (یا $x = -5$) در ضابطه، مقدار β بدست می‌آید:

$\beta = \frac{1}{2}(1 + 2)^2 - \frac{1}{4} = \frac{9}{2} - \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$
۲۷۸. گزینه ۳ می‌دانیم شرط آن که خطی بر نمودار تابعی مماس باشد آن است که معادله‌ی تلاقی آن‌ها دارای ریشه‌ی مضاعف باشد؛ پس:

$\begin{cases} y = 3x^2 + (2m - 1)x + m + \frac{4}{3} \\ y = -x \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} 3x^2 + (2m - 1)x + m + \frac{4}{3} = -x$
 $\xrightarrow{\text{ساده‌کن}} 3x^2 + (2m)x + m + \frac{4}{3} = 0$

$\xrightarrow{\text{شرط ریشه‌ی مضاعف}} \Delta = 0$
 $\Rightarrow 4m^2 - 4 \times 2(m + \frac{4}{3}) = 0 \Rightarrow m^2 - 2m - \frac{4}{3} = 0$

$\Rightarrow (m - 4)(m + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -1 \end{cases}$

یا توجه به فرض سؤال، نتیجه می‌گیریم $y_s = 1$ است، بنابراین داریم:

$$y_s = \frac{-\Delta}{4a} = 1 \Rightarrow -\Delta = 4a \Rightarrow \Delta + 4a = 0 \Rightarrow (9 - 4 \times \frac{3}{4} \times c) + 4 \times \frac{3}{4} = 0$$

$$9 - 6c + 6 = 0 \Rightarrow 6c = 15 \Rightarrow c = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

$\Rightarrow ac = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8} = 3 / 75$
۲۷۲. گزینه ۳ برای این که تابع درجه دو دارای ماکزیمم باشد، باید دهانه‌ی سهمی رو به پایین باشد؛ یعنی:

$$a = 1 - 18m < 0 \Rightarrow m > \frac{1}{18}$$

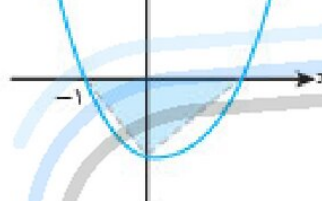
$$x_{max} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_s = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -b$$

$$\Rightarrow 1 - 18m = m^2 + 1 \Rightarrow m^2 + 18m = 0 \Rightarrow m(m + 18) = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ یا } -18$$

$\xrightarrow{m > \frac{1}{18}} m$ وجود ندارد

۲۷۳. گزینه ۳ در معادله‌ی $mx^2 - 4x - (m + 4) = 0$ مجموع ضرایب $a + c$ برابر ضریب b است؛ بنابراین جواب‌های آن $x_1 = -1$ و $x_2 = -\frac{c}{a} = \frac{m + 4}{m}$ است.

اکنون نمودار فرضی را با توجه به جواب‌ها و علامت فرضی $m > 0$ رسم می‌کنیم:



بنابراین اندازه‌ی قاعده‌ی مثلث ایجادشده برابر است با:

$$|x_2 - x_1| = |\frac{m + 4}{m} - (-1)| = |\frac{2m + 4}{m}|$$

عرض از مبدأ سهمی $c = -(m + 4)$ است؛ بنابراین اندازه‌ی ارتفاع مثلث را می‌توان $|m + 4|$ در نظر گرفت. یا توجه به فرض، مساحت مثلث برابر ۳ است.

$$S = \frac{1}{2} |m + 4| \times |\frac{2m + 4}{m}| = 3 \Rightarrow |m + 4| \times |\frac{2m + 4}{m}| = 6$$

$$\Rightarrow |(m + 4)(\frac{2m + 4}{m})| = 6$$

$$\textcircled{1} (m + 4)(\frac{2m + 4}{m}) = 6 \Rightarrow (m + 4)(m + 2) = 3m$$

$$\Rightarrow m^2 + 6m + 8 = 3m \Rightarrow m^2 + 3m + 8 = 0$$

معادله جواب حقیقی ندارد. $\Delta < 0$

$$\textcircled{2} (m + 4)(\frac{2m + 4}{m}) = -6 \Rightarrow (m + 4)(m + 2) = -3m$$

$$\Rightarrow m^2 + 6m + 8 = -3m \Rightarrow m^2 + 9m + 8 = 0$$

$$\Rightarrow (m + 1)(m + 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -8 \end{cases}$$

به ازای $m = -1$ و $m = -8$ ، ضابطه‌ی سهمی را بازنویسی می‌کنیم:

$$y = mx^2 - 4x - (m + 4) \xrightarrow{m = -1} y = -x^2 - 4x - 3$$

$$\Rightarrow x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = -2$$

$$y = mx^2 - 4x - (m + 4) \xrightarrow{m = -8} y = -8x^2 - 4x + 4$$

$$\Rightarrow x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-8)} = \frac{1}{4}$$

اختلاف طول رأس سهمی‌ها $|\frac{1}{4} - (-2)| = \frac{9}{4}$ است.

۲۷۴. گزینه ۳ مؤلفه‌های نقاط A و B صحیح و مثبت هستند؛ پس:

$$2b + 1 > 0 \Rightarrow b > -\frac{1}{2}$$

$$2b - 1 > 0 \Rightarrow b > \frac{1}{2}$$

$$2b - b^2 > 0 \Rightarrow b(2 - b) > 0 \Rightarrow \frac{b}{b(2 - b)} \begin{matrix} - & + & - \end{matrix} \Rightarrow 0 < b < 2$$

اشتراک مجموعه جواب‌های بالا، به صورت $\frac{1}{2} < b < 2$ و تنها عدد صحیح قابل قبول در این بازه $b = 1$ است. مختصات نقاط A و B را تعیین می‌کنیم:

$$A(2b + 1, 2b - b^2) \stackrel{b=1}{=} A(3, 1)$$

$$B(2b - 1, 2b - b^2) \stackrel{b=1}{=} B(1, 1)$$

۳۵۱ پاسخنامه‌ی تشریحی

۲۸۳. (گزینه ۲)

$$\frac{x}{x^2+2} = \frac{2}{3x-2} \xrightarrow{\text{کافی شرط } x \neq \frac{2}{3} \text{ رو در نظر بگیریم}} x(3x-2) = 2(x^2+2)$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 2x = 2x^2 + 4 \xrightarrow{\text{مرتب سازی}} x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$\Delta = 4 + 16 = 20 > 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 2 \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -4 \end{cases} \quad (\text{بدون حل})$$

$$\Rightarrow \text{تست } \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P = 4 + 8 = 12$$

(کاملاً مشخص است که $\alpha, \beta \neq \frac{2}{3}$ است.)

۲۸۴. (گزینه ۱)

$$\frac{x^2-2x+3}{x^2-2x} - 1 = \frac{x}{x-2} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{x^2-2x+3-x^2+2x}{x^2-2x} = \frac{x}{x-2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{x(x-2)} = \frac{x}{x-2} \Rightarrow \frac{3}{x} = x \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

۲۸۵. (گزینه ۳) ابتدا طرفین معادله را در $(x-3)(x+4)$ یا شرط $x \neq 3, -4$ ضرب می‌کنیم:

$$(x-3)(x+4)\left(\frac{2x}{x-3} + \frac{x+1}{x+4}\right) = (x-3)(x+4)\left(\frac{x-1}{x-3}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب کن}} 2x(x+4) + (x+1)(x-3) = (x-1)(x+4)$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} 2x^2 + 8x + x^2 - 2x - 3 = x^2 + 3x - 4$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$2x^2 + 3x + 1 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = \frac{-c}{a} = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\alpha^2+1)(\beta^2+1) = (2)^2\left(\frac{\Delta}{4}\right)^2 = (2 \times \frac{\Delta}{4})^2 = \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 = \frac{\Delta^2}{4}$$

$$= \frac{2^2+1}{4} = 6 + \frac{1}{4} = 6 + 0.25 = 6.25$$

حتماً توجه کرده‌اید که در عبارت مقارنی مثل این تست فرقی نمی‌کند که α و β را جابه‌جا قرار دهیم!

۲۸۶. (گزینه ۳)

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک در دو طرف معادله}} \frac{x-1-x}{x(x-1)} = \frac{x+1-(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} \frac{-1}{x(x-1)} = \frac{3}{x^2-x-2}$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب و ساده کن}} 3x^2-3x = -x^2+x+2 \Rightarrow 4x^2-4x-2=0$$

$$\xrightarrow{+4} x^2-x-\frac{1}{2}=0 \xrightarrow{\text{به کمک دلتا و ریشه ها و پیدا کن}} x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4(-\frac{1}{2})}}{2 \times 1} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

چک در مخرج $x \neq 0, \pm 1, 2$

پس معادله، یک ریشه‌ی مثبت و یک ریشه‌ی منفی دارد.

۲۸۷. (گزینه ۴)

$$\frac{1}{x+2} - \frac{x^2-9x-2}{x^2+8} = \frac{6x}{x^2-2x+4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+2} - \frac{6x}{x^2-2x+4} = \frac{x^2-9x-2}{x^2+8}$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{x^2-2x+4-6x(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{x^2-9x-2}{x^2+8}$$

انحاد جاق و لاغر

$$\Rightarrow \frac{x^2-2x+4-6x^2-12x}{x^2+8} = \frac{x^2-9x-2}{x^2+8}$$

$$\Rightarrow -5x^2-14x+4 = x^2-9x-2 \xrightarrow{\text{مرتب کن}} 6x^2+5x-6=0$$

در معادله‌ی فوق $\frac{c}{a} < 0$ بوده و در نتیجه دارای دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت است؛ پس معادله، یک ریشه‌ی مثبت دارد.

تنها ریشه‌ی مخرج موجود در کسر ها، $x = -2$ است که به‌طور واضحی ریشه‌ی این معادله‌ی آخر نیست!

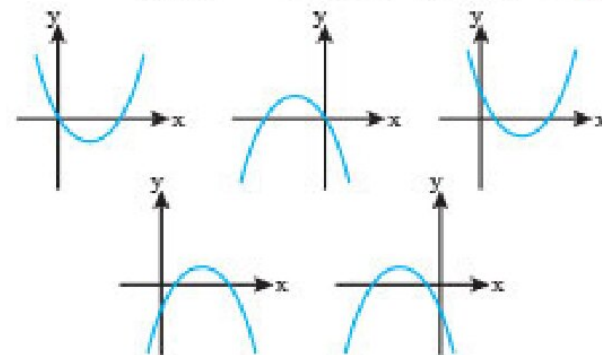
چون در ناحیه‌ی دوم هستیم، ریشه باید منفی باشد؛ پس $x = \frac{-b}{2a} < 0$ است؛ در نتیجه:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2m}{6} \xrightarrow{m>0} m = 6$$

$$y = 2x^2 + (2m-1)x + m + \frac{f}{2} \xrightarrow{m=6} y = 2x^2 + 7x + 16$$

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-7}{2 \times 2} = \frac{-7}{4}$$

۲۷۹. (گزینه ۱) باید نمودار تابع f به یکی از حالت‌های زیر باشد:



یعنی باید یکی از صفرهای سهمی صفر باشد یا هر دو صفر سهمی، هم‌علامت باشند؛ پس:

$$\Delta > 0, P \geq 0$$

$$\Delta = 16 - 4(2-m)(2m-1) > 0$$

$$\xrightarrow{+4} 4 - (2-m)(2m-1) > 0 \Rightarrow 4 - 6m + 2 + 2m^2 - m > 0$$

$$\Rightarrow 2m^2 - 7m + 7 > 0 \xrightarrow{\Delta = 49 - 56 = -9 < 0, a = 2 > 0} m \in \mathbb{R}$$

$$P = \frac{2m-1}{2-m} \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \frac{1}{2} \leq m < 2 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = 1, 2$$

۲۸۰. (گزینه ۳) نقطه‌ی دلخواه A را روی سهمی $y = 4x$ در نظر می‌گیریم. اگر طول این نقطه را a فرض کنیم، آن‌گاه:

فاصله‌ی نقطه‌ی $M(2, 0)$ از A برابر است با:

$$MA = \sqrt{(2-a)^2 + (0 \pm 2\sqrt{a})^2} = \sqrt{4 - 4a + a^2 + 4a} = \sqrt{a^2 - 2a + 4}$$

با مشتق‌گیری از این عبارت، اکستریم آن را می‌یابیم:

$$(MA)' = \frac{2a-2}{2\sqrt{a^2-2a+4}} = 0 \Rightarrow a = 1$$

بنابراین به ازای $a = 1$ ، فاصله‌ی A از M کمترین مقدار خود را دارد که آن را می‌یابیم:

$$\sqrt{(1)^2 - 2(1) + 4} = \sqrt{3} = 2\sqrt{2}$$

فصل ۴ معادله‌های گویا و رادیکالی

۲۸۱. (گزینه ۱)

$$\frac{x-2}{x+3} + \frac{x-2}{x+5} = 0 \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{(x-2)(x+5) + (x-2)(x+3)}{(x+5)(x+3)} = 0$$

صورت را مساوی صفر قرار

$$\xrightarrow{\text{فاکتوراز}} (x-2)(x+5+x+3) = 0$$

ساده کن

$$\xrightarrow{\text{حل کن}} \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ 2(x+4)=0 \Rightarrow x=-4 \end{cases}$$

مخرج را صفر نمی‌کنند $\Rightarrow$ چک کردن در مخرج

$$\Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها} = 2 + (-4) = -2$$

زنگی

$$\frac{x-2}{x+3} = -\frac{x-2}{x+5}$$

ساده صورت

$$\Rightarrow x=2, x+5 = -x-3 \Rightarrow x = -4$$

۲۸۲. (گزینه ۲) ابتدا مقدار a را می‌یابیم:

$$\frac{6-a}{3} = \frac{3}{a} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 6a - a^2 = 9 \Rightarrow a^2 - 6a + 9 = 0$$

$$\Rightarrow (a-3)^2 = 0 \Rightarrow a = 3$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله‌ی دوم}} \frac{3}{x} = \frac{x+1}{x+3} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 3x+9 = x^2+x \Rightarrow x^2-2x-9=0$$

$$\Delta = 4+36=40 \Rightarrow x = \frac{2 \pm 2\sqrt{10}}{2} \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{10}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند.