



## مشاهده قیمت روز و خرید از مدابوک

برای بازکردن صفحه محصول، این کادر را لمس کنید



مهروماه

ریاضیات تجربی

واقعاً جامع کنکور

جلد ۱: درسنامه + تست های دستگرمی

دکتر محمدرضا میرجلیلی، دکتر مهدی امیریان

|         |        |     |
|---------|--------|-----|
| دوازدهم | یازدهم | دهم |
| ۱۲      | ۱۱     | ۱۰  |



پروفا طهرن کتاب ریاضیات کنکور

**جیب ۲۲۰**  
با بیش از یک میلیون نسخه فروش

درسنامه کامل و روان در ۲۲ فصل  
۸۸ ایستگاه آموزشی سرشار از مثال و نکته  
خلاصه نموداری «در یک نگاه» برای هر فصل  
۱۰۰۰ تست دستگرمی با پاسخنامه‌ی تشریحی  
هدیه: پوستر جذاب فرمولنامه

2

# فهرست

|     |                                              |         |
|-----|----------------------------------------------|---------|
| ۸۹  | فصل ۷: توابع نمایی و لگاریتمی                |         |
| ۹۰  | ایستگاه ۱: تابع نمایی و ویژگی های آن         |         |
| ۹۵  | ایستگاه ۲: معادله ها و نامعادله های نمایی    |         |
| ۹۷  | ایستگاه ۳: تابع لگاریتمی و ویژگی های آن      |         |
| ۱۰۱ | ایستگاه ۴: قوانین و ویژگی های لگاریتم        |         |
| ۱۰۵ | ایستگاه ۵: معادله ها و نامعادله های لگاریتمی |         |
| ۵۱۰ | پاسخ نامه ی تشریحی                           | ریاضی ۲ |

|     |                                              |                    |
|-----|----------------------------------------------|--------------------|
| ۱۱۱ | فصل ۸: تابع دهم و یازدهم                     |                    |
| ۱۱۲ | ایستگاه ۱: مفهوم تابع و بازنمایی های آن      |                    |
| ۱۱۷ | ایستگاه ۲: آشنایی با برخی از انواع توابع     |                    |
| ۱۱۹ | ایستگاه ۳: دامنه و برد توابع - تساوی دو تابع |                    |
| ۱۲۶ | ایستگاه ۴: تابع یک به یک                     |                    |
| ۱۲۹ | ایستگاه ۵: اعمال جبری روی توابع              |                    |
| ۵۱۵ | پاسخ نامه ی تشریحی                           | ریاضی ۱<br>ریاضی ۲ |

|     |                                |                    |
|-----|--------------------------------|--------------------|
| ۱۳۵ | فصل ۹: تابع دوازدهم            |                    |
| ۱۳۶ | ایستگاه ۱: انتقال نمودارها     |                    |
| ۱۴۱ | ایستگاه ۲: توابع چندجمله ای    |                    |
| ۱۴۵ | ایستگاه ۳: توابع صعودی و نزولی |                    |
| ۱۵۱ | ایستگاه ۴: ترکیب توابع         |                    |
| ۱۶۰ | ایستگاه ۵: تابع وارون          |                    |
| ۵۳۱ | پاسخ نامه ی تشریحی             | ریاضی ۲<br>ریاضی ۳ |

|     |                                              |                    |
|-----|----------------------------------------------|--------------------|
| ۱۷۵ | فصل ۱۰: مثلثات دهم و یازدهم                  |                    |
| ۱۷۶ | ایستگاه ۱: مثلثات در لباس هندسه              |                    |
| ۱۷۹ | ایستگاه ۲: دایره ی مثلثاتی                   |                    |
| ۱۸۴ | ایستگاه ۳: روابط بین نسبت های مثلثاتی        |                    |
| ۱۸۸ | ایستگاه ۴: واحدهای اندازه گیری زاویه         |                    |
| ۱۹۰ | ایستگاه ۵: روابط تکمیلی بین نسبت های مثلثاتی |                    |
| ۵۲۸ | پاسخ نامه ی تشریحی                           | ریاضی ۱<br>ریاضی ۲ |

|     |                                |                    |
|-----|--------------------------------|--------------------|
| ۱۹۷ | فصل ۱۱: مثلثات دوازدهم         |                    |
| ۱۹۸ | ایستگاه ۱: نسبت های مثلثاتی ۲۵ |                    |
| ۲۰۳ | ایستگاه ۲: تابع های متناوب     |                    |
| ۲۰۷ | ایستگاه ۳: توابع مثلثاتی       |                    |
| ۲۱۴ | ایستگاه ۴: معادله های مثلثاتی  |                    |
| ۵۳۳ | پاسخ نامه ی تشریحی             | ریاضی ۲<br>ریاضی ۳ |

|   |                               |  |
|---|-------------------------------|--|
| ۷ | فصل صفر: مروری بر مفاهیم پایه |  |
|---|-------------------------------|--|

|     |                                       |         |
|-----|---------------------------------------|---------|
| ۱۳  | فصل ۱: تعیین علامت و نامعادله         |         |
| ۱۴  | ایستگاه ۱: تعیین علامت عبارت های جبری |         |
| ۱۷  | ایستگاه ۲: روش های حل نامعادله ها     |         |
| ۴۹۲ | پاسخ نامه ی تشریحی                    | ریاضی ۱ |

|     |                                                        |                    |
|-----|--------------------------------------------------------|--------------------|
| ۲۳  | فصل ۲: معادله ی درجه ی دوم                             |                    |
| ۲۴  | ایستگاه ۱: روش های حل معادله ی درجه ی دوم              |                    |
| ۲۸  | ایستگاه ۲: روابط بین ریشه های معادله ی درجه ی دوم      |                    |
| ۳۱  | ایستگاه ۳: تعداد و علامت ریشه های معادله ی درجه ی دوم  |                    |
| ۳۳  | ایستگاه ۴: تشکیل معادله ی درجه ی دوم                   |                    |
| ۳۵  | ایستگاه ۵: مسائلی که به حل معادله ی درجه ی دوم می رسند |                    |
| ۴۹۴ | پاسخ نامه ی تشریحی                                     | ریاضی ۱<br>ریاضی ۲ |

|     |                                                   |                    |
|-----|---------------------------------------------------|--------------------|
| ۳۹  | فصل ۳: تابع درجه ی دوم (سه می)                    |                    |
| ۴۰  | ایستگاه ۱: سه می و ویژگی های آن                   |                    |
| ۴۱  | ایستگاه ۲: نوشتن معادله ی سه می و نمودار آن       |                    |
| ۴۷  | ایستگاه ۳: کاربرد سه می در مسائل ماکزیمم و مینیمم |                    |
| ۴۹۹ | پاسخ نامه ی تشریحی                                | ریاضی ۱<br>ریاضی ۲ |

|     |                                   |         |
|-----|-----------------------------------|---------|
| ۵۱  | فصل ۴: معادله های گویا و رادیکالی |         |
| ۵۲  | ایستگاه ۱: معادله های گویا        |         |
| ۵۶  | ایستگاه ۲: معادله های رادیکالی    |         |
| ۵۰۳ | پاسخ نامه ی تشریحی                | ریاضی ۲ |

|     |                                       |         |
|-----|---------------------------------------|---------|
| ۶۱  | فصل ۵: توان های گویا و عبارت های جبری |         |
| ۶۲  | ایستگاه ۱: ریشه، توان و توان های گویا |         |
| ۶۸  | ایستگاه ۲: عبارت های جبری             |         |
| ۵۰۵ | پاسخ نامه ی تشریحی                    | ریاضی ۱ |

|     |                                    |                    |
|-----|------------------------------------|--------------------|
| ۷۵  | فصل ۶: قدر مطلق و جزء صحیح         |                    |
| ۷۶  | ایستگاه ۱: قدر مطلق و ویژگی های آن |                    |
| ۸۳  | ایستگاه ۲: جزء صحیح و ویژگی های آن |                    |
| ۵۰۸ | پاسخ نامه ی تشریحی                 | ریاضی ۱<br>ریاضی ۲ |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                               |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>فصل ۱۷: هندسه دوازدهم</b><br>۳۷۳<br>ایستگاه ۱: تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی ۳۷۴<br>ایستگاه ۲: بیضی و ویژگی های آن ۳۸۴<br>ایستگاه ۳: دایره و ویژگی های آن ۳۹۳<br>پاسخ نامه ی تشریحی ۵۶۹                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | <br><b>ریاضی ۳</b>                           |
| <b>فصل ۱۸: مجموعه</b><br>۴۱۳<br>ایستگاه ۱: مجموعه های متناهی و نامتناهی ۴۱۴<br>ایستگاه ۲: متمم یک مجموعه ۴۱۷<br>ایستگاه ۳: تعداد اعضای یک مجموعه ۴۱۹<br>پاسخ نامه ی تشریحی ۵۷۲                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | <br><b>ریاضی ۱</b>                           |
| <b>فصل ۱۹: الگو و دنباله</b><br>۴۲۳<br>ایستگاه ۱: الگو و مفهوم دنباله ۴۲۴<br>ایستگاه ۲: دنباله ی حسابی و ویژگی های آن ۴۲۸<br>ایستگاه ۳: دنباله ی هندسی و ویژگی های آن ۴۳۲<br>پاسخ نامه ی تشریحی ۵۷۴                                                                                                                                                                                                                                                                                               | <br><b>ریاضی ۱</b>                         |
| <b>فصل ۲۰: شمارش، بدون شمردن</b><br>۴۳۹<br>ایستگاه ۱: اصل ضرب و اصل جمع ۴۴۰<br>ایستگاه ۲: جایگشت ۴۴۳<br>ایستگاه ۳: ترکیب ۴۴۶<br>پاسخ نامه ی تشریحی ۵۷۸                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | <br><b>ریاضی ۱</b>                         |
| <b>فصل ۲۱: احتمال</b><br>۴۵۱<br>ایستگاه ۱: مفاهیم اولیه ی احتمال ۴۵۲<br>ایستگاه ۲: احتمال با اندازه گیری شانس ۴۵۴<br>ایستگاه ۳: قوانین احتمال ۴۵۸<br>ایستگاه ۴: احتمال شرطی ۴۶۰<br>ایستگاه ۵: پیشامدهای مستقل ۴۶۳<br>ایستگاه ۶: قانون احتمال کل ۴۶۷<br>پاسخ نامه ی تشریحی ۵۸۰                                                                                                                                                                                                                     | <br><b>ریاضی ۱<br/>ریاضی ۲<br/>ریاضی ۳</b> |
| <b>فصل ۲۲: آمار</b><br>۴۷۷<br>ایستگاه ۱: مقدمه ای بر علم آمار ۴۷۸<br>ایستگاه ۲: آمار توصیفی ۴۸۰<br>پاسخ نامه ی تشریحی ۵۸۶                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | <br><b>ریاضی ۱<br/>ریاضی ۲</b>             |
| <b>آزمون جامع</b><br>۴۸۹<br>پاسخ نامه ی تشریحی ۵۸۷                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | <br><b>ریاضی ۱<br/>ریاضی ۲<br/>ریاضی ۳</b> |
| <b>فصل ۱۲: حد و پیوستگی</b><br>۲۲۵<br>ایستگاه ۱: بخش پذیری ۲۲۶<br>ایستگاه ۲: فرایندهای حدی ۲۲۸<br>ایستگاه ۳: محاسبه ی حد توابع ۲۳۳<br>ایستگاه ۴: رفع ابهام صفر صفر ۲۳۸<br>ایستگاه ۵: پیوستگی ۲۴۴<br>ایستگاه ۶: حد بی نهایت ۲۵۲<br>ایستگاه ۷: حد در بی نهایت ۲۵۷<br>پاسخ نامه ی تشریحی ۵۳۸                                                                                                                                                                                                         | <br><b>ریاضی ۲<br/>ریاضی ۳</b>             |
| <b>فصل ۱۳: مشتق</b><br>۲۶۷<br>ایستگاه ۱: آشنایی با مفهوم مشتق ۲۶۸<br>ایستگاه ۲: تابع مشتق و فرمول های مشتق گیری ۲۷۲<br>ایستگاه ۳: مشتق تابع مرکب ۲۷۸<br>ایستگاه ۴: قاعده ی هویتال ۲۸۰<br>ایستگاه ۵: معادله ی مماس ۲۸۲<br>ایستگاه ۶: مشتق پذیری و ارتباط آن با پیوستگی ۲۸۴<br>ایستگاه ۷: مشتق توابع بدرفتار! ۵! شگفت انگیز ... ۲۸۸<br>ایستگاه ۸: مشتق پذیری روی بازه و $\mathbb{R}$ ۲۹۵<br>ایستگاه ۹: رابطه ی بین نمودارهای $f$ و $f'$ ۲۹۷<br>ایستگاه ۱۰: آهنگ تغییر ۳۰۱<br>پاسخ نامه ی تشریحی ۵۴۶ | <br><b>ریاضی ۳</b>                       |
| <b>فصل ۱۴: کاربردهای مشتق</b><br>۳۰۹<br>ایستگاه ۱: توابع یکتوا و اکیدا یکتوا ۳۱۰<br>ایستگاه ۲: نقطه ی بحرانی ۳۱۳<br>ایستگاه ۳: اکسترمم های نسبی ۳۱۶<br>ایستگاه ۴: اکسترمم های مطلق ۳۲۳<br>ایستگاه ۵: بهینه سازی ۳۲۷<br>پاسخ نامه ی تشریحی ۵۵۵                                                                                                                                                                                                                                                     | <br><b>ریاضی ۳</b>                       |
| <b>فصل ۱۵: هندسه یازدهم</b><br>۳۳۳<br>ایستگاه ۱: ترسیم های هندسی و استدلال ۳۳۴<br>ایستگاه ۲: نسبت، تناسب و قضیه ی تالس ۳۳۹<br>ایستگاه ۳: تشابه ۳۴۴<br>پاسخ نامه ی تشریحی ۵۶۲                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | <br><b>ریاضی ۲</b>                       |
| <b>فصل ۱۶: هندسه تحلیلی</b><br>۳۵۷<br>ایستگاه ۱: دستگاه مختصات و ویژگی های آن ۳۵۸<br>ایستگاه ۲: معادله ی خط و وضعیت دو خط با هم ۳۶۲<br>ایستگاه ۳: فاصله ی نقطه از خط ۳۶۸<br>پاسخ نامه ی تشریحی ۵۶۵                                                                                                                                                                                                                                                                                                | <br><b>ریاضی ۲</b>                       |

## فصل ۳

عبارت های جبری و مقدماتی

حل معادله ی درجه ی دوم

تعیین علامت

نامعادله

تعداد تست در کنکور ۱ تا ۲ تست

تابع درجه ی دوم  
(سه می)

ساده ترین و مهم ترین نموداری که باید بلد باشید!  
سه می، ویژگی هایش و نتیجه های مرتبط با آن تستی می شوند قابل حل و لذت بخش...

از پُل چه سه می دارم؟!



هر دم که می خندی و می گری،  
با لبانت...  
آموزش **سه می** کشیدن می گذاری!

## ایستگاه ۱ سهمی و ویژگی‌های آن

در کتاب درسی بسیار مفصل به این مورد پرداخته شده است. رسم نمودار تابع درجه‌ی دوم و تسلط بر آن، در بیشتر مسائل ریاضی، مهم و کاربردی است.

السؤال

تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $f(x) = ax^2 + bx + c$  با شرط‌های  $a \neq 0$  و  $D_f = \mathbb{R}$ ، تابع درجه‌ی دوم نامیده می‌شود و نمودار این تابع، یک سهمی است.

|                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $y = ax^2 + bx + c$    |                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| رأس سهمی               | طول رأس: $x = -\frac{b}{2a}$                                                                                                                                                                                                                                                      |
| تلاقی با محور $y$ ها   | عرض رأس: $y = -\frac{\Delta}{4a}$ یا با جای گذاری طول رأس در تابع، عرض رأس را پیدا کنید.                                                                                                                                                                                          |
| تلاقی با محور $x$ ها   | $\Delta > 0$ محور $x$ ها را در ۲ نقطه قطع می کند: صفرهای سهمی<br>$\Delta = 0$ بر محور $x$ ها مماس است.<br>$\Delta < 0$ محور $x$ ها را قطع نمی کند.                                                                                                                                |
| تأثیر علامت $a$        | $a < 0$ : دهانه سهمی رو به پایین است.<br>$a > 0$ : دهانه سهمی رو به بالاست.<br>                                                                                                               |
| محور تقارن             | همواره یک خط قائم دارد: $x = -\frac{b}{2a}$                                                                                                                                                                                                                                       |
| برای رسم سهمی نیاز است | <ol style="list-style-type: none"> <li>مختصات رأس سهمی</li> <li>ریشه های آن در صورت وجود: که نقطه های برخورد با محور <math>x</math> ها هستند.</li> <li>نقطه تلاقی با محور <math>y</math> ها</li> <li>رو به بالا یا پایین بودن سهمی از روی نگاه به علامت <math>a</math></li> </ol> |

منظور از کمترین یا بیشترین مقدار سهمی، همان  $-\frac{\Delta}{f_a}$  است...

**تست:** کمترین مقدار تابع  $y = kx^2 - 8x + (6k - 1)$  برابر با ۳ است. طول رأس سهمی کدام است؟

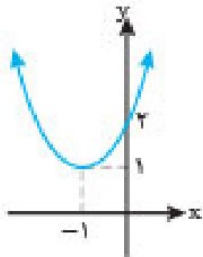
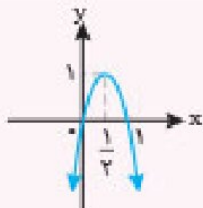
۲ (۱) **پاسخ** عبارت درجه‌ی دوم ما کمترین مقدار را دارد، پس  $a > 0$  بوده است که در این جا می‌شود  $k > 0$ . خوب منظور از کمترین مقدار سهمی هم عرض رأس آن است.

$$\underbrace{k}_{a} \underbrace{x^2}_{b} - \underbrace{8x}_{c} + \underbrace{(6k-1)}_{c} = 0 \xrightarrow[\Delta=b^2-4ac]{\text{رو حساب کن}} \Delta = 64 - 4(k)(6k-1) \xrightarrow{\text{ساده کن}} \Delta = 64 - 24k^2 + 4k$$

$$\xrightarrow[\frac{-\Delta}{4a}]{\text{فرمول عرض راس}} -\frac{64 - 24k^2 + 4k}{4k} = \underbrace{3}_{\text{فرض تست}} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین کن}} 24k^2 - 4k - 64 = 12k \xrightarrow{\text{ساده کن}} 24k^2 - 16k - 64 = 0$$

$$\xrightarrow{+1} 24k^2 - 16k - 64 = 0 \xrightarrow{\text{حل کن}} \Delta = 4 - 4(24)(-64) = 100 \Rightarrow k = \frac{2 \pm 10}{6} = 2 \text{ و } -\frac{1}{6} \xrightarrow{k>0} k = 2 \xrightarrow{\text{طول راس}} x = \frac{-b}{2a} = -\frac{-8}{2k} = \frac{8}{4} = 2$$

نموده‌ی رسم سهمی بی‌نهایت:

| رسم سهمی                                                                            | ابزار لازم برای رسم                                                                                                                          | دهانه                   | ی بیابید:          |
|-------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|--------------------|
|  | $x_S = \frac{-2}{2} = -1 \xrightarrow{\text{در سهمی}} y = 1$ ■<br>$\Delta = 4 - 8$ که یعنی ریشه ندارد ■<br>$(0, 2)$ : تلاقی با محور $y$ ها ■ | $a = 1$<br>رو به بالا   | $y = x^2 + 2x + 2$ |
|  | $x_S = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{در سهمی}} y = 1$ ■<br>$\Delta > 0$ پس: $x = 0, 1$ ■<br>$(0, 0)$ تلاقی با محور $y$ ها ■ | $a = -4$<br>رو به پایین | $y = -4x^2 + 4x$   |

چنانچه سهمی از نقطه‌ی  $(m, n)$  بگذرد، مختصات این نقطه در معادله‌ی سهمی صدق می‌کند.

**تست:** سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  دارای محور تقارنی به معادله‌ی  $x = -2$  بوده و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۵ قطع می‌کند. اگر این سهمی از نقطه‌ی  $(-1, -1)$  بگذرد، مقدار  $a + b + c$  کدام است؟

۱۷ (۴)

۱۵ (۳)

۱۳ (۲)

۱۱ (۱)

پاسخ

۱ محور تقارن:  $y = ax^2 + bx + c \xrightarrow{\text{محور تقارن}} x = -\frac{b}{2a} = -2 \xrightarrow{\text{فرض تست}} b = 4a$

۲ تلاقی با محور  $y$  ها:  $y = 5 \xrightarrow{x=0} c = 5$

۳ گذشتن از نقطه  $(-1, -1)$ :  $x = -1, y = -1 \xrightarrow{\text{در سهمی}} -1 = a(-1)^2 + b(-1) + c \xrightarrow{c=5} a - b = -6 \xrightarrow{b=4a} a - 4a = -6 \xrightarrow{\text{طبق ۱}} a = 2$

$\xrightarrow{\text{حل کنیم}} a = 2 \xrightarrow{b=4a} b = 8 \Rightarrow a + b + c = 2 + 8 + 5 = 15$

## تکلیف شب تست‌های دست‌گرمی و آموزشی

۷۱. مختصات رأس سهمی به معادله‌ی  $y = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} + 1$  کدام است؟

(۱)  $(-\frac{1}{4}, \frac{31}{16})$

(۲)  $(\frac{1}{4}, \frac{31}{16})$

(۳)  $(\frac{1}{4}, -\frac{31}{16})$

(۴)  $(-\frac{1}{4}, -\frac{31}{16})$

۷۲. رأس سهمی به معادله‌ی  $y = -3x^2 + (2m-1)x + 5$  روی محور عرض‌ها واقع است. خط به معادله‌ی  $y - 2 = 0$ ، سهمی را در نقاطی با کدام طول قطع می‌کند؟

(۱)  $\pm 1$

(۲)  $\pm 2$

(۳)  $\pm \sqrt{2}$

(۴) قطع نمی‌کند.

۷۳. اگر خط به معادله‌ی  $x = -1$  محور تقارن سهمی به معادله‌ی  $y = 1 - 2mx + 3x^2$  باشد، مقدار  $m$  کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) -۲

(۴) -۳

۷۴. تابع درجه‌ی دوم  $y = x^2 + bx + 8$  نسبت به خط  $x = 3$  متقارن است. این تابع محور  $x$  ها را در چه طولی قطع می‌کند؟

(۱) -۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۶

۷۵. طول رأس سهمی به معادله‌ی  $y = (m-2)x^2 - (4m-2)x + 3$  برابر ۲ است. چند جمله‌ی زیر درباره‌ی این سهمی درست است؟

(الف) محور  $x$  ها را قطع نمی‌کند.

(ب) شکل سهمی رو به پایین است.

(ت) سهمی از نقطه‌ی  $(2, 6)$  می‌گذرد.

(پ) بیشترین مقدار سهمی برابر ۳ است.

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۷۶. رأس سهمی به معادله‌ی  $y = -2x^2 + bx - 3$  روی نیمساز ناحیه‌ی دوم واقع است. مقدار  $b$  کدام است؟

(۱) ۴

(۲) -۶

(۳) ۴ و -۶

(۴) -۴ یا ۶

۷۷. سهمی به معادله‌ی  $y = 2x^2 - 8x + 1$  از کدام ناحیه‌ی محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

(۱) چهارم

(۲) سوم

(۳) دوم

(۴) اول

۷۸. به ازای کدام مقدار  $a$ ، بیشترین مقدار تابع  $f(x) = ax^2 + 20x - 120$  برابر با ۱۸۰ است؟

(۱)  $-\frac{1}{2}$

(۲)  $-\frac{9}{3}$

(۳)  $\frac{1}{3}$

(۴)  $\frac{1}{2}$

(کنکور تیر ۱۴۰۱)

۷۹. کمترین مقدار تابع  $y = mx^2 - 12x + 5m - 1$  برابر ۲ است. محور تقارن سهمی، کدام است؟

(۱)  $x = 2$

(۲)  $x = 2/5$

(۳)  $x = 2$

(۴)  $x = 3/5$

۸۰. اگر صفرهای تابع درجه‌ی دوم  $y = 3x^2 + bx + c$  برابر -۳ و ۵ باشند، کمترین مقدار این سهمی کدام است؟

(۱) -۳۶

(۲) -۴۸

(۳) ۴۲

(۴) ۵۴

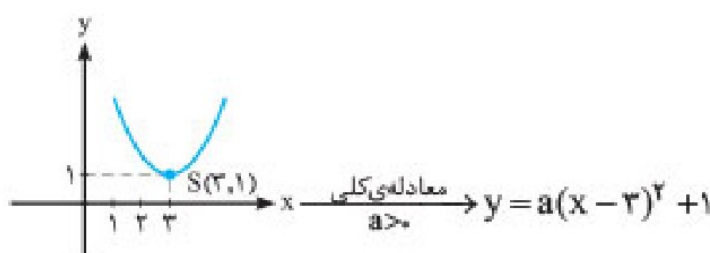
دهم فصل ۴

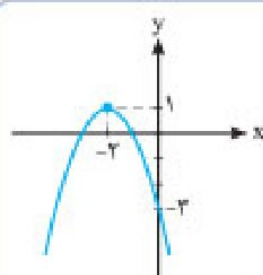
یازدهم فصل ۱

## ایستگاه ۲ نوشتن معادله‌ی سهمی و نمودار آن

این‌جا با داده‌های تست معادله‌ی سهمی را می‌نویسیم و با داشتن معادله‌اش آن را رسم می‌کنیم؛ خیلی ایستگاه به‌درد بخوری‌ست!

۱ اگر مختصات رأس سهمی به‌صورت  $S(h, k)$  داده شده باشد: در این‌صورت معادله‌ی سهمی را به‌صورت  $y = a(x - h)^2 + k$  بنویسید و سعی کنید از اطلاعات دیگر سؤال،  $a$  را پیدا کنید. **ببین:**





تست: معادله ی سهمی مقابل کدام است؟

$$y = -x^2 - 4x - 3 \quad (2)$$

$$y = -x^2 + 4x - 3 \quad (1)$$

$$y = x^2 - 4x - 3 \quad (4)$$

$$y = -x^2 - 4x + 3 \quad (3)$$

پاسخ

$$S(-2, 1) \xrightarrow[\text{معادله ی کلی سهمی}]{a < 0} y = a(x - h)^2 + k \xrightarrow[\text{جای گذاری کن}]{h = -2, k = 1} y = a(x + 2)^2 + 1$$

سهمی از نقطه ی  $(0, -3)$  می گذرد، پس مختصات این نقطه را در معادله ی آن صدق می دهیم:

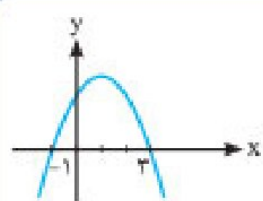
$$y = a(x + 2)^2 + 1 \Rightarrow -3 = a(0 + 2)^2 + 1 \Rightarrow -3 = 4a + 1 \xrightarrow[\text{معادله}]{\text{حل}} a = -1 \xrightarrow[\text{در معادله ی سهمی}]{\text{در معادله ی دو جمله ای}} y = -1(x + 2)^2 + 1 \xrightarrow[\text{اتحاد مربع}]{\text{دو جمله ای}} y = -x^2 - 4x - 3$$

برای کار کردن با سهمی هایی که معادله ی آن ها به فرم  $y = a(x - h)^2 + k$  نوشته شده است، می توانید اتحاد مربع دو جمله ای را باز کرده و عبارت را ساده کنید، همین طور بدانید در این شکل نمایش،  $S(h, k)$ ، رأس سهمی بوده و ماکزیمم یا مینیمم آن هم  $k$  است.

ببین:

$$y = (2x - 1)^2 - 1 \xrightarrow[\text{رو به بالا}]{a = 2 > 0} \text{رأس: } S(\frac{1}{2}, -1), \min = -1$$

۲ اگر نقاط تلاقی سهمی با محور  $x$  ها به فرم  $x_1$  و  $x_2$  باشند: در این صورت معادله ی سهمی را به صورت  $y = a(x - x_1)(x - x_2)$  بنویسید و سعی کنید از اطلاعات دیگر سؤال  $a$  را به دست بیاورید.



تست: سهمی مقابل از نقطه ی  $(-2, -10)$  می گذرد. نقطه ی برخورد سهمی با محور  $y$  ها چه عرضی دارد؟

$$10 \quad (2)$$

$$5 \quad (1)$$

$$6 \quad (4)$$

$$8 \quad (3)$$

پاسخ

$$\text{فرم کلی سهمی} \xrightarrow[\text{فرم کلی سهمی}]{a < 0} y = a(x - x_1)(x - x_2) \xrightarrow[\text{جای گذاری کن}]{\text{جای گذاری کن}} y = a(x + 1)(x - 3) \xrightarrow[\text{ضرب کن}]{\text{ضرب کن}} y = a(x^2 - 2x - 3)$$

$$\xrightarrow[\text{جای گذاری کن}]{\text{تلاقی با محور } y \text{ ها}} y = -2(x^2 - 2x - 3) \xrightarrow[\text{تلاقی با محور } y \text{ ها}]{x = 0} y = -2(-3) = 6 \Rightarrow -10 = a(4 + 4 - 3) \Rightarrow -10 = 5a \Rightarrow a = -2$$

در حالت خاص که معادله ی درجه ی دوم، ریشه ی مضاعف  $x$  دارد، معادله اش به صورت  $y = a(x - x_0)^2$  در می آید!

قرارداد ریشه های معادله ی درجه ی دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  را برای تابع  $y = ax^2 + bx + c$ ، **مفرهای سهمی** می نامیم.

۳ نوشتن معادله ی سهمی با داشتن سه نقطه از آن: معمولاً ضابطه ی سهمی را در این حالت به فرم کلی  $y = ax^2 + bx + c$  نوشته و نقطه ها را در آن صدق می دهیم، دستگاه حاصل را حل می کنیم و  $a$ ،  $b$  و  $c$  را پیدا می کنیم اما طراح کنکور چیزی را دوست دارد که می خواهیم به آن بپردازیم: **دو نقطه از سه نقطه قانون دارند!**

تکنیک معلم کنکور: فرض کنید نقطه ها  $(1, 3)$ ،  $(4, 6)$  و  $(-2, 1)$  باشند، در دوتای اول، قانون  $y = x + 2$  در نقطه ها برقرار! خوب معادله ی سهمی

ONLINE BOOKS HOP

را به فرم  $y = a(x - 1)(x - 4) + x + 2$  بنویسید و بعد نقطه ی سوم را در آن صدق دهید. حالا این قانون در دو نقطه می تواند هر چیز دیگری هم باشد:

$$y = a(x - 1)(x - 4) + x + 2 \xrightarrow[\text{صدق بده}]{(-2, 1)} 1 = a(-3)(-6) + 0 \Rightarrow a = \frac{1}{18}$$

این جوری هم ببین: دو نقطه از سه نقطه ی سهمی، این طوری هستند:  $(\alpha, f(\alpha))$  و  $(\beta, f(\beta))$ ، معادله ی سهمی را به فرم  $y = a(x - \alpha)(x - \beta) + f(x)$

$$f(x)$$

بنویس و با صدق دادن نقطه ی سوم،  $a$  را پیدا کن و تمام!

◀  $f(x)$  یک چندجمله ای حداکثر از درجه ی دو است.

تست: سهمی گذرنده از نقطه های  $(2, 4)$ ،  $(-1, 1)$  و  $(4, -14)$  محور  $y$  ها را در چه عرضی قطع می کند؟

$$-4 \quad (4)$$

$$6 \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$-6 \quad (1)$$

پاسخ

$$(2, 4), (-1, 1) \xrightarrow[\text{معادله ی سهمی}]{\text{معادله ی سهمی}} y = a(x - 2)(x + 1) + x^2 \xrightarrow[\text{صدق بده}]{(4, -14)} -14 = a(2)(5) + 16 \Rightarrow 1 = a = -3 \Rightarrow a = -3$$

$$\xrightarrow[\text{جای گذاری}]{\text{تلاقی با } y \text{ ها}} y = -3(x - 2)(x + 1) + x^2 \xrightarrow[\text{تلاقی با } y \text{ ها}]{x = 0} y = -3(-2)(1) + 0 = 6$$

سهمی و محور xها

| تلاقی در دو نقطه: $\Delta > 0$         | مماس بر محور: $\Delta = 0$      | بدون برخورد با محور: $\Delta < 0$ |
|----------------------------------------|---------------------------------|-----------------------------------|
|                                        |                                 |                                   |
| جدول تعیین علامت عبارت، ۲ ریشه‌ای است. | جدول تعیین علامت تکریشه‌ای است. | جدول تعیین علامت بدون ریشه است.   |

**تست:** سهمی به معادله‌ی  $y = x^2 + mx + \frac{1}{4}$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) محور xها را قطع نمی‌کند و سهمی  $y = 2nx^2 - 4x + \frac{n}{4}$  بر محور xها مماس و رو به پایین است. مقدار  $\frac{n}{m}$  کدام است؟

$\frac{1}{4}$  (۱)  $-2$  (۲)  $2$  (۳)  $-\frac{1}{2}$  (۴)

**پاسخ** ۱  $y = x^2 + mx + \frac{1}{4} \xrightarrow{\Delta < 0} \Delta = m^2 - 2 < 0 \Rightarrow |m| < \sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2} < m < \sqrt{2} \xrightarrow{m \in \mathbb{N}} m = 1$

**۲**  $y = 2nx^2 - 4x + \frac{n}{4} \xrightarrow{\Delta = 0} \Delta = 16 - 4(2n)(\frac{n}{4}) = 16 - 4n^2 = 0 \Rightarrow n = \pm 2 \xrightarrow{\text{رو به پایین } 2n < 0} n = -2 \Rightarrow \frac{n}{m} = \frac{-2}{1} = -2$

**تست:** شکل مقابل مربوط به سهمی به معادله‌ی  $y = mx^2 - x + \frac{n-1}{4}$  است. بین  $n$  و  $m$  چند عدد صحیح وجود دارد؟

(۱) هیچ  
 (۲) ۱  
 (۳) ۲  
 (۴) ۳

**پاسخ** ۳

$S = \frac{1}{m} = -\frac{3}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{6}{4} \Rightarrow m = -\frac{3}{2}$   
 $P = \frac{n-1}{4m} = (-\frac{3}{2})(-\frac{3}{4}) \Rightarrow -2(\frac{n-1}{4}) = \frac{9}{16} \Rightarrow n-1 = -\frac{3}{4} \Rightarrow n = \frac{1}{4}$

اعداد صحیح بین  $m$  و  $n$  عبارت است از: ۰.

اگر سهمی، محور xها را در دو نقطه **قطع نکند**، در این صورت: در حالت کلی، سهمی نسبت به محور xها یکی از چهار حالت زیر را دارد:

| همواره بالای محور      | بالای محور، مماس بر آن | همواره پایین محور      | پایین محور، مماس بر آن |
|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| $a > 0$ و $\Delta < 0$ | $a > 0$ و $\Delta = 0$ | $a < 0$ و $\Delta < 0$ | $a < 0$ و $\Delta = 0$ |

جمله‌ی مربع کامل شدن عبارت درجه‌ی دوم، یعنی در آن عبارت،  $\Delta$  مساوی صفر شده...!

**تست:** همی نقاط نمودار تابع  $y = (m+1)x^2 + 2\sqrt{2}x + \frac{1}{4}$  بالای محور xهاست. چند جواب طبیعی و یک‌رقمی برای  $m$  وجود دارد؟

(۱) یک  
 (۲) دو  
 (۳) سه  
 (۴) چهار

**پاسخ** ۲

$y = (m+1)x^2 + 2\sqrt{2}x + \frac{1}{4} \xrightarrow{\Delta \text{ رو حساب کن}} \Delta = (2\sqrt{2})^2 - 4(m+1)(\frac{1}{4}) \xrightarrow{\text{ساده کن}} \Delta = 7 - m$

$\xrightarrow{\text{سهمی بالای محور xهاست}} \begin{cases} \text{۱ } \Delta < 0 \Rightarrow 7 - m < 0 \Rightarrow m > 7 \\ \text{۲ } a > 0 \Rightarrow m+1 > 0 \Rightarrow m > -1 \end{cases} \xrightarrow{\cap} m > 7 \xrightarrow{m \text{ طبیعی و یک‌رقمی}} m = 8, 9 \xrightarrow{\text{تعداد}} \text{دو تا}$

**تست:** هرگاه نمودار تابع  $y = (k-2)x^2 - 3x + 2 + k$  پایین محور xها و بر آن مماس باشد، در این صورت چند مقدار برای  $k$  وجود دارد؟

(۱) هیچ  
 (۲) یک  
 (۳) دو  
 (۴) بی‌شمار

**پاسخ** ۲

$y = (k-2)x^2 - 3x + (2+k) \xrightarrow{\Delta \text{ رو حساب کن}} \Delta = (-3)^2 - 4(k-2)(k+2) \xrightarrow{\text{ساده کن}} \Delta = -4k^2 + 25$

$\xrightarrow{\text{پایین محور xها و مماس بر آن}} \begin{cases} \text{۱ } \Delta = 0 \Rightarrow -4k^2 + 25 = 0 \Rightarrow k^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow k = \pm \frac{5}{2} \\ \text{۲ } a < 0 \Rightarrow k-2 < 0 \Rightarrow k < 2 \end{cases} \xrightarrow{\cap} k = -\frac{5}{2} \xrightarrow{\text{تعداد جواب}} \text{یکی}$

### مماس بودن سهمی بر خط

اگر خط دلخواه  $y = mx + n$  بر یک سهمی مماس شده باشد، به جای  $y$  سهمی بگذارید:  $mx + n$  و سپس معادله‌ی درجه‌ی دوم حاصل را مرتب کرده و در معادله‌ی آخری قرار دهید:  $\Delta = 0 \dots$

**تست:** به ازای کدام مقدار  $m$  نمودار تابع  $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$  بر نیمساز ناحیه‌ی اول محورهای مختصات مماس است؟

$$12(f) \qquad 12g - f(x) \qquad -12g - f(x) \qquad -f(1)$$

ياسمى

$$y = \tau x^T + (m+1)x + m + \rho \xrightarrow[\text{جای گذاری کنیم}]{y=x: \text{نیمساز ناحیه ی اول}} x = \tau x^T + (m+1)x + m + \rho$$

$$\xrightarrow{\text{ساده و مرتب کن}} x = 2x^2 + mx + x + m + 6 \Rightarrow 2x^2 + mx + m + 6 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta \Rightarrow \text{مماس یعنی}} m^2 - 4(2)(m+6) = 0 \xrightarrow{\text{ساده کن}} m^2 - 8m - 48 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه کن}} (m+4)(m-12) = 0 \Rightarrow m = 12, -4$$

اگر  $m=12$  باشد، معادله‌ی حاصل از تلاقی سهمی و نیمساز عبارت است از:

$$2x^2 + mx + m + 6 = 0 \xrightarrow{m=12} 2x^2 + 12x + 18 = 0$$

که به‌وضوح جوابش  $x = -3$  است و در ناحیه‌ی اول نیست! پس فقط  $m = -4$  قابل قبول خواهد بود.

**عبارت درجه‌ی دوم با علامت ثابت: یک تیر و دو نشان!**

اگر بگویند هجرت درجه‌ی دومی همواره مثبت یا همواره منفی بوده است، خب انگار سهمی آن کاملاً بالا یا کاملاً پایین محور  $x$  ها افتاده...!

**این جوری هم ببین:**

|                        |                     |                        |                     |     |
|------------------------|---------------------|------------------------|---------------------|-----|
| $ax^r + bx + c \leq 0$ | $ax^r + bx + c < 0$ | $ax^r + bx + c \geq 0$ | $ax^r + bx + c > 0$ | شرط |
| $\Delta \leq 0, a < 0$ | $\Delta < 0, a < 0$ | $\Delta \leq 0, a > 0$ | $\Delta < 0, a > 0$ |     |

**تسبی:** به ازای کدام مقادیر  $m$  عبارت  $(m-1)x^2 + 6x + 5$  برای هر مقدار دلخواه  $x$  مثبت است؟

$$m \geq \frac{1}{\Delta} \quad m > \frac{1}{\Delta} \quad 1 < m < \frac{1}{\Delta} \quad m > 1$$

ياسين

$$(m-1)x^2 + 6x + 5 \xrightarrow{\text{رو حساب کن}} \Delta = (6)^2 - 4(m-1)(5) \xrightarrow{\text{ساده کن}} \Delta = 36 - 20m$$

عبارت همواره مثبت  $\rightarrow$  سهمی بالای محور  $x$  ها  $\left\{ \begin{array}{l} 1 \Delta < 0 \Rightarrow 56 - 20m < 0 \Rightarrow m > \frac{14}{5} \\ 2 a > 0 \Rightarrow m - 1 > 0 \Rightarrow m > 1 \end{array} \right\} \rightarrow m > \frac{14}{5}$

### ویژگی محور تقارن سهمی

۱) محور تقارن سهمی همیشه از رأس سهمی می‌گذرد و موازی محور  $Y$  هاست.

**این جوری هم ببین:** طول رأس سهمی، همیشه با مقدار داده شده برای محور تقارن سهمی مساوی است: **ببین:**

$$\boxed{X=4} \Rightarrow \text{طول الأضلاع} = 4$$

معادله‌ی محور تقارن

۲) هر دو نقطه‌ای که روی سهمی بوده و عرض مساوی با هم داشته باشند، نسبت به محور تقارن سهمی قرینه‌اند. در این حالت برای پیدا کردن مقدار عددی محور تقارن، طول آن دو نقطه را میانگین بگیرید.

**تست:** دو نقطه‌ای  $(1, \beta)$  و  $(-3, \beta)$  روی نمودار سهمی با کمترین مقدار ۱ قرار دارند. اگر سهمی محور  $y$  ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کند، کدام

نقطه روی این سهمی واقع است؟

$$(-r, 1r) (f) \quad (-r, r) (f) \quad (-r, r) (f) \quad (-r, 1f) (1)$$

ياسخ

دو نقطه یا عرض

مساوی روی سهمی

$(1, \beta), (-3, \beta)$  → معادله‌ی محور تقارن میانگین طول‌ها را بگیر  $x = \frac{1+(-3)}{2}$  → ساده کن  $x = -1$  → محور تقارن از رأس می‌گذرد  $x = -1$  رأس  $x = -1$  → کمترین مقدار فرض  $S(-1, 1)$

$$\xrightarrow{\text{معادله‌ی سه‌می}} y = a(x + 1)^r + 1 \xrightarrow[\text{تلاقی با } y=1]{\text{•, ۳}} r = a(\bullet + 1)^r + 1 \Rightarrow a = r$$

جای گذاری کن  
معادله سه می  
→  $y = 2(x+1)^2 + 1$  امتحان بزنه  
گزینه «۳»  
→  $3 = 2(-2+1)^2 + 1 \Rightarrow 3 = 2 + 1$  ✓

بیان کنکوری اگر  $f(x) = ax^2 + bx + c$  باشد، آن وقت  $f(m) = f(n) \Rightarrow m + n = -\frac{b}{a}$ ، البته غیر از حالتی که خود  $m$  و  $n$  مساوی باشند...

تست: اگر  $f(x) = 2x^2 + 6x + 1$  باشد، مجموع جواب‌های معادله‌ی  $f(3x+1) = f(x-3)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{7}{4}$  (۲)  $-\frac{9}{4}$  (۳)  $-\frac{7}{4}$  (۴)  $\frac{9}{4}$

پاسخ

$$\left. \begin{array}{l} 1) f(3x+1) = f(x-3) \Rightarrow 3x+1 = x-3 \xrightarrow{\text{حل}} 2x = -4 \Rightarrow x = -2 \\ 2) (3x+1) + (x-3) = -\frac{6}{2} \Rightarrow 4x-2 = -3 \Rightarrow x = -\frac{1}{4} \end{array} \right\} \xrightarrow{+} -\frac{9}{4}$$

### تابع چاق و لاغر

تکنیک معلم کنکور: تابعی را که ضابطه‌اش به صورت یک عبارت درجه‌ی اول، ضربدر یک عبارت درجه‌ی دوم باشد تابع چاق و لاغر می‌نامیم، ببین:

$$y = \underbrace{(2x-1)}_{\text{لاغر}} \underbrace{(x^2+5x-4)}_{\text{چاق}}$$

۱ اگر تست بگویند: «تابع چاق و لاغر، محور  $x$  ها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند»، دلتای تابع درجه‌ی دوم را منفی کنید...

تست: نمودار تابع  $y = (x+2)(x^2-2x+m)$  محور  $x$  ها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند. مقادیر  $m$  به کدام صورت است؟

- (۱)  $0 < m < 1$  (۲)  $m > -1$  (۳)  $-2 < m < -1$  (۴)  $m > 1$

پاسخ

$$y = (x+2)(x^2-2x+m) \xrightarrow{\Delta \text{ چاق و حساب کن}} \Delta = (-2)^2 - 4(1)(m) = 4 - 4m \xrightarrow{\text{تابع فقط یک ریشه دارد} \Delta < 0} 4 - 4m < 0 \xrightarrow{\text{حل کن}} m > 1$$

۲ اگر تست بگویند: «تابع چاق و لاغر، بر محور  $x$  ها مماس است»، در این صورت یکی از دو حالت زیر برقرار است:

الف: دلتای عبارت درجه‌ی دوم صفر بوده است.

ب: ریشه‌ی عبارت درجه‌ی اول (همون لاغره) باید ریشه‌ی عبارت درجه‌ی دوم باشد.

تست: نمودار تابع  $y = (\frac{1}{3}x - k)(x^2 + 2x - 3)$  بر محور  $x$  ها مماس است. در این صورت تفاضل مقادیر  $k$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{2}{3}$  (۳)  $1$  (۴)  $\frac{4}{3}$

پاسخ همان طور که می‌بینید در قسمت چاق،  $\Delta$  نمی‌تواند صفر شود:

$$x^2 + 2x - 3 \xrightarrow{\Delta \text{ چاق و حساب کن}} \Delta = 2^2 - 4(1)(-3) = 16$$

پس می‌ماند یک راه! ریشه‌ی عبارت لاغر باید در تابع چاق صدق کند تا نمودار تابع بر محور  $x$  ها مماس شود:

$$\frac{1}{3}x - k = 0 \xrightarrow{\text{ریشه و حساب کن}} \frac{1}{3}x = k \Rightarrow x = 3k \xrightarrow{\text{بذار نوی تابع درجه‌ی دوم}} (3k)^2 + 2(3k) - 3 = 0 \xrightarrow{x^2 + 2x - 3 = 0}$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} 9k^2 + 6k - 3 = 0 \xrightarrow{\text{جمع ضرایب اول و سوم یا دومی برابر است}} k = -1, k = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{تفاضل}} \left(\frac{1}{3}\right) - (-1) = \frac{4}{3}$$

### وضعیت سهمی و نواحی مختصات

بر اساس این که سهمی از کدام ناحیه‌ها بگذرد می‌توانیم روی علامت ضرایب  $a$ ،  $b$ ،  $c$  و البته  $\Delta$  بحث کنیم. این جا معروفترین موارد را بررسی می‌کنیم:

۱ سهمی از چهار ناحیه بگذرد: کافی است  $P < 0$  باشد...

۲ سهمی فقط از دو ناحیه بگذرد: کافی است  $\Delta \leq 0$  باشد...

۳ سهمی فقط از سه ناحیه بگذرد: کافی است  $P \geq 0$  و  $\Delta > 0$  باشد.

| $y = x^2 - 4x + 3$     | $y = -x^2 + 2x - 2$    | $y = x^2 - 2x + 2$     | $y = x^2 - x - 2$ |
|------------------------|------------------------|------------------------|-------------------|
|                        |                        |                        |                   |
| $\Delta > 0$ و $P > 0$ | $\Delta < 0$ و $a < 0$ | $\Delta < 0$ و $a > 0$ | $P < 0$           |

**تست:** سهمی با معادله  $y = x^2 + x + \frac{1-m}{6+m} = 0$  فقط از ناحیه‌ی اول نمی‌گذرد. چند جواب صحیح برای  $m$  وجود دارد؟

- (۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

**پاسخ** یعنی از ناحیه‌های دوم و سوم و چهارم می‌گذرد:

۱  $P \geq 0 \Rightarrow \frac{1-m}{6+m} \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -6 < m \leq 1$

۲  $\Delta > 0 \Rightarrow 1 - 4\left(\frac{1-m}{6+m}\right) > 0 \xrightarrow{\text{ساده}} \frac{5m+2}{6+m} > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m < -\frac{2}{5} \text{ یا } m > -6$

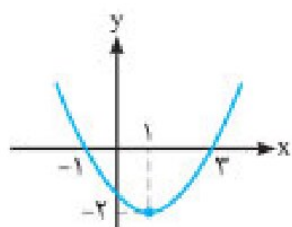
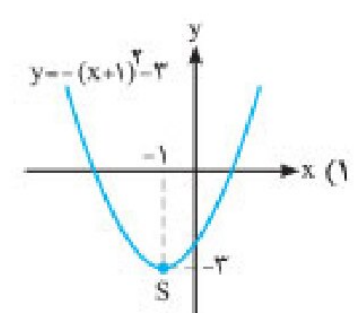
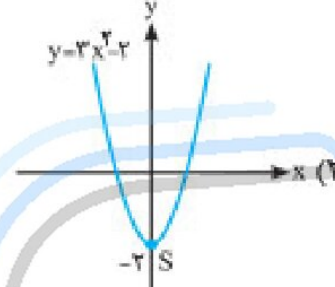
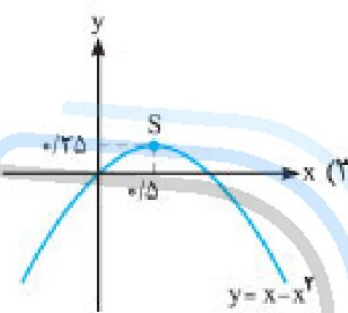
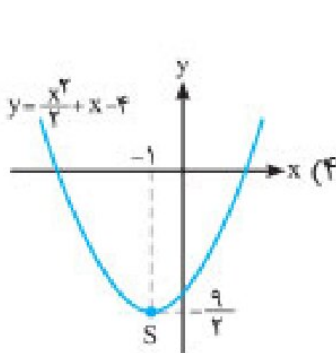
اشتراک ۱ و ۲ می‌شود  $1 < m \leq -\frac{2}{5}$  و اعداد صحیح این بازه هم عبارت‌اند از: ۱ و ۰.

## تست‌های دستگرمی و آموزشی

## تکلیف شب

(کتاب درسی)

۸۱. معادله‌ی کدام سهمی به‌درستی کنار آن نوشته نشده است؟



۸۲. معادله‌ی سهمی شکل مقابل کدام است؟

(۱)  $y = x^2 - 2x - 1$

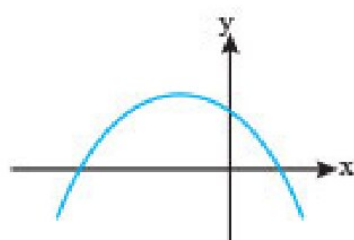
(۳)  $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$

(۲)  $y = 2x^2 + x - 1$

(۴)  $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$

۸۳. سهمی به معادله  $y = ax^2 + bx + c$  محور  $y$  ها را در نقطه‌ای به عرض ۲ و محور  $x$  ها را در نقاطی به طول ۱ و ۲ قطع کرده است. این سهمی از کدام نقطه عبور می‌کند؟

- (۱)  $(-2, -3)$  (۲)  $(2, 2)$  (۳)  $(\frac{1}{2}, 2)$  (۴)  $(1, 2)$



۸۴. نمودار تابع  $f(x) = ax^2 + bx + c$  به‌صورت مقابل است. چه تعداد از نامعادلات  $ab > 0$ ,  $bc < 0$ ,  $ac > 0$  درست است؟

$b^2 < 4ac$  درست است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۸۵. به ازای کدام مقادیر  $m$ ، سهمی به معادله  $y = (m+2)x^2 + 3x + 1 - m$  محور  $x$  ها را در هر دو طرف مبدأ مختصات قطع می‌کند؟

- (۱)  $m > 1$  یا  $m < -2$  (۲)  $-2 < m < 1$  (۳) فقط  $m < -2$  (۴) فقط  $m > 1$

۸۶. به ازای کدام مجموعه مقادیر  $m$ ، سهمی به معادله  $y = (1-m)x^2 + 2(m-3)x - 1$ ، همواره پایین محور  $x$  هاست؟

- (۱)  $1 < m < 5$  (۲)  $2 < m < 5$  (۳)  $2 < m < 4$  (۴)  $2 < m < 6$

۸۷. به ازای کدام مقدار  $m$  سهمی به معادله  $y = (m-2)x^2 - 3x + m + 2$  بالای محور طول‌ها و مماس بر آن است؟

- (۱)  $-2$  (۲)  $-\frac{5}{2}$  (۳)  $\frac{5}{2}$  (۴)  $2$

۸۸. به ازای چه مقادیری از  $k$ ، عبارت  $A = x^2 + 3x + k$  همواره مثبت است؟

- (۱)  $k > \frac{9}{4}$  (۲)  $k < \frac{9}{4}$  (۳)  $k > -\frac{9}{4}$  (۴)  $k < -\frac{9}{4}$

۸۹. به ازای چه مقادیری از  $a$ ، سهمی به معادله  $y = ax^2 - (a+2)x$  هیچ‌گاه از ناحیه‌ی سوم محورهای مختصات عبور نمی‌کند؟

- (۱)  $a \leq 2$  (۲)  $a > 0$  (۳)  $a \leq -2$  (۴)  $-2 \leq a < 0$

۹۰. سهمی به معادله  $y = (2x+1)(x+8)$  با خط به معادله  $y = mx$  نقطه‌ی مشترک ندارد. مجموعه‌ی مقادیر  $m$  کدام است؟

- (۱)  $(5, 13)$  (۲)  $(15, 23)$  (۳)  $(7, 15)$  (۴)  $(9, 25)$

## ایستگاه ۳ کاربرد سهمی در مسائل ماکزیمم و مینیمم

بازدهم فصل ۱

تست‌های پیدا کردن بیشترین مقدار یا کمترین مقدار، اگر به تابع درجه‌ی دوم برسند، با ویژگی‌های سهمی حل می‌شوند؛ این‌جا این‌ها را ببین...

فرم این تست‌ها این‌طوری است که در ظاهر خبری از عبارت درجه‌ی دوم، ریشه و... نیست؛ صورت تست یک مسئله‌ی ریاضی است که با یک سری توضیحات، در نهایت خواسته که یک چیزی ماکزیمم یا مینیمم شود. شاخصه‌ی اصلی تست‌هایی که چنین فرمی دارند و با کمک تابع درجه‌ی دوم حل می‌شوند، این است که دوتا متغیر در تست حضور دارد. (معمولاً مثبت‌اند، چون در سؤالات کاربردی و عملی حضور داریم...) اما روش برخورد ما با این تست‌ها این‌طوری است:

- ۱ از رابطه‌ای که بین دو تا متغیر داده شده است، یکی را برحسب دیگری پیدا می‌کنیم؛ مثلاً  $m$  را برحسب  $n$ . **ببین:**  $m + 2n = 4 \Rightarrow m = 4 - 2n$
- ۲ حالا عبارتی را که قرار است ماکزیمم یا مینیمم شود می‌نویسیم و بعد متغیری را که در مرحله‌ی قبل برحسب دیگری پیدا کرده بودیم، در این رابطه جای‌گذاری کرده و ساده می‌کنیم.
- ۳ **خب الان عبارتی که در مرحله‌ی ۲ پیدا کرده‌اید، یک عبارت درجه‌ی دوم است برحسب یک متغیر.** جالب است بدانید اگر تست خواسته باشد که عبارت ماکزیمم شود، به تابع درجه‌ی دومی با  $a$  منفی خواهید رسید و چنانچه بخواهد که مینیمم شود، حتماً در تابع درجه‌ی دوم حاصل،  $a$  مثبت درمی‌آید؛ منظورمان از  $a$ ، ضریب  $x^2$  است!

می‌دانید برای آن که عبارت  $ax^2 + bx + c$  به ماکزیمم یا مینیمم خود برسد باید  $x$  مساوی  $-\frac{b}{2a}$  شود و مقدار ماکزیمم یا مینیمم هم،  $-\frac{\Delta}{4a}$  است.

**تست:** برای دو عدد مثبت  $x$  و  $y$  می‌دانیم:  $3x + 2y = 24$ . اگر  $xy$  بیشترین مقدار ممکن باشد، مقدار  $y - x$  کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ

$$3x + 2y = 24 \xrightarrow{\text{کسرها تفکیک کن}} x(12 - \frac{3}{2}x) \xrightarrow{\text{در رابطه بنذار}} xy = x(\frac{24 - 3x}{2}) \xrightarrow{\text{y را پیدا کن}} y = \frac{24 - 3x}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب کن}} 12x - \frac{3}{2}x^2 \xrightarrow{\text{مرتبه کن}} -\frac{3}{2}x^2 + 12x \xrightarrow{\text{ماکزیمم شود}} x = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2(-\frac{3}{2})} = -\frac{12}{-3} = 4$$

$$\xrightarrow{y = \frac{24 - 3x}{2}} y = \frac{24 - 3(4)}{2} = \frac{24 - 12}{2} = \frac{12}{2} = 6 \Rightarrow y - x = 6 - 4 = 2$$

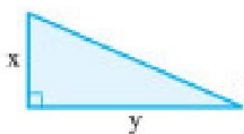
**تست:** مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای که مجموع دو ضلع قائمه‌ی آن ۱۶ است، بیشترین مقدار خود را دارد. این مساحت چقدر است؟

۸ (۱) ۱۶ (۲) ۳۲ (۳) ۶۴ (۴)

پاسخ

$$x + y = 16 \xrightarrow{y \text{ را برحسب } x \text{ بنویس}} y = 16 - x \xrightarrow{S = \frac{1}{2}xy} S = \frac{1}{2}x(16 - x) \xrightarrow{\text{ضرب کن}} 8x - \frac{1}{2}x^2 \xrightarrow{\text{مرتبه کن}} S = -\frac{1}{2}x^2 + 8x$$

$$\xrightarrow{S \text{ ماکزیمم شود}} S \text{ بیشترین مقدار} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{64 - 4(-\frac{1}{2})(64)}{4(-\frac{1}{2})} = -\frac{64}{(-2)} = 32$$



## تکلیف شب تست‌های دستگرمی و آموزشی

۹۱. مجموع دو عدد برابر ۱۱۰ است. اگر حاصل ضرب این دو عدد بیشترین مقدار ممکن باشد، مجموع مربعات این دو عدد کدام است؟

۶۱۰۰ (۱) ۳۰۲۵ (۲) ۳۰۵۰ (۳) ۶۰۵۰ (۴)

۹۲. یک پرتابگر وزنه، در یک مسابقه‌ی ورزشی وزنه‌ای را پرتاب می‌کند. اگر معادله‌ی مسیر حرکت وزنه برحسب زمان به صورت  $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + 2$  باشد،

بیشترین ارتفاع وزنه از سطح زمین چقدر است؟

۴۱ (۱) ۴۱ (۲) ۹ (۳) ۲۵ (۴)

۹۳. محیط مستطیلی ۳۰ متر است. ماکزیمم مساحت این مستطیل، چقدر است؟

۲۲۵ (۱) ۲۰۹ (۲) ۵۶/۲۵ (۳) ۱۱/۲۵ (۴)

۹۴. مستطیلی را با کمک یک سیم به طول ۲۰ ساخته‌ایم. اگر بخواهیم قطر این مستطیل کمترین مقدار ممکن شود، مساحت مستطیل چقدر است؟

۲۴ (۱) ۳۵ (۲) ۳۰ (۳) ۲۵ (۴)

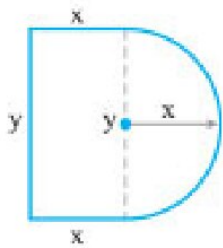
۹۵. بین مثلث هایی که مجموع طول قاعده و ارتفاع وارد بر همان قاعده برابر ۱۲ واحد است، بیشترین مساحت چند واحد مربع است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۱۸ (۳) ۲۴ (۴) ۳۰

۹۶. بین ارتفاع (h) و قاعده ی (b) متوازی الاضلاعی رابطه ی  $b + h = 9$  برقرار است. بیشترین مقدار مساحت ممکن که با این متوازی الاضلاع می توان ساخت، چقدر است؟

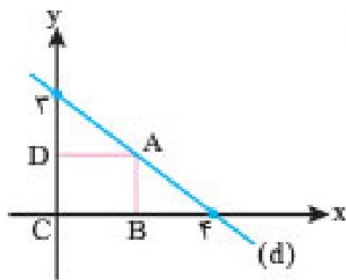
- (۱)  $20/25$  (۲)  $20/5$  (۳)  $10/25$  (۴)  $10/5$

۹۷. می خواهیم با طنابی به طول ۷۰ متر، سطحی متشکل از یک مستطیل و یک نیم دایره مطابق شکل ایجاد کنیم. حداکثر مساحت ایجاد شده برابر است با: ( $\pi \approx 3$ )



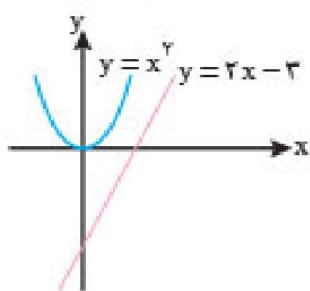
- (۱)  $1050 m^2$  (۲)  $1150 m^2$  (۳)  $1225 m^2$  (۴)  $350 m^2$

۹۸. با توجه به شکل مقابل، نقطه ی A روی خط d در حال حرکت است. بیشترین مقدار ممکن برای مساحت مستطیل ABCD کدام است؟



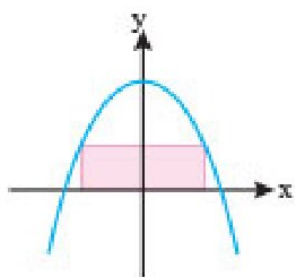
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۹۹. در یک پارک، دو مسیر برای پیاده روی یکی روی خط  $y = 2x - 3$  و دیگری روی منحنی  $y = x^2$  ساخته شده است. دو شخص A و B هر کدام روی یکی از این دو مسیر در حال حرکت هستند. حداقل فاصله ی ممکن بین این دو نفر چقدر است؟



- (۱)  $\frac{1}{\sqrt{5}}$  (۲)  $\frac{2}{\sqrt{5}}$  (۳)  $\frac{3}{\sqrt{5}}$  (۴)  $\frac{4}{\sqrt{5}}$

۱۰۰. مطابق شکل یک مستطیل را درون سهمی  $f(x) = 12 - x^2$  محاط کرده ایم. بیشترین محیط این مستطیل کدام است؟



- (۱) ۱۳ (۲) ۲۶ (۳) ۵۲ (۴) ۳۹

### فال متولد خرداد

ریاضی را دوست داری ولی همیشه برای انجام آن بهانه تراشی می کنی...

اگه یه خرده سبک تر بود حتما می نوشتم!



## فصل در یک نگاه



< تمام سهمی  $f(x) = ax^2 + bx + c$

رأس:  $x_S = -\frac{b}{2a}$  و عرض آن هم  $f(-\frac{b}{2a})$  است یا  $S(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$

$\Delta > 0$ : در دو نقطه تلاقی با محور  $x$  ها می‌کند.

اگر  $a > 0$  بود، مماس بر محور  $x$  ها و بالای آن است.

اگر  $a < 0$  بود، مماس بر محور  $x$  ها و پایین آن است.

اگر  $a > 0$  باشد، همواره بالای محور  $x$  ها قرار می‌گیرد.

اگر  $a < 0$  باشد، سهمی همواره پایین محور  $x$  ها خواهد بود.

علامت  $a$ :  
 $a > 0$ : دهانه‌ی سهمی رو به بالاست و مینیمم دارد:  
 $a < 0$ : دهانه‌ی سهمی رو به پایین است و ماکزیمم دارد:  
 مقدار  $\max$  یا  $\min = -\frac{\Delta}{4a}$

معادله:  $x = -\frac{b}{2a}$ : خطی قائم و گذرنده از رأس:  
 کاربرد در تست: اگر طراح گفت  $f(m) = f(n)$ ، نتیجه بگیرید که  $m = n$  یا  $m + n = -\frac{b}{a}$   
 محور تقارن

مماس: اگر سهمی بر خط  $y = mx + h$  مماس بود، از معادله‌ی  $ax^2 + bx + c = mx + h$  انتظار ریشه‌ی مضاعف داشته باش!

تلاقی با محور  $y$  ها: همیشه در نقطه‌ای به عرض  $c$  یعنی  $(0, c)$ .

رأس را داده: با رأس  $S(h, k)$  معادله را به فرم  $y = a(x - h)^2 + k$  بنویس...

نوشتن معادله‌ی سهمی: صفرهای سهمی را داده: با  $x_1$  و  $x_2$  معادله را به فرم  $y = a(x - x_1)(x - x_2)$  بنویس...

مختصات رأس:  $S(h, k)$  که یعنی مقدار ماکزیمم یا مینیمم سهمی  $k$  است.

علامت  $a$ : باز هم  $a > 0$  یعنی دهانه‌ی رو به بالا و  $a < 0$  یعنی دهانه‌ی رو به پایین...

فقط دو ناحیه را می‌بیند: قرار بده  $\Delta \leq 0$

فقط سه ناحیه را می‌بیند: قرار بده  $\Delta \geq 0$  و  $P \geq 0$

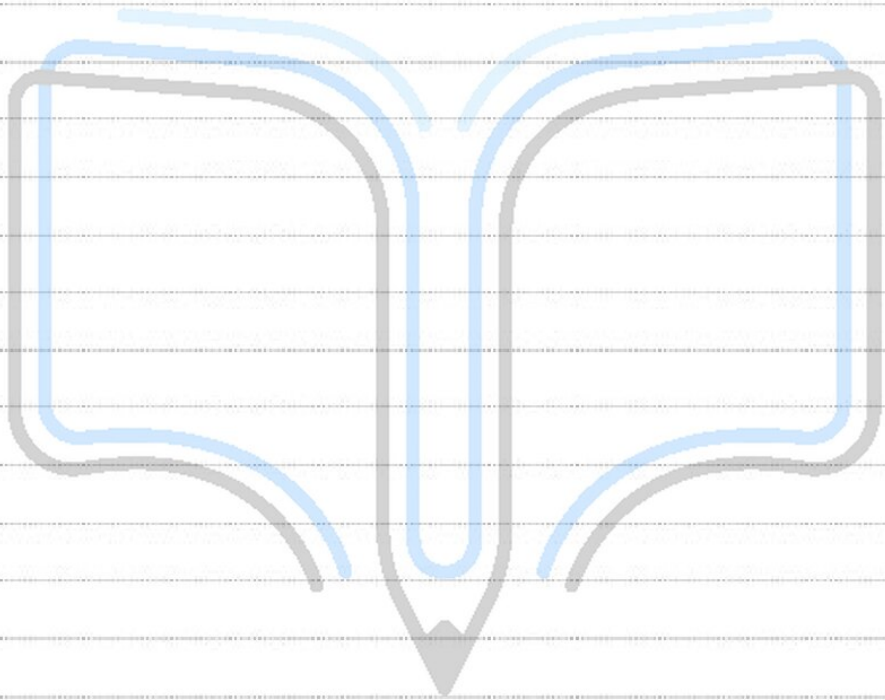
هر چهار ناحیه را می‌بیند: قرار بده  $P < 0$

MEDABOOK  
ONLINE BOOKSHOP

تا صد درصد پرواز کن!

برو سراغ «آزمون‌یوم ریاضیات تجربی»، فقط آزمون‌های استاندارد  
و سطح‌بندی‌شده بزن، خودتو بیمه کن.  
صد آزمون برای صد درصد





MEDABOOK  
ONLINE BOOKSHOP

۴۹۹ پاسخنامه‌ی تشریحی

### فصل ۳ تابع درجه‌ی دوم (سهمی)

۷۱. (گزینه ۲) برای سهمی به معادله‌ی  $y = ax^2 + bx + c$  اگر نقطه‌ی  $S$  رأس آن باشد،

آن‌گاه  $S(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$  یعنی:  $y_S = \frac{-\Delta}{4a}$  و  $x_S = \frac{-b}{2a}$

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} + 1 \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{\frac{1}{4}}{2(\frac{1}{2})} = \frac{1}{4}$$

$$\Delta = (\frac{-1}{4})^2 - 4(\frac{1}{2})(1) = \frac{1}{16} - 2 = \frac{-31}{16} \Rightarrow y_S = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{\frac{-31}{16}}{4(\frac{1}{2})} = \frac{31}{32}$$

در نهایت:  $S(\frac{1}{4}, \frac{31}{32})$

🟡 زنگی: در سهمی‌ای یا ضرایب کسری اگر طول رأس سهمی  $x$  باشد، عرض آن

را از رابطه‌ی  $y = c - ax^2$  پیدا کنید  
 $x = \frac{1}{4} \Rightarrow y = 1 - \frac{1}{2}(\frac{1}{4})^2 = 1 - \frac{1}{32}$

۷۲. (گزینه ۱) رأس سهمی به معادله‌ی  $y = ax^2 + bx + c$  زمانی روی محور  $y$  ها واقع

می‌شود که  $b = 0$  باشد، چون باید اتفاق  $x_S = \frac{-b}{2a} = 0$  بیفتد!!

$$y = -3x^2 + (2m-1)x + 5 \xrightarrow{b=0} 2m-1=0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = -3x^2 + 5$$

حالا باید سهمی به معادله‌ی  $y = -3x^2 + 5$  را با خط به معادله‌ی  $y - 2 = 0$  یا همان  $y = 2$  تلاقی دهیم:

$$\begin{cases} y = -3x^2 + 5 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow -3x^2 + 5 = 2 \Rightarrow -3x^2 = -3 \Rightarrow x^2 = 1$$

$$\xrightarrow{-(-3)} x^2 = 1 \xrightarrow{\text{ریشه‌ی دوم بگیر}} x = \pm 1$$

۷۳. (گزینه ۳)

$$y = 1 - 2mx + 3x^2 \xrightarrow{\text{استاندارد بنویس}} y = 3x^2 - 2mx + 1$$

$$\xrightarrow{\text{محور تقارن}} x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2m)}{2(3)} = \frac{m}{3}$$

$$\Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2m)}{2(3)} = \frac{m}{3} \Rightarrow m = -3$$

۷۴. (گزینه ۲) در سهمی به معادله‌ی  $y = ax^2 + bx + c$  خط  $x = -\frac{b}{2a}$  محور تقارن سهمی است:

$$y = x^2 + bx + 8 \Rightarrow -\frac{b}{2a} = \frac{-b}{2 \times 1} = 3 \Rightarrow b = -6 \Rightarrow y = x^2 - 6x + 8$$

$$\xrightarrow{\text{تلاقی با محور } x} x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-4) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ یا } 4$$

که فقط  $x = 2$  در گزینه‌ها آمده است.

۷۵. (گزینه ۲)

$$y = \frac{(m-2)x^2}{a} - \frac{(fm-2)x}{b} + \frac{c}{c}$$

$$\xrightarrow{\text{طول رأس}} x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x = -\frac{-(fm-2)}{2(m-2)} = \frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{حل معادله}} 4m-2 = 6m-12 \Rightarrow 2m = 10 \Rightarrow m = 5$$

$$\Rightarrow m = 5 \xrightarrow{\text{جای گذاری کن}} y = 3x^2 - 18x + 20$$

$$\begin{cases} \Delta = 18^2 - 4 \times 3 \times 20 = 18(18-20) < 0: \text{محور } x \text{ ها را قطع نمی‌کند} \\ a = 3 > 0: \text{سهمی روبه بالا است} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{کمترین مقدار سهمی ۳ است.} \\ y_S = 3(3)^2 - 18(3) + 20 = 3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{در سهمی}} x = 2 \Rightarrow y = 3(2)^2 - 18(2) + 20 = 6: \text{می‌گذرد } (2, 6)$$

۶۶. (گزینه ۳) آن دو عدد طبیعی فرد متوالی را  $2n-1$  و  $2n+1$  در نظر می‌گیریم:

$$(2n-1)^2 + (2n+1)^2 = 290$$

پس:

$$\xrightarrow{\text{اتحادها رو باز کن}} (4n^2 - 4n + 1) + (4n^2 + 4n + 1) = 290$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} 8n^2 + 2 = 290 \xrightarrow{-2} 8n^2 = 288$$

$$\xrightarrow{+8} n^2 = 36 \xrightarrow{\text{جذری بگیر}} n = \pm 6 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{عدد فرد اول} = 2(6) - 1 = 11 \\ \text{عدد فرد بعدی} = 2(6) + 1 = 13 \end{cases} \xrightarrow{\text{ضرب کن}} 11 \times 13 = 143$$

۶۷. (گزینه ۳) هدف تست: حل معادله‌ی  $0.006s^2 - 0.02s + 12.0 = 124$  یا

$$0.006s^2 - 0.02s - 4 = 0 \text{ است. طرفین را در } 1000 \text{ ضرب کنید!}$$

$$6s^2 - 20s - 4000 = 0 \xrightarrow{+20} 6s^2 - 10s - 2000 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{از } \Delta \text{ بیو}} s = \frac{10 \pm \sqrt{24100}}{6}$$

$$\Delta = (-10)^2 - 4(6)(-2000) = 24100$$

$$\sqrt{24100} = 10\sqrt{241} \approx 10(15.5) = 155 \Rightarrow s = \frac{10 \pm 155}{6}$$

$$\Rightarrow s = \frac{165}{6} = 27.5 \checkmark, s = \frac{-145}{6} < 0 \times$$

یعنی سن فرد موردنظر یا فشارخون  $124 \text{ mmHg}$  برابر  $27.5$  است.

۶۸. (گزینه ۳)

$$\Rightarrow m \text{ داده‌های سؤال را هندسی کن.}$$

$$S_{\text{مستطیل}} = (fm+2) \times m = 45 \xrightarrow{\text{مرتب کن}} fm^2 + 2m - 45 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{از روش } \Delta \text{ حل کن}} \Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(f)(-45) = 729$$

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{729}}{f} = \frac{-2 \pm 27}{f} = 3 = \text{عرض}$$

$$\Rightarrow fa + 2 = f(3) + 2 = 15 = \text{طول} \Rightarrow \text{قطر} = \sqrt{3^2 + 15^2} = \sqrt{234}$$

حالت  $m = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  یا توجه به مثبت بودن  $a$  و  $b$  جواب منفی برای  $m$  می‌دهد

که خوب نشدنی است!

۶۹. (گزینه ۲)

$$a^2 + b^2 = (\sqrt{106})^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 106$$

$$a + b = 14 \Rightarrow b = 14 - a$$

حال اگر در رابطه‌ی  $a^2 + b^2 = 106$  قرار دهیم  $b = 14 - a$  داریم:

$$a^2 + (14-a)^2 = 106 \xrightarrow{\text{اتحاد رو باز کن}} a^2 + 196 - 28a + a^2 = 106$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب کن}} 2a^2 - 28a + 90 = 0 \xrightarrow{+2} a^2 - 14a + 45 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{حل از روش تجزیه اتحاد جمله مشترک}} (a-9)(a-5) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{ویزگی}} \begin{cases} a-9=0 \Rightarrow a=9 \\ \text{یا} \\ a-5=0 \Rightarrow a=5 \end{cases} \xrightarrow{\text{با توجه به فرض } b=14-a} \begin{cases} b=14-9=5 \\ \text{یا} \\ b=14-5=9 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{در هر دو حالت}} S = \frac{1}{2} \times 9 \times 5 = \frac{45}{2} = 22.5$$

۷۰. (گزینه ۲)

$$\begin{cases} a \times b = 26 \\ 2(a+b) = 21 \Rightarrow a+b = \frac{21}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{طبق فرض}}$$

$$\xrightarrow{\text{جای گذاری در معادله } x^2 - Sx + P = 0} x^2 - \frac{21}{2}x + 26 = 0 \Rightarrow a-b = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = \frac{\sqrt{(\frac{-21}{2})^2 - 4 \times 26}}{1}$$

$$= \sqrt{\frac{441}{4} - 104} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = 2.5$$



۸۰. (گزینه ۲) صفرهای تابع، همان ریشه های معادله ی درجه ی دو  $2x^2 + bx + c = 0$  هستند یعنی  $-3$  و  $5$ . حالا:

$$2x^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow -3 + 5 = -\frac{b}{2} \Rightarrow b = -6 \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow (-3)(5) = \frac{c}{2} \Rightarrow c = -45 \end{cases}$$

پس معادله ی سهمی به صورت  $y = 2x^2 - 6x - 45$  بوده و می دانیم که کمترین مقدار این تابع همان عرض رأس سهمی است، پس:

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-6)}{2 \times 2} = 1 \Rightarrow y_S = f(1) = 2(1)^2 - 6 \times 1 - 45 = -48$$



معادله ی سهمی را بنویس:  $y = 2(x+3)(x-5) = 2x^2 - 6x - 45$  ریشه ها:  $-3, 5$

۸۱. (گزینه ۱) در گزینه ی «۱» با این که مختصات رأس سهمی به درستی بیان شده، یک ایراد اساسی وجود دارد و آن این است که ضریب  $x^2$  در سهمی به معادله ی  $y = -(x+1)^2 - 3$  منفی است و دهانه ی سهمی باید رو به پایین باز شود! یادمان هست که در سهمی به معادله ی  $y = a(x-h)^2 + k$ ، مختصات رأس سهمی به صورت  $S(h, k)$  است. در سایر گزینه ها هم مختصات رأس سهمی و هم دهانه ی سهمی (با توجه به علامت  $a$ ) به درستی بیان و رسم شده است. همان طور که می دانید در سهمی هایی به فرم کلی  $y = ax^2 + c$  (که فاقد  $x$  هستن) رأس سهمی به مختصات  $S(0, c)$ ، روی محور  $y$  ها قرار دارد. (گزینه ی «۲» این گونه است!)

گزینه ی ۳:  $y = -x^2 + x \Rightarrow x_S = -\frac{1}{-2} = 0.5$

در سهمی  $y_S = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0.25$

گزینه ی ۴:  $y = \frac{x^2}{2} + x - 4 \Rightarrow x_S = -\frac{1}{1} = -1$

در سهمی  $y_S = \frac{1}{2} - 1 - 4 = -\frac{9}{2}$

۸۲. (گزینه ۴) روش اول

معادله بنویس:  $y = a(x-x_1)(x-x_2)$  صفرهای سهمی:  $3, -1$

$\Rightarrow y = a(x-3)(x+1) \xrightarrow{\text{صدق بد.}} -2 = a(1-3)(1+1) \Rightarrow -2 = -4a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

جای گذاری  $\Rightarrow y = \frac{1}{2}(x-3)(x+1) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$

روش دوم در گزینه ها تمرین کار با سهمی کنیم:

گزینه ی ۱:  $y = x^2 - 2x - 1 \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$

در سهمی  $y_S = 1 - 2 - 1 = -2$  ✓

گزینه ی ۲:  $y = 2x^2 + x - 1 \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{4} \neq 1$  ✗

گزینه ی ۳:  $y = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{1} = -1$

در سهمی  $y_S = \frac{1}{2}(-1)^2 + 1 + \frac{3}{2} = 2 \neq -2$  ✗

گزینه ی ۴:  $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{1} = 1$

در سهمی  $y_S = \frac{1}{2}(1)^2 - 1 - \frac{3}{2} = -2$  ✓

گزینه ی ۵:  $A(-1, 0) \xrightarrow{\text{در سهمی}} 0 = \frac{1}{2}(-1)^2 - (-1) - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + 1 - \frac{3}{2} = 0$  ✓

گزینه ی ۶:  $A(-1, 0) \xrightarrow{\text{در سهمی}} 0 = \frac{1}{2}(-1)^2 - (-1) - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + 1 - \frac{3}{2} = 0$  ✓

۸۳. (گزینه ۴) چون سهمی محور  $x$  ها را در دو نقطه به طول های  $-1$  و  $2$  قطع کرده است، پس می توان معادله ی آن را به صورت  $y = a(x+1)(x-2)$  در نظر گرفت. از طرف دیگر نقطه ی  $(0, 2)$  روی سهمی است! پس:

$2 = a(0+1)(0-2) \Rightarrow a = -1$

۷۶. (گزینه ۲) مختصات رأس سهمی را به دست آورده و در معادله ی خط  $y = -x$  صدق می دهیم:

$y = -2x^2 + bx - 3 \xrightarrow{\text{طول رأس}} x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-b}{2(-2)} = \frac{b}{4}$

در معادله ی سهمی قرار ده:  $y_S = y(\frac{b}{4}) = -2(\frac{b}{4})^2 + b(\frac{b}{4}) - 3$

$= -2 \times \frac{b^2}{16} + \frac{b^2}{4} - 3 = -\frac{b^2}{8} + \frac{b^2}{4} - 3 = \frac{b^2}{8} - 3 \Rightarrow S(\frac{b}{4}, \frac{b^2}{8} - 3)$

حالا باید رأس سهمی در معادله ی خط  $y = -x$  یا  $y + x = 0$  صدق کند:

$\frac{b^2}{8} - 3 + \frac{b}{4} = 0 \xrightarrow{\times 8} b^2 + 2b - 24 = 0$

$\xrightarrow{\text{تجزیه کن}} (b+6)(b-4) = 0 \Rightarrow b+6=0 \text{ یا } b-4=0$

$\Rightarrow \begin{cases} b = -6 \xrightarrow{\text{در این صورت}} S(\frac{b}{4}, \frac{b^2}{8} - 3) = (-\frac{6}{4}, \frac{36}{8} - 3) = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) \checkmark \\ \text{یا} \\ b = 4 \xrightarrow{\text{در این صورت}} S(\frac{b}{4}, \frac{b^2}{8} - 3) = (\frac{4}{4}, \frac{16}{8} - 3) = (1, -1) \times \end{cases}$  ناحیه ی ۴

نقاط روی خط  $y = -x$  اگر در ناحیه ی دوم باشند دارای طول منفی و عرض مثبت اند.

روش دوم: رأس سهمی در ناحیه ی دوم است پس طول منفی دارد:

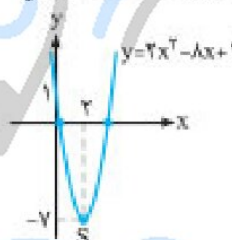
$y = -2x^2 + bx - 3 \xrightarrow{\text{طول رأس}} -\frac{b}{2a} = \frac{-b}{-4} < 0$

یعنی  $b$  منفی است! هر گزینه ای که  $b > 0$  دارد حذف می شود؛ یعنی همه به جز گزینه ی «۲»!

۷۷. (گزینه ۲)

$y = 2x^2 - 8x + 1 \Rightarrow \begin{cases} x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{8}{4} = 2 \\ y_S = y(2) = 2(2)^2 - 8(2) + 1 = -7 \end{cases} \Rightarrow S(2, -7)$

دهانه ی سهمی رو به بالا باز میشه  $a = 2 > 0$   
محل تلاقی نمودار با محور  $y$  ها  $\Rightarrow y(0) = 1$



رسم شکل نشان می دهد که سهمی وارد ناحیه ی سوم نمی شود.

۷۸. (گزینه ۲) بیشترین مقدار سهمی، همان عرض رأس آن است:  $a < 0, y_{\max} = -\frac{\Delta}{4a}$

$\frac{-(400 + 480a)}{4a} = 180 \Rightarrow -400 - 480a = 720a$

$\Rightarrow -400 = 1200a \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$



فرض  $180 = x_S = -\frac{100}{a} \Rightarrow y_S = c - ax^2 = -120 - \frac{100}{a}$

$\Rightarrow \frac{100}{a} = -300$

۷۹. (گزینه ۱) سهمی دارای  $\min$  است، از این رو دهانه ی سهمی رو به بالاست و در نتیجه  $m > 0$ .

$y = mx^2 - 12x + 5m - 1 \xrightarrow{\text{فرض است}} \min = 2 \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a} = 2$

$\Rightarrow -\frac{(-12)^2 - 4 \times m(5m-1)}{4m} = 2 \Rightarrow \frac{4m^2 - m - 36}{m} = 2 \Rightarrow 4m^2 - 3m - 36 = 0$

$\xrightarrow{\text{حل کن}} 4m^2 - 3m - 36 = 0 \xrightarrow{\text{ضرب کن}} m^2 - 3m - 18 = 0$

$\Rightarrow (m-15)(m+12) = 0 \xrightarrow{m>0} m = \frac{15}{4} = 3.75$

$\Rightarrow y = 3x^2 - 12x + 14 \xrightarrow{\text{محور تقارن سهمی}} x = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{2 \times 3} = 2$

پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ۵۰۱

$$y = (1-m)x^2 + 2(m-2)x - 1$$

شکل تقریبی سهمی پایین محور  $x$  هاست

$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1-m < 0 \Rightarrow m > 1 \\ \Delta = (2(m-2))^2 - 4(1-m)(-1) < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta = 4(m^2 - 6m + 9) + 4(1-m) < 0 \xrightarrow{+4}$$

$$m^2 - 6m + 9 + 1 - m < 0 \Rightarrow m^2 - 7m + 10 < 0$$

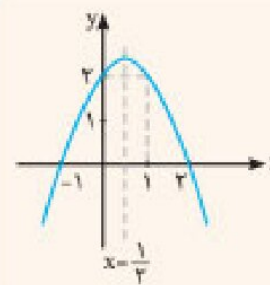
$$\Rightarrow (m-5)(m-2) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 2 < m < 5$$

$$\underline{1} \cap \underline{2} \Rightarrow 2 < m < 5$$

۸۶. گزینه ۲

بنابراین معادله‌ی سهمی  $y = -(x+1)(x-2)$  است؛ بررسی گزینه‌ی «۴»:

$$A(1,2) \xrightarrow{\text{نقطه سهمی}} 2 = -(1+1)(1-2) \Rightarrow 2 = 2 \quad \checkmark$$



رنگی: نقطه‌های  $(-1,0)$  و  $(2,0)$  روی سهمی

هستند؛ پس معادله‌ی محور تقارن آن  $x = \frac{1}{2}$  است.

$$y(0) = 2 \Rightarrow y(1) = 2$$

۸۴. گزینه ۳

دهانه‌ی سهمی رویه پایین است، پس:  $a < 0$

محل تلاقی تابع یا محور  $y$  ها مقداری مثبت است، یعنی  $f(0) > 0$  است، پس:

$$f(0) = 0 + 0 + c > 0 \Rightarrow c > 0$$

طول رأس سهمی، عددی منفی است، یعنی:

$$x_s = \frac{-b}{2a} < 0 \xrightarrow{x(-1)} \frac{b}{2a} > 0 \xrightarrow{a < 0} b < 0$$

بنابراین داریم:

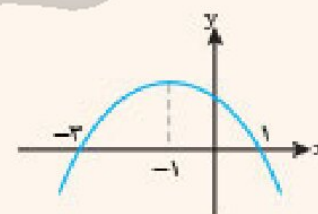
$$\begin{cases} ac < 0 \quad \times \\ a, b < 0, c > 0 \Rightarrow \begin{cases} ab > 0 \quad \checkmark \\ bc < 0 \quad \checkmark \end{cases} \end{cases}$$

همچنین سهمی در دو نقطه محور  $x$  ها را قطع کرده است، پس  $\Delta > 0$  است، بنابراین داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow b^2 > 4ac$$

پس دو مورد از نامعادلات داده‌شده صحیح است.

رنگی: مثال عددی فرضی در نظر می‌گیریم:



$$\text{معادله سهمی } y = -x^2 - 2x + 3 \xrightarrow{S=-2, P=3} \text{ریشه‌ها } -3, 1$$

$$\Rightarrow ac = -3 < 0, bc = -6 < 0, ab = 2 > 0, b^2 - 4ac = 4 + 12 > 0$$

وقتی نمودار یک سهمی محور  $x$  ها را در هر دو طرف مبدأ قطع می‌کند،

معادله‌ی مربوطه دو ریشه دارد؛ یکی مثبت و دیگری منفی و این یعنی حاصل‌ضرب ریشه‌ها

باید منفی باشد:

$$P = \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{1-m}{m+2} < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت جدول}} \begin{array}{c|ccc} m & -\infty & -2 & 1 & +\infty \\ \hline P & - & + & - & + \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{می‌خواهیم } P < 0} \{m \mid m < -2 \text{ یا } m > 1\} = \text{مجموعه‌ی مقادیر مورد قبول}$$

رنگی:

$$m = 0 \xrightarrow{\text{در معادله}} 2x^2 + 3x + 1 = 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} x = -1, -\frac{1}{2}$$

حذف گزینه‌ی «۲»

$$m = 2 \xrightarrow{\text{در معادله}} 4x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow \frac{c}{a} = -\frac{1}{4} < 0$$

حذف گزینه‌ی «۳»

$$m = -3 \xrightarrow{\text{در معادله}} -x^2 + 3x + 4 = 0 \Rightarrow \frac{c}{a} = -4 < 0$$

حذف گزینه‌ی «۴»

۸۷. گزینه ۳ شرط این که سهمی بالای محور  $x$  ها و مماس بر آن قرار گیرد، این است که:

$$a > 0, \Delta = 0$$

$$a = m - 2 > 0 \Rightarrow m > 2$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4(m-2)(m+2) = 0 \Rightarrow 4 - 4m^2 + 16 = 0$$

$$\Rightarrow 4m^2 = 20 \Rightarrow m^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow m = \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$\Rightarrow m = \sqrt{\frac{5}{2}} \cap \sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

۸۸. گزینه ۱ عبارت درجه‌ی دوم  $ax^2 + bx + c$  یا شرط  $\Delta < 0$  و  $a > 0$  همواره مثبت و

یا شرط  $\Delta < 0$  و  $a < 0$  همواره منفی است.

$$A = x^2 + 3x + k$$

$$\begin{cases} a = 1 > 0 \quad \checkmark \\ \Delta = (3)^2 - 4(1)(k) < 0 \Rightarrow 9 - 4k < 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{همواره مثبت } (A > 0)} \begin{cases} +4k \Rightarrow 9 < 4k \Rightarrow k > \frac{9}{4} \quad \checkmark \end{cases}$$

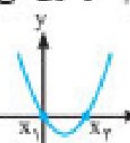
رنگی: همواره مثبت است، پس به ازای  $x = 0$  هم مثبت است:

$$0 + 0 + k > 0 \Rightarrow k > 0$$

فقط گزینه‌ی «۱» این شرط را دارد.

۸۹. گزینه ۲ معادله‌ی  $ax^2 - (a+2)x = 0$  دو ریشه به صورت  $x_1 = \frac{a+2}{a}$  و  $x_2 = 0$

دارد. حالا با تجسم نموداری می‌فهمیم برای این که سهمی بتواند وارد ناحیه‌ی سوم شود،



باید به شکل  $x$  باشد یعنی دهانه‌ی سهمی باید رو به بالا باشد ( $a > 0$ ) و

$$\text{همچنین } x_2 = \frac{a+2}{a} \text{ ریشه‌ی مثبت معادله باشد:}$$

$$x_2 = \frac{a+2}{a} > 0 \xrightarrow{\text{یا توجه به این که } a > 0} a+2 > 0 \Rightarrow a > -2$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} a > 0, a > -2 \Rightarrow a > 0$$



۵۰۲ • ریاضیات تجربی واقعاً جامع کنکور

$$S = xy \xrightarrow{*} S = x(15-x) = 15x - x^2$$

$$\Rightarrow \max(S) = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(15)^2 - 0}{4(-1)} = \frac{225}{4} = 56.25$$

زنگی

$$x + (15-x) = 15 = \text{ثابت} \xrightarrow{\text{ماکزیم}} x = 15-x \Rightarrow x = y = \frac{15}{2}$$

۹۴. (گزینه ۴) مستطیل یا سیم به طول ۲۰ ساخته شده پس محیط آن برابر ۲۰ است.

$$2r + 2t = 20 \xrightarrow{+2} r + t = 10 \quad *$$

$$\xrightarrow{\text{روبرحسب } t \text{ پیدا کن}} r = 10 - t$$

$$d = \sqrt{r^2 + t^2} \xrightarrow{\text{رادیكال ده بی خیال شوا}} \sqrt{r^2 + t^2}$$

باید مینیمم شود

$$\xrightarrow{\text{طبق } *} (10-t)^2 + t^2 \xrightarrow{\text{اتحاد}} 100 - 20t + t^2 + t^2$$

به معادله‌ی یک سهمی رسیدیم که برای مینیمم شدن کافی است طول رأس آن را حساب کنیم:

$$2t^2 - 20t + 100 \xrightarrow{\text{مینیمم شود}} t = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-20)}{2(2)} = 5$$

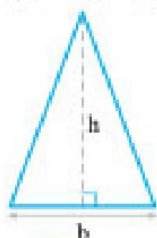
$$\xrightarrow{t=5} r = 5 \xrightarrow{\text{مساحت مستطیل}} 5 \times 5 = 25$$

زنگی: از آن جایی که  $r + t = 10$ ، پس مجموع دو عدد مثبت ثابت است.

می‌خواهیم حاصل ضرب آن‌ها مینیمم شود؛ بنابراین  $r = t = 5$  و مساحت مستطیل برابر است با:

$$rt = 5 \times 5 = 25$$

۹۵. (گزینه ۲) اگر مثلثی با ارتفاع  $h$  و قاعده‌ی  $b$  مطابق شکل زیر در نظر بگیریم، می‌توانیم بنویسیم:



$$b + h = 12 \Rightarrow b = 12 - h \quad *$$

$$S = \frac{1}{2}bh \quad \text{فرمول مساحت}$$

$$\xrightarrow{*} S = \frac{1}{2}(12-h)h = 6h - \frac{1}{2}h^2$$

$$\Rightarrow S = -\frac{1}{2}h^2 + 6h \xrightarrow{\text{برای ماکزیم شدن}} h = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2(-\frac{1}{2})} = 6$$

$$\Rightarrow S_{\max} = S(6) = -\frac{1}{2}(6)^2 + 6(6) = -18 + 36 = 18$$

زنگی: جمع دو عدد مثبت، مقدار ثابتی شده است:

$$b + h = 12 \xrightarrow{\text{ماکزیم شود}} b = h = 6 \Rightarrow S = \frac{1}{2}(6)(6) = 18$$

۹۶. (گزینه ۱) مساحت متوازی‌الاضلاع از حاصل ضرب ارتفاع در قاعده‌ی آن به دست می‌آید:

$$S = bh \xrightarrow{b+h=9} S = (9-h)h = -h^2 + 9h$$

$$\xrightarrow{\text{برای max شدن}} h = \frac{-b}{2a} = \frac{-9}{2(-1)} = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow S_{\max} = S(\frac{9}{2}) = -(\frac{9}{2})^2 + 9(\frac{9}{2}) = -\frac{81}{4} + \frac{81}{2} = \frac{81}{4}$$

$$= \frac{80+1}{4} = \frac{80}{4} + \frac{1}{4} = 20 + \frac{1}{4} = 20.25$$

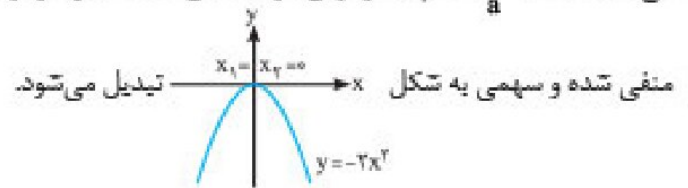
زنگی

$$\begin{cases} b + h = 9 \\ b = h \end{cases} \xrightarrow{\text{ماکزیم شود}} b = h = 4.5 \Rightarrow S = bh = 4.5 \times 4.5 = 20.25$$



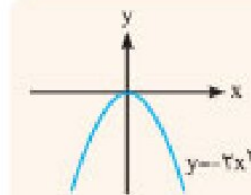
کمی اضافه‌تر: اگر می‌خواهید بدانید چرا حالت  $x = x_1 = x_2 = 0$  را که در آن نیز

سهمی وارد ناحیه‌ی سوم نشده است، در نظر نگرقتیم، باید بگوییم که این حالت برای سهمی به معادله‌ی  $y = ax^2 - (a+2)x$  غیرممکن است؛ زیرا این حالت زمانی رخ می‌دهد که  $x_2 = \frac{a+2}{a} = 0$  شود و آن نیز به معنای  $a = -2$  بوده و در این حالت ضریب  $x^2$



منفی شده و سهمی به شکل  $y = -2x^2$  تبدیل می‌شود.

زنگی: این جواری قرض کن:  $a = -2$



پس گزینه‌های «۱»، «۳» و «۴» حذف می‌شوند.

۹۰. (گزینه ۴) نقطه‌ی مشترک نداشتن بین سهمی و خط به معنای عدم وجود ریشه در معادله‌ی تلاقی آن دو است:

$$\begin{cases} y = (2x+1)(x+8) \\ y = mx \end{cases} \xrightarrow{\text{معادله‌ی تلاقی}} (2x+1)(x+8) = mx$$

$$\xrightarrow{\text{ساده و مرتب کن}} 2x^2 + 17x + 8 - mx = 0 \Rightarrow 2x^2 + (17-m)x + 8 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{حالا باید این معادله رو منفی کنیم}} \Delta = (17-m)^2 - 4(2)(8) < 0$$

$$\Rightarrow (17-m)^2 - 64 < 0 \xrightarrow{\text{حل نامعاده}} (17-m)^2 < 64$$

$$\xrightarrow{\text{جنر بگیر}} |17-m| < 8 \Rightarrow -8 < 17-m < 8$$

$$\xrightarrow{-17} -25 < -m < -9 \xrightarrow{\times(-1)} 9 < m < 25$$

زنگی

$$m = 8 \xrightarrow{\text{در معادله‌ی تلاقی}} 2x^2 + 9x + 8 = 0$$

حذف گزینه‌های «۱» و «۳»  $\Rightarrow$  ۲ ریشه دارد  $\Delta = 81 - 64 > 0$

$$m = 10 \xrightarrow{\text{در معادله‌ی تلاقی}} 2x^2 + 7x + 8 = 0$$

حذف گزینه‌ی «۲»  $\Rightarrow$  ریشه ندارد  $\Delta = 49 - 64 < 0$

۹۱. (گزینه ۴) اگر این دو عدد را  $x$  و  $y$  بنامیم، داریم:

$$x + y = 110 \Rightarrow y = 110 - x \quad *$$

$$P = xy \xrightarrow{*} P = x(110-x) = 110x - x^2$$

$$\xrightarrow{P, \text{ماکزیم است}} x = \frac{-b}{2a} = \frac{-110}{2(-1)} = 55$$

$$\xrightarrow{*} y = 110 - 55 = 55$$

بنابراین:

$$x^2 + y^2 = (55)^2 + (55)^2 = 6050$$

زنگی

$$x + (110-x) = 110 \xrightarrow{\text{ماکزیم}} x = 110-x \Rightarrow x = y = 55$$

۹۲. (گزینه ۲)

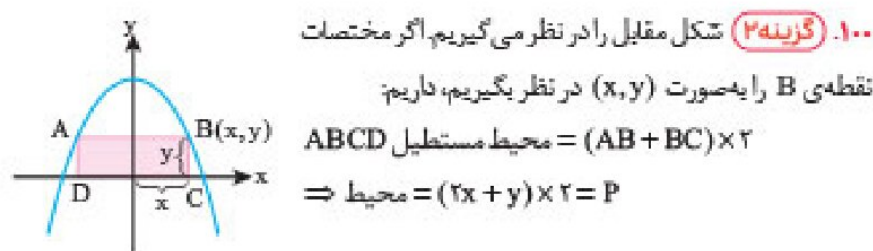
$$y_{\max} = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{(\frac{25}{4})^2 - 4 \times (-\frac{1}{4}) \times (2)}{4(-\frac{1}{4})} = \frac{\frac{25}{4} + 2}{2} = \frac{31}{8}$$

۹۳. (گزینه ۳) شکل فرضی مقابل را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{array}{|c|} \hline y \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{فرض سوال}} \text{محیط} = 2(x+y) = 30 \Rightarrow x+y=15$$

$$\Rightarrow y = 15 - x \quad *$$

۵۰۳ پاسخنامه ی تشریحی



۱۰۰. (گزینه ۲) شکل مقابل را در نظر می گیریم. اگر مختصات نقطه ی B را به صورت  $(x, y)$  در نظر بگیریم، داریم:

$$ABCD \text{ محیط مستطیل } = (AB + BC) \times 2$$

$$\Rightarrow \text{محیط} = (2x + y) \times 2 = P$$

چون نقطه ی B روی سهمی قرار دارد، پس بین  $x$  و  $y$  رابطه ی زیر برقرار است:

$$y = 12 - x^2 \xrightarrow{\text{در محیط}} P = 2(2x + 12 - x^2) = -2x^2 + 4x + 24$$

$$\Rightarrow \max(P) = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4^2 - 4(-2)(24)}{4(-2)} = \frac{4(12 + 24)}{4} = 26$$

## فصل ۴ معادله های گویا و رادیکالی

۱۰۱. (گزینه ۱)

$$\frac{3}{x} - \frac{2}{x-3} = \frac{12}{9-x^2} \xrightarrow{\text{همه رو به سمت چپ}} \frac{3}{x} - \frac{2}{x-3} + \frac{12}{x^2-9} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک بگیر}} \frac{3(x^2-9) - 2x(x-3) + 12x}{x(x-3)(x+3)} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} \frac{3x^2 - 27 - 2x^2 + 6x + 12x}{x(x-3)(x+3)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 6x - 27}{x(x-3)(x+3)} = 0 \xrightarrow{\text{صورت و ماسوی صفرگذار}} x^2 + 6x - 27 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه کن}} (x+9)(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+9=0 \Rightarrow x=-9 \xrightarrow{\text{چک کردن در مخرج}} \text{چک کردن نمی کند} \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \xrightarrow{\text{چک کردن در مخرج}} \text{چک کردن نمی کند} \end{cases}$$

بنابراین معادله ی مورد نظر فقط یک جواب دارد.

۱۰۲. (گزینه ۳) ابتدا مقدار  $a$  را می یابیم:

$$2-a = \frac{1}{a} \xrightarrow{\text{ضرب در } a} 2a - a^2 = 1 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow (a-1)^2 = 0 \Rightarrow a=1$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله ی دوم}} \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x+1} \Rightarrow \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x=1$$

۱۰۳. (گزینه ۲) ابتدا سمت چپ معادله را مخرج مشترک می گیریم:

$$\frac{x^2 - \Delta x - 2(x^2 - 4)}{x^2 - 4} = \frac{x+3}{2-x} \Rightarrow \frac{-2x^2 - \Delta x + 12}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+3}{-(x-2)}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2x^2 + \Delta x - 12 = x^2 + \Delta x + 6 \Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x = \pm\sqrt{18}$$

۱۰۴. (گزینه ۳)

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{m} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک در سمت چپ}} \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{m}$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} \frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{m} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} x^2+x=m$$

$$\xrightarrow{\text{همه رو به یک طرف}} x^2+x-m=0 \xrightarrow{\text{شرط وجود جواب } \Delta \geq 0} 1-4(1)(-m) \geq 0$$

$$\Rightarrow 1+4m \geq 0 \Rightarrow 4m \geq -1 \xrightarrow{+4} m \geq -\frac{1}{4}$$

از آن جایی که  $m$  در مخرج است و نمی تواند صفر باشد، جواب تست به صورت  $\{0\} - (-\frac{1}{4}, +\infty)$  است.

حذف گزینه ی «۴»  $\Rightarrow$  تعریف نشده  $\Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{0}$  در معادله

$$m = -\frac{1}{4} \xrightarrow{\text{در معادله}} \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = -\frac{1}{4} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{1}{x(x+1)} = -\frac{1}{4}$$

حذف گزینه های «۱» و «۲»  $\Rightarrow$  جواب دارد  $\Rightarrow \frac{\Delta=1-1=0}{4}$

۹۷. (گزینه ۴) طول طناب به کار رفته برای محصور کردن این سطح برابر است با:

$$y + x + x + \text{محیط نیم دایره} = 70 \Rightarrow y + 2x + \frac{2\pi x}{2} = 70$$

$$\xrightarrow{\pi=3} y + 2x + 3x = 70 \Rightarrow y + 5x = 70 \Rightarrow y = 70 - 5x$$

از طرفی مساحت ایجاد شده برابر است با:

$S = \underbrace{xy}_{\text{برای مستطیل}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\pi x^2)}_{\text{برای نیم دایره}} \xrightarrow{(\pi=3)} S = xy + \frac{3}{2}x^2$

$$\xrightarrow{*} S = x(70 - 5x) + \frac{3}{2}x^2 = 70x - 5x^2 + \frac{3}{2}x^2 = -\frac{7}{2}x^2 + 70x$$

حالا برای این که به بیشترین مقدار ممکن برای تابع مساحت یا ضابطه ی درجه ی دو برسیم، باید مقدار  $x$  را برابر  $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-70}{2(-\frac{7}{2})} = 10 \text{ m}$

$$S = -\frac{7}{2}x^2 + 70x \Rightarrow x = \frac{-70}{2(-\frac{7}{2})} = 10 \text{ m}$$

$$\Rightarrow S = -\frac{7}{2}(10^2) + 70(10) = 250 \text{ m}^2$$

۹۸. (گزینه ۳) اگر مختصات نقطه ی A را به صورت  $A(x, y)$  در نظر بگیریم، داریم:

$$\begin{cases} AB = y \\ BC = x \end{cases} \Rightarrow S = AB \times BC = xy$$

حالا معادله ی خط  $d$  را می نویسیم:

$$\begin{cases} (4, 0) \\ (0, 3) \end{cases} \Rightarrow m = \frac{3-0}{0-4} = -\frac{3}{4} \xrightarrow{\text{معادله ی خط}} y-0 = -\frac{3}{4}(x-4)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + 3 \xrightarrow{\text{در}} S = x(-\frac{3}{4}x + 3) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x$$

$$\max(S) = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{9-0}{4(-\frac{3}{4})} = 3$$

زنگی!  $\frac{3}{4}x + (-\frac{3}{4}x + 3) = 3 = \text{ثابت} \xrightarrow{\text{ضربش با کمترینم شود}} \frac{3}{4}x = -\frac{3}{4}x + 3 \Rightarrow x=2$

۹۹. (گزینه ۲) در حقیقت در این سؤال می خواهیم کوتاه ترین فاصله ی بین منحنی  $y = x^2$  و خط  $y = 2x - 3$  را پیدا کنیم. برای این منظور فرض می کنیم شخص A روی منحنی  $y = x^2$  در نقطه ی  $A(\alpha, \alpha^2)$  قرار دارد که کوتاه ترین فاصله ی ممکن را تا خط  $2x - y - 3 = 0$  داشته باشد؛ پس کافی است فاصله ی نقطه ی A را تا خط پیدا کنیم:

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2\alpha - \alpha^2 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|\alpha^2 - 2\alpha + 3|}{\sqrt{5}}$$

دلای عبارت  $\alpha^2 - 2\alpha + 3$  منفی است، پس این عبارت همواره مثبت است و داریم:

$$D = \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 3}{\sqrt{5}} = \frac{(\alpha-1)^2 + 2}{\sqrt{5}}$$

برای این که  $D$  کمترین مقدار خودش را داشته باشد، باید صورت کسر کمترین مقدار خود را اختیار کند، زیرا مخرج عددی ثابت است، پس:

$$(\alpha-1)^2 \geq 0 \xrightarrow{+2} (\alpha-1)^2 + 2 \geq 2$$

یعنی کمترین مقدار صورت برابر ۲ است و در نتیجه داریم:

$$\min(D) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

زنگی!  $D = \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 3}{\sqrt{5}} \xrightarrow{\text{مینیمم صورت}} \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-4-12}{4} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

# فهرست

|     |                                              |         |
|-----|----------------------------------------------|---------|
| ۸۹  | فصل ۷: توابع نمایی و لگاریتمی                |         |
| ۹۰  | ایستگاه ۱: تابع نمایی و ویژگی های آن         |         |
| ۹۵  | ایستگاه ۲: معادله ها و نامعادله های نمایی    |         |
| ۹۷  | ایستگاه ۳: تابع لگاریتمی و ویژگی های آن      |         |
| ۱۰۱ | ایستگاه ۴: قوانین و ویژگی های لگاریتم        |         |
| ۱۰۵ | ایستگاه ۵: معادله ها و نامعادله های لگاریتمی |         |
| ۵۱۰ | پاسخ نامه ی تشریحی                           | ریاضی ۲ |

|     |                                              |                    |
|-----|----------------------------------------------|--------------------|
| ۱۱۱ | فصل ۸: تابع دهم و یازدهم                     |                    |
| ۱۱۲ | ایستگاه ۱: مفهوم تابع و بازنمایی های آن      |                    |
| ۱۱۷ | ایستگاه ۲: آشنایی با برخی از انواع توابع     |                    |
| ۱۱۹ | ایستگاه ۳: دامنه و برد توابع - تساوی دو تابع |                    |
| ۱۲۶ | ایستگاه ۴: تابع یک به یک                     |                    |
| ۱۲۹ | ایستگاه ۵: اعمال جبری روی توابع              |                    |
| ۵۱۵ | پاسخ نامه ی تشریحی                           | ریاضی ۱<br>ریاضی ۲ |

|     |                                |                    |
|-----|--------------------------------|--------------------|
| ۱۳۵ | فصل ۹: تابع دوازدهم            |                    |
| ۱۳۶ | ایستگاه ۱: انتقال نمودارها     |                    |
| ۱۴۱ | ایستگاه ۲: توابع چندجمله ای    |                    |
| ۱۴۵ | ایستگاه ۳: توابع صعودی و نزولی |                    |
| ۱۵۱ | ایستگاه ۴: ترکیب توابع         |                    |
| ۱۶۰ | ایستگاه ۵: تابع وارون          |                    |
| ۵۳۱ | پاسخ نامه ی تشریحی             | ریاضی ۲<br>ریاضی ۳ |

|     |                                              |                    |
|-----|----------------------------------------------|--------------------|
| ۱۷۵ | فصل ۱۰: مثلثات دهم و یازدهم                  |                    |
| ۱۷۶ | ایستگاه ۱: مثلثات در لباس هندسه              |                    |
| ۱۷۹ | ایستگاه ۲: دایره ی مثلثاتی                   |                    |
| ۱۸۴ | ایستگاه ۳: روابط بین نسبت های مثلثاتی        |                    |
| ۱۸۸ | ایستگاه ۴: واحدهای اندازه گیری زاویه         |                    |
| ۱۹۰ | ایستگاه ۵: روابط تکمیلی بین نسبت های مثلثاتی |                    |
| ۵۲۸ | پاسخ نامه ی تشریحی                           | ریاضی ۱<br>ریاضی ۲ |

|     |                                |                    |
|-----|--------------------------------|--------------------|
| ۱۹۷ | فصل ۱۱: مثلثات دوازدهم         |                    |
| ۱۹۸ | ایستگاه ۱: نسبت های مثلثاتی ۲۵ |                    |
| ۲۰۳ | ایستگاه ۲: تابع های متناوب     |                    |
| ۲۰۷ | ایستگاه ۳: توابع مثلثاتی       |                    |
| ۲۱۴ | ایستگاه ۴: معادله های مثلثاتی  |                    |
| ۵۳۳ | پاسخ نامه ی تشریحی             | ریاضی ۲<br>ریاضی ۳ |

|   |                               |  |
|---|-------------------------------|--|
| ۷ | فصل صفر: مروری بر مفاهیم پایه |  |
|---|-------------------------------|--|

|     |                                       |         |
|-----|---------------------------------------|---------|
| ۱۳  | فصل ۱: تعیین علامت و نامعادله         |         |
| ۱۴  | ایستگاه ۱: تعیین علامت عبارت های جبری |         |
| ۱۷  | ایستگاه ۲: روش های حل نامعادله ها     |         |
| ۴۹۲ | پاسخ نامه ی تشریحی                    | ریاضی ۱ |

|     |                                                        |                    |
|-----|--------------------------------------------------------|--------------------|
| ۲۳  | فصل ۲: معادله ی درجه ی دوم                             |                    |
| ۲۴  | ایستگاه ۱: روش های حل معادله ی درجه ی دوم              |                    |
| ۲۸  | ایستگاه ۲: روابط بین ریشه های معادله ی درجه ی دوم      |                    |
| ۳۱  | ایستگاه ۳: تعداد و علامت ریشه های معادله ی درجه ی دوم  |                    |
| ۳۳  | ایستگاه ۴: تشکیل معادله ی درجه ی دوم                   |                    |
| ۳۵  | ایستگاه ۵: مسائلی که به حل معادله ی درجه ی دوم می رسند |                    |
| ۴۹۴ | پاسخ نامه ی تشریحی                                     | ریاضی ۱<br>ریاضی ۲ |

|     |                                                   |                    |
|-----|---------------------------------------------------|--------------------|
| ۳۹  | فصل ۳: تابع درجه ی دوم (سه می)                    |                    |
| ۴۰  | ایستگاه ۱: سه می و ویژگی های آن                   |                    |
| ۴۱  | ایستگاه ۲: نوشتن معادله ی سه می و نمودار آن       |                    |
| ۴۷  | ایستگاه ۳: کاربرد سه می در مسائل ماکزیمم و مینیمم |                    |
| ۴۹۹ | پاسخ نامه ی تشریحی                                | ریاضی ۱<br>ریاضی ۲ |

|     |                                   |         |
|-----|-----------------------------------|---------|
| ۵۱  | فصل ۴: معادله های گویا و رادیکالی |         |
| ۵۲  | ایستگاه ۱: معادله های گویا        |         |
| ۵۶  | ایستگاه ۲: معادله های رادیکالی    |         |
| ۵۰۳ | پاسخ نامه ی تشریحی                | ریاضی ۲ |

|     |                                       |         |
|-----|---------------------------------------|---------|
| ۶۱  | فصل ۵: توان های گویا و عبارت های جبری |         |
| ۶۲  | ایستگاه ۱: ریشه، توان و توان های گویا |         |
| ۶۸  | ایستگاه ۲: عبارت های جبری             |         |
| ۵۰۵ | پاسخ نامه ی تشریحی                    | ریاضی ۱ |

|     |                                    |                    |
|-----|------------------------------------|--------------------|
| ۷۵  | فصل ۶: قدر مطلق و جزء صحیح         |                    |
| ۷۶  | ایستگاه ۱: قدر مطلق و ویژگی های آن |                    |
| ۸۳  | ایستگاه ۲: جزء صحیح و ویژگی های آن |                    |
| ۵۰۸ | پاسخ نامه ی تشریحی                 | ریاضی ۱<br>ریاضی ۲ |

|                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                         |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>فصل ۱۷: هندسه دوازدهم</b><br>۳۷۳<br>ایستگاه ۱: تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی ۳۷۴<br>ایستگاه ۲: بیضی و ویژگی‌های آن ۳۸۴<br>ایستگاه ۳: دایره و ویژگی‌های آن ۳۹۳<br>پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ۵۶۹                                                                              | <br><b>ریاضی ۳</b>                                       | <b>فصل ۱۲: حد و پیوستگی</b><br>۲۲۵<br>ایستگاه ۱: بخش‌پذیری ۲۲۶<br>ایستگاه ۲: فرایندهای حدی ۲۲۸<br>ایستگاه ۳: محاسبه‌ی حد توابع ۲۳۳<br>ایستگاه ۴: رفع ابهام صفرصفرم ۲۳۸<br>ایستگاه ۵: پیوستگی ۲۴۴<br>ایستگاه ۶: حد بی‌نهایت ۲۵۲<br>ایستگاه ۷: حد در بی‌نهایت ۲۵۷<br>پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ۵۳۸                                                                                                                                                                                                         | <br><b>ریاضی ۲</b><br><b>ریاضی ۳</b> |
| <b>فصل ۱۸: مجموعه</b><br>۴۱۳<br>ایستگاه ۱: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی ۴۱۴<br>ایستگاه ۲: متمم یک مجموعه ۴۱۷<br>ایستگاه ۳: تعداد اعضای یک مجموعه ۴۱۹<br>پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ۵۷۲                                                                                                | <br><b>ریاضی ۱</b>                                       | <b>فصل ۱۳: مشتق</b><br>۲۶۷<br>ایستگاه ۱: آشنایی با مفهوم مشتق ۲۶۸<br>ایستگاه ۲: تابع مشتق و فرمول‌های مشتق‌گیری ۲۷۲<br>ایستگاه ۳: مشتق تابع مرکب ۲۷۸<br>ایستگاه ۴: قاعده‌ی هوییتال ۲۸۰<br>ایستگاه ۵: معادله‌ی مماس ۲۸۲<br>ایستگاه ۶: مشتق‌پذیری و ارتباط آن با پیوستگی ۲۸۴<br>ایستگاه ۷: مشتق توابع بدرفتار! ۵! شگفت‌انگیز... ۲۸۸<br>ایستگاه ۸: مشتق‌پذیری روی بازه و $\mathbb{R}$ ۲۹۵<br>ایستگاه ۹: رابطه‌ی بین نمودارهای $f$ و $f'$ ۲۹۷<br>ایستگاه ۱۰: آهنگ تغییر ۳۰۱<br>پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ۵۴۶ | <br><b>ریاضی ۳</b>                 |
| <b>فصل ۱۹: الگو و دنباله</b><br>۴۲۳<br>ایستگاه ۱: الگو و مفهوم دنباله ۴۲۴<br>ایستگاه ۲: دنباله‌ی حسابی و ویژگی‌های آن ۴۲۸<br>ایستگاه ۳: دنباله‌ی هندسی و ویژگی‌های آن ۴۳۲<br>پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ۵۷۴                                                                           | <br><b>ریاضی ۱</b>                                     | <b>فصل ۱۴: کاربردهای مشتق</b><br>۳۰۹<br>ایستگاه ۱: توابع یکتا و اکیدا یکتا ۳۱۰<br>ایستگاه ۲: نقطه‌ی بحرانی ۳۱۳<br>ایستگاه ۳: اکسترمم‌های نسبی ۳۱۶<br>ایستگاه ۴: اکسترمم‌های مطلق ۳۲۳<br>ایستگاه ۵: بهینه‌سازی ۳۲۷<br>پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ۵۵۵                                                                                                                                                                                                                                                       | <br><b>ریاضی ۳</b>                 |
| <b>فصل ۲۰: شمارش، بدون شمردن</b><br>۴۳۹<br>ایستگاه ۱: اصل ضرب و اصل جمع ۴۴۰<br>ایستگاه ۲: جایگشت ۴۴۳<br>ایستگاه ۳: ترکیب ۴۴۶<br>پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ۵۷۸                                                                                                                        | <br><b>ریاضی ۱</b>                                     | <b>فصل ۱۵: هندسه یازدهم</b><br>۳۳۳<br>ایستگاه ۱: ترسیم‌های هندسی و استدلال ۳۳۴<br>ایستگاه ۲: نسبت، تناسب و قضیه‌ی تالس ۳۳۹<br>ایستگاه ۳: تشابه ۳۴۴<br>پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ۵۶۲                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | <br><b>ریاضی ۲</b>                 |
| <b>فصل ۲۱: احتمال</b><br>۴۵۱<br>ایستگاه ۱: مفاهیم اولیه‌ی احتمال ۴۵۲<br>ایستگاه ۲: احتمال با اندازه‌گیری شانس ۴۵۴<br>ایستگاه ۳: قوانین احتمال ۴۵۸<br>ایستگاه ۴: احتمال شرطی ۴۶۰<br>ایستگاه ۵: پیشامدهای مستقل ۴۶۳<br>ایستگاه ۶: قانون احتمال کل ۴۶۷<br>پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ۵۸۰ | <br><b>ریاضی ۱</b><br><b>ریاضی ۲</b><br><b>ریاضی ۳</b> | <b>فصل ۱۶: هندسه تحلیلی</b><br>۳۵۷<br>ایستگاه ۱: دستگاه مختصات و ویژگی‌های آن ۳۵۸<br>ایستگاه ۲: معادله‌ی خط و وضعیت دو خط با هم ۳۶۲<br>ایستگاه ۳: فاصله‌ی نقطه از خط ۳۶۸<br>پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ۵۶۵                                                                                                                                                                                                                                                                                                | <br><b>ریاضی ۲</b>                 |
| <b>فصل ۲۲: آمار</b><br>۴۷۷<br>ایستگاه ۱: مقدمه‌ای بر علم آمار ۴۷۸<br>ایستگاه ۲: آمار توصیفی ۴۸۰<br>پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ۵۸۶                                                                                                                                                     | <br><b>ریاضی ۱</b><br><b>ریاضی ۲</b>                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                         |
| <b>آزمون جامع</b><br>۴۸۹<br>پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ۵۸۷                                                                                                                                                                                                                            | <br><b>ریاضی ۱</b><br><b>ریاضی ۲</b><br><b>ریاضی ۳</b> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                         |